# Численное моделирование в механике композитов

Проф. С.В. Шешенин

Кафедра теории пластичности

http://mech.math.msu.su/~sheshenin

Email: sheshenin@mech.math.msu.su

## План презентации

- •Что такое механика сплошной среды и механика композитов
- •Численные методы
- •Задачи вычислительной механики
- •Сотрудничество и международные связи Научные темы:
  - •Резинокордные композиты
  - •Неоднородные пластины
  - •Бетонные укрытия
  - •Сплавы
  - •Технологические задачи
  - •Жидкие композиты
  - •Геомеханика

# Модели механики



## Модели механики деформируемого твердого тела

#### Основные модели:

- •Теория упругости
- •Теория пластичности
- •Теория вязко-упругости
- •Теория вязко-пластичности
- •Теория ползучести
- •Теория разрушения



Механика композитов

#### Смешанные области:

- •Аэроупругость
- •Гидроупругость
- •Электро-магнито упругость

## Чем занимается МДТТ



## Композиты

Композит состоит из нескольких фаз (материалов):

Древний Египет: глиняные стены упрочненные соломой Современный строительный материал: железобетон Авиконструкции: стеклопластик, углепластик Резинокорд

Каждый компонент может проявлять различные свойства и, соответственно, описываться различными теориями

Пример резинокорда: волокно линейно упругое, матрица нелинейно вязкоупругая

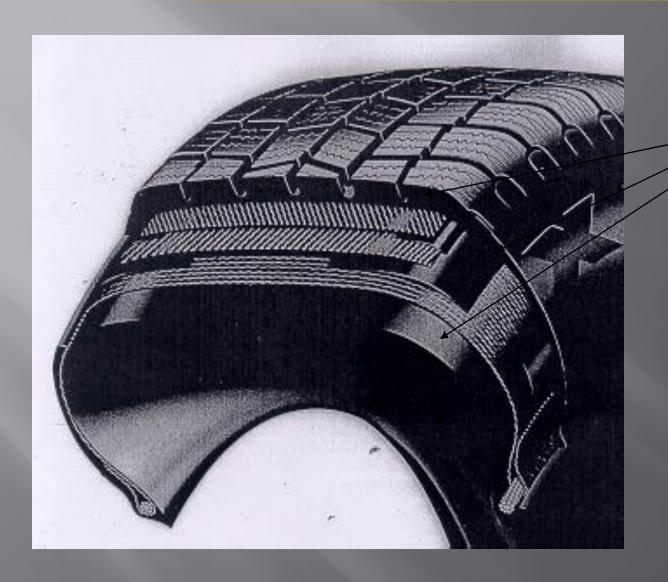
Следствие: математическое описание сложное

## Оборонная промышленность



#### Резино-кордный композит





Слои резины Изначально композиционные материалы разрабатывались исключительно со **стратегическими, военными целями** Сейчас они прочно заняли свое место как материалы широкого потребления, нашедшие применение в судостроении, автомобилестроении, химической промышленности, ветроэнергетике, авиационной промышленности и т.д. Композиты успешно заменяют привычные нам материалы, такие как металл, камень и дерево.



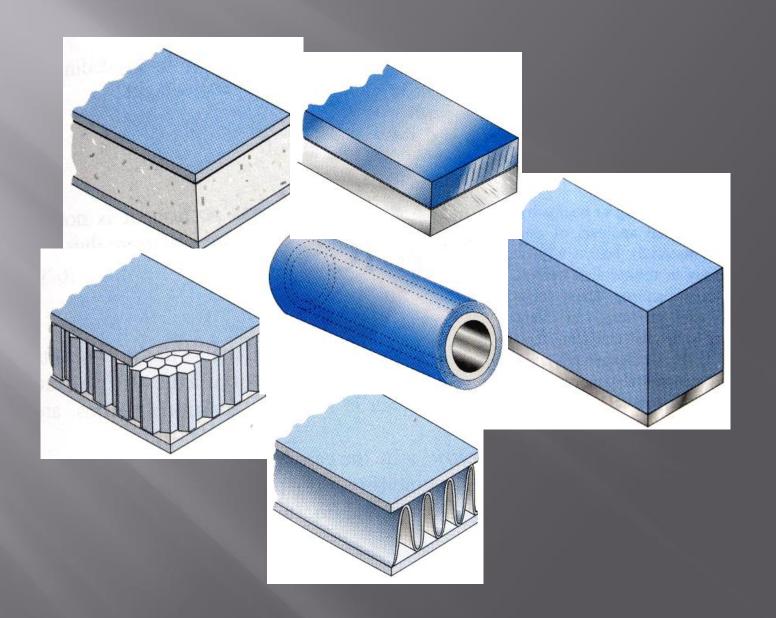
### Даже фанера является композитом



#### Применение композитов



#### Структура простейших композитов



#### Преимущества

высокая прочность высокая жесткость высокая износостойкость высокая усталостная прочность легкость

Недостатки

высокая стоимость анизотропия свойств повышенная наукоёмкость производства

## Тенденции

Более точное, более реалистическое описание явлений в природе и технике; учет взаимодействия различных физически полей: механического, теплового, электромагнитного. В итоге:

- •Термо-упругость
- •Термо-вязко-упругость
- •Термо-вязко-пластичность
- •Электро-магнито-упругость

#### Следствие:

Аналитические решения найти невозможно. Чтобы получить ответ нужено компьютерное моделирование

Аналитические решения: чаще всего тестовые примеры

## Численное решение

Задачи трехмерные:



$$\frac{\partial}{\partial x}$$
,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial}{\partial t}$ 

Необходимы численные методы

Численное решение возможно: мощность компьютеров постоянно растет + стоимость постоянно снижается

Аналитические решения важны: приближенная оценка явления, одномерные тестовые примеры, асимптотические методы => численно – аналитические методы

## Вычислительная механика

Занимается не только решением задач, но строит моделирование явления. Все в этом моделировании должно быть связано:

Определяющие соотношения + постановка задачи + численный алгоритм + программа для компьютера

#### Цель:

- •Замена прототипа конструкции численной моделью
- •Оптимизация конструкции

Вывод: в области вычислительной механики студент может заниматься очень различными исследованиями

#### Приобретаются знания в различных областях:

- **У**В механике
- √В теории дифференциальных уравнений
- √В теории численных методов
- **В** программировании
- √Во владении компьютером

Вывод: даже если не планировать всю жизнь заниматься научной работой, эти знания помогут найти работу и будут полезны

