Ортогональные операторы.

A ортогональный, если он сохраняет длины (т.е. $|Ax| = |x| \ \forall x \in V$). В <u>ортонормированном</u> базисе его матрица удовл. $A^T A = E$. В частности, $\det A = \pm 1$ (но $\det A = 1$ ещё не означает ортогональность: $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = 1$, но эта матрица не ортогональная).

Ортогональные операторы сохраняют длины и, как все операторы, сохраняют начало коорд., и в размерностях 2 и 3 нам известна полная классификация: на плоскости — поворот или симметрия, в пространстве — симметрия относительно плоскости или поворот вокруг прямой (или их композиция). В подходящей системе координат это $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

В произвольной размерности канонический вид — блочно-диаг., с блоками видов (± 1) и $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Вопрос: какой канонич. вид оператора с матрицей $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$? Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Если x — собств. вектор ортогонального опер. A, то $Ax = \lambda x$, и из сохранения длин следует, что $\lambda = \pm 1$. Например, в размерности 3 всегда существует хотя бы один вещественный корень, и это автоматически 1 или -1.

Наличие комплексных корней — необходимое зло, с которым борются так же, как и в случае кососимметрических операторов, только немного сложнее, т.к. там чисто мнимые числа, а здесь — есть и вещественная и мнимая часть.

Задача 1516(2). $|\frac{1}{3}A-\lambda E|$ имеет такие же корни, как $|A-3\lambda E|$.

$$\begin{vmatrix} 2-3\lambda & -1 & 2 \\ 2 & 2-3\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-3\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-3\lambda & -1 & 2 \\ 2 & 2-3\lambda & -1 \\ 3-3\lambda & 3-3\lambda & 3-3\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 3(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-3\lambda & -1 & 2 \\ 2 & 2-3\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2-3\lambda & -1 & 2 \\ 2 & 2-3\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-3\lambda)^2+1+4-$$

$$-(2-3\lambda)\cdot 2+2+(2-3\lambda) = (2-3\lambda)^2-(2-3\lambda)+7=0, \quad 2-3\lambda = \frac{1\pm 3\sqrt{3}i}{2},$$

$\lambda = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$. Итак, один веществ. корень $\lambda=1$ и два комплексно сопряжённых. Уже сейчас можно понять, что канонический вид — $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right)$.

Можно даже найти угол φ: след матрицы оператора не меняется при заменах базиса, поэтому след исходной матрицы ($=2$) равен следу канонической ($=1+2\cos\varphi$), откуда $\cos\varphi=\frac{1}{2}$. Для $\sin\varphi$ остаются два варианта $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, но для канонического вида это не важно, т.к. мы не указываем конкретный канонический базис, а замена e_2, e_3 на e_3, e_2 меняет знак (т.к. меняет ориентацию плоскости, в которой происходит поворот, и, тем самым, меняет знак поворота). Но, поскольку нам нужен и базис, всё намного сложнее. Вектор e_1 найдём как собственный для $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow e_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$ Из пары $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ берём один, например, $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$. (т.к. строки лин. зав., из трёх можно оставить две)

$$\begin{pmatrix} 2-\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}i) & -1 & 2 \\ 2 & 2-\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}i) & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=0$$

умножим верхнюю на 2, нижнюю на 4 и сложим:

$$\left(4-3(1+\sqrt{3}i)+8\right)z_1+\left(-2+8-6(1+\sqrt{3}i)\right)z_2=0$$

$(9-3\sqrt{3}i)z_1 - 6\sqrt{3}i\, z_2=0$; $z_1=2\sqrt{3}i$; $z_2=3-\sqrt{3}i$;

$z_3=2z_1+\left(2-\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}i)\right)z_2=4\sqrt{3}i+\left(\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)(3-\sqrt{3}i)=$
$=-3-\sqrt{3}i$; $z=(2\sqrt{3}i;\ 3-\sqrt{3}i;\ -3-\sqrt{3}i)$, $z=x+iy$

$x=(0,3,-3)$, $y=(2\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})$ На всякий случай убеждаемся, что $x\perp y$ и $|x|=|y|$ (если нет, то ищем арифметич. ошибки). $e_2=\frac{x}{|x|}$, $e_3=\frac{y}{|y|}$.

Базис найден. $Ae_1=e_1$; $A(e_2+ie_3)=\lambda(e_2+ie_3)$, где $\lambda=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$. $A(e_2+ie_3)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(e_2+ie_3)$,

т.е. $Ae_2=\frac{1}{2}e_2-\frac{\sqrt{3}}{2}e_3$ (веществ. часть) и $Ae_3=\frac{\sqrt{3}}{2}e_2+\frac{1}{2}e_3$.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\text{ — канонический вид.}$$

Д/з 1516(1, 3, 4), 1515(1,2).