

**А. А. ЗОБОВА, Е. И. КУГУШЕВ, Т. В. ПОПОВА,
Д. В. ТРЕЩЁВ, А. Н. ШВЕЦ**

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

**КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

БАКУ, 2020

**А. А. ЗОБОВА, Е. И. КУГУШЕВ, Т. В. ПОПОВА,
Д. В. ТРЕЩЁВ, А. Н. ШВЕЦ**

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рекомендовано Научно-методическим советом по теоретической механике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки высшего профессионального образования 01.03.03, 01.04.03 «Механика и математическое моделирование» и специальности 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика»

Баку, 2020

УДК 531.01(076)

ББК 22.21

К637

К637 Компьютерный практикум по теоретической механике : Компьютерные методы исследования динамических систем / А. А. Зобова, Е. И. Кугушев, Т. В. Попова, Д. В. Трещёв, А. Н. Швец. — Баку : Издательство Филиала МГУ в г. Баку, 2020. — 40 с.

ISBN 978-9952-8353-9-7

В настоящем пособии предлагаются задачи компьютерного практикума по специальности для студентов 6-го курса кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Книга предназначена для преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся в теоретической механике.

УДК 531.01(076)

ББК 22.21

ISBN 978-9952-8353-9-7



ISBN 978-9952-8353-9-7

© Коллектив авторов, 2020

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем пособии предлагаются задачи компьютерного практикума по специальности для студентов 6-го курса кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Первая задача призвана познакомить студентов с отображением Пуанкаре как методом исследования динамических систем с непрерывным временем. При решении задачи студентам нужно обнаружить и визуализировать возникающие при малом возмущении интегрируемой гамильтоновой системы эффекты: расщепление сепаратрис, образование стохастического слоя, стабилизация неустойчивых (в отсутствие возмущения) состояний равновесия, образование странных аттракторов при наличии диссипации.

Вторая задача знакомит с методами усреднения Крылова — Боголюбова на примере механической системы с двумя степенями свободы, установленной на колеблющемся основании. Студенты должны визуализировать явление равномерной сходимости решений точных уравнений движения в форме Гамильтона к решениям усреднённых уравнений при возрастании частоты вибраций и убедиться, что при определенных параметрах системы неустойчивое в отсутствие колебаний положение равновесия становится устойчивым.

Третья задача посвящена изучению динамики механической системы с неидеальными связями — примера Пэнлеве — Клейна. В модели сухого трения Кулона касательная составляющая реакции зависит от нормальной составляющей, и стандартная для аналитической механики процедура исключения связей может привести к неединственности или несуществованию решения уравнений движения. При выполнении работы студенты изучат возникновение в системе «удара трением» (быстрого торможения системы), возникающего при отказе от одной из связей и введения вместо нее деформируемого элемента с большой жёсткостью.

В качестве основного инструмента предполагается использование системы компьютерной алгебры Maxima.

При решении всех трёх задач студенты должны овладеть хорошими практиками структурного программирования (простота, концептуальность, расширяемость и удобочитаемость программы, повторное использование кода, локализация переменных, документирование программы), а также умение работать с документацией системы программирования.

Данный практикум рассчитан на один учебный семестр (56 учебных часов).

МАХИМА

Система компьютерной алгебры (CAS) Maxima — свободное программное обеспечение с открытым исходным кодом, имеющее давнюю историю.

Maxima располагает всеми средствами, нужными для решения задач практикума. Это средства для работы со списками, для обработки символьных выражений (дифференцирование, интегрирование, подстановка, упрощение, решение систем алгебраических уравнений), для численных расчётов (численное решение систем обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений, поиск собственных значений). Имеются богатые возможности визуализации данных. Имеющиеся встроенные средства Maxima вполне достаточны для нужд практикума.

Студенты могут бесплатно установить Maxima на свои компьютеры. Существуют сборки для различных операционных систем.

Для знакомства с Maxima рекомендуются следующие ресурсы:

- официальная страница CAS Maxima, документация, загрузка [16];
- использование Maxima для исследования динамических систем [2];
- руководство для школьников и студентов [20].

Допускается использование и других CAS (Wolfram Mathematica, Maple, Reduce, R, Octave, FriCAS, MATLAB, ...) или систем программирования общего назначения (C/C++, Java, Python, Perl, EcmaScript, Lua, ...), если они подходят для решения задач.

1. МАЯТНИК С КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

1.1. ЦЕЛЬ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Целью данной работы является знакомство студентов с отображением Пуанкаре как методом исследования динамических систем небольшой размерности с непрерывным временем. В качестве тестовой задачи выбран маятник с вертикально периодически колеблющейся точкой подвеса.

Отображение Пуанкаре позволяет свести исследование системы с непрерывным временем к исследованию системы с дискретным временем. Основной выигрыш состоит в том, что размерность фазового пространства понижается на единицу. Это в ряде ситуаций позволяет осуществить удобную визуализацию, при которой становятся видны качественные аспекты динамики, такие как зоны хаотического и регулярного движений, аттракторы. Таким образом, выявляется качественная структура фазового портрета.

1.2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ РАБОТЫ

1.2.1. ОТОБРАЖЕНИЕ ЗА ПЕРИОД

Фазовый портрет не является удобным инструментом для исследования неавтономной гамильтоновой системы с одной степенью свободы, поскольку фазовые траектории в плоскости фазового портрета в типичном случае пересекаются. Фазовые траектории неавтономной системы естественней рассматривать в расширенном фазовом пространстве, но полученную трёхмерную картину трудно визуализировать.

Для гамильтоновых систем с гамильтонианом, τ -периодически зависящим от времени, удобно использовать разновидность *отображения Пуанкаре* [18, с. 289] — отображение за период. Напомним,

что *отображением за период* называется отображение, которое ставит в соответствие начальному условию при $t = 0$ решение задачи Коши для уравнений движения в момент времени t , то есть результат переноса начальной фазовой точки фазовым потоком за время t . Во многом изучение неавтономной гамильтоновой системы с одной степенью свободы сводится к изучению орбит её отображения за период. Следует отметить, что отображение за период гамильтоновой системы является симплектическим [18, с. 348, следствие 14.2].

Для орбит симплектических отображений типичным является весьма сложное, хаотическое поведение. Для примера рассмотрим так называемое *стандартное отображение Чирикова* [18, с. 384], которое хорошо иллюстрирует описываемое явление. Это преобразование фазового цилиндра с координатами $(q \bmod 2\pi, p)$, заданное формулами

$$(q, p) \mapsto (q + p + \varepsilon \sin q, p + \varepsilon \sin q).$$

При нулевом ε все орбиты лежат на окружностях $p = \text{const}$ и ведут себя вполне регулярно. Ситуация меняется при ненулевых значениях ε . Орбита выбранной подходящим образом начальной точки становится густой сетью, пронизанной многочисленными дырками — так называемой *стохастической паутиной*. Посмотреть на построение орбиты в динамике можно с помощью демонстрационного приложения [21]. На рис. 1 точки развёртки фазового цилиндра изображаются в разных градациях серого цвета в зависимости от хаотичности орбит этих точек, понимаемой в некотором смысле. На видео [22] тем же способом, что и на рисунке, визуализируется хаотичность орбит стандартного отображения Чирикова при постепенном увеличении параметра ε от 0 до 4.

