

Тензор — это язык, описывающий векторы, (би)линейные функции, операторы и другие похожие объекты. Ничего содержательного, просто способ описания. На каждый объект (вектор, оператор и т.ч.) смотрим как на набор координат (или матричных элементов), зависящий от базиса, и изменяющийся при замене базиса по тому или иному правилу. Если  $C = (c_i^k)$  — матрица перехода, а  $D = C^{-1} = (d_i^k)$  — обратная матрица, то тензор — это набор чисел (координат) с верхними и нижними индексами, а переход к другой системе координат задается умножением на  $C$  для каждого нижнего индекса и на  $D$  — для каждого верхнего.

$$\tilde{T}^{k_1, \dots, k_p}_{i_1, \dots, i_q} = T^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q} \cdot c_{i_1}^{j_1} \cdot \dots \cdot c_{i_q}^{j_q} \cdot d_{i_1}^{k_1} \cdot \dots \cdot d_{i_p}^{k_p} \quad (\text{суммирование по каждому индексу, повторяющемуся сверху и снизу}).$$

Всего слагаемых —  $n^{p+q}$ , где  $n$  — размерность исходного линейного пространства. Вектор — это тензор с одним верхним индексом:  $\tilde{T}^k = T^i \cdot d_i^k$  — это формула перехода к другому базису для вектора.

Линейная функция — тензор с одним нижним индексом:  $\tilde{T}_i = T_j \cdot c_i^j$  — так меняются координаты линейной функции в двойственном базисе. Аналогично, билинейная ф-я — тензор с двумя нижними индексами, а оператор — тензор с двумя нижними, и одним верх-

хими, т.е.  $\tilde{T}_i^k = T_j^i c_e^j d_i^k$  совпадает с формулой  
 $\tilde{A}_i^k = A_j^i c_e^j d_i^k$ , т.е.  $\tilde{A} = C^{-1} A C$ .

Задача 1683.  $\tilde{a}^k = a^i d_i^k = d_{i_0}^k$  (во всей сумме по  $i$  только одно ненулевое слагаемое)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow a$  - столбец матрицы  $D = C^{-1}$  с номером  $i_0$ .

Задача 1693 (без слова "ортогональных"). Обозначим этот тензор  $T$ , его компоненты (координаты) -  $T_j^i$ . Ему соответствует оператор с той же матрицей, и нам дано, что матрица инвариантна, т.е. не зависит от матрицы перехода:  $\tilde{T} = T$ , где  $\tilde{T} = C^{-1} T C$ .  
 Получаем, что  $CT = TC$  для любой матрицы перехода  $C$ . Матрица, перестановочная со всеми матрицами, скалярна, т.е.  $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E$ , значит,  $T_j^i = \lambda \delta_j^i$ .

Если есть два тензора  $T$  и  $S$ , то можно определить их тензорное произведение  $T \otimes S$ , просто объединив индексы:  $T = \{T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}\}$ ,  
 $S = \{S_{j_{r+1} \dots j_s}^{i_{r+1} \dots i_s}\} \Rightarrow (T \otimes S)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s} = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} \cdot S_{j_{r+1} \dots j_s}^{i_{r+1} \dots i_s}$ .

Так, тензорное произведение двух линейных функций - билинейная. Если эти линейные функции  $f$  и  $g$  имеют координаты  $f_i, g_j$ , то  $f \otimes g$  имеет координаты  $f_i g_j = F_{ij}$  - матрица билинейной функции  $f \otimes g$ .

Задача 1690.  $v$  - вектор,  $\varphi$  - линейная ф-я.

$v \otimes \varphi$  - тензор с одним верхним и одним нижним индексами, т.е. оператор.

Если  $v = (v^i)$  - координаты  $v$ ,  $\varphi = (\varphi_j)$  - координаты линейной функции  $\varphi$ , то  $(v \otimes \varphi)^i_j$  - координаты (матричные элементы) оператора. Чтобы идентифицировать этот оператор, сначала догадываемся, а потом проверяем. Какой оператор можно сконструировать из  $v$  и  $\varphi$ ? Операторы применяются к векторам. Мы можем применить к вектору  $\varphi$  - получится число. Но результат применения оператора к вектору - вектор. Поэтому наше число можно умножить на вектор  $v$  - получится оператор  $A(x) = \varphi(x) \cdot v$ . Найдём матрицу этого оператора. Если  $x = e_j$  ( $j$ -й базисный вектор), то  $\varphi(x) = \varphi(e_j) = \varphi_j$ ,  $A(e_j) = \varphi_j \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$ , т.е.  $a_j^i = v^i \varphi_j$  - матрица совпадает с матрицей для  $v \otimes \varphi$ .

Д/з. 1684, 1692.

Это - последнее замечание. Для зачёта вышлите мне на почту адреса, по которым я могу выслать каждому его вариант зачётных задач. Если этот адрес совпадает с тем, с которого Вы высылали ответы по kolejivu.ru, то просто подтвердите это, если адрес - другой, уточните.