#### Если планировать, то:

- Интересные задачи, с точки зрения и механики, и математики, и численных методов
- √Более, чем "диссертабельные" темы
- ✓Сотрудничество с Российскими и зарубежными компаниями
- УКонтакты с университетами Германии, Франции и Китая

Можно заниматься тем же, что и на ВычМате:

- ✓Метод конечных элементов
- Итерационные методы
- ✓Методы декомпозиции
- √Многосеточные методы
- √Смешанные постановки
- ✓Методы распараллеливания

## Какие задачи интересны?

- Жаучный интерес
- Применимость к практическим инженерным задачам
- Наличие или перспектива финансирования

### Конкретные примеры:

- •Моделирование резинокорда и шин
- ✓Динамическое контактное взаимодействие подземных сооружений с грунтом
- Оседание поверхности в результате нефтедобычи

Общая основа: численные методы + параллельные вычисления



## Моделирование качения шины

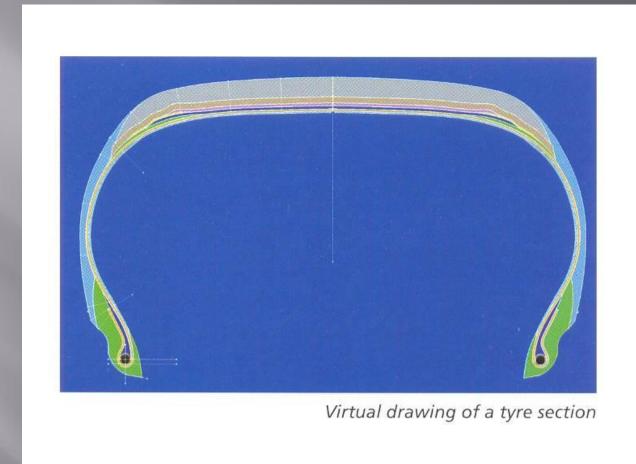
# VII Virtual prototyping

In the past, tyre design was a lengthy process of trial and error, resulting in high development costs and long lead times.

Today's powerful computers can run design software to simulate quieter, more comfortable tyres before any prototypes are made.

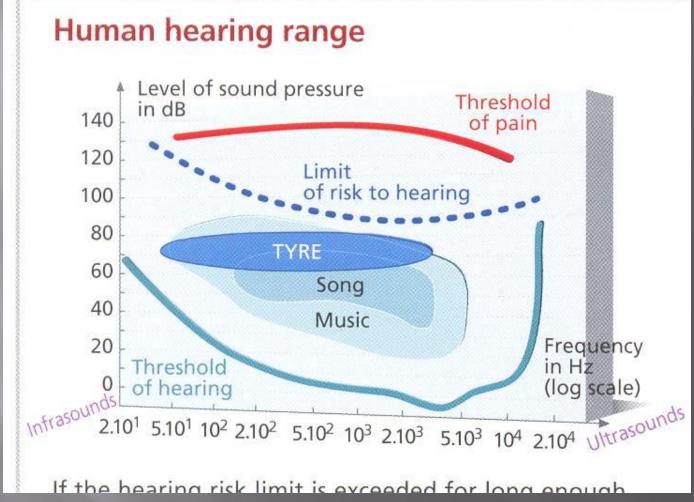
Computer-aided design produces a virtual tyre quite similar to the prototype tyre finally manufactured. Tyres are still thoroughly tested before being sold, but lead times are much shorter.





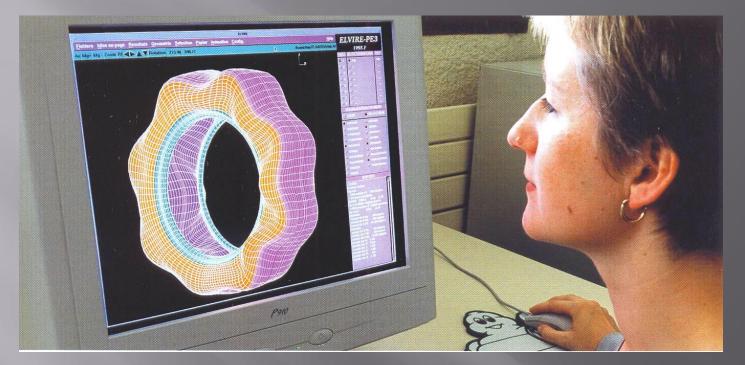
Меридиональное сечение шины в компьютерной модели





Актуальная и сложная математическая задача: Определение собственных частот и форм собственных колебаний для минимизации вибраций и шума





Совпадение с экспериментом с точностью 5% до 300 Hz

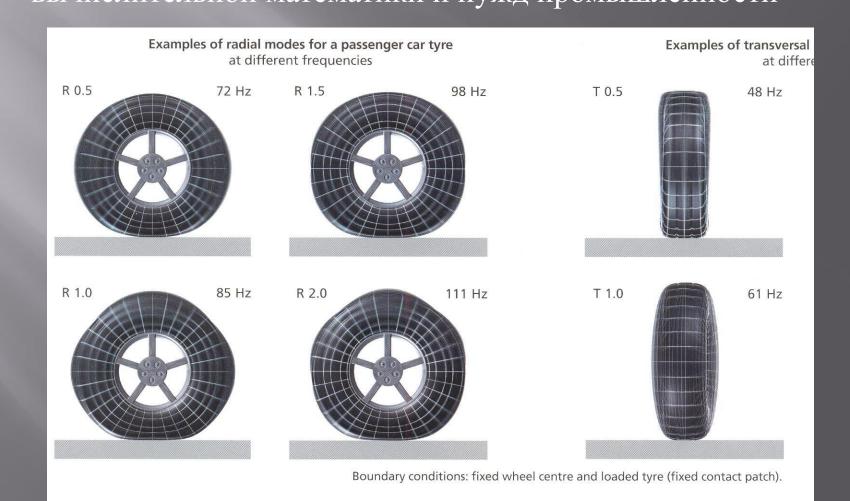
Аналог: уравнение свободных колебаний груза на пружине  $\ddot{x} + k^2 x = 0$ 

Для деформируемого тела эта задача выглядит как

 $\mathbf{A}\mathbf{x} + \omega^2 \mathbf{x} = 0$  матрично-векторное уравнение. Сотни тысяч степеней свободы



