

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предметом исследования является процесс деформирования водонасыщенного грунта под действием внешней нагрузки, называемый консолидацией, объектом – деформируемые флюидонасыщенные композиты (в том числе грунты и биоматериалы). Моделирование деформирования грунта и движения жидкости строится в связанной постановке, что необходимо для описания нестационарного деформирования водонасыщенного грунта. Нелинейные реакции геотехнических элементов конструкций, как правило, возникают в результате пластических умеренно больших деформаций скелета грунта. Геомеханическая реакция скелета грунта на изменение давления жидкости играет критическую роль при деформировании дорожного полотна или при неравномерной осадке инженерных сооружений. Этим обусловлена актуальность исследования.

Целью исследований являлась постановка полностью нелинейной (физически и геометрически) связанной задачи совместного деформирования пористого флюидонасыщенного материала под нагрузкой при медленном оттоке жидкости, создание алгоритма ее решения, реализация с помощью разработанного программного кода, практическое исследование устойчивости решения, опробование решения на модельных и практических примерах. А также разработка методов экспериментального определения и вычисления эффективных свойств пористого водонасыщенного материала.

Для решения связанной задачи используется метод ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian), формулировка вариационных уравнений, их конечно-элементная и программная реализация в виде собственного кода на ФОРТРАНЕ.

Результатами работы является новая формулировка связанной геометрически и физически нелинейной задачи деформирования пористого материала, моделирование консолидации пористых материалов.

Область применения разработанной модели консолидации с точки зрения практики – инженерная геология, строительная механика подземных сооружений и фундаментов, медицина.

Работа имеет значение в смысле фундаментальной механики. Также есть перспектива промышленного применения разработанной компьютерной программы.

ВВЕДЕНИЕ

Решение нелинейной связанной задачи, описывающей деформирование грунта при оттоке или притоке жидкости, весьма актуально в различных областях хозяйственной деятельности человека. Уплотнение водонасыщенных дисперсных грунтов под нагрузкой, как правило, нелинейное и сопровождается большими деформациями. Геомеханическая реакция скелета грунта на изменение давления жидкости играет критическую роль, например, при деформировании дорожного полотна или при неравномерной осадке инженерных сооружений [1]-[4]. Поэтому разработка нелинейной связанной модели консолидации, учитывающей упругое или упругопластическое поведение материала, сопровождающееся изменением пористости и проницаемости, является весьма актуальной. Создание собственного программного кода является актуальным и целесообразным потому, что способствует повышению уровня научного моделирования и программирования в нашей стране. Представляется актуальным исследование устойчивости решения седловой задачи консолидации теоретически в линейном и нелинейном вариантах.

В настоящее время наблюдается стремление более точно моделировать процессы фильтрации и консолидации [1]-[4]. Это означает, прежде всего, два момента: использование более точных механических моделей, проверенных доступными экспериментами, и более точное вычисление эффективных свойств материалов, входящих в модели в качестве параметров, применяя современные экспериментальные методы, численные методы и революционно возросшие мощности компьютеров. В последнее время для получения моделей реальной структуры пористых материалов широко используется метод компьютерной томографии. Результаты расчетов эффективных свойств на трехмерных моделях, построенных по рентгеновским изображениям, оцифрованным в специальных программах (VG MAX 3.3), показывают совпадение с экспериментальными данными. Учет реальных нелинейных свойств упругих материалов и грунтов позволяет осуществлять более реалистичное моделирование процесса консолидации, что является актуальной задачей.

В настоящем исследовании сформулирована, математически исследована, обоснована на основе моделей и экспериментальных возможностей механики сплошных сред и численно реализована достаточно общая формулировка задачи совместного деформирования пористой твердой среды с протекающей через поры жидкостью в рамках физической и геометрической нелинейности. Постановка задачи выведена в скоростях перемещений твердой фазы и изменения давления воды в дифференциальном и вариационном виде. В силу комбинации отмеченных черт разработанной модели

консолидации такое исследование представляется новым. Научная новизна заключается также в создании собственного программного кода. Новизна также состоит в применении подхода ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) для переформулировки уравнений фильтрации и изменения пористости в лагранжевых координатах твердого каркаса с использованием относительной скорости движения жидкости. Исследование влияния геометрической нелинейности совместно с учетом изменения пористости и проницаемости материала на результаты решения нелинейной задачи консолидации также является новым. Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение. В работе показана применимость метода Узавы в качестве основной части метода решения нелинейных задач консолидации.

В работе асимптотический анализ уравнения равновесия применяется для пористой среды, насыщенной жидкостью. В этом состоит новая особенность применения метода осреднения, в результате чего получаются локальные задачи не только для определения эффективных упругих модулей, но и для определения параметра Био. Тензор передачи порового давления и тензор расширения водонасыщенной среды при замерзании трудно определять экспериментально, а для анизотропных экспериментальная методика их определения еще не разработана. Следовательно, вычислительная методика может стать оценочным способом определения этих параметров, если известна структура порового пространства и упругие свойства компонентов матрицы.

Разработанная модель консолидации может применяться для расчетов образования колеи и неровностей грунтовых дорог. Она также может применяться для изучения процесса деформирования биологических материалов при использовании модели упругости.

В работе были выполнены намеченные задачи:

- 1) Проведено математическое исследование корректности нелинейной постановки задачи консолидации.
- 2) Теоретически и экспериментально исследован вариант вычислительной процедуры решения нелинейной дискретизированной задачи консолидации.
- 3) На основе теоретического исследования и численных экспериментов предложен эффективный преобуславливатель для дискретизированной системы уравнений.
- 4) Проведены эксперименты по определению материальных параметров и верификации модели консолидации песчаного грунта.
- 5) Проведена работа по повышению эффективности программного кода.

6) На основе разработанной компьютерной программы решены различные задачи (в частности, моделирование деформирования нежесткого дорожного полотна, сложенного дисперсными водонасыщенными грунтами).

7) Исследована эффективность применения нейросетей для прогнозирования материальных параметров грунта на основе свойств материала матрицы и формы пор.

Получены главные ожидаемые результаты. Результаты полностью соответствуют научному уровню исследований в области моделирования процесса совместного деформирования пористого материала и фильтрации жидкости. Результаты исследования докладывались на Международных и Всероссийских конференциях, включая доклады на конференции ГАММ (немецкое общество по прикладной математике и механике).

1 Постановка, численное решение и исследование корректности нелинейной задачи консолидации

1.1 Постановка задачи консолидации

Дифференциальная постановка связанной задачи консолидации «в скоростях» включает три уравнения – равновесия, фильтрации и пористости [5], [6]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}) - \alpha \nabla p + \rho \mathbf{f} = 0 \\ n \nabla \cdot \left(\frac{k}{n \mu_f} \nabla p \right) = \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + n \beta_f \dot{p} - \beta_f \nabla p \cdot \frac{k}{\mu_f} \nabla p \\ \dot{n} - \nabla n \cdot \frac{k}{n \mu_f} \nabla p = (1-n) \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u}(\xi, t) / \partial t, \quad \dot{p} = \partial p(\xi, t) / \partial t, \quad \dot{n} = \partial n(\xi, t) / \partial t,$$

$$C_{ijkl}^d = J^{-1} F_{ip} F_{jq} F_{kr} F_{ls} C_{pqrs}^E, \quad J = \det \mathbf{F}, \quad \mathbf{C}^E = \partial \mathbf{S}^{eff} / \partial \mathbf{E},$$

где $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$ – эффективные напряжения,

\mathbf{u} – вектор средних перемещений в твердой фазе материала,

$\alpha = \alpha(n)$ – коэффициент Био,

p – среднее давление в жидкости,

ρ – средняя плотность водонасыщенной среды,

\mathbf{f} – вектор массовой силы,

$n = n(\mathbf{u})$ – пористость,

$k = k(n)$ – коэффициент проницаемости,

$\mu_f = \text{const}$ – динамическая вязкость жидкости,

$\beta_f = \text{const}$ – сжимаемость жидкости,

ξ – лагранжевы координаты твердого скелета.

Уравнения системы (1.1) выведены из закона фильтрации Дарси, уравнения состояния жидкости, уравнений неразрывности и уравнения равновесия [5], [6]. При выводе были сделаны следующие допущения. Процесс деформирования среды изотермический. Поры материала полностью заполнены флюидом. Жидкость ньютоновская и однородная, изменение плотности жидкости ρ_f при изменении порового давления подчиняется закону баротропии ($\partial\rho_f/\rho_f = \beta_f dp$). В уравнениях неразрывности материал скелета принимается несжимаемым ($\partial\rho_s/\rho_s = 0$), но в уравнении равновесия сжимаемость материала скелета учитывается. Уравнения фильтрации и изменения пористости, изначально представленные в Эйлеровом подходе, были переформулированы в лагранжевых координатах твердой фазы с использованием относительной скорости течения жидкости согласно подходу ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) [7].

В задаче консолидации задавались следующие граничные условия. Часть границы ($\xi \in \Sigma_1$) неподвижна и непроницаема, остальная часть границы ($\xi \in \Sigma_2$) проницаема, и на ней действует поверхностная нагрузка:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0; \quad \xi \in \Sigma_1 \\ \boldsymbol{\sigma}^{eff} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S}; \quad p = 0; \quad \xi \in \Sigma_2 \end{cases} \quad (1.2)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к границе области $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$,

\mathbf{S} – поверхностная сила.

Для дальнейшего решения задачи консолидации численными методами была получена вариационная постановка в текущей конфигурации, а уравнение равновесия было линеаризовано с использованием техники дифференцирования по Гато [5], [6]:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \int_V (\mathbf{d}(\mathbf{w}) : \mathbf{C}^d : \mathbf{d}(\mathbf{du})) dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}) : [(\nabla \mathbf{w})^T \cdot \nabla \mathbf{du}] dV - \int_V \alpha dp \nabla \cdot \mathbf{w} dV - \\
& - \int_V \alpha p (\nabla \cdot \mathbf{w}) (\nabla \cdot \mathbf{du}) dV - \int_V \alpha p (\nabla \mathbf{w})^T \cdot \nabla \mathbf{du} dV - \int_V \rho \mathbf{df} \cdot \mathbf{w} dV - \int_{\Sigma_2} \mathbf{dS} \cdot \mathbf{w} d\Sigma = 0 \\
& \int_V q \beta_f \nabla p \cdot \frac{k}{\mu_f} \nabla p dV - \int_V \nabla q \cdot \frac{k}{\mu_f} \nabla p dV - \int_V q \nabla n \cdot \frac{k}{n \mu_f} \nabla p dV = \int_V q \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_V q n \beta_f \dot{p} dV \\
& \int_V h \dot{n} dV - \int_V h \nabla n \cdot \frac{k}{n \mu_f} \nabla p dV = \int_V h (1-n) \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} dV
\end{aligned} \right. \quad (1.3)$$

$$\mathbf{C}_{ijkl}^d = J^{-1} F_{ip} F_{jq} F_{kr} F_{ls} \mathbf{C}_{pqrs}^E, \quad J = \det \mathbf{F}, \quad \mathbf{C}^E = \partial \mathbf{S}^{eff} / \partial \mathbf{E}, \quad \mathbf{d}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{w})^T + \nabla \mathbf{w}],$$

где \mathbf{C}^d и \mathbf{C}^E – касательные модули соответственно в текущей и начальной конфигурациях,

\mathbf{F} – деформационный градиент,

\mathbf{S}^{eff} – второй тензор эффективных напряжений Пиола-Кирхгофа,

\mathbf{E} – тензор деформаций Грина-Лагранжа.

\mathbf{S} – поверхностная сила из граничных условий (1.2),

\mathbf{w} , q , h – пробные функции из подпространств Соболева, удовлетворяющие заданным граничным условиям 1-го рода:

$$H_u = \{ \mathbf{w} | \mathbf{w} \in W_2^1, \mathbf{w}|_{\Sigma_1} = 0 \}, \quad H_p = \{ q | q \in W_2^1, q|_{\Sigma_1} = 0 \}, \quad H_h = \{ h | h \in W_2^1 \}.$$

Необходимо отметить, что уравнения (1.3) квазилинейные, т.е. линейные относительно \mathbf{du} , dp (or \dot{p}) и dn (or \dot{n}), но нелинейные относительно \mathbf{u} , p и n . Все функции в системе (1.3) зависят от лагранжевых координат ξ осредненной твердой фазы.

В качестве определяющих соотношений в (1.3) могут использоваться соотношения для гиперупругого материала при существовании упругого потенциала, а также теория пластического течения или деформационная теория пластичности.

1.2 Численное решение и исследование корректности задачи консолидации

Для удобства сформулируем уравнения (1.3) в дифференциальном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\nabla \cdot \left(\mathbf{C}^d(\mathbf{u}) : \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) - \alpha(n) \nabla \frac{\partial p}{\partial t} - \\
-\alpha(n) \nabla p \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \alpha(n) \nabla p \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(p) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = 0 \\
n(\mathbf{u}) \nabla \cdot \left(\frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p \right) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + n(\mathbf{u}) \beta_f \frac{\partial p}{\partial t} - \beta_f \nabla p \cdot \frac{k(n)}{\mu_f} \nabla p \\
\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla n \cdot \frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p = (1-n) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}
\end{array} \right. \quad (1.4)$$

Исследуем нелинейную систему (1.4) на корректность в предположении, что градиенты давления и пористости малы. Действительно, делаем замену $p \rightarrow p + p_0$, $n \rightarrow n + n_0$, где $p_0(\mathbf{x})$ и $n_0(\mathbf{x})$ – начальные значения (до процесса консолидации). Следовательно, p и n – это их изменения. Основное допущение касается градиентов p и n , которые предполагаются малыми по сравнению с градиентами p_0 и n_0 соответственно. Отбрасывая малые члены второго порядка, приходим к упрощенной системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\nabla \cdot \left(\mathbf{C}^d(\mathbf{u}) : \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) - \alpha(n) \nabla \frac{\partial p}{\partial t} - \\
-\alpha(n) \nabla p_0 \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \alpha(n) \nabla p_0 \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(p) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = 0 \\
n(\mathbf{u}) \nabla \cdot \left(\frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p \right) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + n(\mathbf{u}) \beta_f \frac{\partial p}{\partial t} - 2\beta_f \nabla p \cdot \frac{k(n)}{\mu_f} \nabla p_0 \\
\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla n \cdot \frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p_0 - \nabla n_0 \cdot \frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p - \nabla n_0 \cdot \frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p_0 = (1-n) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}
\end{array} \right. \quad (1.5)$$

Уравнения (1.5) дополняются граничными условиями на функции \mathbf{u} и p . Для простоты будем считать, что начальное давление и пористость однородны: $p_0(\mathbf{x}) = \text{const}$, $n_0(\mathbf{x}) = \text{const}$. Тогда уравнения (1.5) упрощаются [5], [6]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\mathbf{C}^d(\mathbf{u}) : \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) - \alpha(n) \nabla \frac{\partial p}{\partial t} + \rho(p) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = 0 \\ n(\mathbf{u}) \nabla \cdot \left(\frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p \right) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + n(\mathbf{u}) \beta_f \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial n}{\partial t} = (1-n) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.6)$$

Согласно идее метода Удзавы [8], $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ можно выразить как решение первого уравнения в (1.6) с соответствующими граничными условиями:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{F} - \alpha \nabla \frac{\partial p}{\partial t} \right), \quad \mathbf{F} = \rho \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}, \quad (1.7)$$

где \mathbf{A} означает оператор этой краевой задачи в соответствующем функциональном пространстве. Формула (1.7) объясняет идею метода Удзавы и не претендует на математическую строгость. С другой стороны, это соображение можно легко привести к строгой форме, если рассматривать собственные функциональные пространства и операторные уравнения, эквивалентные вариационным уравнениям.

Мы приходим к уравнениям (1.8) путем подстановки (1.7) в два оставшихся уравнения в (1.6). В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = (1-n) \nabla \cdot \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{F} - \alpha \nabla \frac{\partial p}{\partial t} \right) \\ n(\mathbf{u}) \nabla \cdot \left(\frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p \right) = \nabla \cdot \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{F} - \alpha \nabla \frac{\partial p}{\partial t} \right) + n(\mathbf{u}) \beta_f \frac{\partial p}{\partial t} \end{cases} \quad (1.8)$$

Система (1.8) включает два связанных квазилинейных нестационарных уравнения. Существование решения системы (1.8) основано на том, что $\nabla \cdot \mathbf{A}^{-1} \nabla$ – положительно определенный симметричный оператор, спектрально эквивалентный тождественному оператору. Следовательно, второе уравнение в (1.8) – это уравнение параболического типа, если $n > 0$. Следовательно, его решение $p = p(n, t, \mathbf{x})$ существует. Если его подставить в первое уравнение (10), то оно превратится в нелинейное обыкновенное

дифференциальное уравнение относительно n . Существование единственного решения этого уравнения кажется очевидным при достаточно общих условиях.

