Разобранные примеры показывают, что разбиению матрицы на жордановы клетки соответствует разбиение векторов базиса на группы (их называют цепочками) векторов.

Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$, то $Ae_n = e_{n-1}, \ldots, Ae_2 = e_1, Ae_1 = 0$.

(отсюда название цепочка — оператор переводит следующий вектор в предыдущий)

если $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$, то $Ae_n = \lambda e_n + e_{n-1}, \ldots, Ae_2 = \lambda e_2 + e_1, Ae_1 = \lambda e_1$.

Если клеток две, $A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \lambda_1 & 1 & & 0 & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & \\ 0 & & & \lambda_1 & & & & \\ \hline & & & & \lambda_2 & 1 & & 0 \\ & & & & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & & & \lambda_2 \end{array}\right)$, то

получаем две цепочки базисных векторов $e_1, \ldots, e_n$ и $g_1, \ldots, g_m$; $Ae_n = \lambda_1 e_n + e_{n-1}, \ldots, Ae_2 = \lambda_1 e_2 + e_1, Ae_1 = \lambda_1 e_1$,

$Ag_m = \lambda_2 g_m + g_{m-1}, \ldots, Ag_2 = \lambda_2 g_2 + g_1, Ag_1 = \lambda_2 g_1$.

Задача 1199(11). $\lambda = 1$ — единств. с.зн. $\Rightarrow$ сразу переходим к $B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\operatorname{rk} B = 3 \Rightarrow$ пространство решений двумерно — не хватает для базиса.

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rk} B^2 = 1$ — простр. реш. 4-мерно — тоже не доходит до размерности всего пространства,

$B^3 = 0$ — решения — всё пр.во. Базис составляем так:

V^1 — двумерно, V^2 — 4-мерно, V^3 — 5-мерно, значит надо взять один вектор из V^3 (но так, чтобы он не был из $V^2 \subset V^3$), обозначим его a; тогда $b = B(a) \in V^2$, а т.к. размерность V^2 отличается от размерности V^1 на 2, нужно будет, кроме b, взять ещё один вектор из V^2, линейно независ.

с вектором b относительно подпространства V^1. Обозначим его c. Тогда $B(b)$ и $B(c)$ будут лежать в V^1 и быть линейно независимыми. Эти 5 векторов и составят базис, в котором оператор будет иметь жорданову форму. Эти 5 векторов образуют 2 цепочки:

a, $b=B(a)$, $d=B(b)=B^2(a)$; и c и $B(c)=e$. В каждой цепочке занумеруем векторы в обратном порядке: $d=e_1$, $b=e_2$, $a=e_3$; $e=e_4$, $c=e_5$. Тогда $B(e_3)=e_2$, $B(e_2)=e_1$, $B(e_1)=0$; $B(e_5)=e_4$, $B(e_5)=0$, и матрица B примет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0&1&0&&\\ 0&0&1&\multicolumn{2}{c}{0}\\ 0&0&0&&\\ \hline &0&&0&1\\ &&&0&0 \end{array}\right)$$

Осталось найти a, b, c, d, e. Вектор a выбираем почти любой (он не должен попасть в V^2, т.е. не должен удовлетворять системе $B^2x=0$), возьмём $a=(0,0,0,0,1)$. Тогда $B(a)=(3,2,1,0,0)=b$

c надо выбрать линейно независимым с b относительно V^1 (т.е. решений $Bx=0$). Например, $(0,0,1,0,0)$ и $(0,0,0,1,0)$ удовлетворяют $B^2x=0$ и не удовлетв. $Bx=0$). Первый вектор плохой, а второй – хороший. Увидеть это сразу сложно – – проверку линейной независимости относительно подпространства сделать трудно. Проще проверить потом линейную независимость окончательного базиса, а если её нет, то вернуться и взять другой вектор в качестве c.

Если взять $c=(0,0,1,0,0)$, то $B(c)=(1,0,0,0,0)$, но он же равен $d=B^2(a)$ – два вектора совпали, а должны образовывать часть базиса.

Если взять $c=(0,0,0,1,0)$, то $e=B(c)=(2,1,0,0,0)$, и векторы $a, b, d; c, e$ линейно независимы.

Ответ: $A=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1&1&0&&\\ 0&1&1&&0\\ 0&0&1&&\\ \hline &0&&1&1\\ &&&0&1 \end{array}\right)$; $e_1=(1,0,0,0,0)$, $e_2=(3,2,1,0,0)$, $e_3=(0,0,0,0,1)$, $e_4=(2,1,0,0,0)$, $e_5=(0,0,0,1,0)$. Жорданова форма единственна с точностью до перестановки клеток. А вот базис определён далеко не однозначно — произвол в выборе векторов базиса очень большой.

Д/з. 1199 (3, 5, 6, 10).