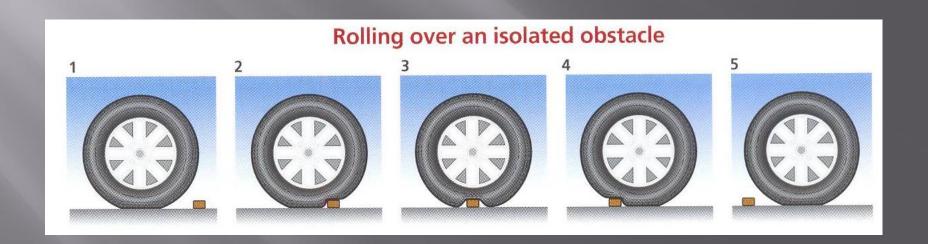
Матрица плохо обусловлена:  $cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| >> 1$  Решать задачу на собственные колебания сложно для высоких собственных частот => реальная связь механики, вычислительной математики и нужд промышленности





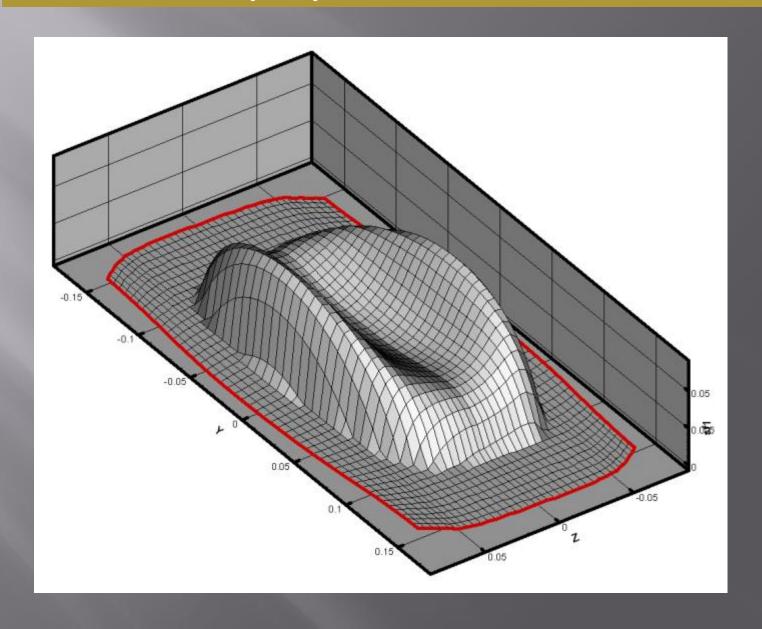
#### Что вызывает колебания?

Контакт с неровностями дороги вызывает вибрации и шум



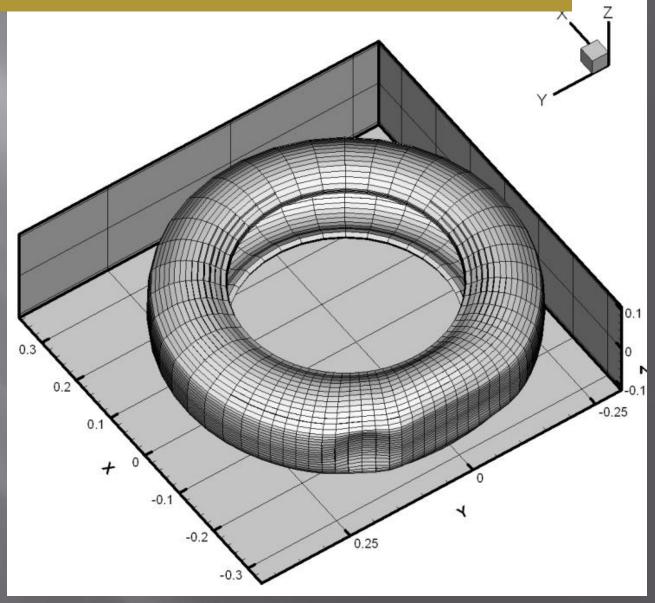


#### Зона контакта и распределение контактного давления



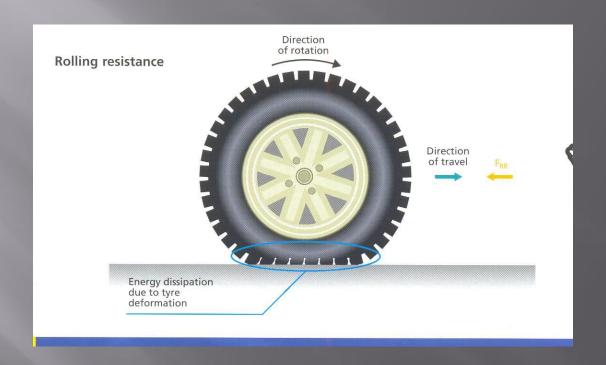


Деформация в результате контакта со сферическим препятствием





Зачем вычислять характеристики контактного взаимодействия с высокой точностью?

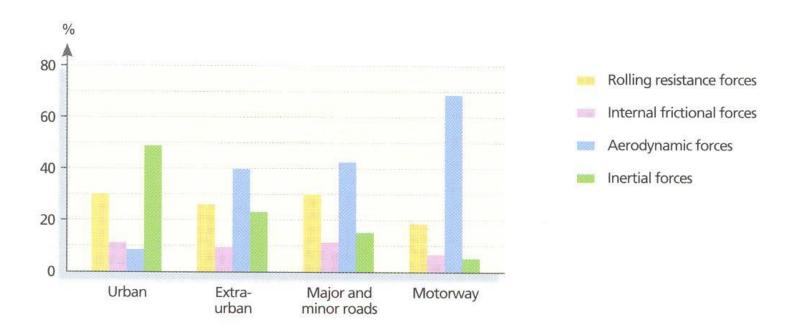


Чтобы точнее вычислять сопротивление качению вследствие проскальзывания и выделения тепла



#### Rolling resistance as a percentage of resistive forces

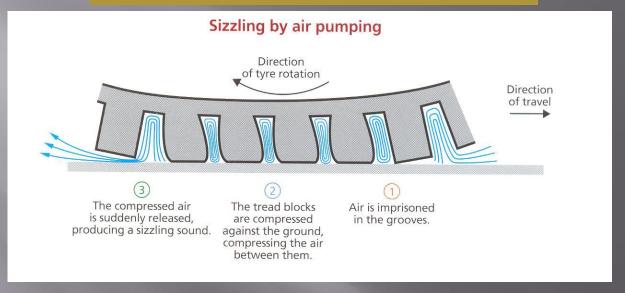
(for four typical trips)