1.2.2. МАЯТНИК С КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

В неподвижной вертикальной плоскости под действием силы тяжести движется точка массы m , закреплённая на конце невесомого недеформируемого стержня длины l . Другой конец стержня совершает быстрые колебания по вертикали, причём в неподвижной системе координат Ox , ось которой направлена вертикально

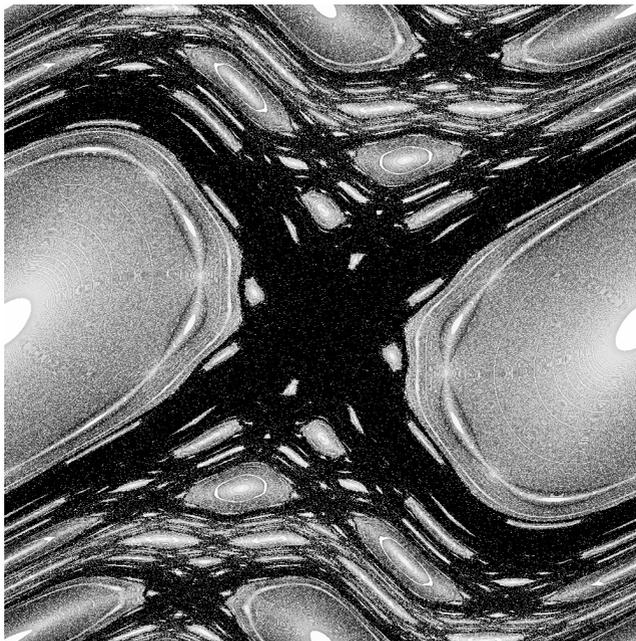


Рис. 1. Стандартное отображение Чирикова при $\varepsilon = 0,16$

вверх, его координаты изменяются по закону

$$x = 0, \quad y = A\varepsilon \cos \frac{\omega t}{\varepsilon},$$

где A и ε — параметры, g — ускорение силы тяжести, $\omega = \sqrt{g/l}$ (рис. 2). В системе действует вязкое трение, приводящееся к моменту, пропорциональному угловой скорости стержня с коэффициентом пропорциональности $m\mu$.

Перейдём к безразмерным величинам, полагая, что время измеряется в единицах $\sqrt{l/g}$. Для этого следует положить $\omega = 1$. Тем самым уменьшается количество параметров задачи.

Механическая система имеет одну степень свободы. В качестве обобщённой координаты выбирается угол q между стержнем и восходящей вертикалью. Уравнения движения маятника имеют вид

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} - \mu \frac{\partial H}{\partial p}.$$

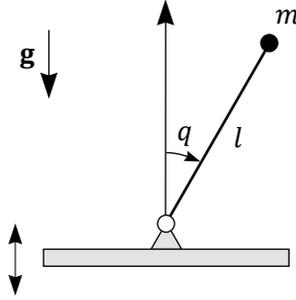


Рис. 2. Маятник с колеблющейся точкой подвеса

Здесь p — обобщённый импульс, отвечающий обобщённой координате q , $H(q, p, t)$ — функция Гамильтона.

1.2.3. УСРЕДНЕНИЕ СИСТЕМЫ. СТАБИЛИЗАЦИЯ ВЕРХНЕГО ПОЛОЖЕНИЯ МАЯТНИКА

Если параметр ε в гамильтониане

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} + Ap \sin q \sin \frac{t}{\varepsilon} + \frac{A^2}{2} \sin^2 q \sin^2 \frac{t}{\varepsilon} + \cos q$$

маятника считать малым, то подходящим каноническим преобразованием, ε -близким к тождественному, можно добиться того, что зависимость от t в новом гамильтониане будет содержаться в членах порядка ε . Нужное каноническое преобразование $(q, p, t) \mapsto (\hat{q}, \hat{p}, t)$ зададим производящей функцией

$$W(q, \hat{p}, t) = \hat{p}q + \varepsilon f(q, \hat{p}, \theta), \quad \theta = \frac{t}{\varepsilon},$$

где функция f 2π -периодична по θ (периодичность требуется для равномерной близости канонического преобразования к тождественному при всех t). При этом

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \hat{p} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \hat{q} = \frac{\partial W}{\partial \hat{p}} = q + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \hat{p}},$$

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) = \frac{\partial W}{\partial t} + H(q, p, t) = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \theta} + H(q, p, t).$$

Отсюда получаем

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) = \frac{\partial f(\hat{q}, \hat{p}, \theta)}{\partial \theta} + H(\hat{q}, \hat{p}, t) + O(\varepsilon).$$

Для того, чтобы функция \hat{H} не зависела от t в нулевом приближении по ε , нужно, чтобы функция

$$\frac{\partial f(\hat{q}, \hat{p}, \theta)}{\partial \theta} + A\hat{p} \sin \hat{q} \sin \theta + \frac{A^2}{2} \sin^2 \hat{q} \sin^2 \theta$$

не зависела от θ . Для этого достаточно выбрать

$$f(\hat{q}, \hat{p}, \theta) = A\hat{p} \sin \hat{q} \cos \theta + \frac{A^2}{8} \sin^2 \hat{q} \sin 2\theta.$$

Новый гамильтониан в новых переменных принимает вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \cos \hat{q} + \frac{A^2}{4} \sin^2 \hat{q} + O(\varepsilon),$$

где функция $O(\varepsilon)$ 2π -периодична по θ . Таким образом, выполнен один шаг усреднения в исходной гамильтоновой системе.

С помощью подобного приёма можно отправить зависимость от времени в гамильтониане в члены порядка ε^2 и даже ε^N , где N — произвольное натуральное число. Можно неавтономную часть сделать порядка $\exp(-c/|\varepsilon|)$ для некоторой положительной постоянной c . Но большего достичь в принципе нельзя: какую бы 2π -периодическую по θ каноническую близкую к тождественной замену переменных мы ни сделали, зависимость от переменной θ останется в членах, имеющих порядок больший, чем $\exp(-C/|\varepsilon|)$, для некоторой положительной постоянной C (см. [18, с. 326]).

Исследуем полученную систему, пренебрегая величинами $O(\varepsilon)$. Для этого заметим, что гамильтониан \hat{H} можно рассматривать как гамильтониан материальной точки, движущейся по прямой (или окружности $\hat{q} \bmod 2\pi$) в поле сил с потенциальной энергией

$$V(\hat{q}) = \cos \hat{q} + \frac{A^2}{4} \sin^2 \hat{q}.$$

При достаточно больших A в системе с потенциальной энергией V верхнее положение равновесия маятника $q = 0$ устойчиво.

Эффект стабилизации верхнего положения равновесия обнаруживается для нулевого приближения по ε в усреднённой системе. Сохранится ли эффект при учёте членов $O(\varepsilon)$? Этот вопрос требует отдельного изучения.

Для достаточно больших A при наличии линейного вязкого трения верхнее положение исходной системы асимптотически устойчиво. Это следует из теоремы 3, приведённой в описании задачи 2.

Стабилизацию перевёрнутого маятника П. Л. Капица демонстрировал при помощи швейной машины, а В. И. Арнольд — при помощи вибрационной электробритвы [13; 19; 4, с. 34].

1.3. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ РАБОТЫ

1. Используя данную систему обозначений, получить выражение для гамильтониана $H(q, p, t)$ и уравнения движения с помощью символьных вычислений.
2. Написать программу, рисующую на экране компьютера (на развёртке фазового цилиндра с координатами $(q \bmod 2\pi, p)$) орбиту отображения за период с данными начальными условиями.
3. Продемонстрировать, что при $\mu = 0, A = 0$ программа рисует фазовый портрет обычного математического маятника.
4. Убедиться, что при $\mu = 0$ и $A \neq 0$ появляются хаотические орбиты, плотно заполняющие открытые области на фазовом цилиндре; увидеть, что при малых значениях A хаос в основном расположен около сепаратрис и сосуществует с условно-периодическими орбитами, заполняющими замкнутые гладкие кривые. Получившаяся картина должна быть сходной с рис. 1.
5. Продемонстрировать, что при $\mu = 0$ и при значениях A , больших некоторого критического A^* , верхнее положение равновесия $q = 0$ (его лучше называть периодическим движением) оказывается устойчивым. Для этого следует найти A^* , и,

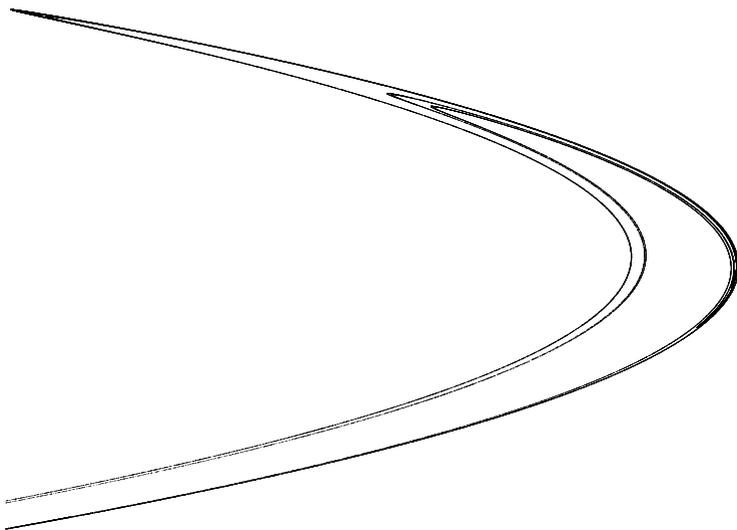


Рис. 3. Аттрактор Эно

выбрав A меньше или больше A^* , построить орбиту отображения за период для начальных условий, близких к равновесным. Показать, что при положительных μ устойчивость становится асимптотической. Продемонстрировать качественную перестройку фазового портрета усреднённой системы из раздела 1.2.3 при прохождении значения A через A^* .

