Оператор A называется самосопряжённым, если $A^* = A$.

Задача 1435. Пусть $V_1 \perp V_2$. Оператор проектирования устроен так: любой вектор $v \in V$ раскладывается единственным образом в сумму $v = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, и $A(v) = v_1$. Возьмём 2 произвольных вектора $v, w \in V$, $v = v_1 + v_2$, $w = w_1 + w_2$. Тогда $(A(v), w) =$
$= (v_1, w_1 + w_2) = (v_1, w_1)$ т.к. $v_1 \in V_1$, $w_2 \in V_2$ и $V_1 \perp V_2$.
Аналогично $(v, A(w)) = (v_1 + v_2, w_1) = (v_1, w_1)$.
Значит, $(A(v), w) = (v, A(w))$ $\forall v, w \in V \Rightarrow$
$A^* = A$. Обратно, предположим, что $A^* = A$. Тогда $(A(v), w) = (v, A(w))$. Распишем:
$(A(v), w) = (v_1, w_1 + w_2)$; $(v, A(w)) = (v_1 + v_2, w_1)$
т.е. $(v_1, w_2) = (v_2, w_1)$ для любых v_1, v_2, w_1, w_2.
Взяв $v_2 = 0$, получим $(v_1, w_2) = 0$ $\forall v_1 \in V_1$, $\forall w_2 \in V_2$
$\Rightarrow V_1 \perp V_2$.

Задача 1432. Если V_1 – решения системы, то V_2 – линейная оболочка векторов, составл. из коэффициентов, т.е. $a_1 = (1, 1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 0, 0, 1)$.
Для произвольного вектора $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ найдем $x_{\parallel}$ и $x_{\perp}$. $x = \alpha a_1 + \beta a_2 + x_{\parallel}$.

$(x, a_1) = \alpha(a_1, a_1) = 3\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $\beta = x_4$.

$(x, a_2) = \beta(a_2, a_2) = \beta$

$$x_{\parallel} = (x_1, x_2, x_3, x_4) - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}(1, 1, 1, 0) - (0, 0, 0, x_4) =$$
$$= \left(x_1 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3};\ x_2 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ x_3 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ 0\right)$$

Проектирование переводит x в $x_{\parallel}$. Матрица получается так: $A(1,0,0,0) = (1-\frac{1}{3}, 0-\frac{1}{3}, 0-\frac{1}{3}, 0) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$; $A(0,1,0,0) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$; $A(0,0,1,0) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$, $A(0,0,0,1) = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 1441. Запишем матрицы операторов A и B в ортонормированном базисе. Тогда $A^T = A$, $B^T = B$ и самосопряжённость произведения — это $(AB)^T = AB$. Но $(AB)^T = B^T \cdot A^T = BA$.

Д/З. 1431, 1436, 1437, 1440