Решение 1167(1). В базисе $1, x, x^2, \dots, x^n$ запишем матрицу оператора $\frac{d^2}{dx^2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \ddots & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

. Уравн. $|A-\lambda E|=0$ имеет единств. корень кратности $n+1$ — 0.

Т.е. 0 — единств. собств. значение. Для оператора $\frac{d}{dx}$ — аналогично. Теперь собств. подпр.-во. Это все многочлены, для которых $\frac{d^2}{dx^2}p(x) = \lambda\cdot p(x)$, т.е. $\frac{d^2}{dx^2}p(x)=0$, т.е. $p''(x)=0$. Это многочлены вида a_0+a_1x. Для $\frac{d}{dx}$ — это константы.

Для сравнения, разберём ещё пункты 2 и 3: Для тригонометрических многочленов матрица оператора $\frac{d}{dx}$ имеет вид (в базисе $1, \cos x, \sin x, \dots \cos nx, \sin nx$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & & 0 & \\ \vdots & & & 0 & 2 & & & \\ & & & -2 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & & 0 & & & & 0 & n \\ & & & & & & -n & 0 \end{pmatrix}$$

$|A-\lambda E| = -\lambda\cdot(\lambda^2+1)\cdot\ldots\cdot(\lambda^2+n)$ — один веществ. корень — 0, и комплексные — $\pm i$; $\pm 2i, \dots \pm ni$, все кратности один.

Собств. подпрост. для $\lambda=0$ — константы. Для $\lambda = ki$ блоки с другими значениями ничего не дадут (т.к. матрица $\begin{pmatrix} -ki & l \\ -l & -ki \end{pmatrix}$ невырождена при $l\neq k$, а при $l=k$ $\begin{pmatrix} -ki & k \\ -k & -ki \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$ имеет реш. $(1, i)$, что даёт собственный вектор $\cos kx + i\sin kx$, который

и порождает одномерное собств. подпр-во.
Для $\frac{d^2}{dx^2}$ получается матрица A^2, она диагональная,
$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & -1 & & & 0 & \\ & & & -4 & & & \\ & & & & -4 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & -n^2 \\ & & & & & & & -n^2 \end{pmatrix};$$
с. знач. $0; -1; -4, \ldots; -n^2$, все, кроме 0, кратности 2.
С. подпр-ва для $-k^2$ двумерны, имеют вид
$a\cos kx + b\sin kx$.
Пункт 3. в базисе $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ матрица $\frac{d}{dx}$ диагональна, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, эти числа и есть с. значения, а базис – с. векторы.
Реш. 1181. Пусть A – матрица оператора в неважно каком базисе. Уравнение $|A - \lambda E|$ имеет корень, т.к. поле алгебраически замкнуто. Пусть λ_0 – это корень. Тогда матрица $A - \lambda_0 E$ вырождена, значит, система уравнений $(A - \lambda_0 E)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ имеет ненулевое решение. Это и есть собственный вектор.
Реш. 1190. С. значения ищутся как числа λ, для которых $\exists$ ненулевая функция $f(x)$ такая, что $\frac{d}{dx} f(x) = \lambda f(x)$. Такие функции существуют для любого λ – это $e^{\lambda x}$. (и других, с точностью до константы, нет) Это – одномерные собств. подпр-ва для λ.

Для нахождения корневых подпр-в надо искать функции, которые удовлетворяют ур-нию $\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)^k f(x)=0$. для какого-нибудь к. При к=2,

$f''(x)-2\lambda f'(x)+\lambda^2 f(x)=0$. Решения можно искать в виде $f(x)=g(x)\cdot e^{\lambda x}$. Тогда

$f'(x)=g'(x)e^{\lambda x}+g(x)\cdot\lambda e^{\lambda x}$; $f''(x)=g''(x)e^{\lambda x}+2g'(x)\lambda e^{\lambda x}+g(x)\cdot\lambda^2 e^{\lambda x}$;

$(g''(x)+2g'(x)\cdot\lambda+g(x)\lambda^2)e^{\lambda x}-2\lambda\cdot(g'(x)+\lambda g(x))e^{\lambda x}+\lambda^2 g(x)e^{\lambda x}=0$,

т.е. $g''(x)=0$, т.е $g(x)=a_0+a_1x$ — получаем, что решения имеют вид $(a_0+a_1x)e^{\lambda x}$ и образуют двумерное пр-во. Аналогично, при к=3 решения имеют вид $(a_0+a_1x+a_2x^2)e^{\lambda x}$ (та же замена f на $g\cdot e^{\lambda x}$) и т.д.

т.е. корневое подпр-во состоит из всех функций вида $p(x)e^{\lambda x}$, где p - многочлен.

Заметим, что в бесконечномерном случае стабилизация корневых подпространств не наступает.

Задача 1200 (1) посмотрим, как приводить к жордановой форме, если собств. значений больше, чем одно. Вычисляем

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -14 & 10 \\ -1 & -\lambda & 4 & -5 \\ 6 & -2 & -13-\lambda & 10 \\ 3 & -1 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}.$$

Тут удобно из 1-й строки вычесть 3-ю, а из 3-й — удвоенную 4-ю, тогда вынесется $(\lambda-1)(\lambda+1)$.

В итоге получится $(\lambda-1)(\lambda+1)^3$, т.е. $\lambda=1$ кратности 1 и $\lambda=-1$ кратности 3. Для $\lambda=1$ корневое подпр-во одномерно, т.е. нужно только найти собств. вектор:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -14 & 10 \\ -1 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & -14 & 10 \\ 3 & -1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0. \quad \text{реш. } e_1 = (3,0,2,1).$$

Для $\lambda=-1$:

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -14 & 10 \\ -1 & 1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & -12 & 10 \\ 3 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

ранг матрицы равен 2, поэтому придётся возводить в следующие степени. Если бы ранг был 1, мы нашли бы три линейно независимых собственных вектора, и Жорданова форма была бы диагональной.

Возводим матрицу системы в квадрат:

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -8 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

ранг = 1, и при дальнейшем увеличении степени он не уменьшится до 0, т.к. собств. значение 1 никуда не денется.

Вектор $(0,1,0,0)$ удовлетв. последней системе, но не удовл. предпоследней. Это будет e_4.

$$e_3 = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -14 & 10 \\ -1 & 1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & -12 & 10 \\ 3 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$ — это одно из решений системы (*).

Найдём второе реш. (*): после привед. к ступенч. виду

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

Возьмём $x_4=0$; $x_3=1$, $x_2=-3$;

$x_1=x_2+4x_3-5x_4=1$, $e_2=(1,-3,1,0)$.

В этом базисе матрица оператора имеет вид
$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & -1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{array}\right)$$
(остальные – нули)

Т.к. $A(e_1)=e_1$; $A(e_2)=-e_2$, $A(e_3)=-e_3$ (e_2 и e_3 – собственные для $\lambda=-1$, т.к. удовлетворяют системе (*)); $A(e_4)=-e_4+e_3$.

Д/З: 1200 (2, 3).