6. Уметь определять для заданных значений параметров A и μ , устойчиво ли верхнее положение равновесия.
7. Продемонстрировать, что при некоторых заданных значениях параметров на фазовом цилиндре появляется странный аттрактор (притягивающее множество со сложной внутренней динамикой). Убедиться в том, что полученный аттрактор визуально аналогичен *аттрактору Эно* [1] (рис. 3).

2. ДВОЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК НА КОЛЕБЛЮЩЕМСЯ ПО ВЕРТИКАЛИ ОСНОВАНИИ

2.1. ЦЕЛЬ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Цель данной работы — познакомить студентов с теоремами метода усреднения Крылова — Боголюбова и на примере голономной системы на быстро колеблющемся по вертикали основании показать возможность стабилизации неустойчивого в отсутствие колебаний положения равновесия системы. В качестве тестовой задачи рассматривается двойной математический маятник на колеблющемся по вертикали основании.

2.2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ РАБОТЫ

2.2.1. МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ КРЫЛОВА — БОГОЛЮБОВА

Следуя [18], сформулируем некоторые теоремы метода усреднения. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) \equiv \varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + O(\varepsilon^2), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

с правой частью, гладкой по всем переменным \mathbf{x} , t , ε и периодической по t с периодом s , не зависящим от ε . Будем считать, что параметр ε мал, поэтому \mathbf{x} — медленные переменные. Если перейти к медленному времени $\tau = \varepsilon t$, то система (1) примет вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{v}\left(\mathbf{x}, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon). \quad (2)$$

Теорема 1. Найдётся $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует обратимая замена переменных $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$, близкая к тождественной,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{y}, t),$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ — гладкая по переменным \mathbf{y} , t и периодическая по t с периодом s функция, в результате которой система (1) принимает вид (2)

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) + O(\varepsilon^2), \quad (3)$$

где черта над функцией означает среднее значение функции по переменной t за период

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{s} \int_0^s \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) dt.$$

В медленном времени после замены переменных $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ система (2) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) + O(\varepsilon), \quad (4)$$

ей соответствует усреднённая система

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{y}). \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть $\mathbf{y}(\tau)$ — решение системы (5) с начальным условием $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0$ на отрезке $0 \leq \tau \leq a$. Тогда найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и $c > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ решение $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ системы (1) с начальным условием $\mathbf{x}(0, \varepsilon) = \mathbf{x}_0$ существует на отрезке $0 \leq t \leq a/\varepsilon$ и

$$\|\mathbf{x}(t, \varepsilon) - \mathbf{y}(\varepsilon t)\| < c\varepsilon$$

при $0 \leq t \leq a/\varepsilon$.

В медленном времени решение $\mathbf{x}(\tau, \varepsilon)$ системы (2) с начальным условием $\mathbf{x}(0, \varepsilon) = \mathbf{x}_0$ существует на отрезке $0 \leq \tau \leq a$ и

$$\|\mathbf{x}(\tau, \varepsilon) - \mathbf{y}(\tau)\| < c\varepsilon$$

при $0 \leq \tau \leq a$.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0$ — невырожденная особая точка усреднённой системы (5), то есть $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = 0$ и матрица $M = \partial \bar{\mathbf{v}} / \partial \mathbf{y} |_{\mathbf{y}=\mathbf{x}_0}$

невыврождена. Тогда найдётся $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ система (1) имеет невырожденное s -периодическое решение $\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \mathbf{x}_0 + O(\varepsilon)$. Более того, если все собственные значения матрицы M имеют отрицательные вещественные части (решение $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}_0$ системы (5) асимптотически устойчиво), то это периодическое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Более подробно с методом усреднения, с доказательствами теорем и примерами можно ознакомиться в [6—9; 14; 18].

2.2.2. СИСТЕМЫ НА БЫСТРО КОЛЕБЛЮЩЕМСЯ ОСНОВАНИИ

Следуя [12], рассмотрим систему N материальных точек на быстро колеблющемся основании. Основание движется поступательно вдоль неподвижной прямой и его положение относительно неподвижной системы координат задано радиус-вектором $\mathbf{w}(vt)$ некоторой точки O основания. Будем считать, что функция $\mathbf{w}(\tau)$ периодическая с периодом 2π , дважды непрерывно дифференцируемая и её норма имеет порядок $1/v$ при $v \rightarrow +\infty$ (например, $\mathbf{w}(vt) = (a/v) \cos(vt)\mathbf{e}$, где \mathbf{e} — постоянный единичный вектор). Пусть на систему наложены идеальные, голономные связи, и в отсутствие колебаний основания связи стационарны. На точки системы действуют консервативные силы, причём потенциальная энергия V системы на неподвижном основании отличается от потенциальной энергии системы на колеблющемся основании только слагаемым, зависящим от времени. Исследуем поведение системы при стремлении частоты v колебаний к бесконечности.

На систему наложены идеальные голономные связи, поэтому движение системы можно описать уравнениями Лагранжа второго рода. Обозначим через $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ радиус-векторы точек системы относительно точки O основания. Кинетическая энергия системы в неподвижной системе координат равна

$$T_{\text{абс}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{w}})^2 = T + m \langle \dot{\mathbf{r}}_S, \dot{\mathbf{w}} \rangle + \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{w}}^2.$$

Здесь \mathbf{r}_S — радиус-вектор центра масс S системы относительно точки O основания, $m = \sum_{i=1}^N m_i$ — суммарная масса системы, $T =$

$= 1/2 \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$ — кинетическая энергия системы в подвижной системе координат, связанной с основанием.

Пусть $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ — обобщённые координаты. Тогда $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q})$ ($i = 1, \dots, N$) и

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \langle A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle, \quad \dot{\mathbf{r}}_S = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

С точностью до калибровочного слагаемого ¹ функция Лагранжа системы имеет вид

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}) + m \langle \dot{\mathbf{r}}_S, \dot{\mathbf{w}} \rangle,$$

а уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} + m \frac{\partial \langle \mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}} \rangle}{\partial \mathbf{q}} = 0.$$

Таким образом, колебания основания приводят к тому, что в уравнениях движения появляются дополнительные слагаемые, зависящие от $\dot{\mathbf{w}}$, причём величина $\dot{\mathbf{w}}$ имеет порядок ν при $\nu \rightarrow +\infty$.

Перейдём к гамильтоновой форме уравнений движения. Введём обобщённые импульсы

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + m \frac{\partial \langle \dot{\mathbf{r}}_S, \dot{\mathbf{w}} \rangle}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = A \dot{\mathbf{q}} + m \frac{\partial \langle \mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}} \rangle}{\partial \mathbf{q}}.$$

Отсюда

$$\dot{\mathbf{q}} = A^{-1} \left(\mathbf{p} - m \frac{\partial \langle \mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}} \rangle}{\partial \mathbf{q}} \right). \quad (6)$$

Тогда функция Гамильтона системы имеет вид

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \underbrace{\frac{1}{2} \langle A^{-1} \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + V}_{H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p})} + \underbrace{\frac{1}{2} m^2 \left\langle A^{-1} \frac{\partial \langle \mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}} \rangle}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \langle \mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}} \rangle}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle - m \left\langle A^{-1} \mathbf{p}, \frac{\partial \langle \mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}} \rangle}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle}_{H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}, \quad (7)$$

1. Про калибровочные преобразования лагранжиана см., например, [18, с. 160].

