От теории операторов в линейных пространствах перейдем к операторам в евклидовых и эрмитовых пр-вах (т.е. при наличии дополнительной структуры скалярного произведения) Наличие скалярного произв. позволяет определить операцию сопряжения для операторов. B называется сопряженным к A (обозн. $B = A^*$), если $(Ax, y) = (x, By)$ для любых векторов x и y. $\forall A\ \exists!$ сопряж. оператор $B = A^*$. Если A - матрица оператора A в <u>ортонормированном</u> базисе, то матрицей A^* будет A^T (для евклид. пр-в) и $\overline{A}^T$ (для эрмитовых).

Задача 1408. В ортонорм. базисе матрица A имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$, она совп. со своей транспонир. $\Rightarrow A^* = A$.

Задача 1409. В ортонорм. базисе матрица A имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, сопряж. матрица $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ - поворот на $-\alpha \Rightarrow A^*$ - поворот в обратную сторону на тот же угол.

Задача 1410. Пусть $e_1, \dots, e_n$ - базис; $g_{ij} = (e_i, e_j)$, $G = (g_{ij})$ - матрица Грама; $A(e_i) = a_i^j e_j$ (сумма по j) Тогда

$(A(e_i), e_k) = (e_i, A^*(e_k))$ $\forall i, k$,

т.е. $(a_i^j e_j, e_k) = (e_i, b_k^l e_l)$, где b_k^l - коэф матрицы оператора A^*. Получаем

$a_i^j g_{jk} = b_k^l g_{il}$ · левая часть — элемент с номером i,k матрицы $\underbrace{GA}$, а правая часть — элемент с номером k,i матрицы $\underbrace{GB}$, поэтому $GA = (GB)^T$.

G — симметрична, поэтому $GA = B^T G$, откуда $B^T = GAG^{-1}$, после транспонирования $B = G^{-1}A^T G$. (В эрмитовом случае $B = G^{-1}\bar{A}^T G$)

Задача 1413(1). $A = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$; $G=E \Rightarrow B=A^T$.

Задача 1420: $Ax=\lambda x$; $A^*x=\mu x$.

$$\underset{\overset{\|}{(\lambda x,\, x)\, =\, \lambda(x,x)}}{(Ax,x)} = (x, A^*x) = (x, \mu x) = \bar{\mu}(x,x)$$

. x — ненулевой, $\Rightarrow$ на (x,x) можно сократить.

Задача 1419. Если $x \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} A^*$, то
$Ax=0 \Rightarrow A^*Ax=0$; $A^*x=0 \Rightarrow AA^*x=0 \Rightarrow (AA^*+A^*A)x=0$.
Обратно, если $(AA^*+A^*A)x=0$, то $((AA^*+A^*A)x,x)=0$.
Но это равно $(AA^*x,x)+(A^*Ax,x) =$
$=(A^*x,A^*x)+(Ax,Ax)=0$ (сумма неотрицательных равна 0 $\Rightarrow$ каждое слагаемое $=0 \Rightarrow$
$|A^*x|=0$; $|Ax|=0 \Rightarrow A^*x=0$, $Ax=0$.

Д/З. 1413(2), 1414, 1416, 1421, 1424*
(* — необязательно)