#### Пример задачи аэро-упругости



#### Пример задачи гидро-упругости

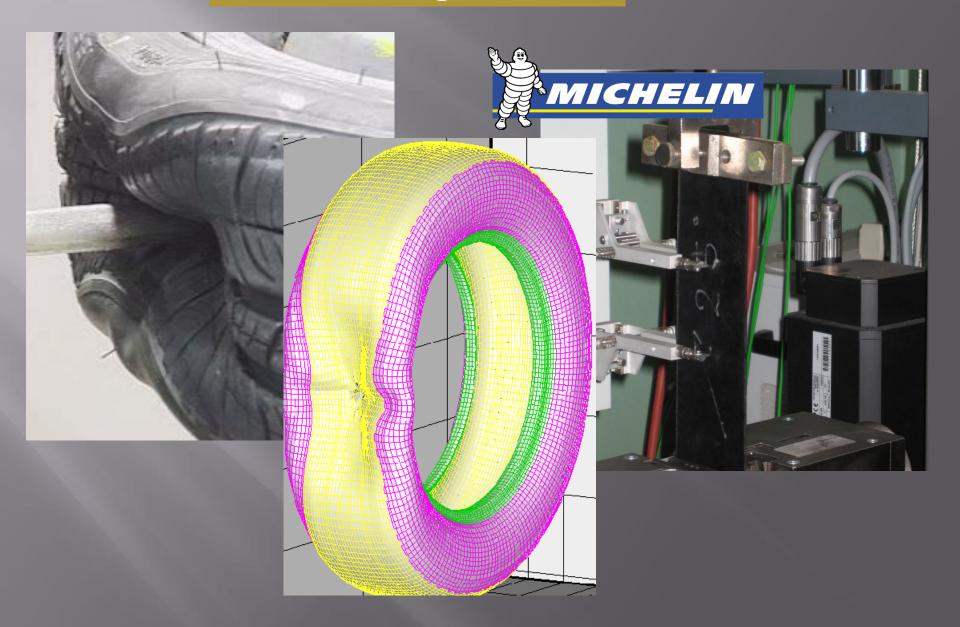
При движении по мокрой дороге эта задача становится задачей гидроупругости. Называется - задача аквапланирования



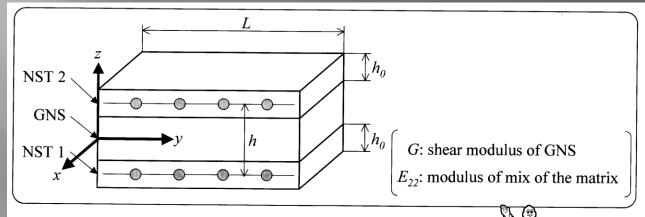
Сельскохозяйственные шины: проблема вибраций + проблема деформирования почвы. Более сложная контактная задача: контакт деформируемой шины с пластически деформируемым грунтом



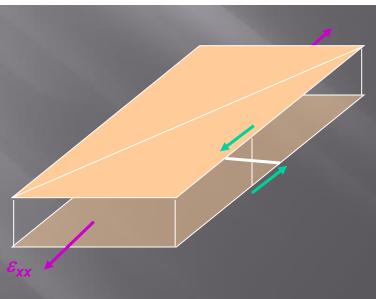
## Breaking Test



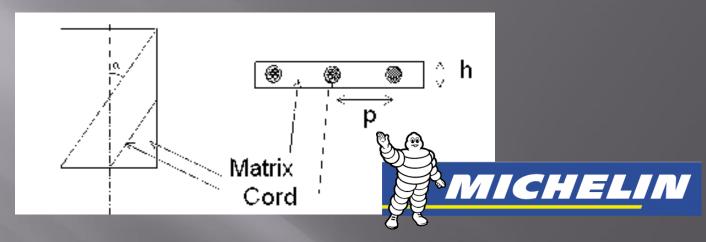
# Моделирование слоев резино-кордного композита

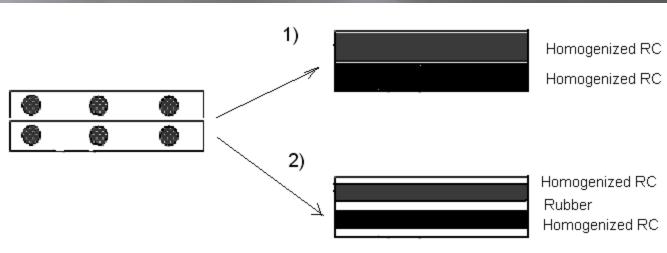


MICHELIN

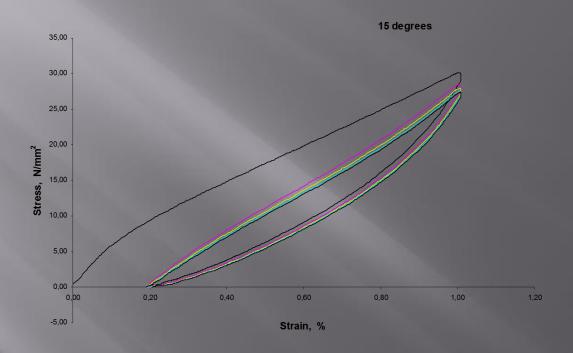


### Осреднение свойств резинокорда





#### Следующий шаг – осреднение вязкоупругих свойств при учете больших деформаций

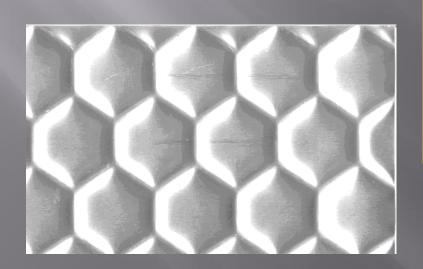


Дает возможность рассчитать тепловое состояние шины

Методика осреднения разработана для пластин, периодических в плане

Резинокорд имеет периодичность только в двух направлениях => развитие метода осреднения. Это почти правило: практические задачи ведут к развитию теории