где $H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ — функция Гамильтона невозмущённой системы, а функция $H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ содержит периодические по времени множители $\dot{\mathbf{w}}(vt)$. В функцию Гамильтона (7) зависимость от времени входит только в виде $\tau = vt$. Приняв за новое время переменную τ (быстрое время), запишем уравнения Гамильтона в виде

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \frac{1}{v} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{1}{v} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Это стандартная система уравнений вида (1) в методе усреднения Крылова — Боголюбова. Среднее значение функции $\dot{\mathbf{w}}(\tau)$ равно нулю, поскольку функция $\mathbf{w}(\tau)$ периодическая. Значит, усреднённая система имеет вид

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \frac{1}{v} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{q}},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{H} &= H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \bar{H}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau) = \\ &= H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \frac{1}{2} m^2 \overline{\left\langle A^{-1} \frac{\partial \langle \mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}} \rangle}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \langle \mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}} \rangle}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle}, \end{aligned} \quad (8)$$

а черта над функцией означает среднее значение функции по переменной τ за период.

Используя теорему 2, получаем

Утверждение 1. Пусть функция Гамильтона (7) системы дважды непрерывно дифференцируема по переменным \mathbf{q}, \mathbf{p} в некоторой области G фазового пространства и непрерывно дифференцируема по t , функция $\dot{\mathbf{w}}(\tau)$ непрерывная периодическая с периодом 2π , причём её среднее значение за период равно нулю. Тогда при произвольных фиксированных начальных условиях $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$ ($(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in G$) на конечном отрезке времени $[0; t_1]$ при стремлении частоты ν колебаний к бесконечности решение уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона (7) равномерно по t стремится к решению уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона (8).

Отсюда виден простой способ получения предельных при $\nu \rightarrow +\infty$ (усреднённых) уравнений движения голономных систем на колеблющемся основании. Введя обобщённые координаты, нужно выписать кинетическую и потенциальную энергии невозмущённой системы, к потенциальной энергии добавить слагаемое (вибрационную энергию)

$$V_{\text{вибр}} = \frac{1}{2} m^2 \overline{\left\langle A^{-1} \frac{\partial \langle \mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}} \rangle}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \langle \mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}} \rangle}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle},$$

далее записать уравнения Лагранжа или Гамильтона. Функция Лагранжа, задающая предельные уравнения, имеет вид

$$\bar{L} = T - V_{\text{пред}} = T - (V + V_{\text{вибр}}).$$

Замечание. Пусть $\mathbf{q}(t, \nu)$, $\mathbf{p}(t, \nu)$ — решение уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона (7) с начальными условиями $\mathbf{q}(0, \nu) = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{p}(0, \nu) = \mathbf{p}_0$, а $\bar{\mathbf{q}}(t)$, $\bar{\mathbf{p}}(t)$ — решение уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона (8) с начальными условиями $\bar{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{q}_0$, $\bar{\mathbf{p}}(0) = \mathbf{p}_0$. Обобщённые скорости определяются согласно (6). На отрезке $[0; t_1]$ функции $A^{-1} \mathbf{p}$, A^{-1} , $\partial \mathbf{r}_S / \partial \mathbf{q} \big|_{\mathbf{q}(t, \nu), \mathbf{p}(t, \nu)}$ при $\nu \rightarrow +\infty$ сходятся равномерно по t к функциям $A^{-1} \bar{\mathbf{p}}$, A^{-1} , $\partial \mathbf{r}_S / \partial \mathbf{q} \big|_{\bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\mathbf{p}}(t)}$. Среднее значение функции $\dot{\mathbf{w}}(\tau)$ за период равно нулю. Можно показать, что при $\nu \rightarrow +\infty$ функции $m A^{-1} \partial \langle \mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{w}} \rangle / \partial \mathbf{q} \big|_{\mathbf{q}(t, \nu), \mathbf{p}(t, \nu)}$ сходятся слабо по t в смысле L_2 к нулю. Следовательно, функции $\dot{\mathbf{q}}(t, \nu)$ при $\nu \rightarrow +\infty$ сходятся слабо по t в смысле L_2 к функции $\dot{\bar{\mathbf{q}}}(t)$.

Если на точки системы действуют непотенциальные обобщённые силы $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \tau)$, периодически зависящие от τ , то уравнения движения в быстром времени $\tau = \nu t$ имеют вид

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau)}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{\nu} \left(-\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau)}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau) \right). \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau), \tau)$, а зависимость $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tau)$ определяется согласно (6). Усреднив систему, получим

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{\nu} \left(-\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{q}} + \bar{\mathbf{P}} \right). \quad (10)$$

Используя теорему 3, получаем

Утверждение 2. Пусть $\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*$ — невырожденное состояние равновесия усреднённой системы (10). Тогда при достаточно больших ν система (9) имеет невырожденное периодическое решение с периодом 2π , которое при $\nu \rightarrow +\infty$ стремится к $\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*$. Если состояние равновесия $\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*$ системы (10) асимптотически устойчиво в линейном приближении, то соответствующее периодическое решение системы (9) асимптотически устойчиво.

2.2.3. СИСТЕМЫ НА КОЛЕБЛЮЩЕМСЯ ПО ВЕРТИКАЛИ ОСНОВАНИИ

Рассмотрим голономную систему на колеблющемся основании в однородном поле силы тяжести (других активных сил, действующих на точки системы, нет). Предположим, что колебания основания вертикальны, то есть $\dot{\mathbf{w}} = ah(\nu t)\mathbf{e}_z$. Здесь $h(\tau)$ — отличная от константы гладкая периодическая функция с нулевым средним (например, $h(\tau) = \sin \tau$); $a > 0$ — постоянная, которую будем называть амплитудой скорости колебаний; \mathbf{e}_z — единичный вектор восходящей вертикали.

Потенциальная энергия с точностью до калибровочного слагаемого имеет вид $V = mg\langle \mathbf{r}_S, \mathbf{e}_z \rangle$, а потенциальная энергия предельной системы

$$V_{\text{пред}} = mg\langle \mathbf{r}_S, \mathbf{e}_z \rangle + \frac{1}{2}m^2a^2\overline{h^2(\tau)} \left\langle A^{-1} \frac{\partial \langle \mathbf{r}_S, \mathbf{e}_z \rangle}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \langle \mathbf{r}_S, \mathbf{e}_z \rangle}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle.$$

Утверждение 3. В однородном поле силы тяжести все положения равновесия, которые имела голономная система в отсутствие колебаний, при добавлении вертикальных колебаний основания сохраняются в предельной системе. Если положение равновесия системы в отсутствие колебаний невырождено и устойчиво, то это положение равновесия предельной системы также устойчиво при любой амплитуде скорости колебаний основания. Если положение равновесия системы в отсутствие колебаний невырождено и неустойчиво, а амплитуда скорости колебаний удовлетворяет неравенству

$$a^2 > \frac{g^2}{\overline{h^2(\tau)}|\lambda_*|}, \quad (11)$$

где λ_* — наименьший по модулю из отрицательных корней уравнения $\det(C - \lambda A) = 0$ (матрицы A и $C = \partial^2 V / \partial \mathbf{q}^2$ вычислены в положении равновесия), то это положение равновесия предельной системы является устойчивым.

Доказательство. Положения равновесия системы в отсутствие колебаний основания являются критическими точками функции V , то есть определяются из уравнения

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \langle \mathbf{r}_S, \mathbf{e}_z \rangle}{\partial \mathbf{q}} = 0.$$

Эти положения равновесия являются также критическими точками функции $V_{\text{пред}}$, поскольку

$$\frac{\partial V_{\text{пред}}}{\partial \mathbf{q}} = mg\mathbf{f} + m^2 a^2 \overline{h^2(\tau)} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T A^{-1} \mathbf{f} + O(\mathbf{f}^2).$$

Пусть положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ системы в отсутствие колебаний невырождено. Для устойчивости этого положения равновесия предельной системы достаточно, чтобы в нём была положительно определена матрица

$$\begin{aligned} B &= \left. \frac{\partial^2 V_{\text{пред}}}{\partial \mathbf{q}^2} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = mg \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} + \\ &+ m^2 a^2 \overline{h^2(\tau)} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T A^{-1} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right) \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \\ &= C + \frac{a^2 \overline{h^2(\tau)}}{g^2} C A^{-1} C, \end{aligned}$$

где $C = \partial^2 V / \partial \mathbf{q}^2 \big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}$. Матрица A кинетической энергии системы положительно определена, поэтому по теореме об одновременном приведении двух квадратичных форм к каноническому виду существует линейная замена переменных, в результате которой в новых переменных матрица A станет единичной в положении равновесия, а матрица C диагональной: $C = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Здесь λ_i ($i = 1, \dots, n$) определяются из уравнения $\det(C - \lambda A) = 0$.

