В прошлый раз я неправильно написал матрицу в задаче 1099(1) – спасибо Ивану Акимову за бдительность! Правильная матрица
$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&3&0&0\\ 0&0&0&0&4&0\\ 0&0&0&0&0&5\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Если λ – с. знач. оператора A, то, кроме собств. векторов (решений $(A-\lambda E)x=0$) можно находить решения систем $(A-\lambda E)^2x=0$, $(A-\lambda E)^3x=0$ и т.д. Эти решения назыв. корневыми векторами 2-го, 3-го и т.д. порядка, а собств. вектора – корневые 1-го порядка. Обозначим множества решений $(A-\lambda E)^k x=0$ через V_λ^k. Тогда $V_\lambda^{k-1}\subset V_\lambda^k$ (проверьте!) Они могут не совпадать, но так как пространство конечномерно, рано или поздно V_λ^k перестанут увеличиваться, т.е. $\exists\, p$ такое, что $V_\lambda^p=V_\lambda^{p+1}=\dots$ (наступает стабилизация по k). Это $V_\lambda=V_\lambda^p$ назыв. корневым подпространством.

Задача 1189(1) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 & -15\\ 1 & 1-\lambda & -5\\ 1 & 2 & -6-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3+3\lambda & 0\\ 1 & 1-\lambda & -5\\ 1 & 2 & -6-\lambda\end{vmatrix} =$

$= (1+\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0\\ 1 & 1-\lambda & -5\\ 1 & 2 & -6-\lambda\end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0\\ 0 & 4-\lambda & -5\\ 0 & 5 & -6-\lambda\end{vmatrix} = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5\\ 5 & -6-\lambda\end{vmatrix} =$

$= -(1+\lambda)(-24+2\lambda+\lambda^2+25) = -(1+\lambda)^3.$

~~Найдем~~ Найдём ранг $A-\lambda E$: $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -15\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & 2 & -5\end{pmatrix} = 1.$ $\Rightarrow$

$\dim V_\lambda^1 = 3-1=2$; Найдём ранг $(A-\lambda E)^2$: $A-\lambda E = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\dim V_\lambda^2 = 3-0=3$. Больше эта размерность не станет

Значит, стабилизировалась при $p=2$. Корневое подпр-во, отвечающее $\lambda=-1$, есть всё пространство.
По теореме о корневом разложении, если $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ — собств. знач. оператора A, то $V=V_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus V_{\lambda_k}$. Если объединить базисы каждого корневого пространства V_{λ_i} в базис всего V, то матрица A получится блочно-диагональной. Каждый блок — матрица ограничения A на V_{λ_i}.
Ограничение A на V_{λ_i} обладает интересным свойством: у него — единственное собств. значение λ_i. Т.е. у оператора $B=A-\lambda_i E$ — единственное с. значение, равное 0. Если поле — алгебраически замкнуто, то характ. многочлен равен $(-\lambda)^n$. Т.е. $B^n=0$. Такие операторы (которые в некоторой степени равны 0) называются нильпотентными. Для нильпотентного оператора $\exists$ базис, в котором его матрица имеет вид
$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & 0 \\ & 0 & \alpha_2 & \\ & & 0 & \ddots \\ 0 & & & \ddots\ \alpha_{n-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$
где α_i — либо 0, либо 1.

Это назыв. жордановой формой нильпот. оператора.

Задача 1199(1).
$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1+\lambda & 0 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (1+\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -(1+\lambda)^2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^3.$$
$\lambda=-1$

$$B=A-\lambda E=A+E=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
— нильпотентный.

Для B ищем корневые подпространства.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = 0$: решения — двумерное подпространство.

Этого мало — базис всего пространства (трехмерного) из него не набрать. Смотрим на $B^2 x = 0$

$B^2 = 0$, поэтому любой вектор — корневой. Находим почти любой вектор — решение $B^2 x = 0$, но так, чтобы он не был решением $Bx = 0$. например $(1,0,0) = a$. Тогда $Ba = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = b$.

Вектор b является решением $Bx = 0$: $Bb = B^2 a$.

Пространство решений $Bx = 0$ двумерно, и один вектор там мы уже выбрали. Выберем ещё один — c — так, чтобы b и c были базисом. например $c = (0,1,0)$. теперь $Ba = b$, $Bb = 0$, $Bc = 0$. Пусть $e_1 = c$, $e_2 = b$, $e_3 = a$.

Тогда $Be_1 = Be_2 = 0$, $Be_3 = e_2$, значит, в этом базисе $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Д/з. 1189(2), 1190; 1199(2)