Еще пример: штампованные пластины обладают неожиданными свойствами в среднем



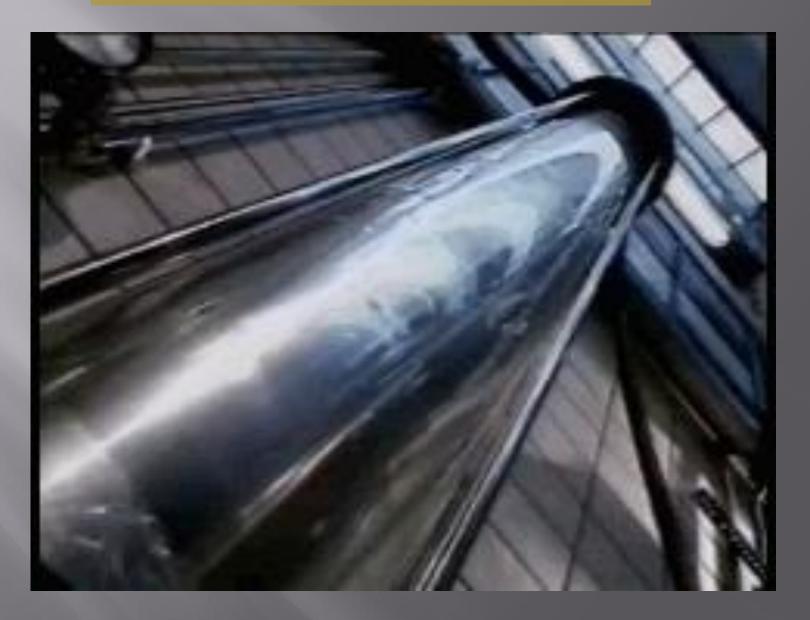
Сотрудничество с TU Berlin

Практический интерес + новая и красивая теория

#### Dr. Mirtsch Wölbstrukturierung GmbH

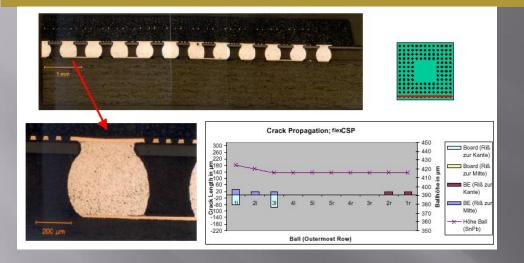


#### Dr. Mirtsch Wölbstrukturierung GmbH

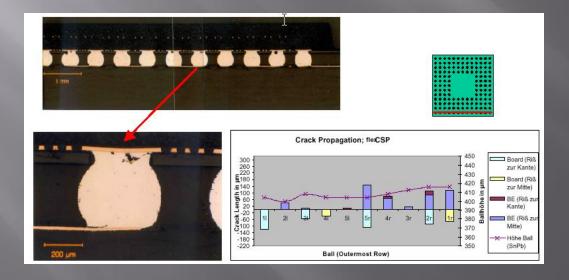


#### Осредненные свойства припоя

TU Berlin



SnPb37



SnAg3.8Cu0.7

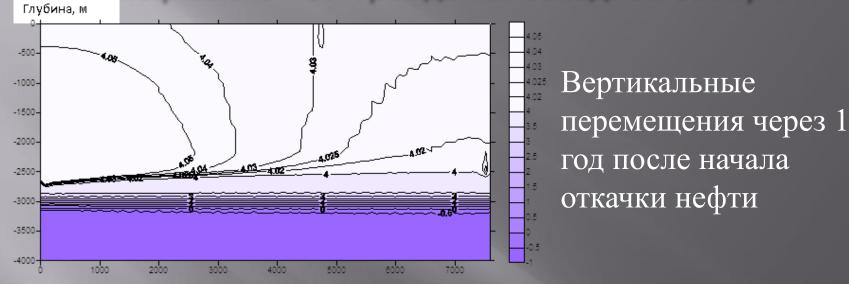
#### Развитие микроструктуры во времени



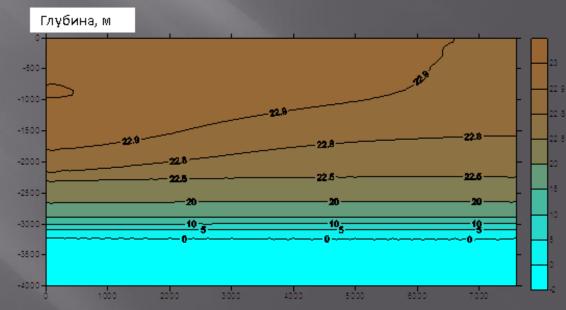
Задача: вычислить средние упругие, упругопластические и вязко-упругопластические свойства

Совместно с проф. Мюллером (TU Berlin)

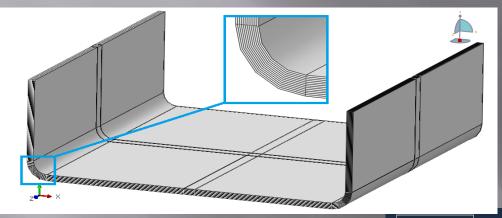
### Расчет оседания земной поверхности при эксплуатации нефтяного месторождения Западной Сибири

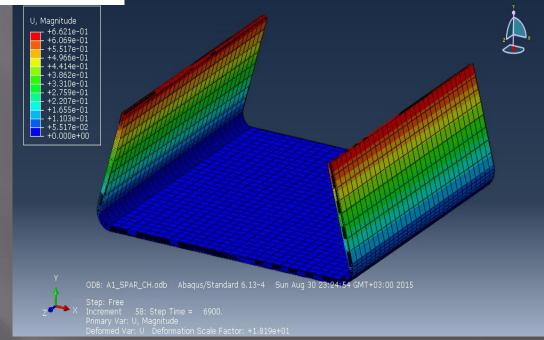


Вертикальные перемещения через 5 лет после начала откачки нефти



## Коробление композита в процессе изготовления





### Пример задачи течения в механике композитов

- В изначально пустой канал сложной формы под высоким давлением производится затекание смолы, армированной короткими включениями.
- После окончания затекания смола полимеризируется под действием высокой температуры.
- Полученное изделие применяется по назначению.

#### Цели исследования

- Предсказание эффективных характеристик полученного изделия.
- Определение тех проблем, которые могут возникнуть при затекании смолы в данную форму.

### Проблемы, возникающие в ходе интрузии

- Разрушение волокон в процессе интрузии.
- Зацепление волокон за выступающие элементы формы.
- Неполное затекание смолы в форму.
- Сильно неоднородное распределение волокон по изделию.
- Ярко выраженная анизотропия в тех областях изделия, где она нежелательна.

Список является (очень) неполным: возможно множество других проблем, выявление которых также является целью моделирования процесса.

#### Этапы моделирования

- Создание геометрической модели формы.
- Численное моделирование процесса затекания смолы с включениями в форму под давлением.
- Определение концентрации и ориентации волокон в представительных объёмах полученного изделия.
- Вычисление эффективных характеристик полученного изделия.

### Особенности моделирования

- Большая объёмная концентрация волокон (в реальных задачах − свыше 20%).
- Важно знать распределение волокон в итоговом изделии: от них существенно зависят прочностные характеристики.
- Сравнительно небольшие размеры изделия (по сравнению с размером волокон).

