Задача 1169. Сначала решим её в предположении, что A обратим. Собств. значения — это корни характ. многочлена. Но $\det(AB-\lambda E)=\det(A(B-\lambda A^{-1}))=$
$=\det A\cdot\det(B-\lambda A^{-1})$; $\det(BA-\lambda E)=\det((B-\lambda A^{-1})A)=\ldots$
— характеристические многочлены совпадают.
Пусть теперь A — необратимый, т.е. 0 — его собств. значение (= корень характ. многочлена).
Пусть $A_\varepsilon=A-\varepsilon\cdot E$. Тогда при малых ε, A_ε обратим. Осталось заметить, что коэффициенты характеристического многочлена $\det(A_\varepsilon B-\lambda E)=$
$=\det(BA_\varepsilon-\lambda E)$ непрерывно зависят от ε.
Переходя к пределу, получаем $\det(AB-\lambda E)=\det(BA-\lambda E)$.

Задача 1171. $\mathcal{A}(x)=\lambda\cdot x$; тогда $f(\mathcal{A})=a_0\cdot id+a_1\mathcal{A}+\ldots+a_n\mathcal{A}^n$;
$f(\mathcal{A})(x)=a_0\cdot x+a_1\mathcal{A}(x)+\ldots+a_n\mathcal{A}^n(x)=a_0\cdot x+a_1\cdot\lambda x+\ldots$
$+a_n\cdot\lambda^n\cdot x=(a_0+a_1\lambda+\ldots+a_n\lambda^n)\cancel{x}=f(\lambda)\cdot x$.

Матрицу оператора можно привести к диагональному виду $\Leftrightarrow\exists$ базис, ~~составленный~~ состоящий из собственных векторов.
Пример: $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ не приводится к диаг. виду, т.к. единственное собств. значение $=0$, и все собств. вектора (= решения системы $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$) пропорциональны вектору $(1,0)$, и базиса плоскости из них не наберешь.

Задача 1177(1).

$$\begin{vmatrix}6-\lambda&-5&-3\\3&-2-\lambda&-2\\2&-2&-\lambda\end{vmatrix}\overset{\text{1-я строка}-(\text{2-я}+\text{3-я})}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda&-1+\lambda&-1+\lambda\\3&-2-\lambda&-2\\2&-2&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\3&-2-\lambda&-2\\2&-2&-\lambda\end{vmatrix}=$$

2-я строка $-$ (1-я + 3-я)

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1+\lambda \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \text{разл по 1-му столбцу}$$

$$= (1-\lambda)^2\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = (1-\lambda)^2(-\lambda-2+2\cdot 2) = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

С. вект. для $\lambda_1=2$: $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ - реш. $(2,1,1)$ с точн. до пропорц.

С. вект. для $\lambda_2=1$: $\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ - реш. $(1,1,0)$ с точн. до пропорц.

(видно, что ранг матрицы $= 2 \Rightarrow$ реш. одно, с точн. до пропорц.)

Таким образом, видно, что базис трехмерного пространства из собственных векторов не набирается.

Матрицы A и B назыв. подобными, если существует невырожденная матрица C, для которой $B = C^{-1}AC$. Т.е. матрицы подобны, если являются матрицами одного и того же оператора в разных базисах.

Задача 1179. Обозначим $\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ через D. Оператор с матрицей D устроен так: базисные вектора e_1, e_2, e_3 и e_4 он переводит в $0, e_1, e_2$ и e_3 соответственно. В частности, у D есть ровно один собств. вектор - e_1 (с точностью до пропорц.), а характ. многочлен для D равен t^4. Характерист. многочлены подобных матриц равны, так что если бы у A или B были бы характ. многочлен, отличные от t^4, мы бы сразу сказали, что они не подобны D. Но нам не повезло - они все равны t^4 (проверьте!)

Ранги подобных матриц тоже равны, поэтому можно заметить, что $\mathrm{rk}\, B = 2 \neq \mathrm{rk}\, D$, и B и D не подобны. Для A это не проходит. Придётся искать $\underbrace{\text{векторы}}_{}$ линейно независимые, векторы e_1, e_2, e_3, e_4 с условиями $A(e_1)=0$, $A(e_2)=e_1$, $A(e_3)=e_2$, $A(e_4)=e_3$. $(*)$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \text{ - реш. } e_1 = (1,1,1,1).$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

достаточно найти частное реш., например $e_2 = (1/2, 1/2, 0, 0)$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

частное реш. $e_3 = (1/4, 0, 0, -1/4)$.

Последний шаг – частное реш. $e_4 = \frac{1}{16}(1, -1, 0, 0)$

Требуемые вектора (условие $(*)$) найдены. Осталось проверить, что они образуют базис, т.е. линейно независимы. Это легко. На каждом шаге частное решение выбиралось произвольно, т.е. таких e_1, e_2, e_3, e_4 с условием $(*)$ много. Кстати, заодно мы нашли матрицу перехода C, т.к. e_1, e_2, e_3, e_4 – новый базис.

Д/З 1177 (2, 3); 1178, 1181.