В новых переменных матрица B примет вид

$$B = \text{diag} \left(\lambda_1 + \frac{a^2 \overline{h^2(\tau)}}{g^2} \lambda_1^2, \dots, \lambda_n + \frac{a^2 \overline{h^2(\tau)}}{g^2} \lambda_n^2 \right).$$

Она положительно определена, если

$$\lambda_i > 0 \quad \text{или} \quad 1 + \frac{a^2 \overline{h^2(\tau)}}{g^2} \lambda_i < 0$$

для любого $i = 1, \dots, n$. Если $\lambda_i > 0$ для любого i , то положение равновесия системы в отсутствие колебаний устойчиво и это положение равновесия предельной системы также устойчиво.

Пусть некоторые из значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ отрицательны и λ_* наименьшее по модулю из этих отрицательных значений. Тогда положение равновесия системы в отсутствие колебаний неустойчиво и это положение равновесия предельной системы будет устойчивым при выполнении неравенства

$$a^2 > \frac{g^2}{h^2(\tau) |\lambda_*|}. \quad \square$$

2.3. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ РАБОТЫ

В качестве практической работы предлагается задача о двойном математическом маятнике на колеблющемся по вертикали основании.

Двойной математический маятник (рис. 4) состоит из двух точек с массами m_1 и m_2 , соединённых невесомым стержнем длины l_2 . Точка с массой m_1 соединена с неподвижной относительно основания точкой (точкой подвеса) невесомым стержнем длины l_1 . Маятник может двигаться в неподвижной вертикальной плоскости в однородном поле силы тяжести. Основание движется поступательно по вертикали, его положение относительно неподвижной системы координат задано радиус-вектором \mathbf{w} точки подвеса: $\mathbf{w} = (a/v) \cos vt \mathbf{e}_z$, где v — частота колебаний, $a = \text{const} > 0$ — амплитуда скорости колебаний, \mathbf{e}_z — единичный вектор восходящей вертикали.

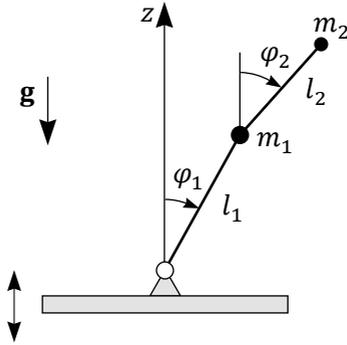


Рис. 4. Двойной математический маятник на колеблющемся основании

1. Получить функцию Лагранжа (или Гамильтона) системы на колеблющемся основании; функцию Лагранжа (или Гамильтона) предельной (усреднённой) системы, а также уравнения движения точной и предельной систем с помощью символьных вычислений. В качестве обобщённых координат использовать углы φ_1 и φ_2 отклонения стержней от восходящей вертикали.

2. Иллюстрация теоремы 2 метода усреднения.

Для решений точной (при большой частоте колебаний) и предельной систем построить и сравнить графики зависимостей обобщённых координат от времени. Также для каждой обобщённой координаты найти модуль разности решений точной и предельной систем, отвечающий данной обобщённой координате (будем называть этот модуль разности *отклонением*). Построить график зависимости отклонения от времени.

Построить и сравнить графики зависимостей обобщённых скоростей от времени точной и предельной системы. Убедиться, что в некоторые моменты обобщённые скорости точной системы заметно отличаются от обобщённых скоростей предельной системы. Это соответствует тому, что нет равномерной сходимости обобщённых скоростей по времени.

Выполнить задание при разных начальных условиях и при

разных значениях a амплитуды скорости колебаний основания.

3. Для каждой обобщённой координаты убедиться, что отклонение имеет порядок $1/\nu$ следующим образом. Задать время наблюдения за движением системы (общее для всех ν), выбрать некоторое ν и вычислить максимальное отклонение за время наблюдения, умноженное на ν . Провести вычисления, увеличивая ν . Построить график зависимости от ν максимального отклонения, умноженного на ν , и убедиться, что начиная с некоторого ν поведение этой функции отвечает тому, что функция ограничена некоторой константой.
4. Воспользовавшись формулой (11), получить условие для амплитуды скорости колебаний a основания, при выполнении которого неустойчивое положение равновесия системы в отсутствие колебаний становится устойчивым положением равновесия предельной системы. Продемонстрировать, что выбором значения a можно стабилизировать это неустойчивое положение равновесия. Для этого, выбрав начальные условия из малой окрестности положения равновесия и найдя решение предельной системы на достаточно длительном интервале времени с этими начальными условиями, убедиться, что решение остается в некоторой малой окрестности данного положения равновесия.

Выполнить задание для разных положений равновесия системы неустойчивых в отсутствие колебаний основания.

5. Иллюстрация теоремы 3 метода усреднения.

Добавить в систему линейное вязкое трение, например, $Q_1 = -\mu\dot{\phi}_1$, $Q_2 = -\mu(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)$. Убедиться, что устойчивое положение равновесия предельной системы становится асимптотически устойчивым и при $\nu \rightarrow +\infty$ ему отвечает асимптотически устойчивое положение равновесия точной системы. Уравнения движения точной и предельной систем с обобщенными силами имеют вид (9), (10).

3. ПРИМЕР ПЭНЛЕВЕ — КЛЕЙНА

3.1. ЦЕЛЬ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Цель данной работы — изучить динамику системы, на которую наложены неидеальные связи с сухим трением Кулона. В этом случае касательная составляющая реакции зависит от нормальной составляющей, и стандартная для аналитической механики процедура исключения связей может привести к неединственности или несуществованию решения уравнений движения. В работе рассматривается классический пример Пэнлеве — Клейна [3]. При отказе от одной из связей и введения деформируемого элемента с большой жёсткостью возникает «удар трением», т. е. быстрое торможение системы [15]. Изложение теоретической части задачи следует книгам [10; 17].

3.2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ РАБОТЫ

3.2.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Рассмотрим систему двух материальных точек с единичными массами (рис. 5), соединённых невесомым нерастяжимым стержнем длины l . Точки движутся по параллельным неподвижным шероховатым прямолинейным направляющим, расстояние между которыми равно $d < l$. На точки действуют внешние заданные постоянные силы $X_1\mathbf{e}_x$ и $X_2\mathbf{e}_x$ вдоль направляющих и $Y_1\mathbf{e}_y$ и $Y_2\mathbf{e}_y$ перпендикулярно им. Здесь векторы \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y — единичные орты инерциальной системы отсчёта Oxy : ось Ox параллельна направляющим, ось Oy лежит в плоскости направляющих и перпендикулярна им.

Система имеет одну степень свободы: примем в качестве обобщённой координаты x_1 — координату первой точки на прямой,

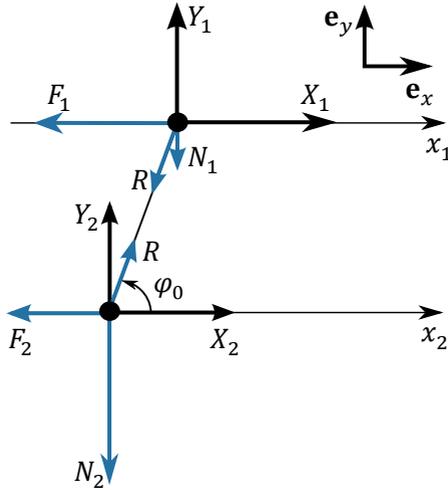


Рис. 5. Пример Пэнлеве — Клейна. На рисунке точки движутся вправо, $N_i < 0$, $F_i < 0$, $X_i > 0$, $Y_i > 0$, $R > 0$

тогда координата второй точки равна $x_2 = x_1 - l \cos \varphi_0$, где $\varphi_0 = \arcsin(d/l)$ — постоянный угол между второй прямой и стержнем (см. рис. 5).