#### Методы частиц

Является привлекательной идея моделировать процесс затекания при помощи методов частиц.

### Особенности бессеточных методов

Методы частиц относятся к бессеточным методам, для которых характерны:

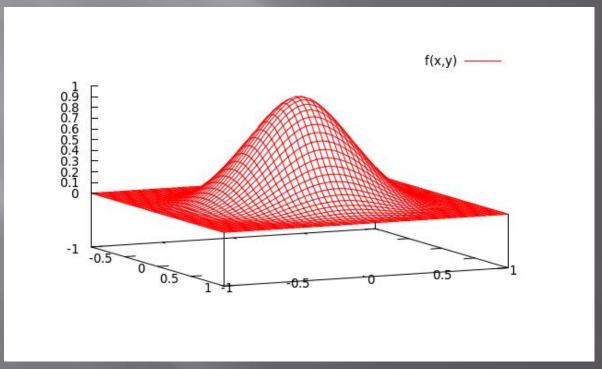
- Нечувствительность к качеству дискретизации области, в которой происходит решение задачи.
- Возможность в ряде случаев эффективно распараллелить численные методы, применяемые для моделирования.

#### Особенности методов частиц

- Среда представляется как совокупность «частиц» – отдельных тел, обладающих своей геометрией (обычно шарообразной), массой, скоростью и прочими параметрами.
- Частицы подчиняются уравнениям классической динамики (II закон Ньютона).
- Силовое взаимодействие между частицами описывается в терминах дифференциальных операторов от линейных комбинаций «функций формы».

#### Функции формы

 Простейшая функция формы в двухмерном пространстве может быть устроена так:



 $\varphi(r) = 1 - 6|r|^2 + 8|r|^3 - 3|r|^4$  при |r| < 1

#### Пример: уравнение Навье-Стокса

$$\rho \dot{v} = -grad P + \mu \Delta v$$

 Давление аппроксимируется слагаемым, пропорциональным фактической плотности частиц в текущем состоянии дискретной системы.

$$\widehat{P}(r) = k \sum_{i=1}^{N} \varphi\left(\frac{r - R_i}{\varepsilon}\right)$$

#### Пример: уравнение Навье-Стокса

$$\rho \dot{v} = -grad P + \mu \Delta v$$

Поле скоростей в правой части уравнения аппроксимируется разбиением единицы Шепарда (то есть средней скоростью частиц в ε-шаре).

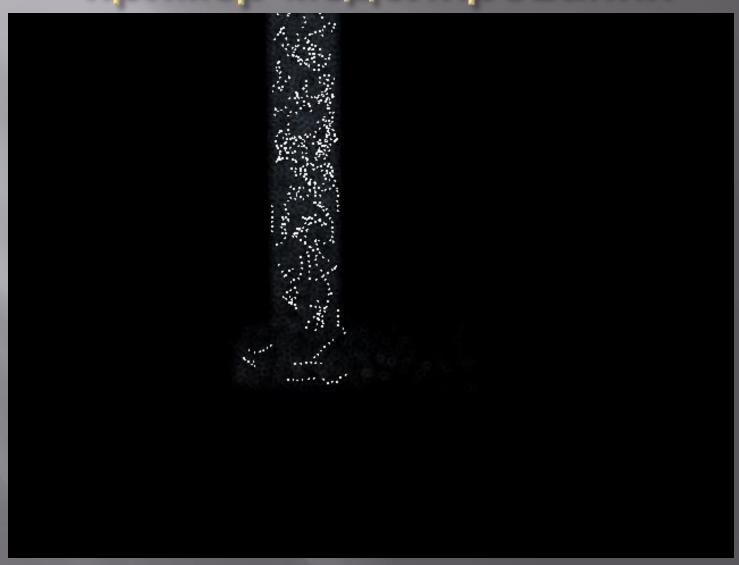
$$\hat{v}(r) = \frac{\sum_{i=1}^{N} V_i \, \varphi\left(\frac{r - R_i}{\varepsilon}\right)}{\sum_{i=1}^{N} \varphi\left(\frac{r - R_i}{\varepsilon}\right)}$$

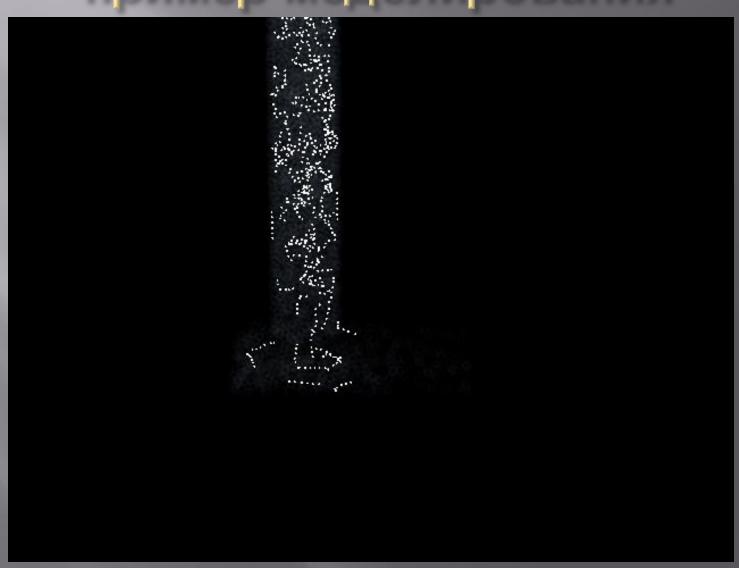
#### Пример: уравнение Навье-Стокса

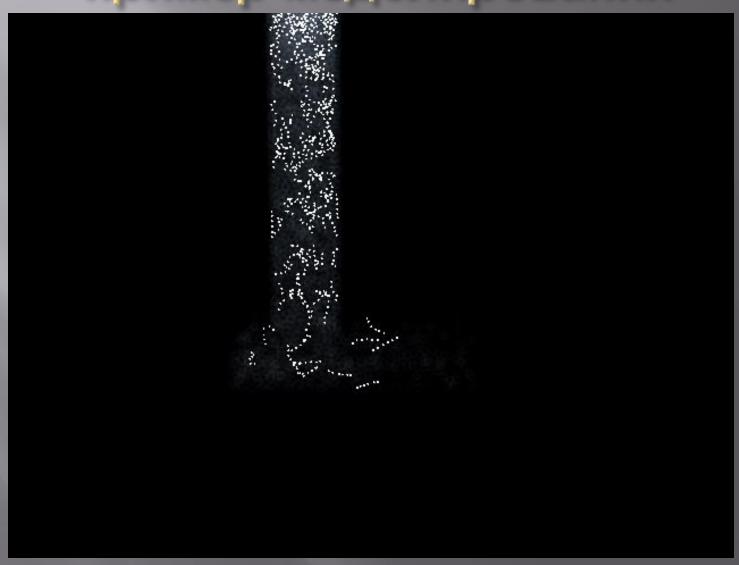
$$\rho \dot{v} = -grad P + \mu \, \Delta v$$