Предлагаемый алгоритм решения системы (1.6) использует ту же идею подстановки Удзавы. Он заключается в решении на каждом шаге внутренней седловой системы, состоящей из двух последних уравнений в (1.6), с использованием алгоритма типа Удзавы и последующем уточнении первого уравнения с использованием неявной схемы Эйлера. Конечно, сначала мы используем дискретизацию по t с помощью обратных разностных производных.

Важное замечание касается оператора $\nabla \cdot \mathbf{A}^{-1} \nabla$. Он положительно определенный и симметричный при некоторых ограничениях на граничные условия. Рассмотрим вариационную постановку, соответствующую системе (1.6):

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V (\nabla \mathbf{w} : \mathbf{C}^d(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{d}\mathbf{u}) dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}) : [(\nabla \mathbf{w})^T \cdot \nabla \mathbf{d}\mathbf{u}] dV - \int_V \alpha dp \nabla \cdot \mathbf{w} dV - \\ - \int_V \rho d\mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dV - \int_{\Sigma_2} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{w} d\Sigma = 0 \\ \int_V \nabla q \cdot \frac{k}{\mu_f} \nabla p dV + \int_V q \nabla n \cdot \frac{k}{n\mu_f} \nabla p dV + \int_V q \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_V q n \beta_f \dot{p} dV = 0 \\ \int_V h \dot{n} dV = \int_V h(1-n) \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Из (1.9) видно, что для внутренней седловой задачи система (1.6) (или (1.9)) является самосопряженной, если в силу граничных условий выполнено равенство:

$$\int_V \text{grad } p \cdot \mathbf{u} dV + \int_V \text{div } \mathbf{u} p dV = 0.$$

Последнее условие выполняется для ряда практических задач. Задача может быть решена и в несимметричном случае, но симметрия, конечно, значительно упрощает процедуру решения. После решения системы первых двух уравнений (1.9) пористость пересчитывается из третьего уравнения (1.9). Далее рассчитанное значение пористости учитывается при решении уравнений равновесия и фильтрации на следующем шаге по времени.

Дискретизация линеаризованного вариационного уравнения равновесия и уравнения фильтрации (1.9) по пространственным координатам осуществлялась с помощью метода конечных элементов (МКЭ), что означает $H_u \rightarrow H_u^N$ и $H_p \rightarrow H_p^N$, где

H_u^N и H_p^N – N -мерные подпространства, т.е. $H_u^N \in H_u$ и $H_p^N \in H_p$. При дискретизации для аппроксимации приращений перемещения скелета использовались 20-узловые серендиповы квадратичные элементы (Q2), а для аппроксимации приращений давления жидкости – 8-узловые трилинейные элементы (Q1). Такие конечные элементы (КЭ) удовлетворяют LBB (Ладыженской-Бабушки-Брецци) условию корректности дискретизированной седловой системы [9]. Функции $\mathbf{du}^N(\xi, t) \in H_u^N$ и $dp^N(\xi, t) \in H_p^N$ являются приближенными решениями первых двух уравнений (1.9). Это означает пространственную дискретизацию.

Также для численного решения системы (1.9) требуется дискретизация по времени. Последнее делается с разностных производных назад. Такой подход иногда называют полудискретизацией, что просто означает независимость пространственной и временной дискретизации. Используя эту идею, мы приходим к полностью дискретизированным вариационным уравнениям, которые должны выполняться для любых пробных функций $\mathbf{w}^N(\xi, t) \in H_u^N$ и $q^N(\xi, t) \in H_p^N$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V (\nabla \mathbf{w}^N : \mathbf{C}^d(\mathbf{u}^N) : \nabla \Delta \mathbf{u}^N) dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}^N) : [(\nabla \mathbf{w}^N)^T \cdot \nabla \Delta \mathbf{u}^N] dV - \int_V \alpha \Delta p^N \nabla \cdot \mathbf{w}^N dV - \\ - \int_V \rho \Delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}^N dV - \int_{\Sigma_2} \Delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}^N d\Sigma = 0 \\ \int_V \nabla q^N \cdot \frac{k}{\mu_f} \nabla p^N dV + \int_V q^N \nabla n \cdot \frac{k}{n\mu_f} \nabla p^N dV + \int_V q^N \nabla \cdot \frac{\Delta \mathbf{u}^N}{\Delta t} dV + \int_V q^N n \beta_f \frac{\Delta p^N}{\Delta t} dV = 0 \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Здесь $\tau = \Delta t$ означает шаг по времени.

Теперь рассмотрим квазилинейную алгебраическую систему (1.10), так как именно эти два уравнения образуют седловую систему и ее решение требует значительного внимания. Третье уравнение в (1.9) становится обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ), если \mathbf{u} определить из (1.10) и подставить в (1.9). Такой метод решения известен в литературе как разбиение по физическим процессам.

Обозначим вектор приращений узловых перемещений элемента как $\Delta \hat{\mathbf{u}}^r = (\Delta \hat{u}_1^r, \Delta \hat{u}_2^r, \Delta \hat{u}_3^r)^T$ ($r=1, \dots, 20$), а приращений узлового давления жидкости в элементе как $\Delta \hat{p}^q$ ($q=1, \dots, 8$). Тогда аппроксимация КЭ по любому элементу имеет вид:

$$\Delta \mathbf{u}^N = \sum_{r=1}^{20} N_r^u \Delta \hat{\mathbf{u}}^r, \quad \Delta p^N = \sum_{q=1}^8 N_q^p \Delta \hat{p}^q,$$

где N_r^u и N_q^p – функции формы элементов Q2 и Q1 соответственно. Последние формулы представляют конечно-элементную аппроксимацию на локальном или элементном уровне. С другой стороны, необходимо рассматривать алгебраическую систему (1.10) на глобальном уровне. Тогда КЭ аппроксимация имеет вид:

$$\Delta u_\alpha^N = \sum_{i=1}^{N_q} U_\alpha^i \varphi_i, \quad U^i = (U_1^i, U_2^i, U_3^i), \quad \Delta p^N = \sum_{i=1}^{N_p} P^i \psi_i.$$

Запишем систему (1.10) в блочной форме на каждом временном шаге, используя глобальный вектор неизвестных U и P :

$$\begin{bmatrix} A & D \\ B & -\tau C \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ G \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

Уже подчеркивалось, что самосопряженность или симметричность всей блочной матрицы (1.11), т. е. $D = B^T$, очень важна для построения эффективного алгоритма решения системы (1.10). В терминах блочной матрицы (1.11) идея метода Удзавы для седловой задачи (1.11) состоит в том, чтобы выразить U из первого уравнения в (1.11):

$$U = A^{-1}(F - B^T P), \quad (1.12)$$

и подставить (1.12) во второе уравнение в (1.11). Тогда мы получаем:

$$\left(\frac{1}{\tau} BA^{-1}B^T + C \right) P = \frac{1}{\tau} BA^{-1}F + \frac{1}{\tau} G = F^*. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) может быть решено различными итерационными методами. Прямое решение невозможно, так как невозможно прямое вычисление матрицы $BA^{-1}B^T$.

Прежде всего обозначим оператор Шура как $\mathbb{S} = \frac{1}{\tau} BA^{-1}B^T + C$. Его симметрия позволяет использовать все итерационные методы вплоть до самого быстрого метода сопряженных градиентов. Если матрица (1.13) несимметрична, то тем не менее можно использовать

менее эффективные итерационные методы. Общий двухслойный итерационный метод имеет вид:

$$\mathbb{B} \frac{P^{s+1} - P^s}{\tau^{s+1}} = \mathbb{S} P^s + F^*. \quad (1.14)$$

Скорость сходимости процесса (1.14) зависит от выбора предобуславливателя \mathbb{B} . Его можно эффективно выбрать в таком виде, чтобы он был спектрально эквивалентен оператору \mathbb{S} [10]. Спектральная эквивалентность означает выполнение следующих неравенств:

$$0 < \gamma_1 \mathbb{B} \leq \mathbb{S} \leq \gamma_2 \mathbb{B} \quad (1.15)$$

с независимыми от сетки границами γ_1, γ_2 . Оказалось, что выбор \mathbb{B} в виде

$$\mathbb{B} = \frac{1}{\tau} E + C \quad (1.16)$$

обеспечивает спектральную эквивалентность. В самом деле, \mathbb{B} отличается от \mathbb{S} так же, как $BA^{-1}B^T$ отличается от тождественного оператора E . На самом деле имеет место следующая последовательность неравенств. Прежде всего предположим, что матрица A спектрально эквивалентна КЭ дискретизации дифференциального оператора Лапласа C_0 . Эта эквивалентность обеспечивается неравенствами:

$$c_1 C_0 \leq A \leq c_2 C_0,$$

где c_1, c_2 – оценки для тензора упругости четвертого порядка:

$$c_1 (\nabla \mathbf{w})^T : \nabla \mathbf{w} \leq \nabla \mathbf{w} : \mathbf{C}^d : \nabla \mathbf{w} + \boldsymbol{\sigma}^{eff} : [(\nabla \mathbf{w})^T \cdot \nabla \mathbf{w}] \leq c_1 (\nabla \mathbf{w})^T : \nabla \mathbf{w}$$

для любой функции \mathbf{w} . Как следствие (1.16), запишем неравенства в терминах обратных A^{-1} и C_0^{-1} :

$$\frac{1}{c_2} C_0^{-1} \leq A^{-1} \leq \frac{1}{c_1} C_0^{-1}.$$

Спектральная эквивалентность $BC_0^{-1}B^T$ тождественному оператору E означает:

$$0 < mE \leq BC_0^{-1}B^T \leq E.$$

Тогда мы имеем:

$$\frac{m}{c_2} E \leq BA^{-1}B^T \leq \frac{1}{c_1} E. \quad (1.17)$$

Наконец, объединяя неравенства (1.17) с определениями \mathbb{S} и \mathbb{B} (1.16), приходим к

$$\min\{m/c_2, 1\}\mathbb{B} \leq \mathbb{S} \leq \max\{1/c_1, 1\}\mathbb{B},$$

что означает спектральную эквивалентность \mathbb{S} и \mathbb{B} в виде (1.15) с оценками

$$\gamma_1 = \min\{m/c_2, 1\}, \quad \gamma_2 = \max\{1/c_1, 1\}. \quad (1.18)$$

Важно подчеркнуть, что скорость сходимости любого итерационного процесса определяется соотношением γ_1/γ_2 . Это означает, что скорость не зависит от шага τ по времени и коэффициента проницаемости k .

Далее мы опишем всю итерационную схему на каждом временном шаге для удобства в терминах дифференциальных операторов. Алгоритм разделен на две части в соответствии с физическими процессами, как указано выше. Итерационный метод становится двухуровневым методом. Внутренняя итерационная процедура представляет собой описанный выше метод типа Удзавы, предложенный для задачи фильтрации в [11]:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{C}^d(\hat{\mathbf{u}}^{m-1}) : \operatorname{grad} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{m,s}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^{eff}(\hat{\mathbf{u}}^{m-1}) \cdot \operatorname{grad} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{m,s-1}) + \rho^{m-1} \Delta \mathbf{f} = \alpha(n^{m-1}) \operatorname{grad} \Delta \hat{p}^{m,s-1} \\ -n^{m-1} \operatorname{div} \left(\frac{k(n^{m-1})}{n^{m-1} \mu_f} \nabla (\hat{p}^{m-1} + \Delta \hat{p}^{m,s}) \right) = \nabla \cdot \frac{\Delta \hat{\mathbf{u}}^{m,s}}{\Delta t} + n \beta_f \frac{\Delta \hat{p}^{m,s}}{\Delta t} \end{cases}$$

Здесь m и s – номер шага по времени и номер внутренней итерации соответственно. Это итерационный процесс внутреннего уровня.

Внешний процесс заключается в уточнении пористости и перемещений по обратному методу Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n^{m,r}}{\Delta t} &= (1 - n^{m,s}) \nabla \cdot \frac{\Delta \mathbf{u}^{m,r-1}}{\Delta t}, \quad \rho^{m,r} = (1 - n^{m,r}) \rho_s + n^{m,r} \rho_f \\ \operatorname{div}(\mathbf{C}^d(\hat{\mathbf{u}}^{m,r-1}) : \operatorname{grad} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{m,r}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^{eff}(\hat{\mathbf{u}}^{m,r-1}) \cdot \operatorname{grad} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{m,r}) + \rho^{m,r} \Delta \mathbf{f} &= \alpha(n^{m,r}) \operatorname{grad} \Delta \hat{p}^m \end{aligned}$$

где r – номер внешней итерации.

Предложенная модель была реализована в собственном программном коде и использовалась для моделирования упругопластического деформирования водонасыщенного грунта под нагрузкой при оттоке жидкости и гиперупругого деформирования биологического материала, насыщенного кровью или плазмой.

Ниже приводятся результаты вычислительных экспериментов решения линейной задачи для подтверждения приведенной выше теоретической скорости сходимости. Согласно (1.18) скорость сходимости зависит от отношения γ_1/γ_2 . Поэтому она не зависит от k . Согласно (1.11) она не должна зависеть от шага дискретизации τ , поскольку (1.11) содержит произведение $k\tau$.

Были произведены вычислительные тесты для оценки предложенного предобуславливателя \mathbb{B} . Проводилось сравнение $\mathbb{B} = \frac{\kappa}{\tau} \mathbf{E} + \mathbf{C}$ с $\mathbb{B} = \mathbf{C}$. Последний случай соответствует $\kappa = 0$. Решалась задача о вдавлении штампа. Самая мелкая конечно-элементная сетка изображена на рис. 1.1, а деформированная сетка – на рис. 1.2. Выбирались следующие параметры сетки: А – 11x11x11, В – 21x21x21, С – 31x31x31, D – 41x41x41. Безразмерные параметры задачи представлены в таблице 1.1

Таблица 1.1

K	ν	ε	τ
1	0.4	0.00001	0.5

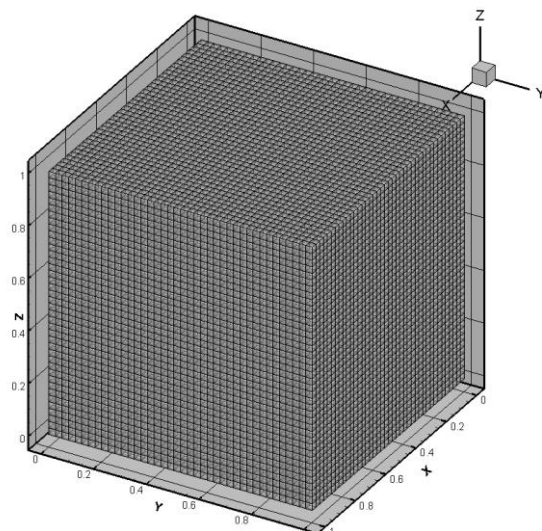


Рисунок 1.1 – Конечно-элементная сетка 41x41x41.

В ней обозначено: K – объемный модуль, ν – коэффициент Пуассона, ε – точность, определяющая сходимость итераций, τ – шаг дискретизации по времени.

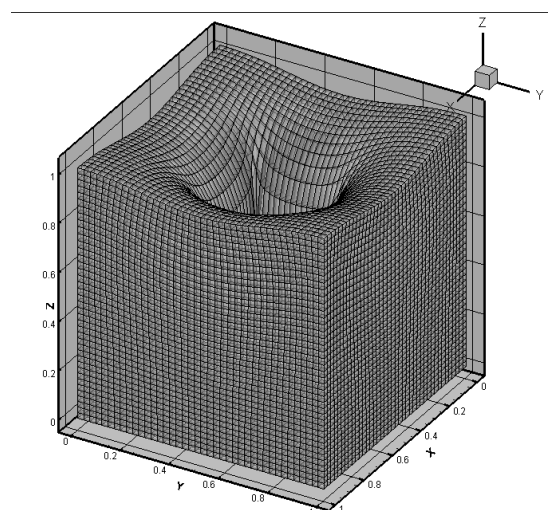


Рисунок 1.2 – Деформированная конечно-элементная сетка 41x41x41.

