Если две произвольные квадратичные функции f и g можно одним преобразованием привести одновременно к диагональному виду, то обобщенный характеристический многочлен $|F-\lambda G|$ обязан иметь только вещественные корни. (корни не зависят от замены координат: $|\tilde{F}-\lambda\tilde{G}|=|C^TFC-\lambda C^TGC|=|C^T(F-\lambda G)C|=$ $=|C|^2\cdot|F-\lambda G|$). Если $F=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}\beta_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n\end{pmatrix}$, то $|F-\lambda G|=(\alpha_1-\lambda\beta_1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n-\lambda\beta_n)$.

Задача 1671 (1): $F=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $G=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$;

$|F-\lambda G|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2-4\lambda\\ 2-4\lambda & -1-5\lambda\end{vmatrix}=5\lambda^2-4\lambda-1-4+16\lambda-16\lambda^2=$ $=-11\lambda^2+12\lambda-5$; $\lambda_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-55}}{11}$ — комплексное.

Операторы в линейных пространствах

Если $e_1,\ldots,e_n$ — базис в V; $A: V\to V$ — линейный оператор (линейное отображение), то $A(e_i)$ можно разложить по базису:

$A(e_i)=a_i^j e_j$ (суммирование по j)

коэффициенты образуют матрицу A оператора A в данном базисе.

Задача 1099 (1). $A=\frac{d}{dx}$; $A(e_1)=0$, $A(e_2)=e_1$, $A(e_3)=2e_2$, $A(e_4)=3e_3$, $A(e_5)=4e_4$, $A(e_6)=5e_5$;

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0&5\end{pmatrix}\quad (e_1=1, e_2=x, e_3=x^2, \ldots, e_6=x^5)$$

Задача 1104. $\mathrm{tr}\,\tilde{A}=\mathrm{tr}(C^{-1}AC)=\mathrm{tr}((C^{-1})\cdot(AC))=$ $=\mathrm{tr}((AC)\cdot(C^{-1}))=\mathrm{tr}\,A$.

Задача 1105. $tr(AB) = tr(BA)$, тогда $tr\, Id = 0$, но это не так (если в курсе алгебры это не было, то проверьте самостоятельно, что $tr(AB) = tr(BA)$ для любых квадратных матриц A и B)

Замечание: в бесконечномерном случае задача 1105 неверна. Рассмотрим пространство всех многочленов от x, и операторы $A = \frac{d}{dx}$; B – умножение на x. Тогда

$$(AB)(p)(x) = \frac{d}{dx}(x \cdot p(x)) = p(x) + x p'(x)$$

$$(BA)(p)(x) = x \cdot \frac{d}{dx} \cdot p(x) = x \cdot p'(x).$$

$(AB - BA)(p)(x) = p(x)$ – тождественный оператор

Д/з: 1671(2); 1099(2,3,4), 1100, 1106, 1110