Введём реакции связей. Предположим, что постоянное расстояние между точками обеспечивается внутренними силами. Тогда реакция этой связи направлена по стержню (см. [18, пример 3.11, п. 3.2.5]). Обозначим реакцию стержня, действующую на точку 2, через $\mathbf{R} = R(\cos \varphi_0 \mathbf{e}_x + \sin \varphi_0 \mathbf{e}_y)$. На точку 1 действует реакция стержня $-\mathbf{R}$.

Направляющие, по которым двигаются точки, являются неидеальными связями. Разложим их реакции на нормальные $N_i \mathbf{e}_y$ и касательные $F_i \mathbf{e}_x$ составляющие ($i = 1, 2$). Для F_i примем модель сухого трения Кулона:

$$F_i = -\mu_i |N_i| \sigma_i, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \sigma_i = \text{sign } \dot{x}_i & \text{при } \dot{x}_i \neq 0, \\ \sigma_i \in [-1, 1] & \text{при } \dot{x}_i = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Система скользит влево, если $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = -1$, и вправо, если $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = 1$. Тогда F_i называют силами сухого трения

скольжения. В этом случае уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_1 = X_1 - R \cos \varphi_0 - \mu_1 |N_1| \sigma, \quad (2)$$

$$\ddot{x}_2 = X_2 + R \cos \varphi_0 - \mu_2 |N_2| \sigma, \quad (3)$$

$$0 = Y_1 - R \sin \varphi_0 + N_1, \quad (4)$$

$$0 = Y_2 + R \sin \varphi_0 + N_2, \quad (5)$$

$$x_1 - x_2 = l \cos \varphi_0. \quad (6)$$

Если точки покоятся в течение некоторого интервала времени, то

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0.$$

Тогда, согласно (1), F_i могут принимать любое значение в интервале $[-\mu_i N_i, \mu_i N_i]$ (в этом случае F_i называют силами сухого трения покоя) и должны удовлетворять уравнениям статики

$$0 = X_1 - R \cos \varphi_0 - F_1,$$

$$0 = X_2 + R \cos \varphi_0 - F_2.$$

Выражая отсюда F_i , а N_i из (4)—(5), получаем неравенства

$$|X_1 - R \cos \varphi_0| \leq \mu_1 |Y_1 - R \sin \varphi_0|, \quad (7)$$

$$|X_2 + R \cos \varphi_0| \leq \mu_2 |Y_2 + R \sin \varphi_0|. \quad (8)$$

Рассмотрим скольжение системы. Стандартная процедура получения замкнутой системы дифференциальных уравнений для определения закона движения состоит в исключении неизвестных реакций связей из уравнений (2)—(6). В нашем случае получаем уравнение, содержащее только реакцию стержня R :

$$X_1 - X_2 = 2R \cos \varphi_0 + \sigma(\mu_1 |R \sin \varphi_0 - Y_1| - \mu_2 |R \sin \varphi_0 + Y_2|).$$

Введём параметры

$$X^* = \frac{X_1 - X_2}{\cos \varphi_0}, \quad \mu_i^* = \mu_i \operatorname{tg} \varphi_0, \quad Y_i^* = \frac{Y_i}{\sin \varphi_0}, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

тогда уравнение на реакцию принимает вид

$$X^* = \Phi(R), \quad \text{где } \Phi(R) = 2R + \sigma(\mu_1^* |R - Y_1^*| - \mu_2^* |R + Y_2^*|). \quad (10)$$

График $\Phi(R)$ представляет собой ломаную, имеющую не более двух точек излома и состоящую не более, чем из трёх сегментов.

Предположим сначала, что при некоторых значениях параметров (9) уравнение (10) имеет единственное решение R^* . Тогда после подстановки значения $R = R^*$ в (2), (4) получаем

$$\begin{aligned} N_1^* &= R^* \sin \varphi_0 - Y_1, \\ \dot{x}_1 &= X_1 - R^* \cos \varphi_0 - \mu_1 |N_1^*| \sigma. \end{aligned}$$

Последнее уравнение является замкнутым уравнением относительно неизвестной функции $x_1(t)$. Так как правая часть уравнения постоянна (не зависит от времени и переменных x_1, \dot{x}_1), то рассматриваемая система двигается с постоянным ускорением. Заметим, что при $\mu_i = 0$ (идеальные связи, трения нет) решение уравнения (10) всегда существует и единственно.

Однако при некоторых значениях параметров (9) уравнение (10) либо не имеет решений, либо имеет более одного решения. В этом случае процедура исключения реакций неидеальных связей приводит к неединственности или несуществованию решения уравнений движения (2)—(6). Такую ситуацию называют *парадоксом Пэнлеве* [3; 11]. Подробное изложение истории вопроса и возникших дискуссий можно найти в [17]).

3.2.2. РЕАЛИЗАЦИЯ СВЯЗИ АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА ВЯЗКОУПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ

Как было показано выше (см. также [10]), присутствие в системе неидеальной связи типа сухого трения Кулона, в которой касательная составляющая реакции зависит от величины нормальной составляющей, может привести к неединственности или несуществованию решения уравнений движения. Чтобы выяснить, как следует моделировать такие системы и как происходит движение в действительности, можно снять одну или несколько связей и ввести вместо них деформируемые элементы (о реализациях различных связей, например, пружинами большой жёсткости, см. [5]). В задаче Пэнлеве — Клейна предлагались различные способы введения деформаций: продольные и изгибные деформации стержня, деформации направляющих (подробнее см. [17]).

Введём продольную деформацию δ стержня, соединяющего точки. Зададим реакцию стержня \mathbf{R} , действующую на вторую точку, явной формулой:

$$\mathbf{R} = R(\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y), \quad R(\delta, \dot{\delta}) = k\varepsilon^{-2}\delta + \nu\varepsilon^{-1}\dot{\delta}. \quad (11)$$

Здесь $k > 0$ и $\nu > 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Реакция стержня, т. е. восстанавливающая сила этого деформируемого элемента, имеет вязкоупругий характер. Определение реакции и знак параметров выбраны так, что при $\delta > 0$ стержень растянут, а $\delta < 0$ — сжат.

Теперь система имеет две степени свободы, в качестве обобщённых координат примем x_1, δ . При этом направляющие по-прежнему считаем недеформируемыми, то есть на систему наложена связь

$$d = (l + \delta) \sin \varphi = \text{const}. \quad (12)$$

Угол φ может меняться с течением времени. Его величина связана с координатой δ соотношением

$$\varphi = \arcsin \frac{d}{l + \delta}. \quad (13)$$

При скольжении обеих точек по направляющим уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_1 = X_1 - R(\delta, \dot{\delta}) \cos \varphi - \mu_1 |N_1| \sigma_1 \quad (14)$$

$$\ddot{x}_2 = X_2 + R(\delta, \dot{\delta}) \cos \varphi - \mu_2 |N_2| \sigma_2, \quad (15)$$

$$0 = Y_1 - R(\delta, \dot{\delta}) \sin \varphi + N_1, \quad (16)$$

$$0 = Y_2 + R(\delta, \dot{\delta}) \sin \varphi + N_2, \quad (17)$$

$$x_1 - x_2 = (l + \delta) \cos \varphi. \quad (18)$$

Параметры $\sigma_i = \text{sign } \dot{x}_i$ могут иметь разные знаки, так как из-за деформации стержня точки могут двигаться в разные стороны. Заметим, что здесь, в отличие от уравнений (2)—(5), реакция стержня R задана и неизвестны только реакции N_1 и N_2 , но они однозначно вычисляются как функции δ и $\dot{\delta}$ из (16)—(17).