Таблица 1.2

		$\kappa = 0$				
k		100	10	1	0.1	0.01
A		9	9	33	нет сход	нет сход

В таблице 1.2 приведено число итераций, достаточных для достижения точности ε при параметре $\kappa = 0$. Видно, что при уменьшении коэффициента фильтрации k

сходимость нарушается. В таблице 1.3 аналогично приведено число итераций для параметра $\kappa = 0.5$.

Таблица 1.3

		$\kappa = 0.5$				
k		100	10	1	0.1	0.01
A		9	9	9	11	нет сход
B				9	10	
C				13	14	
D			9	16	16	

Можно заметить, что сходимость также нарушается, но для значительно меньшего значения κ . Для $\kappa < 0.1$ сходимость итераций имеет место, и скорость сходимости почти не зависит от κ .

Нарушение сходимости при малых $\kappa < 0.1$ может быть вызвано влиянием ошибок округления при решении линейных систем прямым методом. Таким образом, в целом подтверждается теоретический вывод, что сходимость не зависит от коэффициента фильтрации κ .

Приведенная ниже таблица 1.4 демонстрирует, что скорость сходимости не зависит от шага дискретизации по времени. Из таблицы видно, что изменение шага дискретизации по времени не влияет на скорость сходимости.

Таблица 1.4

		$\kappa = 0.1$		
τ	$\nu = 0.4$	0.5	5	50
A		9	9	8

Таким образом, сходимость слабо зависит от шагов сетки по координатам и по времени. Последнее верно. Правда, последнее верно, если шаг больше некоторого предельного значения. Приведенная ниже таблица 1.5 дополнительно подтверждает, что сходимость зависит от произведения $k\tau$, если оно слишком мало.

Таблица 1.5

		$\nu = 0.3$	
$\tau \backslash k$		0.1	0.01
50		6	16
5		16	>100

Приведем ниже также таблицы, иллюстрирующие зависимость скорости сходимости от других параметров. Таблица 1.6 демонстрирует зависимость скорости сходимости от объемного модуля.

Таблица 1.6

K	k	D
1	0.1	11
10	0.1	45
100	0.1	>100

Ясно видно, что с ростом объемного модуля K сходимость ухудшается. Таблица 1.7 показывает сильную зависимость сходимости от коэффициента Пуассона. Данные приведены для $\tau = 0.5$.

Таблица 1.7

сетка A	K=1	k=0.1
0.4	0.35	0.32
9	25	>100

При $k=0.1$ для $\nu = 0.32$ сходимость отсутствует. Однако оказывается, сходимость улучшается с увеличением τ . Из таблицы видно, что увеличении шага τ в десять раз сходимость имеет место быть при итерационном параметре $\kappa = 0.5$. Однако при $\kappa = 0$ сходимости, конечно, нет.

Таблица 1.8

$\tau = 5$	k=0.1	$\nu = 0.3$
κ	0.5	0
A	16	>>100

В заключении этой части отчета, можно сказать, что улучшенный предобуславливатель действительно улучшает сходимость. Также можно заметить, что расчеты подтверждают теорию, но и добавляют различные аспекты относительно характера сходимости, не улавливаемые теоретически рассмотрением.

2 Экспериментальное определение материальных параметров модели консолидации

Для определения параметров модели консолидации были проведены испытания грунта на автоматизированном комплексе АСИС (ООО НПП «Геотек»). Эксперименты проводились для песка мелкозернистого, хорошо отсортированного, кварцевого. Перед испытаниями песок подвергался утрамбовке до определенного значения плотности. Таким

образом, во всех опытах первоначальная плотность сухого песка (ρ_d) была равна 1.76 г/см³, плотность материала зерен (ρ_s) – 2.59 г/см³, начальный коэффициент пористости (e_0) – 0.47, влажность полностью водонасыщенного песка (W) – 18%.

2.1 Определение объемных модулей



а

б

Рисунок 2.1 – Прибор компрессионного сжатия (а) и сборка комплекса АСИС для испытаний на многоплоскостной срез (б) (ООО НПП «Геотек»).

Для определения объемных модулей $K_r(\theta)$, проводились испытания водонасыщенного песчаного грунта на компрессионное сжатие (рисунок 2.1 (а)). Эксперименты проводились при непрерывно растущей вертикальной нагрузке с постоянной скоростью деформации. Во время опытов вода свободно отфильтровывалась через перфорированные накладки на верхнем и нижнем торцах кольца с грунтом. Для примера приведем результаты испытаний водонасыщенного песка при скорости деформации 0.0022 с⁻¹.

В результате экспериментов в одометре были получены диаграммы деформирования водонасыщенного песка (зависимость вертикального напряжения σ_{11} от вертикальной деформации ε_{11}). На диаграммах были выделены три прямолинейных участка, для которых были рассчитаны одометрические модули деформации E_{oed} , согласно ГОСТ 12248.4-2020 «Грунты. Определение характеристик деформируемости методом компрессионного сжатия» [12] (рисунок 2.2, таблица 2.1):

$$E_{oed}^i = \Delta\sigma_{11}^i / \Delta\varepsilon_{11}^i.$$

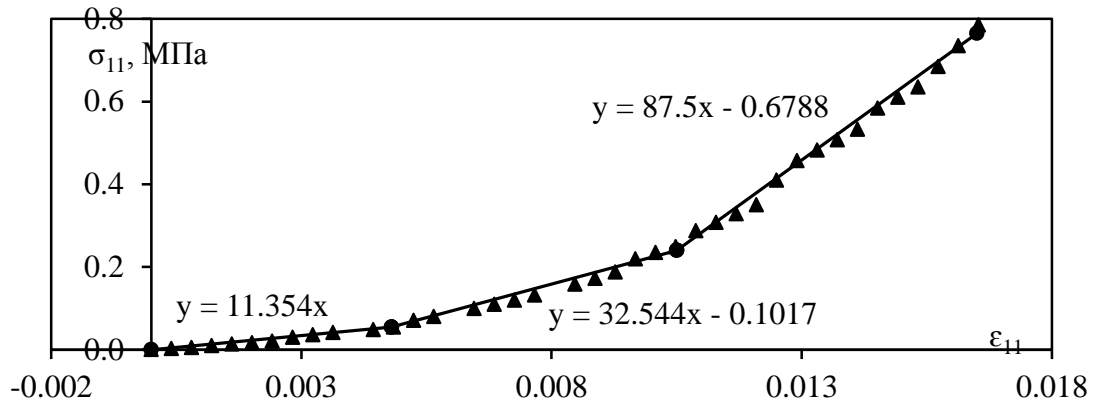


Рисунок 2.2 – Зависимость вертикального напряжения σ_{11} от вертикальной деформации ε_{11} (при испытаниях в одометре прибора компрессионного сжатия)

Таблица 2.1 – Деформационные свойства водонасыщенного песчаного грунта, вычисленные по результатам экспериментов на приборе компрессионного сжатия

Интервалы вертикального напряжения в одометре $\sigma_{11}^i - \sigma_{11}^{i+1}$, МПа	Интервалы вертикальной деформации в одометре $\varepsilon_{11}^i - \varepsilon_{11}^{i+1}$	Одометрический модуль деформации E_{oed}^i , МПа	Модуль общей деформации E_k^i , МПа
0 – 0.055	0 – 0.0048	11.4	7.9
0.055 – 0.240	0.0048 – 0.0105	32.5	22.7
0.240 – 0.765	0.0105 – 0.0165	87.5	61.1

Интервалы объемного напряжения $\sigma^i - \sigma^{i+1}$, МПа	Интервалы объемной деформации $\theta^i - \theta^{i+1}$	Объемный модуль деформации K^i , МПа
0 – 0.035	0 – 0.0048	7.3
0.035 – 0.155	0.0048 – 0.0105	21.1
0.155 – 0.495	0.0105 – 0.0165	56.6

По значениям одометрического модуля деформации E_{oed} вычислялись значения модуля общей деформации E_k (или модуль деформации по результатам компрессионных испытаний) по формуле:

$$E_k = E_{oed} \cdot \beta,$$

где β – коэффициент, учитывающий отсутствие поперечного расширения грунта в компрессионном приборе:

$$\beta = (1 + \nu)(1 - 2\nu) / (1 - \nu),$$

где ν – коэффициент поперечной деформации.

Для полностью водонасыщенного песка мы принимали $\beta = 0.7$ ($\nu = 0.32$). Далее объемные модули деформации K рассчитывались по формуле:

$$K = E_k / (3(1 - 2\nu)).$$

Соответствующие границы интервалов объемных напряжений $\sigma = \sigma_{ii} / 3$ пересчитывались по формуле:

$$\sigma^i = \sigma_{11}^i \cdot \beta / (3(1 - 2\nu)).$$

Результаты определения объемных модулей деформации показаны на рисунке 2.3 и в таблице 2.1.

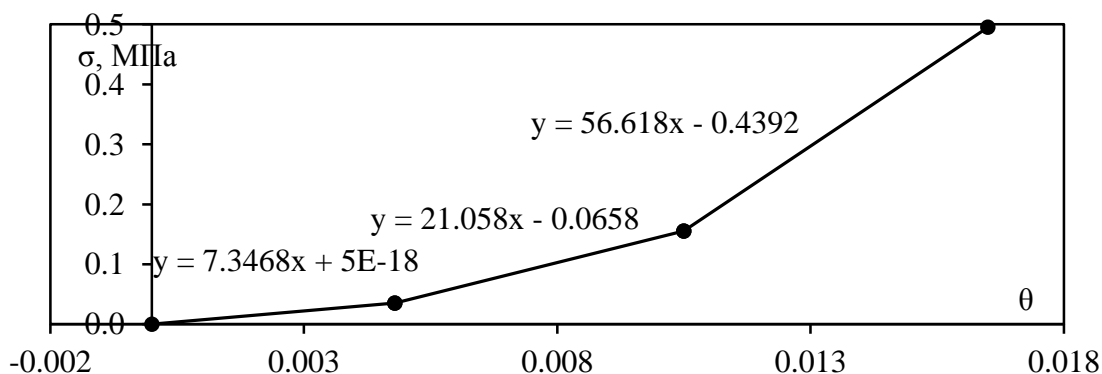


Рисунок 2.3 – Зависимость объемного напряжения σ от объемной деформации θ

2.2 Определение прочностных характеристик на сдвиг

Определение прочностных характеристик на сдвиг (угла внутреннего трения φ и сцепления c) песчаного грунта определялись с помощью установки простого сдвига (многоплоскостного среза) ООО НПП «Геотек» (рисунок 2.1 (б)). Комплект для испытаний методом простого сдвига (рисунок 2.1 (б)) включает сдвиговую коробку, состоящую из верхней неподвижной и нижней подвижной кареток, что обеспечивает

сохранение направления действия вертикальной силы на протяжении всего опыта. Между нижней и верхней кареткой располагается стопка тонких полированных колец, между которыми отсутствует жесткая кинематическая связь. Конструктивно прибор представляет собой стопку колец круглой формы, внутри которых в эластичной оболочке располагается образец. В ходе испытания происходит сдвиг по множественным параллельным поверхностям, в результате чего базой измерения вертикальных перемещений становится практически полная высота образца [13,14]. Проведение лабораторных испытаний и обработка результатов проводились в соответствии с ГОСТ 12248.1-2022 «Грунты. Определение характеристик прочности методом простого сдвига (вторая редакция)» [15].

Испытания песчаного грунта проводились в кинематическом режиме приложения сдвигающей нагрузки с заданной постоянной скоростью сдвига по схеме консолидировано-дренированного сдвига (КД) (с предварительным уплотнением образца вертикальной нагрузкой при открытом дренаже). Консолидация образцов перед испытанием на сдвиг проводилась в одну ступень при различных значениях эффективного вертикального напряжения консолидации (σ_c): 0.05 МПа и далее через $\Delta\sigma_c = 0.05$ МПа до $\sigma_c^{\max} = 0.5$ МПа. За окончание испытаний принимают момент, при котором срезающая нагрузка достигнет максимального значения (с последующим снижением или сохранением постоянного значения) или когда горизонтальные перемещения составят не менее 20% от диаметра (в зависимости от того, что наступит раньше).

Для примера приведем результаты определения прочностных свойств в ходе испытаний на многоплоскостной срез водонасыщенного песка для скоростей перемещения нижней каретки 0.25; 0.5 и 1 мм/с (рисунок 2.4, таблица 2.2).

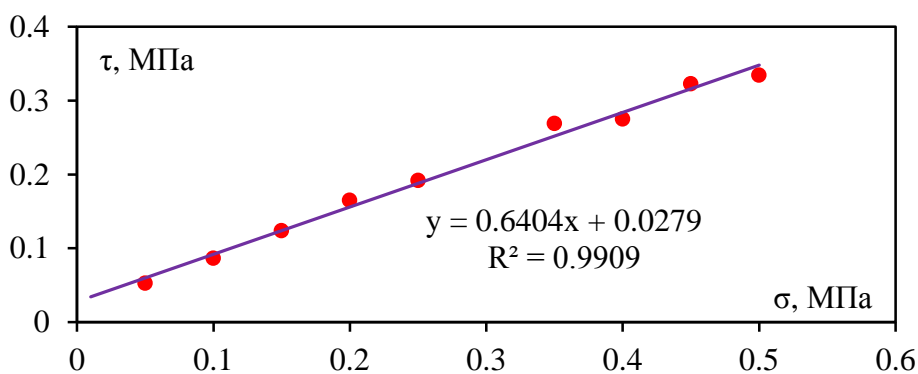


Рисунок 2.4 – Зависимость горизонтальных срезающих напряжений τ от вертикальных напряжений σ при испытаниях на многоплоскостной срез при скорости перемещения нижней каретки 1 мм/с

Таблица 2.2 – Прочностные свойства водонасыщенного песчаного грунта

Скорость деформации среза, мм/с	φ	c , МПа
0.25	34	0.019
0.5	33	0.025
1	33	0.028

3 Определение эффективных свойств грунтов (материальных параметров модели) вычислительным методом на основе изображений компьютерной томографии

3.1 Теоретические аспекты

В последнее время для получения моделей реальной структуры пористых материалов широко используется метод компьютерной томографии. Будет показано, что 3D модели, построенные на основе рентгеновских изображений, позволяют реалистично моделировать эффективные свойства пористых геокомпозигов. Численное моделирование особенно значимо и актуально при оценке свойств грунтов, которые сложно определять экспериментально, например, параметра Био [16], [17].

Параметр Био (тензор передачи порового давления) α_{ij} входит в формулу расчета эффективных напряжений [18], [19]:

$$\langle \sigma_{ij}^{\text{eff}} \rangle = \langle \sigma_{ij}^{\text{full}} \rangle + \alpha_{ij} \langle p \rangle.$$

где $\langle p \rangle$ – среднее давление жидкости (положительная величина при сжатии),

$\langle \sigma_{ij}^{\text{full}} \rangle$ – полные напряжения.

Угловые скобки означают осреднение по объему. Для изотропных пород параметр Био – это скалярный коэффициент α [18]:

$$\langle \sigma_{ij}^{\text{eff}} \rangle = \langle \sigma_{ij}^{\text{full}} \rangle + \alpha \langle p \rangle \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1, i = j$; $\delta_{ij} = 0, i \neq j$. Коэффициент α варьирует от 0 до 1 и зависит от свойств грунта (пористости, формы и ориентации пор).

В [20]-[22] эмпирически была предложена формула для вычисления изотропного коэффициента передачи порового давления:

$$\alpha = 1 - \frac{K^{\text{eff}}}{K_s}, \quad (3.1)$$

где K^{eff} и K_s – объемные модули расширения-сжатия скелета (сухого грунта) и материала скелета соответственно.

Строгий математический вывод формулы (3.1) приведен в [23], [24]. Многие экспериментальные и вычислительные методы определения α для макро изотропных грунтов используют формулу (3.1). Они будут рассмотрены ниже.

В [25] выведена формула для расчета тензорного параметра Био для структурно анизотропных материалов с однородной матрицей:

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} - C_{ijkl} S_{klmn}^s, \quad (3.2)$$

где C_{ijkl} – эффективные модули упругости,

S_{klmn}^s – компоненты тензора податливостей материала скелета.

