Функции от матриц (и от операторов)

Сначала рассмотрим одну жорданову клетку $J=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ и функцию f, которую можно разложить по формуле Тейлора в точке λ: $f(x)=f(\lambda)+f'(\lambda)(x-\lambda)+\frac{f''(\lambda)}{2!}(x-\lambda)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}(x-\lambda)^k+r_k(x)$, $k\geq n$ (n - размер клетки).

Всё, кроме $r_k(x)$ - многочлен, туда можно подставить J: $f(J)=f(\lambda)\cdot E+f'(\lambda)(J-\lambda E)+\frac{f''(\lambda)}{2!}(J-\lambda E)^2+\ldots$

причем $(J-\lambda E)^k=0$ при $k\geq n$. Т.е. результат приближения функции f многочленом степени k не зависит от k, если $k\geq n$. Поэтому можно определить функцию $f(J)$ как

$$f(\lambda)E+f'(\lambda)(J-\lambda E)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(J-\lambda E)^{n-1}.$$

Задача 1202. ($\alpha=\lambda$)

$$f(J)=\begin{pmatrix} f(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda) \end{pmatrix}+f'(\lambda)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}+\frac{f''(\lambda)}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}+\ldots$$

Если матрица A состоит из нескольких клеток, $A=\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k(\lambda_k) \end{pmatrix}$, то

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(J_1(\lambda_1)) & & & 0 \\ & f(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(J_k(\lambda_k)) \end{pmatrix}.$$

Для вычисления функции от произвольной матрицы A, надо сначала привести ее к жордановой форме: $J = C^{-1}AC$ (т.е. $A = CJC^{-1}$), а потом $f(A) = Cf(J)C^{-1}$ (т.к. для степеней $A^n = (CJC^{-1})^n = CJ\underbrace{C^{-1}\cdot C}J\cdot \underbrace{C^{-1}\cdot \ldots \cdot C}JC^{-1} = CJ^nC^{-1}$ (все внутренние $C^{-1}\cdot C$ сокращаются).

Задача 1209. Сначала — жорд. форма.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -3 \\ 1 & -5-\lambda & -4 \\ -1 & 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -3 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \\ -1 & 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3.$$

т.к. $\operatorname{rk} A = 2$, переходим к системе $A^2x = 0$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\operatorname{rk} A^2 = 1$, а для базиса нужно 3 вектора, значит переходим к $A^3x = 0$. но $A^3 = 0$, поэтому можно взять e_3 почти любым, лишь бы он не был решением $A^2e_3 = 0$, например $(0,1,0)$. Тогда $e_2 = Ae_3 = (-4, -5, +5)$, а $e_1 = Ae_2 = (1,1,-1)$. Матрица перехода $C =$

$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Вычислим $\sin J$: для этого, т.к. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots$ можно заменить $\sin x$ на x (куб $J = 0$) поэтому $\sin J = J$; $\sin A = A$.

$\cos x$ нужно приближать многочленом $1 - \frac{x^2}{2}$ (т.к. $J^2 \neq 0$, а $J^3 = J^4 = \ldots = 0$)

Тогда $\cos J = E - \frac{1}{2}J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\cos A = C\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Д/з: 1205; 1207 (1,2), 1210