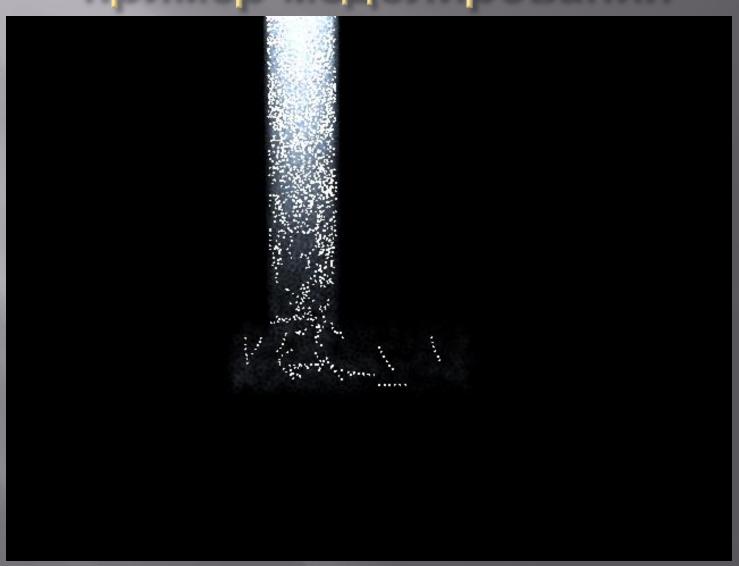


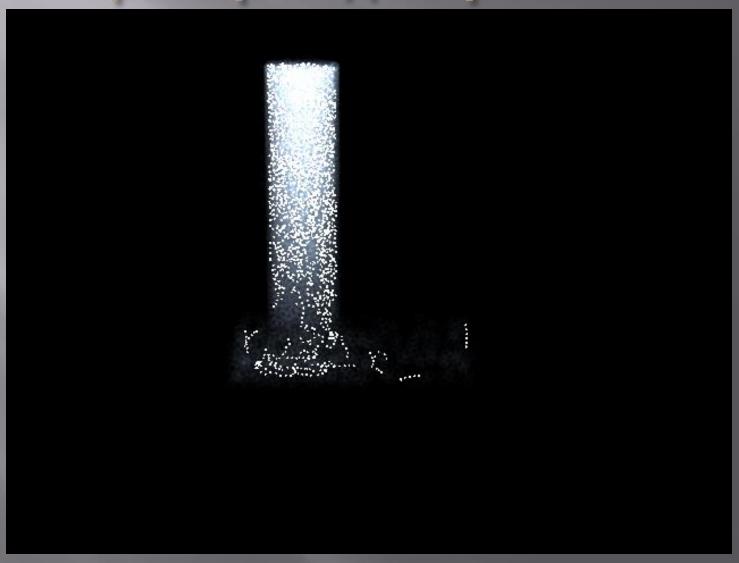
$$\frac{m_i}{V}\dot{V}_i = -grad \,\hat{P}(R_i) + \mu \,\Delta \hat{v}(R_i)$$