Однако практическое применение формулы (3.2) пока затруднено. В литературе предлагаются способы определения компонент тензора Био для частных случаев структурной анизотропии (например, ортотропии, трансверсальной изотропии) пористых материалов, состоящих из однородной матрицы [25]-[27]. Важно подчеркнуть, что формула (3) получена для однородной матрицы. Для общего случая неоднородности и анизотропии экспериментальные способы определения тензора Био еще не разработаны, поэтому вычислительные методики актуальны и практически значимы. Предлагаемый в настоящем исследовании способ, основанный на методе осреднения, позволяет вычислять компоненты тензора Био для случая общей анизотропии пористого геокомпозита с неоднородным материалом скелета.

В работе предлагается способ определения тензора передачи порового давления также на основе асимптотического метода осреднения. Вычислительная методика может быть оценочным способом определения эффективных свойств пород, если известна структура порового пространства и упругие свойства компонентов матрицы. Минеральный состав пород и структура порового пространства изучаются по шлифам и по изображениям, полученным с помощью рентгеновской томографии, а свойства минералов и пород, из которых состоят исследуемые образцы, приведены в соответствующих справочниках и кадастрах.

Используемый нами способ определения эффективных модулей упругости и тензорного параметра Био основывается на асимптотическом осреднении уравнения равновесия неоднородной упругой пористой среды [16], [17]. Более точно можно сказать, что используется асимптотическое разложение перемещения в первом приближении и определение эффективных свойств исходя из формулировки краевой задачи в представительной области со специальными граничными условиями. Для модулей упругости эта задача хорошо известна. Мы же формулируем аналогичную задачу для определения коэффициента Био.

Именно, для определения эффективных модулей упругости пористой среды в представительной области V_{RVE} нужно решить краевую задачу со специальным граничным условием в виде линейной функции координат на внешней границе области Σ_{RVE} и нулевым давлением p на границе пор Σ_{int} и на внешней границе Σ_{RVE} [16], [17]:

$$\begin{aligned} \left(C_{ijkl}(\xi) u_{k,l}^1(\xi) \right)_{,j} &= 0, \quad \xi \in V_{RVE}, \quad u_k = \varepsilon \varepsilon_{kq}^0 \xi_q = \varepsilon_{kq}^0 x_q, \quad \xi \in \Sigma_{RVE}, \\ C_{ijkl}(\xi) u_{k,l}^1(\xi) n_j &= 0, \quad \xi \in \Sigma_{int}, \quad p = 0, \quad \xi \in \Sigma_{RVE} \cup \Sigma_{int}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В результате решения этой задачи рассчитываются упругие модули по формулам:

$$C_{ij\alpha\beta}^{\text{eff}} = \frac{\langle \sigma_{ij} \rangle}{\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle} = \frac{\langle C_{ijkl} u_{k,l}^1 \rangle}{\varepsilon_{\alpha\beta}^0}, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V_{\text{RVE}}} \int_{V_{\text{RVE}}} \sigma_{ij} dV.$$

Для изотропного материала можно рассчитать модуль упругости E^{eff} , коэффициент Пуассона ν^{eff} и объемный модуль расширения-сжатия K^{eff} по формулам теории упругости:

$$C_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{\text{eff}} = \lambda^{\text{eff}} + 2\mu^{\text{eff}}, \quad C_{\beta\beta\alpha\alpha}^{\text{eff}} = \lambda^{\text{eff}}, \quad \nu^{\text{eff}} = \frac{\lambda^{\text{eff}}}{2(\lambda^{\text{eff}} + \mu^{\text{eff}})};$$

$$E^{\text{eff}} = 2\mu^{\text{eff}} (1 + \nu^{\text{eff}}), \quad K^{\text{eff}} = \lambda^{\text{eff}} + \frac{2\mu^{\text{eff}}}{3}.$$

где λ^{eff} и μ^{eff} – упругие модули Ламе.

Далее можно рассчитать коэффициент Био по формуле (3.1).

Для определения компонент тензора передачи порового давления α_{ij} в представительной области V_{RVE} формулируется краевая задача, где на границе пор Σ_{int} задается постоянное давление жидкости p_0 , а граница представительной области Σ_{RVE} закреплена [16], [17]:

$$\left[C_{ijkl}(\xi) u_{k,l}^2 \right]_{,j} = 0, \quad \xi \in V_{\text{RVE}}; \quad C_{ijkl}(\xi) u_{k,l}^2 n_j = -p_0 n_i(\xi), \quad \xi \in \Sigma_{\text{int}}; \quad u_k^2 = 0, \quad \xi \in \Sigma_{\text{RVE}}. \quad (3.4)$$

Компоненты эффективного тензорного параметра Био рассчитываются по формуле:

$$\alpha_{ij}^{\text{eff}} = \frac{\langle \sigma_{ij} \rangle}{p_0} = \frac{\langle C_{ijkl} u_{k,l}^2 \rangle}{p_0}.$$

Этот способ позволяет определять компоненты тензора Био для случая общей анизотропии грунта с неоднородным материалом скелета. Решения задач (3.3) и (3.4) можно осуществлять с помощью конечно-элементной программы.

3.2 Примеры определения эффективных свойств различных типов скальных грунтов

Вычисление эффективных упругих модулей и компонент тензора Био выполнялись на моделях различных типов скальных грунтов – доломита, известняка, гиалокластита и базальта. В расчетах задавались динамические упругие свойства материала матрицы по литературным данным.

Известняк доломитистый состоит из кальцита (92%) с примесями доломита (6.5%), кварца и глинистых минералов (1.5%). В расчетах материал скелета считался однородным с упругими свойствами: $E = 50$ ГПа, $\nu = 0.33$. Доломит чистый состоит из минерала доломита (98%), кальцита (1.5%), кварца и глинистых минералов (1.5%). В расчетах задавались следующие упругие свойства материала скелета: $E = 70$ ГПа, $\nu = 0.33$.

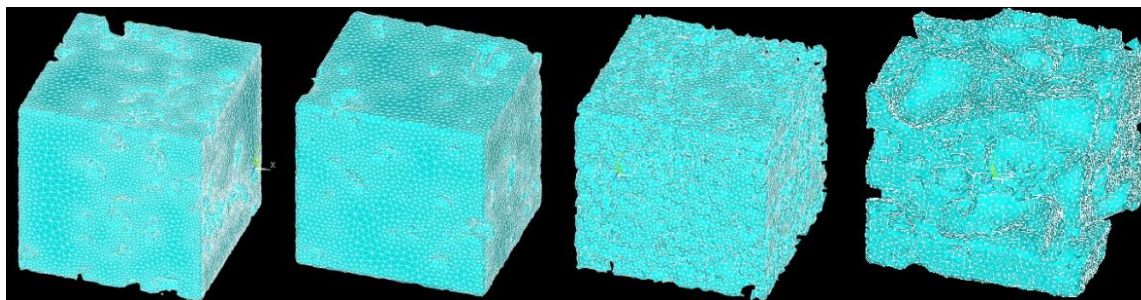
Гиалокластиты – вулканогенно-осадочные породы из южных и юго-западных районов Исландии, образовались в процессе застывания и кристаллизации магматического расплава при вулканических извержениях в подводных условиях [28]. Упругие свойства материала скелета в расчетах: $E = 12.3$ ГПа, $\nu = 0.35$.

Базальт темно-серого цвета, имеет афировую структуру и пузырчатую текстуру, вкрапленники – плагиоклаз, моноклинный пироксен, оливин, рудные минералы, основная масса состоит из вулканического стекла и микролитов плагиоклазов и пироксенов. Базальт сильно пористый (пористость 45-55%), с многочисленными открытыми неориентированными пораами округлой формы. В расчетах материал скелета принимался макро однородным со свойствами: $E = 45$ ГПа, $\nu = 0.35$.

Для изучения напряженно-деформированного состояния (НДС) скальных грунтов на микроуровне и расчета эффективных свойств использовались 3D модели реальной микроструктуры пород, полученные с помощью рентгеновского компьютерного микротомографа Yamato TDM-1000H-II (МГУ имени М.В. Ломоносова) и оцифровки в программе VG MAX 3.3 в ООО «Совтест-Сервис» (г. Курск). На рисунке 3.1 показаны 3D модели всех изучаемых типов пород. Вычислительные эксперименты проводились на представительных областях (RVE). Представительными областями считаются области, для которых зависимость эффективных свойств (например, модуля Юнга или коэффициента Био) от пористости ложится на одну и ту же кривую с допустимой точностью.

Значения модуля Юнга определялись в ходе вычислительных экспериментов на одноосное сжатие. Значения параметра Био определялись двумя способами: 1) непосредственный расчет компонент тензорного параметра Био при решении локальной

краевой задачи (3.4) и 2) вычисление коэффициента Био для изотропных образцов при решении локальной краевой задачи (3.3) с использованием формулы (3.1).



а б в г
Рисунок 3.1 – Фотографии 3D моделей известняка (а), доломита (б), гиалокластита (в), базальта (г)

Экспериментальные измерения модуля Юнга и параметра Био выполнялись в ходе ультразвукового просвечивания образцов на приборе «Ультразвук» на кафедре инженерной и экологической геологии МГУ имени М.В. Ломоносова.

Как получилось, результаты непосредственного 3D расчета коэффициента Био совпали с результатами 3D расчета по известной формуле и с результатами измерений ультразвуковым методом.

На рисунке 3.2 все зависимости модуля Юнга от пористости по результатам 3D расчетов и экспериментов для доломита, известняка и гиалокластита помещены на один график. Следует отметить, что все зависимости модуля Юнга от пористости для разных типов скальных грунтов аппроксимируются прямыми линиями с хорошей точностью на больших диапазонах пористости.

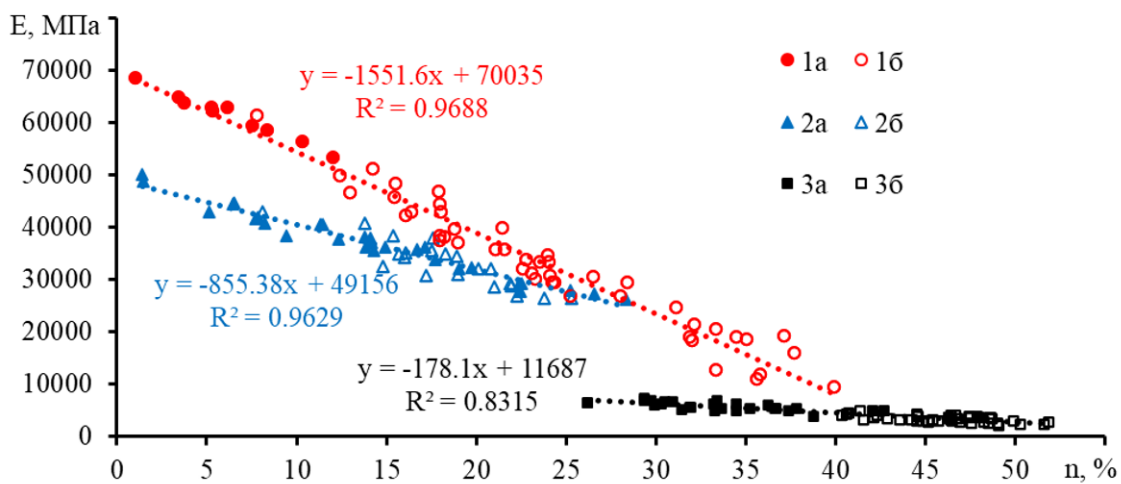


Рисунок 3.2 – Зависимость модуля Юнга от пористости для 1 – доломита, 2 – известняка, 3 – гиалокластита (а – 3D расчеты, б – эксперименты)

На рисунке 3.3 помещены на один график все зависимости коэффициента Био от пористости по результатам 3D расчетов для доломита, известняка, гиалокластита и базальта и экспериментов с использованием формулы (3.1) для гиалокластита. Как видно, все точки легли на одну кривую, которая аппроксимируется полиномом 2-го порядка с хорошей точностью. Можно сделать вывод, что коэффициент Био не зависит от модуля Юнга материала скелета породы.

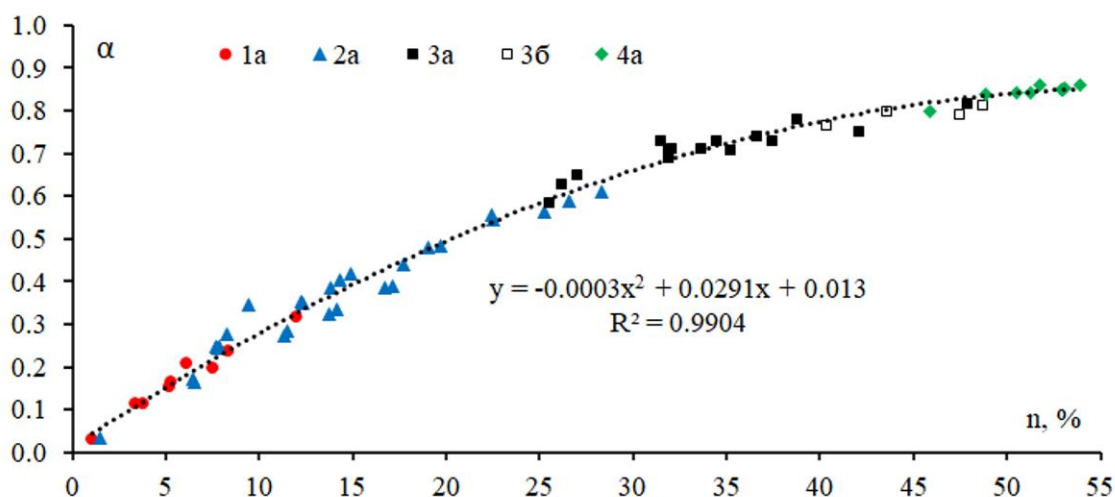


Рисунок 3.3 – Зависимость коэффициента Био от пористости для 1 – доломита, 2 – известняка, 3 – гиалокластита, 4 – базальта (а – 3D расчеты, б – эксперименты)

На рисунке 3.4 показаны результаты 3D расчетов модуля Юнга и параметра Био базальта. Как оказалось, базальт проявляет анизотропию по отношению к модулю Юнга (рисунок 3.4 (а)), причем модуль Юнга в горизонтальном направлении выше, чем в вертикальном, а по отношению к параметру Био базальт не проявляет анизотропию (рисунок 3.4 (б)). Образцы других пород оказались изотропными (значения модуля Юнга и коэффициента Био по разным направлениям отличались не более чем на 5%).

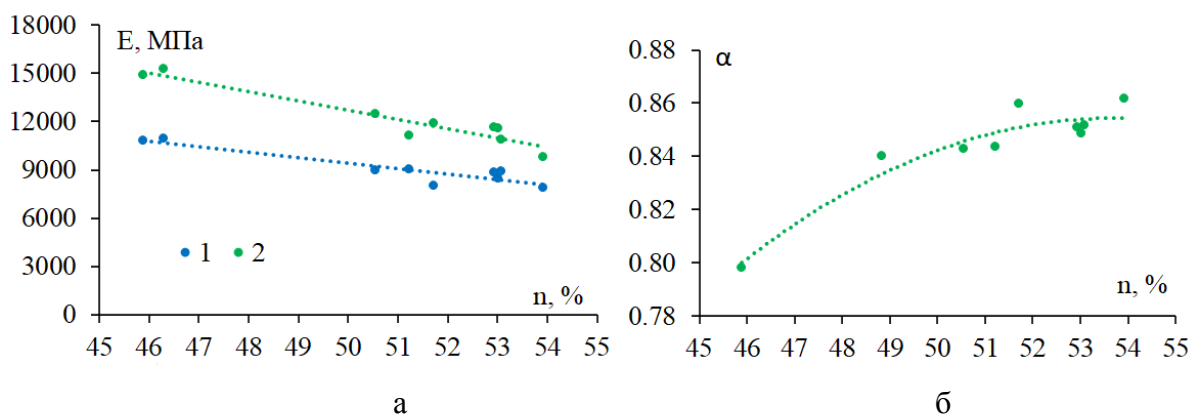


Рисунок 3.4 – Зависимости (а) – модуля Юнга и (б) – коэффициента Био от пористости для базальта по результатам 3D расчетов в направлении: 1 – вертикальном, 2 – горизонтальном

4. Применение нейросетей для прогнозирования материальных параметров грунта

4.1 Теоретические аспекты

Искусственная нейронная сеть (ИНС) – это математическая модель, построенная по принципу функционирования сетей нервных клеток живого организма. ИНС может быть представлена в виде взвешенного графа, вершины которого называются нейронами, а веса ребер называются весами нейронов. Нейроны группируются в слои (рисунок 4.1), слои делятся на три вида: входной, скрытый, выходной. В ходе работы нейронной сети сигнал поступает на входной слой и проходит слева направо через все слои, преобразуясь

определенным образом. Такие нейронные сети называются сетями прямого распространения.