Составим дифференциальное уравнение, описывающее изменение деформации стержня $\delta(t)$. Продифференцировав (12), (18) по времени два раза, получим:

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \ddot{\delta} \cos \varphi - 2\dot{\delta}\dot{\varphi} \sin \varphi - (l + \delta)(\sin \varphi \ddot{\varphi} - \cos \varphi \dot{\varphi}^2), \quad (19)$$

$$0 = \ddot{\delta} \sin \varphi - 2\dot{\delta}\dot{\varphi} \cos \varphi + (l + \delta)(\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2). \quad (20)$$

Умножив уравнение (19) на $\cos \varphi$, а (20) на $\sin \varphi$ и сложив, получим

$$\ddot{\delta} - (l + \delta)\dot{\varphi}^2 = (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \cos \varphi, \quad (21)$$

где в соответствии с (13)

$$\dot{\varphi} = -\frac{\dot{\delta} \operatorname{tg} \varphi}{l + \delta} = -\frac{d\dot{\delta}}{\sqrt{(l + \delta)^2 - d^2}(l + \delta)}. \quad (22)$$

При подстановке в (21) выражений для \ddot{x}_1 , \ddot{x}_2 из (14), (15) получим замкнутое уравнение на $\delta(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} = & \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi \dot{\delta}^2}{l + \delta} + \cos \varphi (X_1 - X_2 - 2R(\delta, \dot{\delta}) \cos \varphi - \\ & - (\sigma_1 \mu_1 |Y_1 - R(\delta, \dot{\delta}) \sin \varphi| - \sigma_2 \mu_2 |Y_2 + R(\delta, \dot{\delta}) \sin \varphi|)), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\varphi = \arcsin \frac{d}{l + \delta}.$$

Рассмотрим случай малых деформаций, то есть будем считать, что

$$\delta \sim \varepsilon^2, \quad \dot{\delta} \sim \varepsilon. \quad (24)$$

Заметим, что в этой окрестности величина реакции $R(\delta, \dot{\delta})$ остаётся конечной (см. (11)). О величинах деформаций при реализации связей см. также [5, с. 54, теорема 9].

Тогда из (13), (22) получаем

$$\sin \varphi = \frac{d}{l}(1 + O(\varepsilon^2)), \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{l}(1 + O(\varepsilon^2)),$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{d\dot{\delta}}{l\sqrt{l^2 - d^2}}(1 + O(\varepsilon)) = O(\varepsilon).$$

Таким образом, угол φ с точностью до ε^2 постоянен и равен φ_0 . Уравнение (23) с точностью до $O(\varepsilon^2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} + O(\varepsilon^2) = & \cos \varphi_0 (X_1 - X_2 - 2R(\delta, \dot{\delta}) \cos \varphi_0 - \\ & - (\sigma_1 \mu_1 |Y_1 - R(\delta, \dot{\delta}) \sin \varphi_0| - \sigma_2 \mu_2 |Y_2 + R(\delta, \dot{\delta}) \sin \varphi_0|)). \end{aligned}$$

Если точки скользят в одну сторону $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, то пренебрегая величинами порядка ε^2 и используя обозначения (9), получим

$$\ddot{\delta} = \cos^2 \varphi_0 (X^* - \Phi(R(\delta, \dot{\delta}))). \quad (25)$$

Отсюда следует, что каждому решению R^* уравнения (10) соответствует положение равновесия

$$\delta^* = \frac{\varepsilon^2 R^*}{k} (1 + O(\varepsilon^2)), \quad \dot{\delta} = 0 \quad (26)$$

уравнения (23).

Оказывается (см. задание 2), что если при некотором значении σ и параметров (9) решение R^* уравнения (10) единственно и не является точкой излома графика $\Phi(R)$ (назовём этот случай *регулярным*), то положение равновесия асимптотически устойчиво. (Например, если трения нет $\mu_1 = \mu_2 = 0$, решение R^* уравнения (10) единственно при любых значениях других параметров, а положение равновесия (26) глобально асимптотически устойчиво.) Тогда если начальные значения $\delta(0)$, $\dot{\delta}(0)$ выбраны в области притяжения этого решения, то за короткое время порядка ε^{-1} реакция стержня $R(\delta(t), \dot{\delta}(t))$ приближается к значению R^* . Таким образом, в регулярном случае введение деформируемого элемента вместо связи абсолютно твёрдого тела приводит к той же динамике системы, а именно, скольжению с постоянным ускорением.

Однако, существуют такие значения параметров (9), при которых уравнение (23) не имеет положений равновесия или имеет более одного положения равновесия. При этом существуют такие решения, на которых деформация $\delta(t)$ начинает быстро возрастать. Это означает, что возрастает величина восстанавливающей силы $R(\delta(t), \dot{\delta}(t))$. Тогда из (16)—(17) получаем, что возрастают

также нормальные составляющие реакций направляющих N_1 и N_2 и силы трения скольжения F_1 и F_2 , что может привести к быстрой остановке системы. Этот эффект называют *ударом трением*.

Покажем, что такая быстрая остановка действительно происходит. Для этого будем численно решать задачу Коши системы (14)—(17), отслеживая моменты остановок и смен направления движения точек на направляющих.

3.2.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Для того, чтобы численно интегрировать задачу Коши для примера Пэнлеве — Клейна с деформируемым элементом с учётом остановок и трения покоя, удобно принять в качестве обобщённых координат x_1 и x_2 . Тогда

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + d^2} - l,$$

$$\dot{\delta} = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \frac{x_1 - x_2}{l + \delta}.$$

В случае скольжения $\sigma_i = \pm 1$ будем интегрировать уравнения (14), (15), в которых переменные φ и $R = R(\delta, \dot{\delta})$ вычисляются из равенств (11) и (13). Если в какой-то момент времени скорость точки \dot{x}_i обратилась в ноль, то происходит либо остановка этой точки на некоторое время, либо смена направления движения, в зависимости от величины силы трения.

Итак, схема интегрирования уравнений движения следующая.

1. $\dot{x}_1 \neq 0, \dot{x}_2 \neq 0$: вычислить $\sigma_i = \text{sign}(\dot{x}_i)$ и интегрировать систему (14), (15) до тех пор, пока какая-либо из скоростей \dot{x}_i не обратится в ноль. Обращение скорости в ноль можно обнаруживать по смене знака функции $\dot{x}_i(t)$, а время остановки и фазовые переменные в момент остановки — линейной интерполяцией.
2. $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 \neq 0$. Проверить условие (аналогичное (7)) на величину силы трения покоя:

$$|X_1 - R \cos \varphi| \leq \mu_1 |Y_1 - R \sin \varphi|. \quad (27)$$

- a) Условие (27) выполнено. Первая точка покоится, вторая скользит, $\sigma_2 = \text{sign}(\dot{x}_2) = \pm 1$. Интегрировать систему уравнений

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = X_2 + R \cos \varphi - \sigma_2 \mu_2 |Y_2 + R \sin \varphi|$$

до тех пор, пока не нарушится условие (27) или условие $\dot{x}_2 \neq 0$.

- b) Условие (27) не выполнено. Присвоить $\sigma_1 := \text{sign}(X_1 - R \cos \varphi)$. Перейти в п. 1.
3. $\dot{x}_1 \neq 0, \dot{x}_2 = 0$. Проверить условие

$$|X_2 + R \cos \varphi| \leq \mu_2 |Y_2 + R \sin \varphi|. \quad (28)$$

- a) Условие (28) выполнено. Вторая точка покоится, первая скользит, $\sigma_1 = \text{sign}(\dot{x}_1) = \pm 1$. Интегрировать систему уравнений

$$\dot{x}_1 = X_1 - R \cos \varphi - \sigma_1 \mu_1 |Y_1 - R \sin \varphi|, \quad \dot{x}_2 = 0$$

до тех пор, пока не нарушится условие (28) или $\dot{x}_1 \neq 0$.

- b) Условие (28) не выполнено. Присвоить $\sigma_2 := \text{sign}(X_2 + R \cos \varphi)$. Перейти в п. 1.
4. $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$. Обе точки одновременно имеют нулевую скорость. Проверить условия (27) и (28).
- a) Оба выполнены. Система в положении равновесия. Интегрирование закончено.
- b) Нарушено только (27). Присвоить $\sigma_1 := \text{sign}(X_1 - R \cos \varphi)$. Перейти в п. 3а.
- c) Нарушено только (28). Присвоить $\sigma_2 := \text{sign}(X_2 + R \cos \varphi)$. Перейти в п. 2а.
- d) Нарушены оба условия. Присвоить $\sigma_1 := \text{sign}(X_1 - R \cos \varphi)$ и $\sigma_2 = \text{sign}(X_2 + R \cos \varphi)$. Перейти в п. 1.