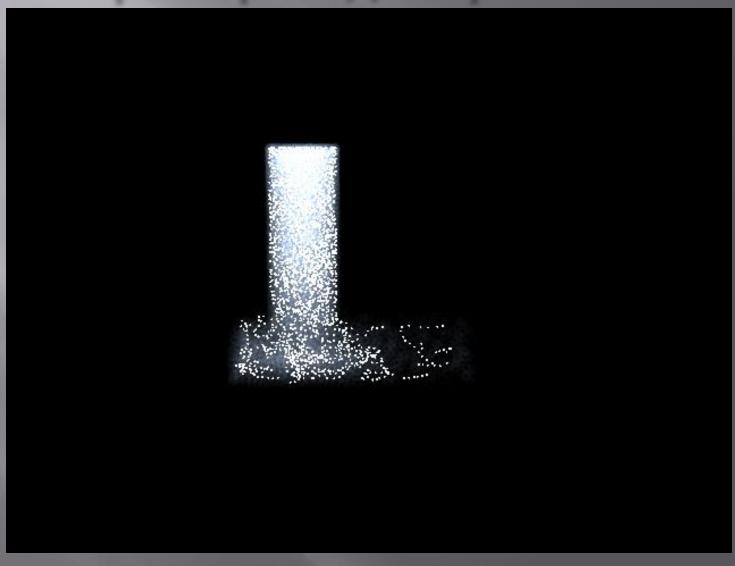


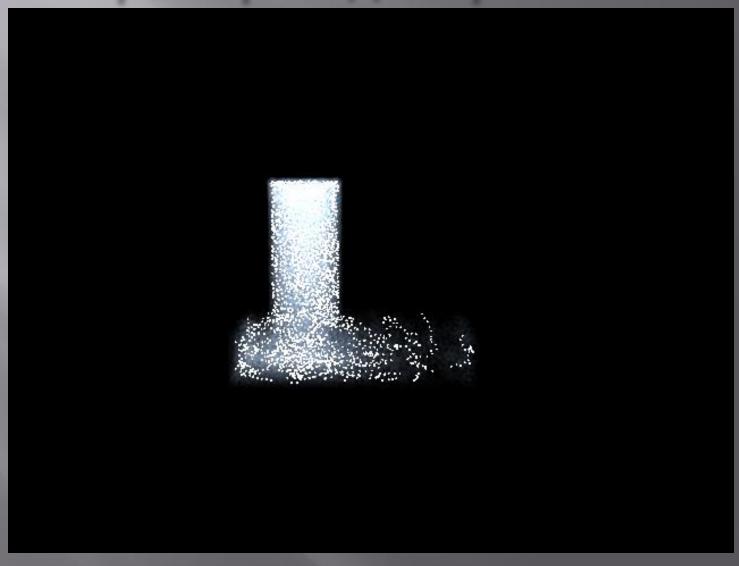


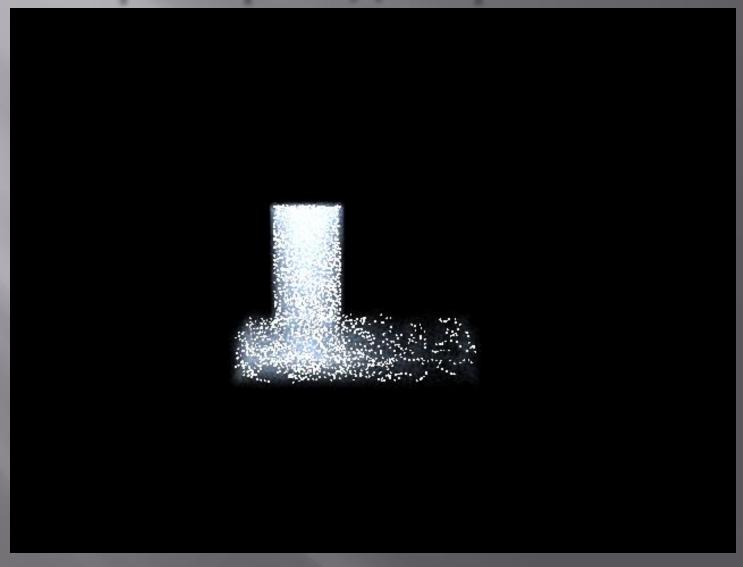


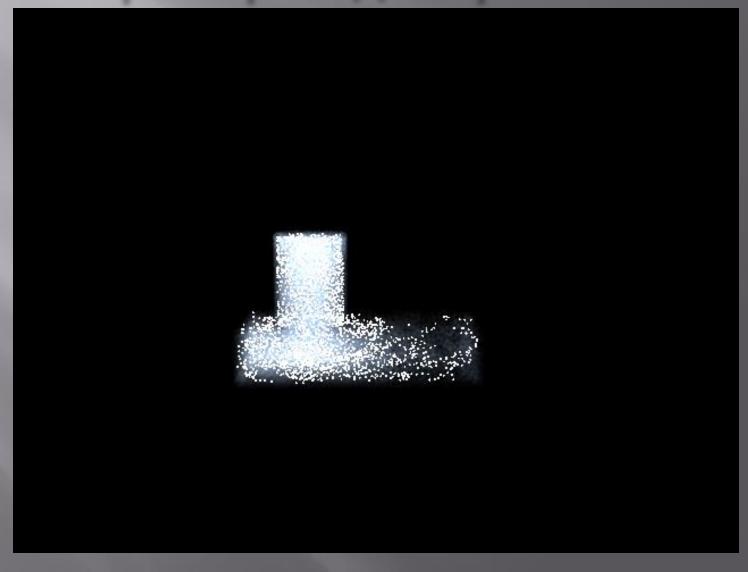




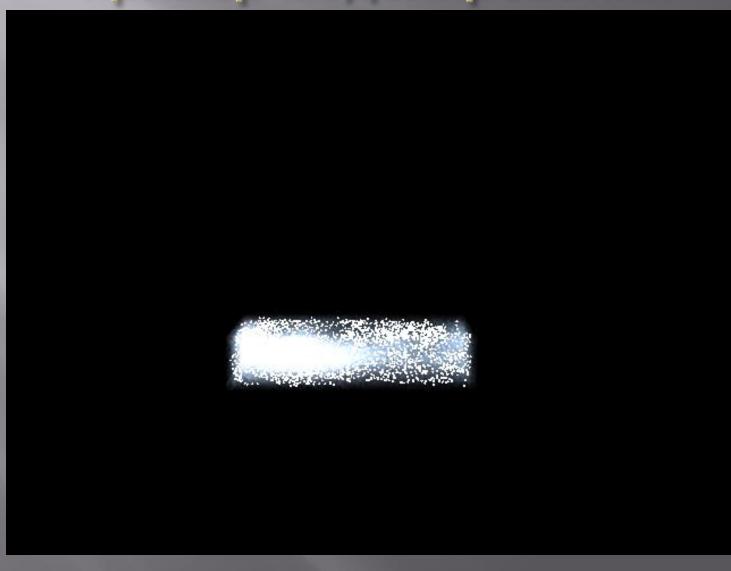


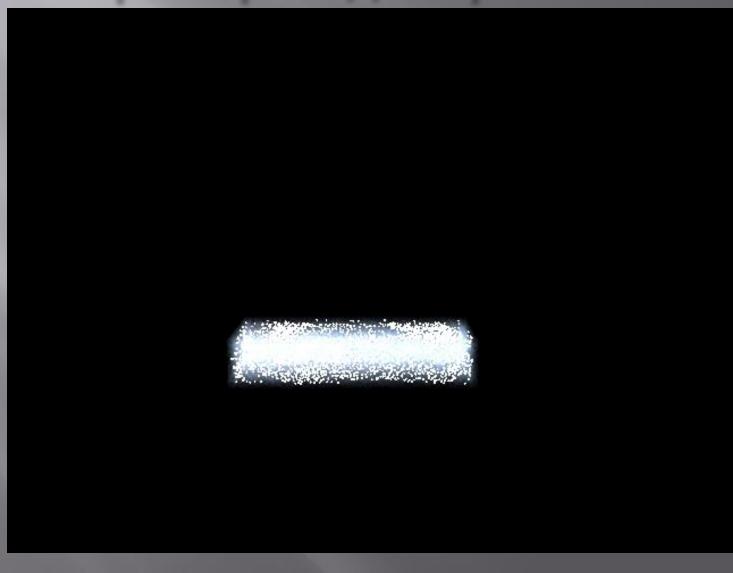












#### Особенности реализации

- Адекватное моделирование требует обработки сотен тысяч или даже миллионов частиц.
- Требуются эффективные алгоритмы расчёта взаимодействия частиц с геометрией формы.
- Также требуется алгоритм поиска взаимодействующих пар частиц.
- Расчёты трудно, но можно распределить между отдельными вычислительными единицами, будь то шейдерные процессоры видеокарты или же отдельные компьютеры суперкомпьютерного кластера.

#### Затрагиваемые области знаний

- Механика композитов.
- Гидродинамика.
- Дифференциальные уравнения.
- Уравнения с частными производными.
- Методы вычислительной механики.
- □ Методы вычислительной геометрии.
- программирование. □





#### Научная жизнь кафедры:

- защита диссертаций
- конференции
- исследовательские проекты
- семинары
- публикации
- □ гранты (РФФИ, INTAS, CRDF)



#### Заключение

Моделирование – требует широких знаний, разноплановых исследований и предоставляет возможность проявить самые разные способности

Моделирование требует коллективной работы. Участие студентов привлекательно!