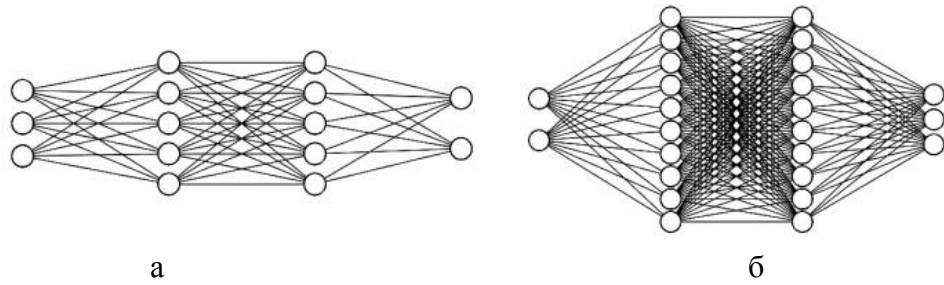


Рисунок 4.1 – Архитектуры нейронных сетей: (а) – два скрытых слоя по 5 нейронов; (б) – два скрытых слоя по 10 нейронов

Для обучения сети используется итерационный процесс, состоящий в корректировке весов нейронов. Для этого применяется обучающая выборка – набор входных данных и соответствующий им набор заранее известных выходных данных.

Нейрон z_k^l с номером k слоя l представляет собой линейную комбинацию поступающих в него сигналов $a_1^{l-1} \dots a_n^{l-1}$, взятых с весами $w_{1k}^l \dots w_{nk}^l$:

$$z_k^l = \sum_{j=1}^n a_j^{l-1} w_{jk}^l. \quad (4.1)$$

Здесь w_{jk}^l означает вес, стоящий на ребре, соединяющем j -й нейрон слоя $l-1$ и k -й нейрон слоя l . К линейной комбинации иногда добавляют смещение b_k , но в данной работе смещение не используется. От линейной комбинации затем берется функция активации $f(z_k^l)$, результат вычисления которой является выходным сигналом нейрона. В данной работе в качестве функции активации на скрытых слоях используется гиперболический тангенс \tanh :

$$a_k^l = f(z_k^l) = \tanh(z_k^l) = \tanh\left(\sum_{j=1}^n a_j^{l-1} w_{jk}^l\right). \quad (4.2)$$

Выбор функции \tanh обусловлен тем, что она дает лучшую сходимость градиентного спуска во время обратного распространения ошибки. В качестве функции активации на выходном слое L используется функция softmax , результатом действия которой является выходной сигнал нейрона k на последнем выходном слое L :

$$a_k^L = \text{softmax}(z_k^L) = \frac{e^{z_k^L}}{\sum_c e^{z_c^L}}. \quad (4.3)$$

Функция softmax преобразует вектор \mathbf{z}^L в вектор \mathbf{a}^L той же размерности, где каждая координата $a_k^L \in [0;1]$ и $\sum a_k^L = 1$. Таким образом, на выходе мы получаем распределение вероятностей. Весь процесс прямого распространения сигнала можно записать через матричные операции:

$$\mathbf{z}^1 = \mathbf{a}^0 \mathbf{w}^1, \quad \mathbf{a}^1 = f^1(\mathbf{z}^1), \quad \mathbf{z}^2 = \mathbf{a}^1 \mathbf{w}^2, \quad \mathbf{a}^2 = f^2(\mathbf{z}^2), \quad \mathbf{z}^3 = \mathbf{a}^2 \mathbf{w}^3, \quad \mathbf{a}^3 = f^3(\mathbf{z}^3)$$

или

$$\mathbf{a}^3 = f^3\left(f^2\left(f^1\left(\mathbf{a}^0 \mathbf{w}^1\right) \mathbf{w}^2\right) \mathbf{w}^3\right).$$

Для корректировки весов нейронов необходимо знать вектор ошибки на выходном слое, то есть разницу между желаемым результатом и полученным. В данной работе в качестве функции ошибки используется перекрестная энтропия E :

$$E(t_k, a_k^L) = -\sum_k t_k \ln a_k^L. \quad (4.4)$$

Здесь t_k – это желаемое распределение, которое имеет вид $\{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}$, а a_k^L – полученное распределение, то есть сигнал на выходе последнего слоя L . Перекрестная энтропия выражает, насколько различны два распределения вероятностей: чем сильнее отличаются распределения, тем больше перекрестная энтропия. Для корректировки весов нейронов во время обучения к каждому весу прибавляется поправка, согласно методу градиентного спуска:

$$\Delta w_{jk}^l = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{jk}^l}. \quad (4.5)$$

В процессе минимизации функции ошибки (4.5) используется итерационный параметр η , называемый шагом градиентного спуска.

Из формулы (4.5) с использованием формул (4.1)-(4.4) получаем поправку к весам нейронов для последнего выходного слоя L :

$$\Delta w_{jk}^L = -\eta (a_k^L - t_k) a_j^{L-1}$$

и для скрытого слоя $l-1$:

$$\Delta w_{ij}^{l-1} = -\eta a_i^{l-2} f'(z_j^{l-1}) \sum_k (a_k^L - t_k) w_{jk}^l.$$

Таким образом, алгоритм вычисляет поправку для весов последнего слоя и далее выражает поправку для веса предыдущего слоя через поправки последнего слоя, и так далее до первого слоя. Вследствие этой особенности вычисления поправок алгоритм называется алгоритмом обратного распространения ошибки.

4.2 Пример использования нейросети

В настоящей работе нейронная сеть, описанная выше, использовалась для прогноза формы пор по данным упругих модулей и пористости гиалокластитов. Обучение нейронной сети проводилось на основе таблицы, содержащей значения модуля Юнга, пористости и формы пор для 40 образцов гиалокластитов (рисунок 4.2 (а)). Нейросеть тестировалась на 10 образцах гиалокластитов, которые не использовались в процессе обучения. Расчеты проводились в программе, написанной на языке Python 3.9.4 с open-source библиотеками NumPy, Matplotlib, PyTorch.

Всего было проведено 1500 итераций обучения и тестирования для архитектур нейросети, включающих 1, 2 или 3 скрытых слоя, по 5, 10 или 20 нейронов в каждом. Точность предсказания на 1500-й итерации для разных архитектур показана в таблице 4.1. Видно, что архитектуры, в которых не меньше 2-х скрытых слоев, выдают 100% точность предсказания.

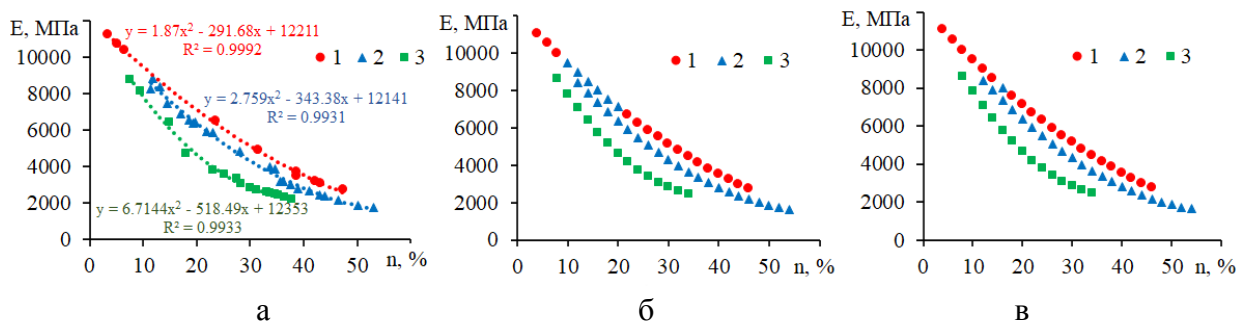


Рисунок 4.2 – График зависимости модуля Юнга гялокластитов от пористости и формы пор: 1 – круглые, 2 – смешанные, 3 – угловатые. (а) – результаты 2D расчетов; расширенное тестирование нейронной сети: (б) – 2 скрытых слоя по 5 нейронов, (в) – 2 скрытых слоя по 10 нейронов

Таблица 4.1 – Точность предсказания для разных архитектур нейросети (%)

Количество скрытых слоев \ Количество нейронов	5	10	20
	1	77.8	77.8
2	100	100	100
3	100	100	100

После обучения нейронной сети было проведено расширенное тестирование двух архитектур, включающих 2 скрытых слоя по 5 и по 10 нейронов в каждом. Результаты вычислительных экспериментов для каждой формы пор были аппроксимированы кривыми 2-го порядка (рисунок 4.2 (а)). На вход нейронной сети подавались точки из этих аппроксимирующих кривых. Результаты тестирования показаны на рисунках 4.2 (б,в). В первом случае для точек кривой, соответствующей круглой форме пор, точность нейронной сети оказалась равной 72,7% (рисунок 4.2 (б)), во втором случае – 95,5% (рисунок 4.2 (в)). Видно, что архитектура с 2-мя скрытыми слоями по 10 нейронов в каждом слое лучше различает круглые и смешанные формы пор. Для точек кривых, соответствующих угловатой и смешанной форме пор, точность нейронных сетей равна 100% (рисунки 4.2 (б,в)).

Таким образом, предложен алгоритм, который позволяет прогнозировать форму пор гялокластитов по значениям пористости и модуля Юнга с помощью нейронных сетей. Результаты могут быть использованы для экспресс-прогнозирования параметра Био, который существенно зависит от формы пор.

5 Численная реализация предложенной модели

5.1 Конечно-элементная модель. Собственная реализация на ФОРТРАНЕ.

Исследование корректности

Вариационные уравнения реализованы в виде конечно-элементной модели. Дискретизация линеаризованных вариационных уравнений равновесия и фильтрации по пространственным координатам осуществлялась с помощью метода конечных элементов (МКЭ). При дискретизации использовались 20-узловые серендиповы квадратичные

элементы (Q2) для аппроксимации приращения перемещений du скелета грунта и 8-узловые элементы трилинейного типа (Q1) для аппроксимации приращения давления воды dp . Решение задачи консолидации реализовано в виде собственного программного кода на языке ФОРТРАН.

Выбор конечных элементов обусловлен тем, что система уравнений равновесия и фильтрации является седловой, а при численном решении дискретизированной седловой системы возникает проблема корректности. Достаточным условием корректности этой системы является LBB-условие, выполнение которого зависит от выбранных при дискретизации конечных элементов для аппроксимации du и dp . Как показывает опыт моделирования седловых задач, аппроксимация квадратичными конечными элементами Q2 перемещений скелета грунта и трилинейными КЭ Q1 давления жидкости обеспечивает корректность численного решения задачи. А выполнение LBB-условия для элементов Q1-Q1 зависит от соотношения шага по времени τ и шага сетки h : численное решение седловой задачи корректно при $\tau/h^2 > const$. Уменьшение τ и, как следствие, нарушение LBB-условия приводит к возникновению ложных осцилляций порового давления, которые появляются на некотором временном шаге и далее усиливаются с каждым шагом по времени, в результате чего решить седловую систему становится невозможно.

Будем решать задачу о действии штампа. Расчетная область имеет форму куба со стороной 1 м. Боковые и нижняя границы области закреплены и непроницаемы. На верхней границе на первом шаге по времени задается перемещение штампа 0.1 м (деформация 10%). Остальная часть верхней границы свободна от напряжений. Вся верхняя граница проницаема, через штамп также может просачиваться жидкость. Штамп – квадратной формы со стороной 0.4 м, действует ровно посередине верхней грани.

Вся область сложена однородным материалом. Свойства грунта, задаваемые в расчетах: $E = 40$ МПа, $\nu = 0.4$, $\gamma_f = 10^4$ кг/(м² · с²), $k_\phi = 5.5 \cdot 10^{-4}$ м/с. В задаче предполагается, что $n = const$, $k_\phi = const$. Общее время действия штампа – 1.3 с, количество шагов по времени – 10.

Для исследования устойчивости решения задачи расчеты проводились при аппроксимации конечными элементами Q2-Q1 и Q1-Q1 (рисунок 5.1) на различных сетках: 11x11x11, 21x21x21, 31x31x31 и 41x41x41 (указано количество узлов по трем направлениям сеток для давления воды).

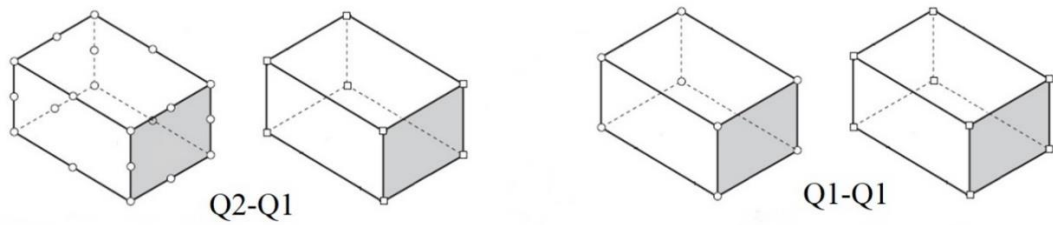
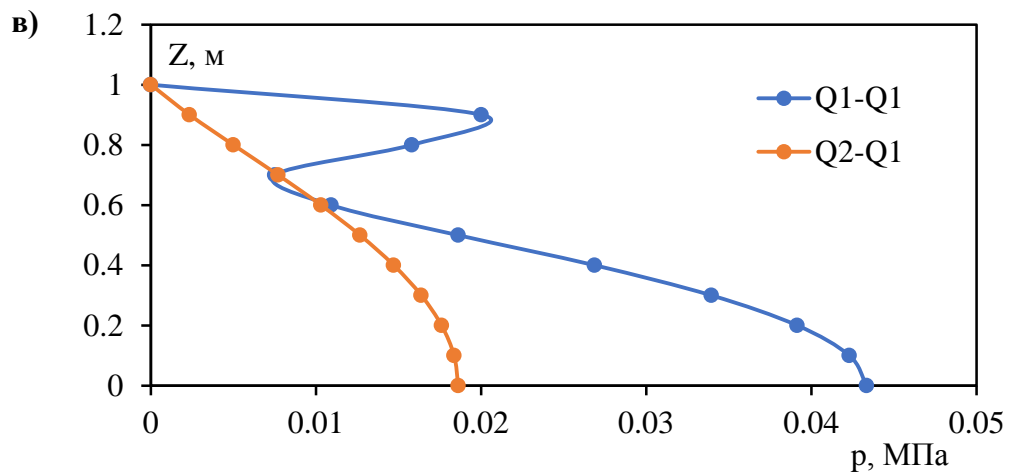
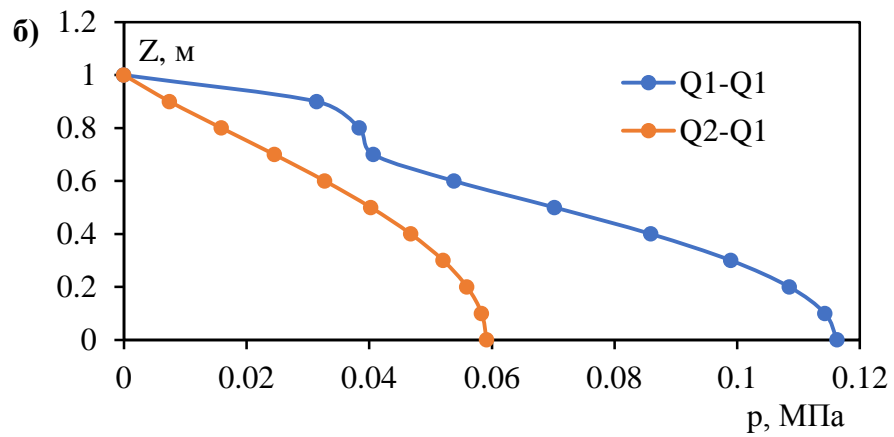
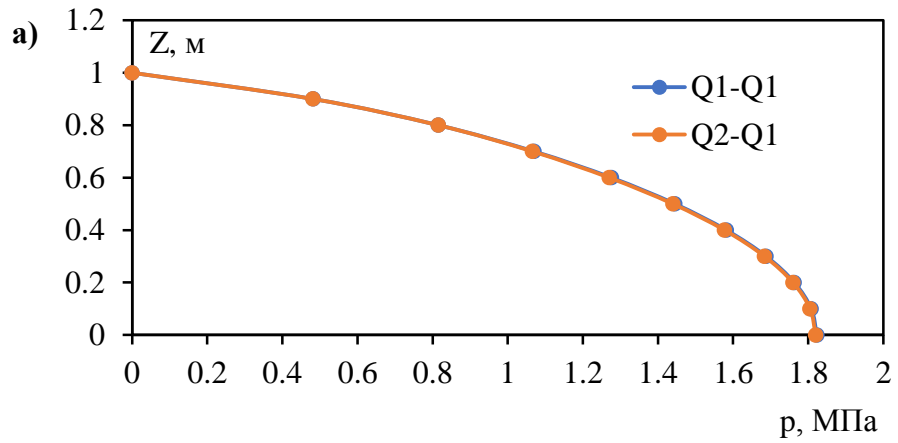


