В размерности 3 всегда (а иногда и в бо́льших) ортогональные операторы можно приводить к каноническому виду по-другому. Если характ. многочлен имеет степень 3, то есть веществ. корень λ_1, и соотв. собств. вектор e_1, при этом оператор – вращение пространства вокруг прямой, содержащей e_1. Любые два перпендикулярных вектора e_2 и e_3 единичной длины в плоскости, перпендикулярной e_1, дадут канонический базис. Например, в задаче 1516(2) $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, и векторы e_2 и e_3 можно выбрать, например, так: $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$; $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$. При таком способе труднее найти канонический вид матрицы, т.е. $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Это делается так: в каноническом виде $Ae_2 = \cos\varphi \cdot e_2 + \sin\varphi \cdot e_3$. Это же равенство должно выполняться и в исходном базисе: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \cos\varphi \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sin\varphi \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \cos\varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sin\varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для нахождения φ хватит одной строки (т.е. одной координаты), например, второй: $\frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot 3 = \cos\varphi \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \sin\varphi \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (-2)$ Нет, вторая – плохо, т.к. там $\cos\varphi$ пропадает, и его знак определить не удастся, поэтому возьмём первую: $0 = \cos\varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 0$, и тут проблема со знаками – возьмём обе строки, т.е. систему

$$\begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{6}}\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

, т.е. $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\varphi = \frac{1}{2}$.

Впрочем, $\cos\varphi$ (в отличие от знака $\sin\varphi$) можно найти и другим способом:

$\lambda_1 + 2\cos\varphi = \operatorname{tr} A = \frac{1}{3}(2+2+2) = 2 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}$.

Полярное разложение матрицы — это её представление в виде произведения ортогональной матрицы на неотрицательную самосопряженную (в любом порядке). В общем случае получить такое разложение сложно, а если матрица обратима, то проще. Мы будем ограничиваться только обратимым случаем, т.е. матрица A обратима. Тогда матрицы A^TA и AA^T — тоже обратимы, и положительны $\Rightarrow$ можно найти положительный квадратный корень — матрицы B_1 и B_2 такие, что $B_1^2 = A^TA$, $B_2^2 = AA^T$.
Тогда $U_1 = AB_1^{-1}$ и $U_2 = B_2^{-1}A$ — ортогональные (проверим для U_1: $U_1^TU_1 = (AB_1^{-1})^TAB_1^{-1} = B_1^{-1}A^TAB_1^{-1} = B_1^{-1}\cdot B_1^2\cdot B_1^{-1} = E$).
Получаем два полярных разложения $A = U_1B_1$ и $A = B_2U_2$.
Задача 1551. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$;
собств. значения: $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 8$; $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$
$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $C^{-1} = C$; $AA^T = C\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}C^{-1}$, поэтому
$B = C\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{8} \end{pmatrix}C^{-1}$ — положительный квадратный корень из AA^T. $B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;
$U = B^{-1}A = \frac{\sqrt{2}}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Важно понять, какое из двух полярных разложений нужно вычислить, и, в зависимости от этого, работать с матрицей A^TA или AA^T.
Д/З 1516(5); 1550, 1520, 1548