Если одна из двух квадратичных функций положительно определена, то её можно считать скалярным произведением.

Задача 1669(1). $f = x_1^2+6x_2^2-2x_3^2+6x_1x_2+2x_2x_3$

$g = x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$.

f не положительно определённая, т.к. один из коэф. при квадратах отрицателен. Приведём g к нормальному виду, и, заодно, удостоверимся, что она положительно определена.

$g = x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3 = (x_1+x_2)^2+x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2 =$
$= (x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+x_3^2 = y_1^2+y_2^2+y_3^2$, где $y_1 = x_1+x_2$, $y_2 = x_2-x_3$, $y_3 = x_3$. В новых координатах функция g — сумма квадратов всех координат $\Rightarrow$ положительно определена. Выразим x_i через y_i: $x_3 = y_3$; $x_2 = y_2+y_3$; $x_1 = y_1-x_2 = y_1-y_2-y_3$, и подставим в f:

$f = (y_1-y_2-y_3)^2+6(y_2+y_3)^2-2y_3^2+6(y_1-y_2-y_3)(y_2+y_3)+$
$+2(y_2+y_3)y_3 = y_1^2-2y_1(y_2+y_3)+(y_2+y_3)^2+6(y_2+y_3)^2-$
$-2y_3^2+6y_1(y_2+y_3)-6(y_2+y_3)^2+2(y_2+y_3)y_3 = y_1^2+4y_1(y_2+y_3)+$
$+(y_2+y_3)^2-2y_3^2+2y_2y_3+2y_3^2 = y_1^2+4y_1y_2+4y_1y_3+y_2^2+4y_2y_3+y_3^2$.

Остаётся найти ортогональную замену координат, которая приведёт f к каноническому виду. Эта замена не испортит вид функции g (потому, что ортогональная, а матрица Грама для g — единичная)

$$F=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix};\quad |F-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\1+\lambda&-1-\lambda&0\\5-\lambda&5-\lambda&5-\lambda\end{vmatrix}=(1+\lambda)(5-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\1&-1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=(1+\lambda)^2(5-\lambda).$$

корню $\lambda=5$ соотв. вектор $\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0;$

$e_1=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1);$

корню $\lambda=-1$ соотв. 2 вектора (кратность $=2$)

$e_2=\frac{1}{\sqrt2}(1,-1,0);\quad e_3=\frac{1}{\sqrt6}(1,1,-2)$. Замена координат: $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$, где $C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}.$

Итоговая замена:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix};$$

матрица этой замены — произведение двух матриц перехода $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt2}&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}.$

В координатах z_i функция f имеет вид $f=5z_1^2-z_2^2-z_3^2$; а функция $g=z_1^2+z_2^2+z_3^2.$

Другой способ решения: вместо двух отдельных замен ищем итоговую замену сразу, для этого решаем "обобщённое" характеристическое уравнение $|F-\lambda G|=0$, где матрица G — матрица Грама положит. определённой функции в исходных координатах. $F=\begin{pmatrix}1&3&0\\3&6&1\\0&1&-2\end{pmatrix}$; $G=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$,

$$|F-\lambda G|=\begin{vmatrix}1-\lambda&3-\lambda&0\\3-\lambda&6-2\lambda&1+\lambda\\0&1+\lambda&-2-2\lambda\end{vmatrix}=$$ выносим $1+\lambda$ из последней строки

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda&3-\lambda&0\\3-\lambda&6-2\lambda&1+\lambda\\0&1&-2\end{vmatrix}\cdot(1+\lambda).$$ Вычислим $\begin{vmatrix}1-\lambda&3-\lambda&0\\3-\lambda&6-2\lambda&1+\lambda\\0&1&-2\end{vmatrix}=$

$$=(-1)\begin{vmatrix}1-\lambda&0\\3-\lambda&1+\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1-\lambda&3-\lambda\\3-\lambda&6-2\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1-2(3-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\3-\lambda&2\end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^2-1-2(3-\lambda)(2-2\lambda-3+\lambda)=\lambda^2-1+2(3-\lambda)(1+\lambda)=$$

$$=(1+\lambda)[\lambda-1+6-2\lambda]\Rightarrow$$ корни $\lambda_1=5;\ \lambda_2=\lambda_3=-1$.

Внимание! Для ортогонализации и нормирования надо использовать скалярное произведение с матрицей Грама G (а не E)!

Для $\lambda_1=5$: $(F-\lambda G)x=0$: $\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-2&-4&6\\0&6&-12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$

$$\begin{cases}2x_1+x_2=0\\x_2-2x_3=0\end{cases}\Rightarrow x=(-1,2,1).$$

Нормируем (делим на длину)

$$|x|^2 = (-1,2,1)G\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = (-1,2,1)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} =$$

$$= (1,2,0)\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = 3 \quad \Rightarrow \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,2,1)$$

Для $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$: $(F-\lambda G)x = 0$: $\begin{pmatrix}2&4&0\\4&8&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 0$ $(*)$

одно из решений - $(0,0,1)$. Нормируем его:

$$(0,0,1)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = (0,-1,2)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$$

$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1)$. Последний вектор должен быть ортогонален к e_2; поэтому он удовлетворяет системе $(*)$ и $(x, e_2) = 0$, т.е. $x_3 = 0$.

получаем $x = (-2,1,0)$. Нормируем:

$$|x|^2 = (-2,1,0)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = (-1,0,-1)\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = 2$$

$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2,1,0)$. Матрица перехода:

$$C = \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}$$

(не совпадает с тем, что получилось первым способом, но и не должна — она определена неоднозначно).

Канонический вид $f = 5z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$;

$g = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

Д/з: 1669 (2, 3, 4), 1670.

Задача на приведение пары квадратичной функций будет на зачёте.