Рисунок 5.1 – Конечные элементы, используемые для моделирования задачи со штампом



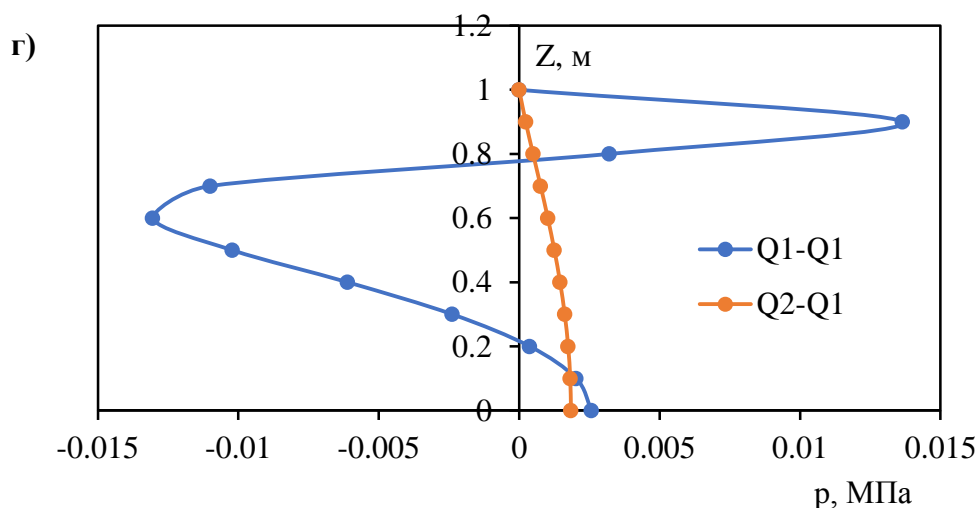
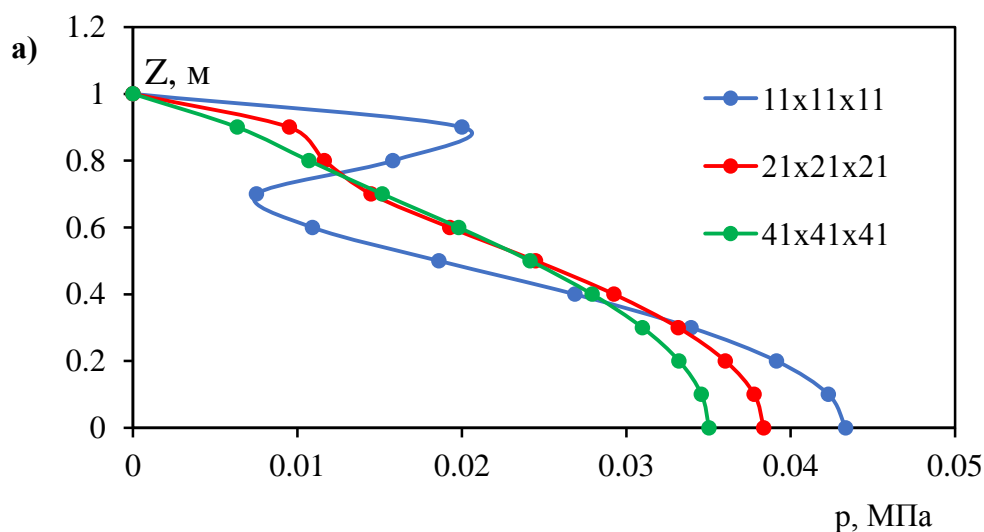


Рисунок 5.2 – Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа: а) на 1-м, б) на 4-м, в) на 5-м и г) на 7-м шагах по времени.

На рисунке 5.2 показаны результаты расчетов задачи со штампом при аппроксимации приращения перемещений и изменения давления воды конечными элементами Q2-Q1 и Q1-Q1 (для сетки $11 \times 11 \times 11$). Как видно, при использовании элементов Q2-Q1 решение задачи устойчиво, давление воды в грунте под серединой штампа в зависимости от времени и от вертикальной координаты изменяется закономерно. А в случае аппроксимации уравнений элементами Q1-Q1 решение неустойчиво, уже на 4-м шаге по времени возникают «ложные» давления (рисунок 5.2 (б)), а на 5-м (рисунок 5.2 (в)) и особенно на 7-м (рисунок 5.2 (г)) шагах по времени осцилляции давления воды очень сильные.



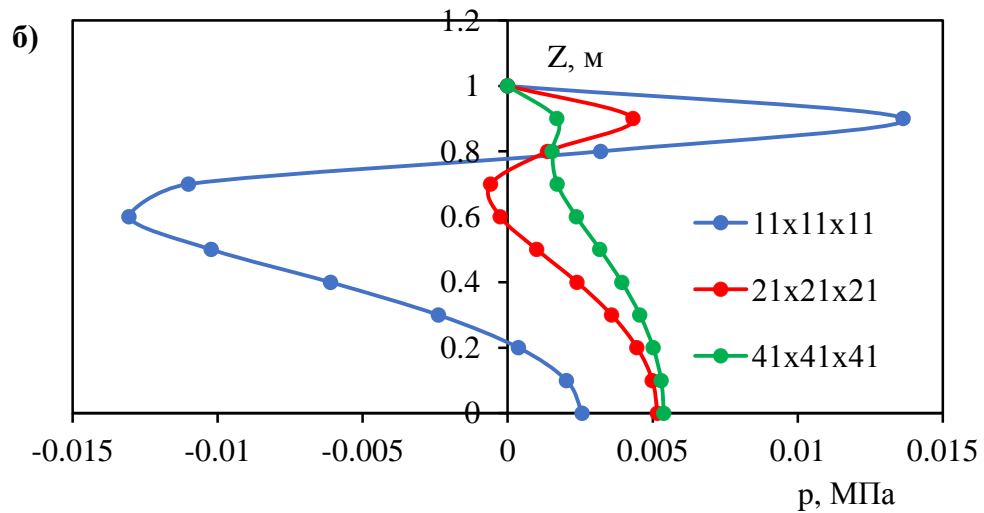
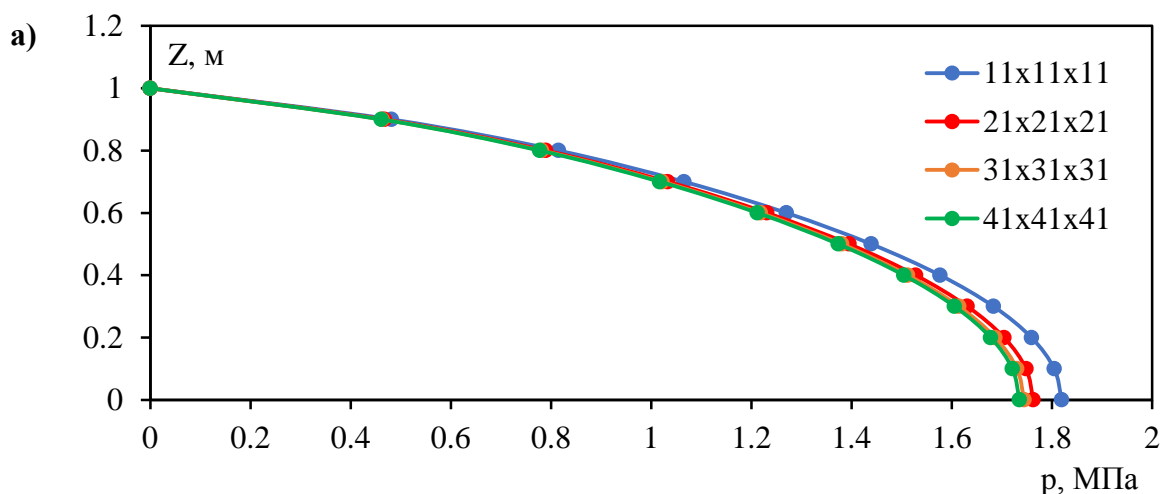


Рисунок 5.3 – Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа: а) на 5-м и б) на 7-м шагах (аппроксимация Q1-Q1)

На рисунке 5.3 показано сравнение результатов расчетов давления воды на линии под серединой штампа для разных сеток при аппроксимации седловой задачи конечными элементами Q1-Q1. Как видно, использование более мелких сеток приводит к более устойчивому решению задачи. Например, на 5-м шаге по времени (рисунок 5.3 (а)) при расчетах на сетке 41x41x41 не наблюдается осцилляций давления воды, на сетке 21x21x21 возникает небольшой изгиб графика, а на сетке 11x11x11 – осцилляции ярко выражены. На 7-м шаге по времени (рисунок 5.3 (б)) при расчетах на сетке 41x41x41 только начинается образование изгиба графика, а на сетках 21x21x21 и особенно 11x11x11 наблюдаются сильные осцилляции.



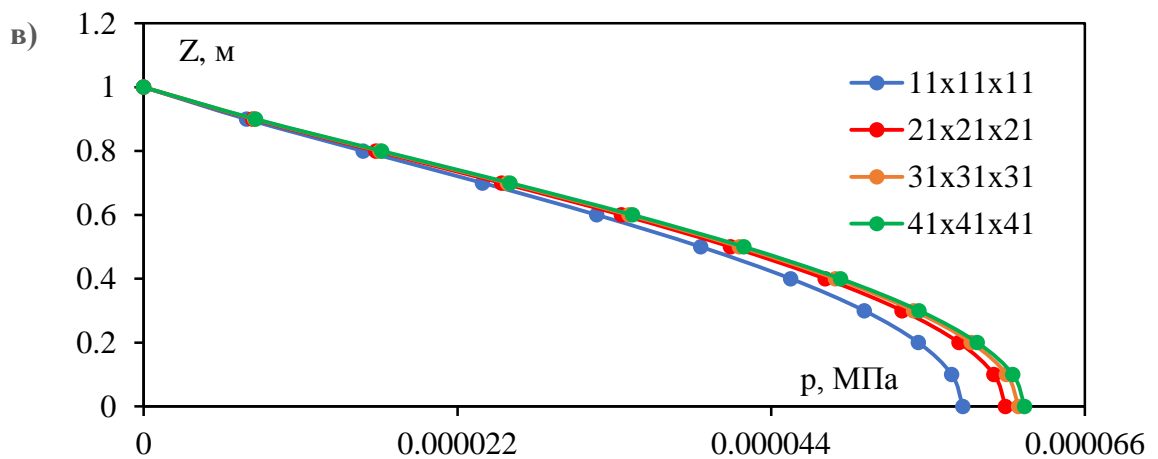
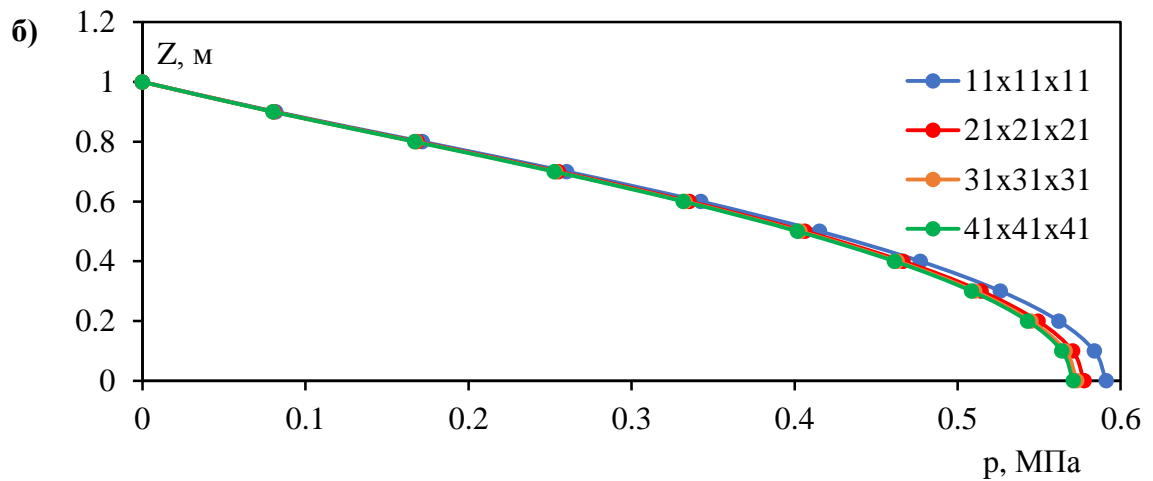


Рисунок 5.4 – Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа: а) на 1-м, б) 2-м и в) 10-м шагах по времени (аппроксимация Q2-Q1)

При аппроксимации седловой задачи консолидации конечными элементами Q2-Q1 решение устойчиво на всех шагах по времени для всех сеток. На рисунке 5.4 показано сравнение решения задачи для разных сеток на 1-м, 2-м и 10-м шагах по времени. Видно, что с измельчением сетки решение сходится. На 4-м, 5-м и 6-м шагах по времени решения на разных сетках практически совпадают.

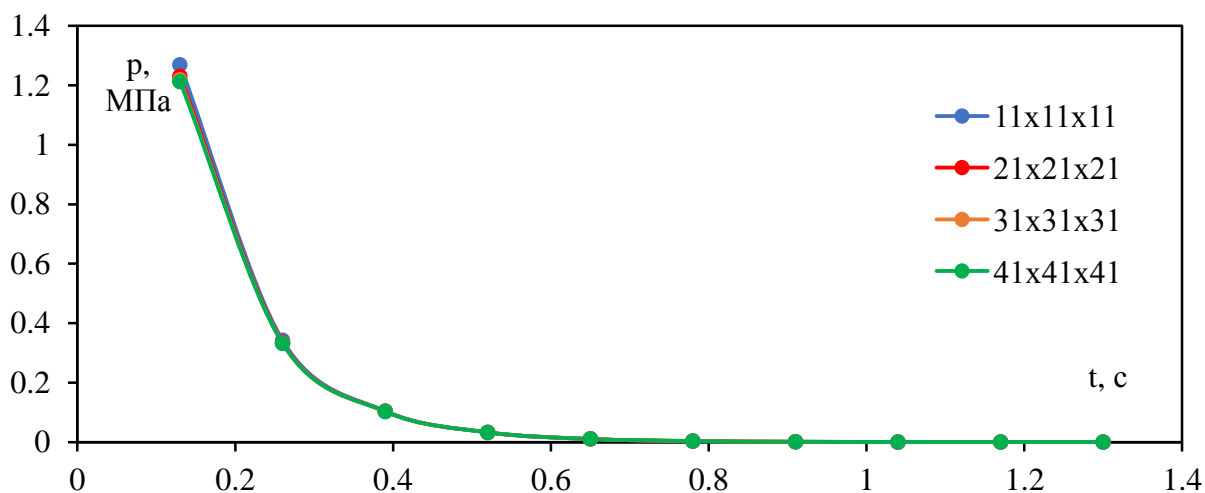


Рисунок 5.5 – Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине 0.4 м (аппроксимация Q2-Q1)

Как видно на рисунке 5.5, при использовании конечных элементов Q2-Q1 решение задачи в точке, расположенной под серединой штампа на глубине 0.4 м, в разные моменты времени совпадает для всех сеток, осцилляций давления воды не возникает.

Следовательно, как показали численные эксперименты, при аппроксимации линейной седловой задачи консолидации конечными элементами Q2-Q1 LBB-условие выполняется, решение задачи устойчиво. А при аппроксимации конечными элементами Q1-Q1 решение неустойчиво, возникают осцилляции давления воды. В этом случае может помочь стабилизация задачи с помощью регулирования соотношения τ/h^2 , определяющего устойчивость решения: нужно уменьшать шаг сетки h или увеличивать шаг по времени τ .

5.2 Численное решение задачи консолидации для пористого гиперупругого материала

Гиперупругая модель представляет собой пример упругого материала, насыщенного жидкостью. Одно из применений гиперупругой модели относится к губчатым резиновым материалам с большим количеством сообщающихся пор. Губчатая резина легко деформируется под нагрузкой, причем скорость деформации зависит от того, насколько быстро вода выдавливается из пор. При снятии нагрузки материал быстро восстанавливает свою первоначальную форму.

