Нормальный вид квадратичных ф-ий.

а.) над полем $\mathbb{C}$: $f(x)$ приводится к виду

$f(x) = x_1^2 + \ldots + x_r^2$, где $r = \operatorname{rk} F$ (ранг матрицы f)

б) над полем $\mathbb{R}$: к виду

$f(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$, где $p+q$ – ранг матрицы ф-ии f.

ранг не зависит от способа, которым мы приводим квадратичную функцию к такому виду. Теорема инерции утверждает, что числа p и q (количество квадратов со знаком $+$ и со знаком $-$) тоже не зависят от способа приведения функции к нормальному виду.

Если две квадр. ф-ии приводятся к одному и тому же нормальному виду (т.е. с одинаковыми p и q), то существует преобразование, переводящее одну ф-ию в другую. И наоборот, если такое преобразование существует, то у двух квадратичных ф-ий одинаковый нормальный вид.

Задача 1257 (1). Чтобы узнать, есть ли преобразование, переводящее f в g, надо проверить, одинаковые ли у них p и q. Каждую функцию приводим методом Лагранжа:

$$f = 2(x_1 + 2x_2 - x_3)^2 \underbrace{- 8x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_2x_3} + 9x_2^2 + 3x_3^2 - 10x_2x_3 =$$

$$= 2\tilde{x}_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 = 2\tilde{x}_1^2 + (x_2 - x_3)^2 = (x_1')^2 + (x_2')^2.$$

$g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2 = 6(y_2+y_1)^2 - y_1^2 = (y_1')^2 - (y_2')^2$.

У функции f два квадрата со знаком $+$ и ни одного — со знаком $-$, у функции g — один $+$ и один $-$, значит преобразования от f к g не существует.

Числа p и q называются положительным и отрицательным индексами инерции. Их разность $p-q$ называется сигнатурой.

Задача 1242 (только та часть, которая про поле $\mathbb{R}$)

Если ранг $f = 2$, а сигнатура $= 0$, то нормальный вид $f = x_1^2 - x_2^2$. Очевидная замена даёт $f = \tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2$ — произведение двух линейных ф-ий $l_1(x) = \tilde{x}_1$, $l_2(x) = \tilde{x}_2$. Если ранг $f = 1$, то нормальный вид $f = x_1^2$ — квадрат линейной функции. Обратно, если $f(x) = l_1(x) \cdot l_2(x)$, то рассмотрим 2 случая:

1) $l_2(x)$ и $l_1(x)$ пропорциональны, тогда (раньше мы решали задачу о том, что лин. ф-я в подходящей системе координат имеет вид $l_1(x) = x_1$.)
$f(x) = \lambda l_1(x) \cdot l_1(x) = \lambda x_1^2 \Rightarrow$ ранг $= 1$.

2) l_1 и l_2 лин. незав. Тогда в подходящей системе координат $l_1(x) = x_1$, $l_2(x) = x_2 \Rightarrow f(x) = x_1x_2 = \tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2$.

<u>Угловые миноры.</u> Пусть $G = (g_{ij})$ — матрица квадр. ф-ии f. Угловым минором G_i называется минор, образованный первыми i строками и столбцами матрицы G.

Теорема (из лекций): Если $|G_1|, \dots, |G_k| \neq 0$ и $\operatorname{rk} G = k$, то $\exists$ базис, в котором квадратичная функция имеет вид $f(x) = |G_1| \cdot x_1^2 + \frac{|G_2|}{|G_1|} x_2^2 + \dots + \frac{|G_k|}{|G_{k-1}|} x_k^2$.

f называется положительно определённой, если $f(x) \geq 0$ $\forall x \in V$ и если $f(x) = 0$, то $x = 0$. Аналогично определяется отрицательно определённая квадратичная функция.

Д/З. 1257(2, 3)

1244, 1247, 1248