Канонические преобразования

А. Н. Швец

23 апреля 2020 г.

1. Канонические уравнения Гамильтона

Канонические уравнения Гамильтона

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{1}$$

служат альтернативой уравнениям Эйлера — Лагранжа в качестве уравнений движения в том случае, когда есть возможность найти *функцию Гамильтона (гамильтониан)*, выполнив преобразования Лежандра лагранжиана как функции скоростей. Преобразование Лежандра возможно, если лагранжиан — выпуклая функция скоростей (проверьте!). Канонические уравнения представляют собой систему $2n$ уравнений первого порядка (n — число степеней свободы). Общий порядок системы, естественно, тот же, что и у уравнений Эйлера — Лагранжа.

2. Канонические преобразования

Главнейший метод работы с обыкновенными дифференциальными уравнениями — замены переменных, приводящие к упрощению или полному решению уравнений. Канонические уравнения, в отличие от системы $2n$ уравнений первого порядка самого общего вида, имеют очень специальный вид и обладают очень специальными важными свойствами. Поэтому важны замены переменных (преобразования), сохраняющие гамильтонову специфику канонических уравнений.

Мы рассмотрим преобразования, при которых осуществляется переход к новым зависимым и независимой переменным следующего вида:

$$(t, p, q) \mapsto (\hat{t}, \hat{p}, \hat{q}).$$

Под сохранением гамильтонова вида мы понимаем то, что после выполнения преобразования в новых переменных уравнения примут эквивалентный вид

$$\frac{d\hat{p}}{d\hat{t}} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}}, \quad \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}}, \tag{2}$$

где $\hat{H}(\hat{t}, \hat{p}, \hat{q})$ — некоторая новая функция Гамильтона. Сразу обращаем внимание, что новый гамильтониан, выраженный через старые переменные, не обязан, вообще говоря, совпадать со старым.

Оказывается, уравнения вида (1) переходят в уравнения вида (2), если выполняется условие

$$d\hat{p} \wedge d\hat{q} - d\hat{H} \wedge d\hat{t} = 0 \mod dp \wedge dq - dH \wedge dt = 0. \tag{3}$$

Здесь и дальше по обозначению $dp \wedge dq = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$. Согласно известной нам лемме[1] условие (3) превращается в равносильное

$$d\hat{p} \wedge d\hat{q} - d\hat{H} \wedge d\hat{t} = c(dp \wedge dq - dH \wedge dt). \qquad (4)$$

для некоторой постоянной c. Преобразование с указанным свойством называется *каноническим,* а число c — его *валентностью.* При $c = 1$ говорят об *унивалентных* преобразованиях.

Условие (4) можно понимать как условие замкнутости $d\varphi = 0$ внешней формы $\varphi = p\,dq - H\,dt - c(\hat{p}\,d\hat{q} - \hat{H}\,d\hat{t})$ (проверьте!). Согласно лемме Пуанкаре замкнутые внешние формы локально точны (в более сильных формулировках, точны в выпуклых, или точны в *звёздных* областях, то есть в таких, что содержат точку, из которой просматривается каждая точка границы[2]). Дальнейшие рассуждения имеют локальный характер.

Точная 1-форма φ, таким образом, локально есть внешняя производная некоторой 0-формы S (0-формы отождествляются с функциями):

$$p\,dq - H\,dt - c(\hat{p}\,d\hat{q} - \hat{H}\,d\hat{t}) = dS(t, \hat{t}, q, \hat{q})$$

(функция S зависит от тех букв, что стоят в левой части под знаками дифференциала). Приравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах в левой и правой частях, получим

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad -c\hat{p} = \frac{\partial S}{\partial \hat{q}}, \quad -H = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad c\hat{H} = \frac{\partial S}{\partial \hat{t}}.$$

В дальнейшем ограничимся каноническими преобразованиями, сохраняющими время ($\hat{t} = t$). Тогда S зависит от $(t, q, \hat{q})$ и

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad -c\hat{p} = \frac{\partial S}{\partial \hat{q}}, \quad c\hat{H} - H = \frac{\partial S}{\partial t}. \qquad (5)$$

Полученные равенства связывают старые и новые буквы, (p, q, H) и $(\hat{p}, \hat{q}, \hat{H})$, правда, в виде, не разрешённом ни относительно старых, ни относительно новых. Но так или иначе, S содержит всю информацию о каноническом преобразовании, порождает его. Она называется *производящей функцией* канонического преобразования.