Другим примером насыщенного жидкостью пористого эластичного материала являются мягкие биологические ткани, содержащие кровь и плазму [29]. Деформация тканей мозга с большими деформациями может возникнуть, например, в результате удара

по голове тупым предметом, вызвавшего образование экстрадуральной гематомы головного мозга.

Определяющее соотношение для деформации гиперупругого материала записывается в стандартной форме:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}},$$

где W – упругий потенциал. Скалярная функция W зависит от инвариантов тензора деформации. Для изотропного материала упругий потенциал W имеет вид:

$$W = W(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})),$$

где $I_1(\mathbf{C}) = \text{tr} \mathbf{C}$, $I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} [I_1^2(\mathbf{C}) - I_1(\mathbf{C}^2)]$, $I_3(\mathbf{C}) = \det \mathbf{C}$.

Для тестовых расчетов использовались следующие потенциалы:

1) Потенциал Сен-Венана-Кирхгофа:

$$W_{sv}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \lambda (I_1(\mathbf{E}))^2 + \mu \mathbf{E} : \mathbf{E}, \quad I_1(\mathbf{E}) = \text{tr} \mathbf{E}.$$

где λ и μ – первый коэффициент Ламе и модуль сдвига.

2) Потенциал Муни:

$$W_M(\mathbf{E}) = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3),$$

где $\bar{I}_1 = I_1(\bar{\mathbf{C}})$, $\bar{I}_2 = I_2(\bar{\mathbf{C}})$, $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}}$, $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}/J^{1/3}$.

Для этого потенциала модуль сдвига в недеформированном состоянии ($\mathbf{C} = \mathbf{I}$) равен $\mu = 2(C_{10} + C_{01})$.

3) Потенциал Трелоара:

$$W_{TR} = \frac{\mu}{2} (I_1(\mathbf{C}) - 3).$$

Рассмотрим задачу о проникновении квадратного индентора в пористую резину. Квадратный индентор со стороной 0.4 м действует на верхнюю границу кубической области со стороной 1 м. На верхней границе устанавливается равномерное перемещение индентора на 5 см на каждом из первых четырех временных шагов. Общая средняя деформация составляет 20%. Далее индентор остается неподвижным. Заданные упругие свойства для всех четырех потенциалов соответствуют следующим исходным упругим параметрам пористой резины: $E = 4.426$ МПа, $\nu = 0.475$. Динамическая вязкость флюида μ_f и коэффициент проницаемости k принимаются равными: $\mu_f = 10^{-3}$ кг/(м·с) и $k = 4.94 \cdot 10^{-11}$ м². Расчеты проводились для постоянных пористости и проницаемости.

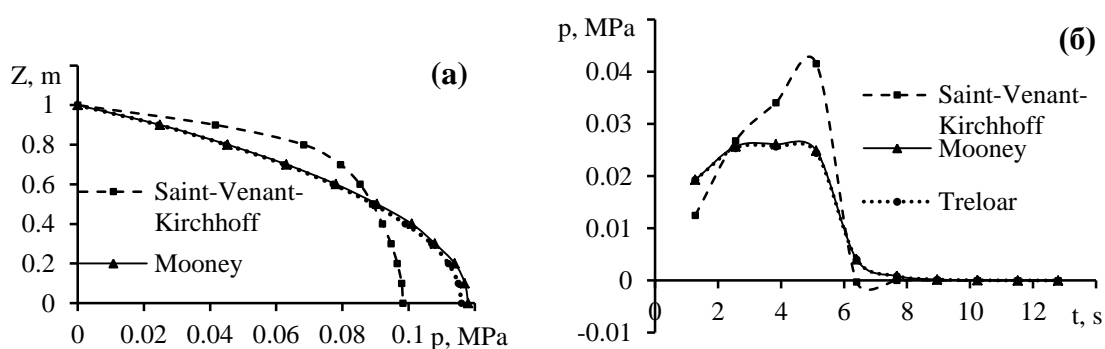


Рисунок 5.6 – Давление воды (а) по центральной вертикальной линии под серединой индентора через 5 с, (б) в зависимости от времени в точке ниже середины индентора на глубине 0.1 м

Сравнение численных результатов для разных потенциалов показано на рисунке 5.6. Видно, что значения давления воды при использовании потенциалов Муни и Трелоара одинаковы, но сильно отличаются от давлений, рассчитанных для Сен-Венана-Венана. потенциал Кирхгофа. Поэтому представляется нецелесообразным использовать потенциал Сен-Венана-Кирхгофа для штаммов, превышающих 10%.

Следующий пример касается мягких биоматериалов. Теория гиперупругости используется, как и в [29]. Решена модельная задача о деформации ткани головного мозга в результате прямого удара тупым предметом. Область мозга, заключенная в черепе, как моделируется частью сферы (рисунок 5.7). Материал мозга аппроксимировался гиперэластичным потенциалом Муни.

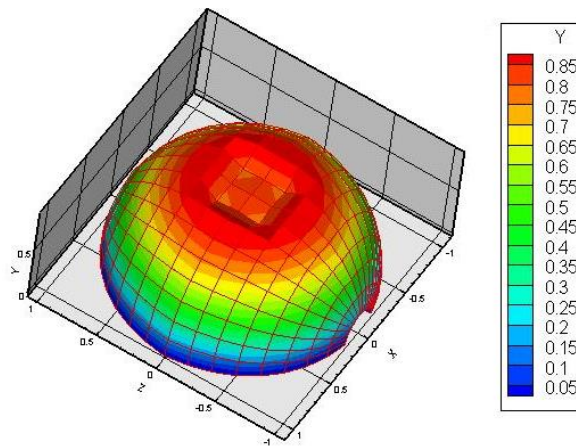


Рисунок 5.7 – Модель деформации биологического материала (мозга) в результате удара тупым предметом по голове (координаты выражены в дм)

Зависимость коэффициента проницаемости от пористости задавалась по формуле:

$$k(n) = n(\mathbf{u})d / (1 - n(\mathbf{u})).$$

Зависимость модуля Юнга от пористости в заданном диапазоне аппроксимировалась линейной функцией:

$$E(n) = a - bn(\mathbf{u}).$$

Последнее приближение было подтверждено расчетами, проведенными для ряда RVE. Мы задавали свойства биологического материала, как это было предложено в [29]: $C_{01} = 0.025$ МПа, $C_{10} = 0.1$ МПа, $K = 0.5$ МПа, $k_0 = 1.5 \cdot 10^{-12}$ м² (начальный коэффициент проницаемости до деформации), $n_0 = 15\%$ (начальная пористость), $\mu_f = 5 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с).

В течение первых 5.2 с на участке поверхности модели задается смещение 7%, имитирующее деформацию черепа при ударе по голове тупым предметом. Для остальной части поверхности модели мозга заданы нулевые перемещения. Поврежденная часть поверхности модели мозга проницаема, остальная часть поверхности модели непроницаема.

Численные результаты представлены на рисунке 5.8. В результате удара давление жидкости в модели увеличивается, причем больше всего вблизи нижней непроницаемой границы (рисунок 5.8 (а)). Далее давление флюида снижается в результате фильтрации жидкости через проницаемую зону удара. В точке на глубине 4 см от середины зоны удара давление жидкости падает практически до нуля за первые 30 с (рисунок 5.8 (б)).

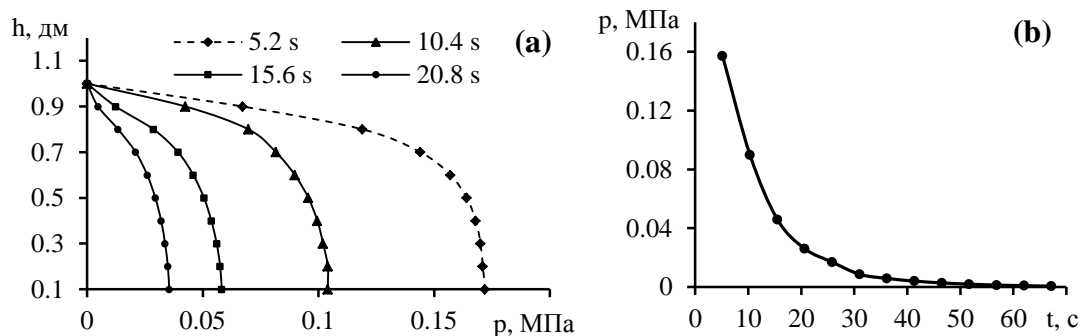


Рисунок 5.8 – Давление жидкости в зависимости от времени (а) вдоль центральной вертикальной линии под серединой зоны удара, (б) в точке ниже середины зоны удара на глубине 4 см

5.3 Пример численного решения задачи об упругопластическом деформировании водонасыщенного грунта

Образование колеи, т.е. образование углублений и гребней выпора вдоль полос наката вследствие неравномерного износа и накопления пластических деформаций в покрытии, а также остаточных деформаций в слоях дорожной одежды и земляного полотна, происходящее при многократном воздействии колёс автомобилей.

Наиболее часто колея образуется на нежёстких дорожных одеждах с покрытием из асфальтобетона и других битумоминеральных смесей, однако колея истирания может формироваться и на цементобетонных покрытиях. Как и большинство других деформаций, колея образуется при неблагоприятном сочетании двух групп факторов:

внешние факторы – воздействия нагрузки, климатические факторы, особенно температура воздуха и солнечная радиация, а также условия увлажнения грунта земляного полотна;

внутренние факторы – физико-механические характеристики дорожной конструкции: сдвигоустойчивость, структурное состояние, прочность и степень уплотнения дорожной одежды и земляного полотна, тип грунта и его свойства.

Самым важным из всех факторов образования колеи является воздействие тяжелых многоосных автомобилей. Процесс образования колеи начинается одновременно с открытием движения по дороге. Вначале он идет медленно, затрагивая только верхний слой покрытия, а затем распространяется на другие слои дорожной одежды и на земляное полотно. Однако в случае, когда материал какого-то слоя дорожной одежды плохо уплотнён или имеет низкую прочность и сдвигоустойчивость, остаточные деформации накапливаются в этом слое и проявляются на поверхности покрытия.

Характер и причины образования колеи, а также динамика их развития могут существенно различаться по сезонам года.

В работе рассматриваются два типа дорог: песчаные дороги и дороги со слабым покрытием песчано-земляных слоев. В первом случае причиной возникновения колеи является деформация песчаного грунта в весенне-осенний период при наличии оттока воды. Во втором случае – деформация нижних слоев дороги. Отметим, что типичное строение дороги состоит из нескольких слоев: земляное полотно (уплотненный грунт), песок, щебень, асфальт.

Примеры образования колеи в этих двух случаях изображены на рисунках 5.9 и 5.10.



Рисунок 5.9 – Глубокая колея в песчано-глинистом грунте



Рисунок 5.10 – Колея в результате сильного деформирования нижних слоев асфальтированной дороги

Колея, изображенная на рисунке 5.10, образуется в результате многократного проезда тяжелых автомобилей.

Рассмотрим пример численного решения задачи о деформировании водонасыщенного песчаного грунта под действием перфорированного штампа. Для

моделирования упругопластического деформирования грунта при кратковременных нагрузках предложено обобщение модели С.С. Григоряна [30] на большие деформации.

Для формулировки соотношений теории пластичности использовался тензор Кирхгофа $\tau = J\sigma$, как предлагается в работах [31], [32].

Функция нагружения имеет вид:

$$f = \frac{1}{2} \bar{\tau} : \bar{\tau} - \frac{1}{2} F^2, \quad F(\overset{\circ}{\tau}, \chi) = A + M \overset{\circ}{\tau} + \chi. \quad (5.1)$$

где $\bar{\tau}_{ij} = \tau_{ij} - \overset{\circ}{\tau} \delta_{ij}$ – девиатор тензора напряжений,

$\overset{\circ}{\tau} = \frac{1}{3} \tau_{ij} \delta_{ij}$ – шаровая часть тензора напряжений.

В работе [30] для сдвиговых свойств выбрана модель идеальной пластичности, но в численных расчетах удобно использовать малое изотропное упрочнение χ для устойчивости вычислений, как показано в формуле (5.1). В критерии Кулона-Мора, который лучше всего описывает свойства слабо связных грунтов, параметры A и M из (5.1) выражаются формулами [33]:

$$A = \frac{2\sqrt{6} c \cos \varphi}{3 - \sin \varphi}, \quad M = \frac{2\sqrt{6} \sin \varphi}{3 - \sin \varphi},$$

где φ – угол внутреннего трения грунта,

c – сцепление.

Сделаем допущение, что скорость объемной деформации θ близка к постоянной:

$\dot{\theta} = const$. Для этой скорости можно принять при нагрузке $\overset{\circ}{\tau} = f_1(\theta)$. Диаграмма для шаровых частей (рисунок 5.11) также соответствует конкретной скорости нагружения.

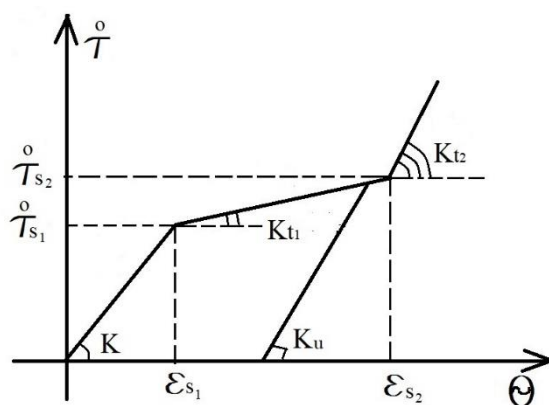


Рисунок 5.11 – Зависимость объемных напряжений и деформаций при упругопластическом деформировании грунта

В настоящий момент в расчетах упругопластического деформирования грунта используются определяющие соотношения деформационного типа (5.2) в рамках предположения, что для деформаций <10% деформационная теория сохраняет приемлемую точность, за исключением областей вблизи угловых точек, где имеют место большие деформации и сложное нагружение.

$$\dot{S}_{ij} = 2\mu \left[(1-\omega) \left[\frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] - \frac{\partial \omega}{\partial E_u} \frac{\bar{E}_{ij} \bar{E}_{kl}}{E_u} - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \bar{E}_{ij} \delta_{kl} + K_t(\theta) \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \dot{E}_{kl},$$

$$\omega(E_u, \theta) = \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_s(\theta)}{E_u} \right), \quad \varepsilon_s(\theta) = \frac{\tau_s + b \tau(\theta)}{2\mu}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \left(\frac{\mu_t}{\mu} - 1 \right) \frac{b}{2\mu} K_t(\theta), \quad (5.2)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}), \quad \bar{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{F}}{J^{1/3}}, \quad J = \det \mathbf{F}, \quad E_u = \sqrt{\bar{E}_{ij} \bar{E}_{ij}}, \quad \theta = I_3(\mathbf{C}) - 1,$$

- ω – функция Ильюшина,
- \bar{E}_{ij} – компоненты девиатора накопленной деформации Грина-Лагранжа,
- E_u – интенсивность накопленной деформации,
- \mathbf{C} – мера деформаций Коши-Грина,
- $K_t(\theta)$ – касательный модуль на диаграмме $\overset{\circ}{\tau} = \overset{\circ}{\tau}(\theta)$,
- τ_s – предел текучести при $\theta = 0$, μ – упругий модуль сдвига,
- μ_t – касательный модуль сдвига, соответствующий малому упрочнению и выбираемый как вычислительный параметр для улучшения сходимости,
- $b = \text{tg } \varphi$ – тангенс угла внутреннего трения.

По деформационной теории решена модельная задача о действии перфорированного штампа на область песчаного грунта кубической формы с ребром 1 м, штамп – квадратный со стороной 0.4 м. Расчеты выполнялись для деформаций 6, 8 и 10%. На верхней границе области задавалось перемещение штампа равномерно на первых шести, восьми и десяти шагах по времени соответственно. Остальная часть верхней границы свободна от напряжений. Боковые и нижняя границы области непроницаемы и закреплены в направлении, перпендикулярном границе. Вся верхняя граница проницаема, через штамп также может просачиваться жидкость. Общее время – 47.5 с, число шагов по времени – 20, величина шага по времени – 2.375 с.

