Кососимметрич. операторы.

В <u>ортонормированных</u> базисах матрица кососимм. оператора удовлетворяет равенству $A^T=-A$, в частности, на диагонали $a_{ii}=-a_{ii}$, т.е. 0, поэтому надеяться на то, что кососимм. операторы приводятся к диаг. виду, нельзя. Их канонический вид — блочно-диагональный, с нулевыми одномерными блоками и с двумерными блоками вида $\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}$.

Задача 1468. Кососимметричность $\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ — левая матрица — гомотетия, правая — поворот на $\pi/2$.

Задача 1469. Выберем ортонорм. базис так, чтобы $\vec a=|\vec a|\cdot\vec e_1$ (а $\vec e_2$ и $\vec e_3$ — произвольно в плоскости, перпендик. $\vec a$). Тогда $\varphi_a(\vec e_1)=0$; $\varphi_a(\vec e_2)=|\vec a|\cdot\vec e_3$; $\varphi_a(\vec e_3)=-|\vec a|\vec e_2$, матрица φ_a имеет вид $\left(\begin{array}{c|cc}0&0&0\\0&0&-|\vec a|\\0&|\vec a|&0\end{array}\right)$ — канонический для кососимм. оператора.

Задача 1470. (случай поля $\mathbb{R}$). Нужно проверить равенство $(L_C(X),Y)=-(X,L_C(Y))$ для любых матриц X, Y, т.е.
$tr((CX)^TY)\overset{?}{=}-tr(X^TCY)$. Но $(CX)^TY=X^TC^TY=$
$=-X^TCY$ т.к. $C^T=-C$.

При приведении к канонич. виду мы часто ищем собств. вектора, которых, обычно, достаточное количество для базиса. Если посмотреть на блочно-диаг. вид, станет ясно, что у кососимм. операторов мало собственных векторов, если оставаться в случае поля $\mathbb{R}$, а корни характ. многочлена обычно комплексные (причём чисто мнимые). Поступают так: из каждой пары комплексно-сопряжённых корней $\lambda = \alpha + i\beta$; $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, выбирают один, для него находят комплексный собств. вектор z, $Az = \lambda z$, и из этого комплексного вектора z получают два вещественных, $z = x + iy$. Эти x и y оказываются автоматически взаимно ортогон., и их длины равны. Деля на эти длины, получаем два базисных вектора, $e_1 = \frac{x}{|x|}$, $e_2 = \frac{y}{|y|}$. Так как $Az = \lambda z$, $\lambda = i\beta$, то $A(e_1 + ie_2) = i\beta(e_1 + ie_2)$ распадается на веществ. и мнимую части: $Ae_1 = -\beta e_2$; $Ae_2 = \beta e_1$, и часть матрицы A, соответствующая e_1 и e_2, имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 1483(1). $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4 - 4 - \lambda - 4\lambda - 4\lambda = -\lambda^3 - 9\lambda.$

Корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3i$, $\lambda_3=-3i$. Для $\lambda=0$ всё как обычно: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$ $x=(2,1,-2)$,

$e_1=\frac{1}{3}(2,1,-2)$. Из пары $\pm 3i$ выбираем один, скажем, $3i$, и решаем систему

$\begin{pmatrix} -3i & 2 & 1 \\ -2 & -3i & -2 \\ -1 & 2 & -3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=0$. Т.к. матрица вырождена, можно оставить 2 строки.

$$\begin{cases} +2z_1+3iz_2+2z_3=0 \\ -z_1+2z_2-3iz_3=0 \quad \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1+3iz_2+2z_3=0 \\ (4+3i)z_2+(2-6i)z_3=0 \end{cases}$$

$z_2=6i-2$; $z_3=4+3i$ - решение второго ур-ния, а из 1-го найдём $z_1=-\frac{1}{2}(3iz_2+2z_3)=$
$=-\frac{1}{2}(3i(6i-2)+2(4+3i))=-\frac{1}{2}(-18-6i+8+6i)=5$.

$z=(5,\ 6i-2,\ 4+3i)=x+iy \Rightarrow x=(5,-2,4)$,
$y=(0,6,3)$

(удостоверяемся, что $|x|=|y|$ и $x\perp y$). $e_2=\frac{1}{3\sqrt5}(5,-2,4)$, $e_3=\frac{1}{3\sqrt5}(0,6,3)$. Остаётся выписать матрицу оператора в этом базисе. $Ae_1=0$ (для $\lambda=0$);

$A(e_2+ie_3)=3i(e_2+ie_3) \Rightarrow Ae_2=-3e_3$, $Ae_3=3e_2 \Rightarrow$

$A=\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$.

В малых размерностях можно обойтись без комплексификации. В размерности 2 любой ортонормир базис - канонический (см. задачу 1468). В размерности 3 один из корней обязан быть вещественным, он даёт первый базисный вектор e_1. В задаче 1483(1) это $e_1 = \frac{1}{3}(2,1,-2)$. Остальные два вектора выбираем произвольно в перпендик. плоскости, например, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $e_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-4,-1)$. Канонический вид матрицы оператора будет $\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{array}\right)$, но число "a" мы пока не знаем. Можно увидеть, что $Ae_2 = -ae_3$, т.е. $(Ae_2, e_3) = -a$. Но значение (Ae_2, e_3) не зависит от того, в каком базисе его вычислять. В каноническом оно равно $-a$. А в исходном: $Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = 3e_3$

$(Ae_2, e_3) = (3e_3, e_3) = 3$, т.о. $-a = 3$, $a = -3$.

Д/З 1475, 1477, 1483(2,3), 1484 (кроме комплексификации)