Увы, даже с таким простым и очевидно каноническим преобразованием, как тождественное, есть проблема. Поскольку при $\hat{q} = q$ должно быть $\partial S/\partial \hat{q} = \partial S/\partial q$, уравнения (5) оказываются противоречивыми (убедитесь!). Это плохо, так как некоторые методы гамильтоновой механики предполагают последовательное применение канонических преобразований, близких к тождественным, для последовательного упрощения канонических уравнений. Однако представление канонического преобразования возможно при использовании производящих функций других типов.

Можно в форме φ выбрать некоторую группу дифференциальных мономов и проинтегрировать их по частям. К примеру:

$$\varphi = p\,dq + (c\hat{H} - H)\,dt - c\hat{p}\,d\hat{q} = p\,dq + (c\hat{H} - H)\,dt - c\,d(\hat{p}\hat{q}) + c\hat{q}\,d\hat{p} = dS,$$

или

$$\tilde{\varphi} = p\,dq + (c\hat{H} - H)\,dt + c\hat{q}\,d\hat{p} = dS + c\,d(\hat{p}\hat{q}) = d\tilde{S},$$

[1] См. http://mech.math.msu.su/~shvetz/coronavirus/IntrinsicForces.pdf

[2] Звёздность области требуется для нахождения внешней первообразной для замкнутой формы в соответствии с так называемой *конической конструкцией Пуанкаре,* которая предполагает гомотетическое стягивание области строго внутрь себя к центру области.

где $\tilde{S}(t, \hat{p}, q) = S + c\hat{p}\hat{q}$ — производящая функция другого типа. Тогда

$$p = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}, \quad c\hat{q} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \hat{p}}, \quad c\hat{H} - H = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}. \tag{6}$$

Разных типов производящих функций столько, сколькими способами выбираются мономы для интегрирования по частям. Тождественное преобразование можно представить с помощью производящей функции типа $\tilde{S}$ так, что уравнения (6) возможно разрешить относительно старых или относительно новых переменных (проверьте!).

3. Метод Якоби

Все согласятся с тем, что простейший вид канонических уравнений достигается при нулевом гамильтониане. Заманчиво было бы найти каноническое преобразование, после выполнения которого получилось бы $\hat{H}(t, \hat{p}, \hat{q}) \equiv 0$. Тогда первое и третье равенства (6) дают (здесь и далее для краткости опускаем волну над S)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, \frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = 0. \tag{7}$$

Это уравнение *Гамильтона — Якоби.* Так называют дифференциальные уравнения с частными производными (или обыкновенные) первого порядка, не содержащие зависимую переменную. Если бы удалось найти решение $S(t, q, \alpha)$ этого уравнения, содержащее набор параметров $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, можно было бы воспользоваться этим решением как производящей функцией канонического преобразования от переменных (p, q) к переменным (α, β), в которых преобразованные канонические уравнения приобретают тривиальный вид

$$\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$$

и

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad c\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}. \tag{8}$$

Для разрешимости последних уравнений относительно (p, q) потребуем дополнительно

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}\right) = n, \tag{9}$$

а для простоты возьмём $c = 1$. Семейство решений (7), параметризованное параметрами α с выполнением (9), называется *полным интегралом* уравнения Гамильтона — Якоби. Не нужно его путать с общим интегралом (решением) — общее решение уравнений с частными производными в типичном случае образует бесконечномерное семейство; нам же достаточно иметь n-мерное.