Зависимость коэффициента фильтрации k_f от пористости n (выраженной в долях единиц) задавалась по формуле Козени. Свойства грунта задавались по литературным источникам как для среднезернистого песка: $k_f^0 = 10^{-4} \text{ м/с}$ (начальный коэффициент фильтрации до деформирования), $n_0 = 15\%$ (начальная пористость), $\gamma_f = 10^4 \text{ кг/м}^2 \text{ с}^2$, $K = 100 \text{ МПа}$, $K_{t_1} = 25 \text{ МПа}$, $K_{t_2} = 5000 \text{ МПа}$, $\tau_{s_1}^0 = 1.5 \text{ МПа}$, $\tau_{s_2}^0 = 4 \text{ МПа}$ (рис. 1), $\tau_s = 2 \text{ МПа}$, $\mu = 21.4 \text{ МПа}$, $\mu_\tau = \mu / 50$, $\varphi = 40^\circ$, $c = 0 \text{ МПа}$, $M = 1.336$, $A = 0 \text{ МПа}$ (для функции нагружения (4)), $b = 0.839$.

Расчеты проводились в собственном программном коде. Результаты расчетов приведены на рисунках 5.12 и 5.13.

На рисунке 5.12 показаны графики зависимости давления воды от времени в двух точках, находящихся на разной глубине – 0.1 м (рисунок 5.12 (а)) и 0.4 м (рисунок 5.12 (б)) под серединой штампа при общей деформации 6, 8 и 10%.

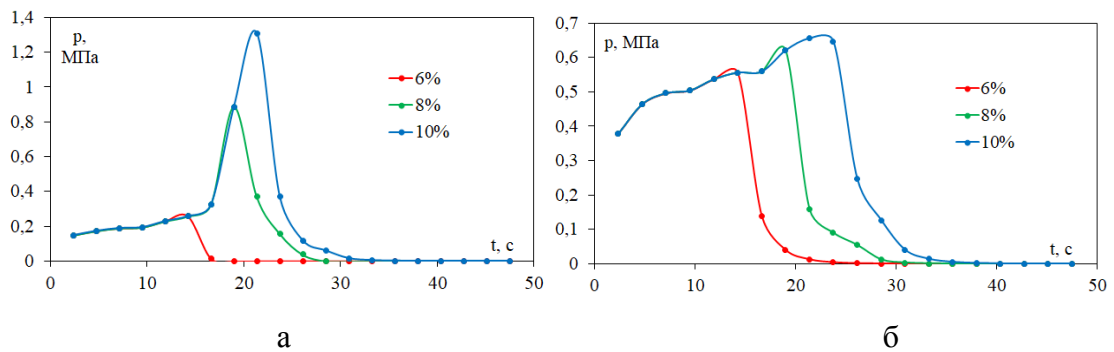


Рисунок 5.12 – Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине: (а) – 0.1 м, (б) – 0.4 м

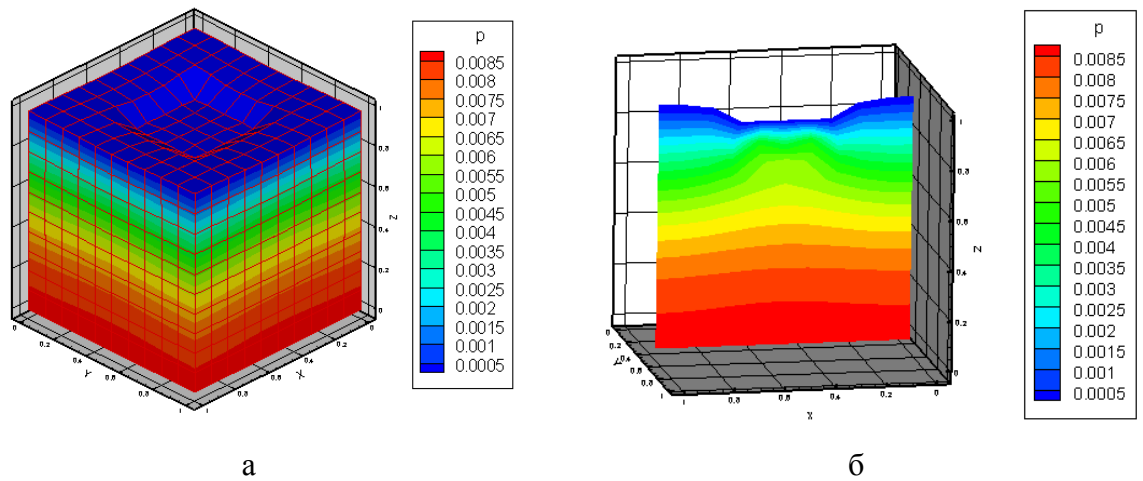
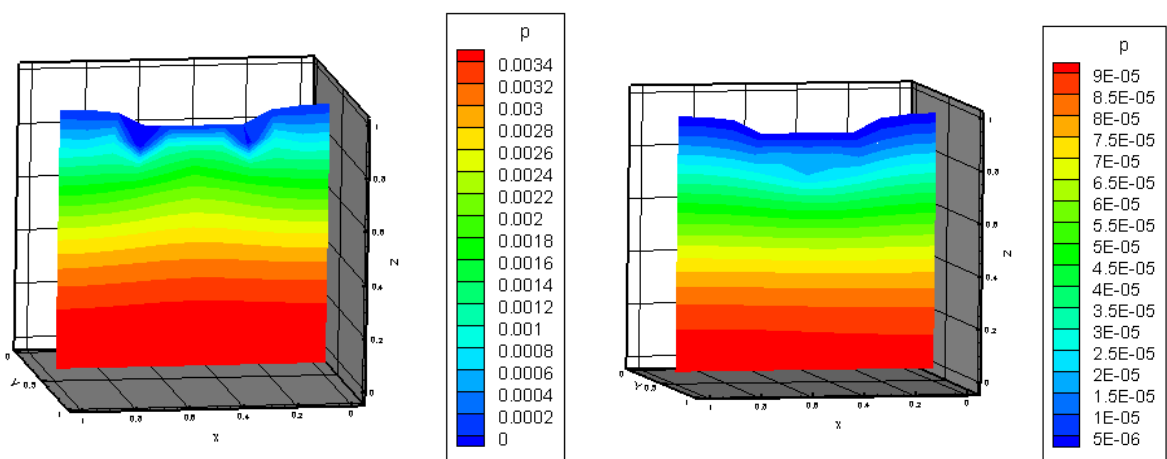


Рисунок 5.13 – Распределение давления воды ($P = 0.01 \text{ МПа}$) на 10-м шаге по времени (а) – в области, (б) – в плоскости $Y = 0.5 \text{ м}$ (общая деформация 10%)

На рисунке 5.13 показано распределение давления воды на 10-м шаге по времени, когда только произошла деформация грунта 10% в результате опускания штампа. Рисунок 5.13 (а) показывает распределение давления во всей области, а рисунок 5.13 (б) – в вертикальной плоскости, проходящей через середину штампа. На рисунке 5.14 приведено распределение порового давления в вертикальной плоскости на 11-м (рисунок 5.14 (а)) и 15-м (рисунок 5.14 (б)) шагах по времени.

Можно заметить, что сразу после опускания штампа непосредственно в области под штампом формируется зона повышенного порового давления (рисунок 5.14 (б)).

На следующих шагах по времени (рисунок 5.14), по мере просачивания воды через перфорированный штамп, давление воды под штампом постепенно падает, распределение порового давления в исследуемой области становится более равномерным. На 11-м шаге по времени величины порового давления снижаются примерно в 2 раза (рисунок 5.14 (а)), на 15-м шаге по времени – становятся ниже на два порядка в результате оттока жидкости через верхнюю границу модели (рисунок 5.14 (б)).



а

б

Рисунок 5.14 – Распределение давления воды ($P \cdot 0.01 \text{ МПа}$) в плоскости $Y = 0.5 \text{ м}$ (а) – на 11-м и (б) – 15-м шагах по времени (общая деформация 10%)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполненной НИР получены следующие результаты.

Сформулирована вариационная линеаризованная постановка полностью нелинейной (физически и геометрически) связанной задачи консолидации в скоростях перемещений и изменения давления воды, где все переменные зависят от лагранжевых координат твердой фазы скелета. В этой постановке в качестве определяющих соотношений могут использоваться соотношения упругости, деформационная теория пластичности или теория течения.

Реализовано численное решение связанной нелинейной задачи консолидации с использованием обобщения неявной схемы с внутренними итерациями на каждом шаге по времени по методу Узавы. Решение задачи реализовано в виде собственного программного кода.

На тестовых примерах проведен анализ устойчивости решения линейной задачи консолидации при аппроксимации элементами Q1-Q1 и Q2-Q1. Результаты расчета модельной задачи со штампом подтвердили известный в литературе вывод, что аппроксимация седловой задачи квадратичными конечными элементами Q2 для перемещений скелета грунта и тринейными КЭ Q1 для давления воды обеспечивает устойчивость решения задачи, а применение элементов Q1-Q1 приводит, вообще говоря, к неустойчивой системе уравнений. Показано, что при использовании конечных элементов Q1-Q1 устойчивость решения линейной седловой задачи можно улучшить, увеличивая соотношение шага по времени к квадрату шага сетки $\left(\frac{\tau}{h^2}\right)$, т.е. увеличивая шаг по времени или измельчая конечно-элементную сетку.

Проведено сравнение решения задачи консолидации при аппроксимации гиперупругого материала различными упругими потенциалами.

Разработанная нелинейная модель консолидации, учитывающая изменение пористости и проницаемости, применена для моделирования гиперупругого деформирования биологического материала, насыщенного кровью или плазмой.

Решена модельная задача об упругопластическом деформировании пористого водонасыщенного песчаного грунта при действии штампа. Для моделирования

определяющих соотношений упругопластического деформирования грунта при кратковременных нагрузках была использована модель С.С. Григоряна, обобщенная на большие деформации.

На основе асимптотического метода осреднения и решения локальных задач в представительной области разработаны процедуры определения параметра Био. Методы опробованы на различных скальных грунтах.

По результатам расчетов и экспериментов были получены зависимости модуля Юнга и коэффициента Био от пористости и минерального состава грунтов. Эти зависимости могут быть использованы при моделировании нелинейной консолидации пористых сред. Результаты исследования подтвердили, что коэффициент Био не зависит от модуля Юнга материала скелета грунта.

Предложен метод прогнозирования форм пор гиалокластитов по значениям пористости и модуля Юнга с помощью нейронных сетей, а также реализован и исследован конкретный алгоритм. Была подобрана архитектура, на которой алгоритм дал наилучшие результаты, а также протестирована точность на новых данных.

Поставленные задачи решены полностью.

Работа имеет значение в смысле фундаментальной механики. Также есть перспектива промышленного применения разработанной компьютерной программы. Авторы рекомендуют использование результатов проведенной НИР в расчетной практике ООО «Современные изыскательские технологии».

Результаты полностью соответствуют научному уровню исследований в области моделирования процесса консолидации. Это подтверждается результатами докладов на международных и всероссийских конференциях, включая доклады на конференции ГАММ (немецкое общество по прикладной математике и механике).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Borja R.I., Alarcón E. A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation. Part 1: Balance laws, variational formulation, and linearization // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1995. – Vol. 122. – P. 145-171.
2. Borja R.I., Tamagnini C., Alarcón E. Elastoplastic consolidation at finite strain. Part 2: Finite element implementation and numerical examples // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1998. – Vol. 159. – P. 103-122.
3. Liu Z., Liu R. A fully implicit and consistent finite element framework for modeling reservoir compaction with large deformation and nonlinear flow model. Part I: Theory and formulation // *Comput. Geosci.* – 2018. – Vol. 22, Iss.3. – P. 623-637.
4. Giorgio, I., De Angelo, M., Turco, E., Misra A.: A Biot–Cosserat two-dimensional elastic nonlinear model for a micromorphic medium // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. – 2020. – Vol. 32. – P. 1357-1369.
5. Artamonova N.B., Sheshenin S.V. Finite element implementation of a geometrically and physically non-linear consolidation model // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. – 2022.
6. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б. Моделирование нелинейной консолидации пористых сред // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2022. – № 1. – С. 167-176.
7. Donea J., Huerta A. *Finite element methods for flow problems*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2003. – 358 p.
8. Быченков Ю.В., Чижонков Е.В. *Итерационные методы решения седловых задач*. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 349 с.
9. Brezzi F., Fortin M. *Mixed and hybrid finite element methods*. – New York: Springer-Verlag, 1991. – 223 p.
10. D'yakonov E.G. *Optimization in solving elliptic problems*. – Boca Raton: CRC-Press, 1996. – 562 p.
11. Киселев Ф.Б., Шешенин С.В. Разностная схема для задачи нестационарной фильтрации в слоистых грунтах // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 1996. – № 4. – С. 129-135.

12. ГОСТ 12248.4-2020 «Грунты. Определение характеристик деформируемости методом компрессионного сжатия».
13. Мирный А.Ю., Идрисов И.Х. Испытания методом многоплоскостного среза и простого сдвига. – Независимый электронный журнал «ГеоИнфо». – 2020. – № 6.
14. Мирный А.Ю. Исследования дилатансии в дисперсных грунтах и методы ее количественной оценки // Инженерная геология. – 2019. – Том XIV. – № 2. – С. 34-43.
15. ГОСТ 12248.1-2022 «Грунты. Определение характеристик прочности методом простого сдвига (вторая редакция)».
16. Artamonova N.B., Sheshenin S.V., Frolova Yu.V., Bessonova O.Yu, Novikov P.V. Calculating components of the effective tensors of elastic moduli and Biot's parameter of porous geocomposites // Mechanics of Composite Materials. – 2020. – Vol. 55, No. 6. – P. 715-726.
17. Артамонова Н.Б., Шешенин С.В., Орлов Е.А., Чжоу Бичэн, Фролова Ю.В., Хамидуллин И.Р. Вычисление эффективных свойств геокомпозитов на основе изображений компьютерной томографии // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. – Механика. – 2022. – № 3. (в печати)
18. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation // Journal of Applied Physics. – 1941. – Vol. 12, No. 2. – P. 155-164.
19. Gueguen Y., Bouteca M. Mechanics of fluid-saturated rocks. – Elsevier Acad. Press, 2004. – 450 с.
20. Biot M.A., Willis D.G. The elastic coefficients of the theory of consolidation // Journal of Applied Physics. – 1957. – Vol. 24, No. 4. – P. 594-601.
21. Geertsma J. The effect of fluid pressure decline on volumetric changes of porous rocks // Trans. AIME. – 1957. – Vol. 210. – P. 331-339.
22. Skempton A.W. Effective stress in soils, concrete and rocks // Proceedings of Conference on Pore Pressure and Suction in Soils. – London, 1960. – P. 4-16.
23. Добрынин В.М. Физические свойства нефтегазовых коллекторов в глубоких скважинах. – М.: Наука, 1965. – 163 с.
24. Nur A., Byerlee J.D. An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids // Journal of Geophysical Research. – 1971. – Vol. 76, № 26. – P. 6414-6419.
25. Carroll M.M. An effective stress law for anisotropic elastic deformation // Journal of Geophysical Research. – 1979. – Vol. 84. – P. 7510-7512.
26. Thompson M., Willis J.R. A reformulation of the equations of anisotropic poroelasticity // Journal of Applied Physics. – 1991. – Vol. 58. – P. 612-616.

27. Chesnokov E.M., Ammerman M., Sinha S., Kukhareno Y.A. Tensor character of Biot's parameter in poroelastic anisotropic media under stress: static and dynamic cases // *Rainbow in the Earth: proceedings of the 2nd International Workshop*. – Berkley, California, 2005. – P. 1-3.
28. Фролова Ю.В. Закономерности изменения состава и свойств гиалокластитов Исландии в процессе литогенеза // *Вестник МГУ. Серия 4. Геология*. – 2010. – № 2. – С. 45-55.
29. Selvadurai A.P.S., Suvorov A.P. Coupled hydro-mechanical effects in a poro-hyperelastic material // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2016. – Vol.91. – P. 311-333.
30. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов // *Прикладная математика и механика*. – 1960. – Т.24. – № 6. – С. 1057-1072.
31. Simo J.C., Hughes T.J.R. *Computational inelasticity*. – New York: Springer-Verlag, 1998. – 392 p.
32. Bonet J., Wood R.D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. – New York: Cambridge University Press, 2008. – 340 p.
33. Mróz Z., Zienkiewicz O. Uniform formulation of constitutive equations for clays and sands // *Mechanics of Engineering Materials*. Eds. C.S. Desai, R.H. Gallaher. – New York: Wiley, 1984. – P. 415-449.