

## Квадратичные функции в евклидовых пространствах.

В произвольных линейных пространствах мы решали задачу о приведении квадр. функции к нормальному виду, т.е. к сумме и разностям квадратов. Если же нам дана квадратичная функция в евклидовом пр-ве (т.е. со скалярным произв.), то можно ставить более сложную задачу: преобразовать квадр. ф-ю к наиболее простому виду с помощью ортogonalной (а не произвольной) замены координат (базиса). При этом этот, наиболее простой, вид таков:  $f(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$  (и нет надобности считать коэффициенты равными  $0, \pm 1$ , т.к. они инвариантны при ортogonalных заменах). Приведение к такому виду (он назыв. каноническим) осуществляется так же, как вы это делали в 1-м семестре: надо найти собственные значения матрицы данной квадр. функции, и для каждого из них найти собственные векторы. Сложность (неоднозначность) возникает только в случае кратных корней — тогда нужно дополнительно требовать ортogonalность собственных векторов.

Задача 1661 (1).  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ .  
 Составили матрицу этой функции  
 (не забывая делить пополам коэффициенты при произведениях)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Далее, составим}$$

характеристический многочлен и найдем его корни:  $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ . Заметим,

что сложив все строки, получим

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda \end{vmatrix}, \text{ а вычтя из 2-й строки}$$

$$1\text{-ю, получим } p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1+\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Выносим общие сомножители из определителя.

$$p(\lambda) = (1+\lambda)(5-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{и два корня}$$

у нас уже есть. Оставшийся определитель разложим по последнему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + (\lambda - 1 - 2) = \lambda + 1.$$

Итак, имеем  $\lambda = 5$  - корень кратности 1,  
 и  $\lambda = -1$  - корень кратности 2.

Для  $\lambda = 5$  найдем собственный вектор

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0. \text{ оставляем две линейно независ. строки:}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ решение } (1, 1, 1) \text{ нулевно} \\ \text{нормализовать: } e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1).$$

Для  $\lambda = -1$ :  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$  - два линейно независимых решения.

одно выберем произвольно, например,  $(1, -1, 0)$  ( $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0)$  после нормировки), тогда оставшееся должно быть ему ортогонально.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2).$$

Итого:  $f(x) = 5x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ ;  $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ .

Важное, хотя и тривиальное, замечание. Если в линейном пр-ве задана положительно определённая квадратичная функция, можно считать, что эта функция задаёт скалярное произведение (и её матрица является матрицей Грама). Поэтому пара квадратичных функций,  $F$  и  $G$ , с условием, что  $G$  положительно определена, это то же самое, что функция  $F$  в евклидовом пр-ве.

Д/з. 1661 (9, 10), 1664, 1665.