В новых фазовых переменных (α, β) устанавливается полный покой (все они являются первыми интегралами), а это означает, что каноническое преобразование с полным интегралом уравнения Гамильтона — Якоби, взятым в качестве производящей функции, совпадает с фазовым потоком исходных канонических уравнений (*фазовым потоком системы обыкновенных дифференциальных уравнений* называется отображение, переводящее начальную точку фазового пространства в решение уравнений в момент времени t). Это полностью аналогично переходу к системе координат, координатные линии которого увлекаются потоком некоторой воображаемой фазовой жидкости — в таких координатах все частицы жидкости, очевидно, покоятся.

Осталось лишь разрешить уравнения (8) относительно переменных (p, q):

$$p = p(t, \alpha, \beta), \quad q = q(t, \alpha, \beta).$$

Решение канонических уравнений получено методом Якоби.

Таким образом, знание полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби есть безусловное благо. Но как его найти? Вообще говоря, это трудное и не всегда возможное дело. Иногда полный интеграл получается подобрать. В некоторых чрезвычайно редких, но чрезвычайно важных в теоретической механике случаях удаётся найти его *методом разделения переменных.*

4. Метод разделения переменных

Самое общее уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$\Phi\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0. \tag{10}$$

В нашем случае $x = (t, q)$.

Предположим, что $x = (x_1, x')$, причём

$$\Phi\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = \tilde{\Phi}\left(\varphi\left(x_1, \frac{\partial S}{\partial x_1}\right), x', \frac{\partial S}{\partial x'}\right). \tag{11}$$

В таком случае говорят, что переменная x_1 *отделяется* от остальных переменных x' (штрих здесь просто значок). Тогда решение уравнения (11) можно искать в виде

$$S(x) = S_1(x_1) + S'(x'),$$

и при подстановке в (10) получится

$$\tilde{\Phi}\left(\varphi_1\left(x_1, \frac{\partial S_1(x_1)}{\partial x_1}\right), x', \frac{\partial S'(x')}{\partial x'}\right) = 0. \tag{12}$$

Это равенство должно удовлетворяться тождественно при любых (x_1, x'). Если изменять лишь переменную x_1, меняться в этом равенстве может лишь выражение $\varphi_1(\ldots)$. С учётом этого получим, что $\varphi_1(\ldots) = \kappa_1 = \mathrm{const}$, иначе тождественного обращения левой части в ноль *(обнуления)* не получится.

Если, к примеру, $x_1 = q_s$, то, таким образом, $\varphi_1(q_s, \partial S_1/\partial q_s) = \varphi_1(q_s, p_s) = \kappa_1$ — первый интеграл. Если же $x_1 = t$, то $\varphi_1(t, \partial S_1/\partial t) = \varphi_1(t, H(t, p, q)) = \kappa_1$ — опять первый интеграл. Отделившаяся переменная всегда даёт первый интеграл.

Уравнение

$$\varphi_1\left(x_1, \frac{\partial S_1}{\partial x_1}\right) = \kappa_1$$

в сущности является обыкновенным. Разрешив его относительно производной, получим

$$\frac{\partial S_1}{\partial x_1} = \psi_1(x_1, \kappa_1), \quad S_1(x_1) = \int \psi_1(x_1, \kappa_1)\, dx_1.$$

Из (12) получим

$$\tilde{\Phi}\left(\kappa_1, x', \frac{\partial S'(x')}{\partial x'}\right) = 0.$$

Это снова уравнение Гамильтона — Якоби, но теперь относительно функции $S'(x')$ с меньшим числом аргументов. Попытаемся применить к нему тот же приём.

Если повезёт, рекурсивное применение процедуры отделения переменной приведёт к полному разделению всех переменных, и будет найдено параметрическое семейство решений уравнения Гамильтона — Якоби

$$S(x,\kappa) = \sum_{i=1}^{n} S_i(x_i, \kappa_1, \dots, \kappa_i)$$

с нужным числом параметров. Попутно будут найдены n первых интегралов.

Заметим, что случаи $\partial H/\partial q_s = 0$ и $\partial H/\partial t = 0$ приводят к $\varphi_1 = p_s = \mathrm{const}$ и $\varphi_1 = H(p,q) = \mathrm{const}$ соответственно. Это уже известные нам циклический интеграл и интеграл энергии (Якоби).

В автономном случае ($\partial H/\partial t = 0$) удобно сразу положить

$$S = -\kappa_1 t + S'(q),$$

и искать полный интеграл *укороченного* уравнения Гамильтона — Якоби

$$H\left(q, \frac{\partial S'}{\partial q}\right) = \kappa_1$$

любым доступным способом, хоть бы и разделением переменных.

Метод Якоби является очень мощным, несмотря на узость круга задач, где он применим. Эти методом проинтегрированы те лагранжевы задачи, где другие методы не сработали.

Один из примеров: движение по инерции по квадрике в трёхмерном пространстве. Вводятся специальные координаты, в которых метрика на квадрике приводится к лиувиллеву виду (см. задачу 3), после чего переменные разделяются, и находится ещё один (помимо очевидного интеграла энергии) первый интеграл, квадратичный по отношению к скоростям. Как интересное следствие, интегрируемой оказывается задача о биллиарде, ограниченном квадрикой на плоскости. Устремив к нулю одну из осей квадрики в трёхмерном пространстве, получим двулистно накрытую плоскую фигуру, ограниченную кривой второго порядка. Траектории движения по инерции на пространственной квадрике перейдут в биллиардные. Первый интеграл при предельном переходе превращается в дополнительный первый интеграл биллиардной задачи. Двух первых интегралов (энергии и дополнительного) оказывается достаточно для нахождения биллиардного движения при помощи квадратур.

Другой знаменитый пример успешного применения метода Якоби — задача 4.

5. Задачи

1. Найдите производящую функцию тождественного канонического преобразования *другого типа* (обозначенного здесь как $\tilde{S}(t,\hat{p},q)$).

2. Рассмотрим величину

   $$S(t,q) = \int_{t^*}^{t} L(\theta, q(\theta), \dot{q}(\theta))\, d\theta,$$

   где $q(t)$ суть решения уравнений Эйлера — Лагранжа $\mathbf{E}(L) = 0$ такие, что $q(t^*) = q^*$, $q(t) = q$. Докажите, что функция $S(t,q)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби (7), в котором гамильтониан H отвечает лагранжиану L. Величина S называется *действием.*

3. А. Метрика на двумерной поверхности в некоторых координатах (x, y) имеет вид $T = (u(x) + v(y))(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ (метрики такого вида называют *лиувиллевыми*). Найдите движения по инерции по таким поверхностям методом Якоби. Выпишите два независимых первых интеграла.

   Б. Поверхность вращения задана в цилиндрических координатах (r, θ, z) уравнением $r = f(z)$ (получена вращением графика функции $f(z)$ вокруг оси z). Покажите, что в некоторых координатах метрика на поверхности вращения может быть представлена в лиувиллевом виде. *Подсказка:* одна из координат — θ, а вторая — $\zeta = \zeta(z)$, найдите её.

4. 4.27.

5. Прямая вращается в вертикальной плоскости вокруг некоторой своей точки с угловой скоростью 1 (в нулевой момент времени прямая горизонтальна). По прямой движется материальная точка массы 1 без трения под действием силы тяжести ($g = 1$). Обобщённая координата x — расстояние от точки до центра вращения. Найдите движение методом Якоби. *Подсказка:* Попытайтесь найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби разделением переменных. Когда это не удастся сделать, постарайтесь найти его подбором. Полный интеграл ищите в виде $S(t, x) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$. Превратите уравнение Гамильтона — Якоби в систему обыкновенных уравнений относительно A, B, C. Не старайтесь найти самое общее решение полученной системы — упрощайте. Помните, что полный интеграл должен содержать лишь один параметр (общее решение системы содержит три). Не забывайте про условие невырожденности. Сравните полученное методом Якоби решение с решением, полученным непосредственным интегрированием лагранжевых уравнений. Должно совпасть!

Будьте здоровы!