Пример. Рассмотрим решения двух задач Коши для примера Пэн-леве — Клейна с деформируемым стержнем. Пусть параметры системы таковы:

$$\begin{aligned}d &= 0,8, \quad l = 1, \\X_1 &= 3,6, \quad Y_1 = 0,8, \quad \mu_1 = 0,525, \\X_2 &= 0, \quad Y_2 = -2,4, \quad \mu_2 = 2,85, \\k &= 1, \quad \nu = 1, \quad \varepsilon = 0,1.\end{aligned}$$

В начальный момент будет отличаться лишь положение второй точки на направляющей, и, следовательно, величина начальной деформации стержня $\delta(0)$. Оставшиеся начальные условия выберем следующими:

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 10.$$

В первом случае выберем $x_2(0) = -0,65$ (тогда $\delta(0) = 0,03$). (Заметим, что начальное условие для δ находится в области притяжения асимптотически устойчивого положения равновесия уравнения (21).) На рис. 6 показана фазовая кривая уравнения (23) на плоскости $(\delta, \dot{\delta})$, реакция стержня и скорость первой точки. Видно, что реакция R , а следовательно, и ускорения точек довольно быстро выходят на постоянное значение, точки двигаются вправо равноускоренно.

Во втором случае выберем $x_2(0) = -0,78$ (тогда $\delta(0) = 0,12$). Соответствующие фазовая кривая, реакция стержня и скорость первой точки представлены на рис. 7. При $t = 0,802$ скорость второй точки обращается в ноль, причём условия остановки выполнены (случай 3а), далее при $t = 0,803$ скорость первой точки обращается в ноль, но условия остановки не выполнены (случай 4б) и точка начинает двигаться влево. При $t = 1,403$ первая точка останавливается (случай 4а). Полученное движение системы демонстрирует удар трением — быструю остановку системы из-за наличия в ней трения.

3.3. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ РАБОТЫ

1. Провести анализ функции $\Phi(R)$, заданной в (10), для $\sigma = \pm 1$ и построить все качественно различные варианты графиков

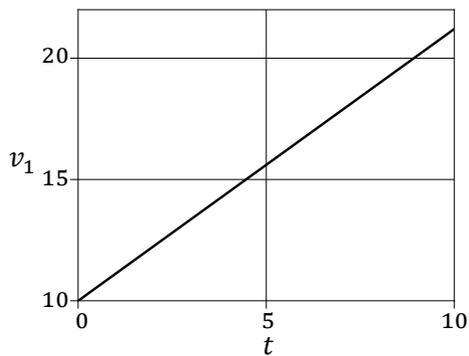
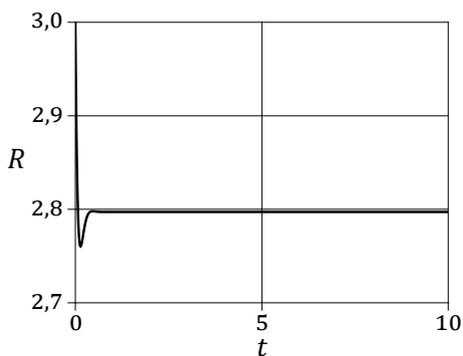
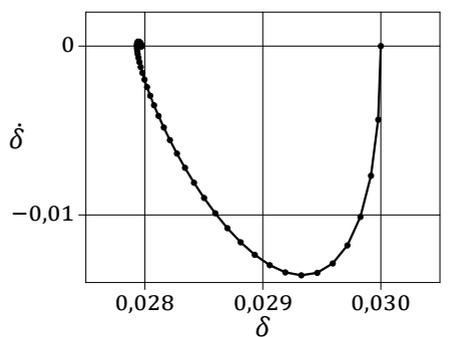


Рис. 6. Фазовая кривая уравнения (23) на плоскости $(\delta, \dot{\delta})$, зависимость реакции R и скорости первой точки $v_1 = \dot{x}_1$ от времени. Равноускоренное движение.

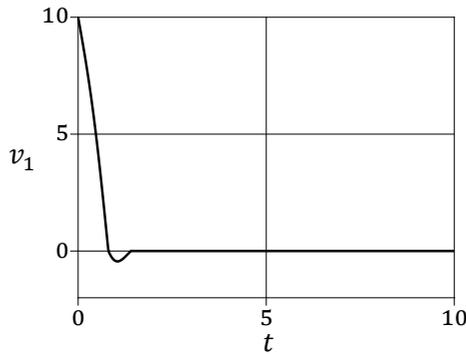
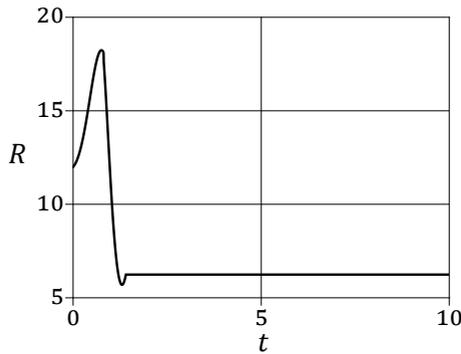
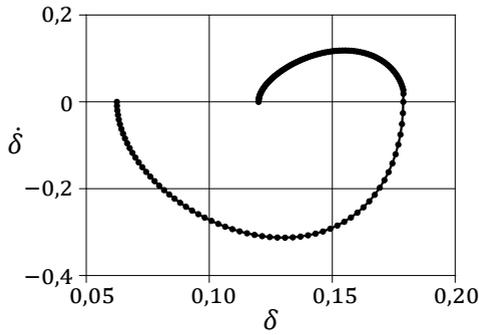


Рис. 7. Фазовая кривая уравнения (23) на плоскости $(\delta, \dot{\delta})$, зависимость реакции R и скорости первой точки $v_1 = \dot{x}_1$ от времени. Удар трением и остановка системы.

$\Phi(R)$, указав для каждого область параметров μ_i^*, Y_i^* , в которой такой график реализуется. Качественно различными будем называть графики, для которых различны последовательности знаков угловых коэффициентов сегментов ломаной.

2. *Дополнительное.* Доказать, что в регулярном случае решение R^* уравнения (10) соответствует асимптотически устойчивому положению равновесия (26) уравнения (23) при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Для этого достаточно показать, что $\Phi'(R^*) > 0$.
3. Исследовать устойчивость положений равновесия уравнения (25) в линейном приближении: для этого найти положения равновесия и посчитать численно корни характеристического многочлена линеаризованной системы.
4. Построить фазовый портрет уравнения (25) для тех вариантов параметров, которые были разобраны в задании 1. Сначала рассмотреть случай $\nu = 0$ (см. (11)), далее $\nu \neq 0$. Отметить устойчивые и неустойчивые равновесия системы.
5. Численно построить решение уравнения (23) для начальных значений δ и $\dot{\delta}$ из области притяжения устойчивого положения равновесия системы (25) и вне её. В случае, если происходит остановка первой или второй точки системы, проверить условия для трения покоя (7), (8), и выяснить, будет ли точка двигаться после остановки в обратную сторону по направляющей или остановится.
6. *Дополнительное.* Написать программу численного интегрирования задачи Коши по схеме раздела 3.2.3 с проверкой случаев остановки и автоматического переключения на интегрирование соответствующей системы уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Communications in Mathematical Physics.* — 1976. — Vol. 50, issue 1. — P. 69–77. — DOI: 10.1007/BF01608556.
2. *Morante A., Vallejo J. A.* Chaotic dynamics with Maxima. — 01/16/2013. — arXiv: 1301.3240v1.
3. *Painlevé P.* Leçons sur le frottement. — Paris : Hermann, 1895. — 111 p. — Пер.: *Пэнлеве П.* Лекции о трении : пер. с фр. — М. : Гостехтеоретиздат, 1954. — 316 с.
4. *Арнольд В. И.* Математическое понимание природы. — М. : МЦНМО, 2010. — 144 с. — ISBN 978-5-94057-674-7.
5. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. Т. 3. — М., 1985. — (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР).
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М. : Физматлит, 1963. — 410 с.
7. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М. : Наука, 1967. — 472 с.
8. *Журавлёв В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. — М. : Наука, 1988. — 328 с. — ISBN 5-02-006627-3.
9. *Журавлёв В. Ф., Петров А. Г., Шундерюк М. М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. — М. : ЛЕНАНД, 2015. — 304 с. — ISBN 978-5-9710-2009-7.
10. *Иванов А. П.* Основы теории систем с трением. — М. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. — ISBN 978-5-93972-888-1.
11. *Клейн Ф.* К критике Пенлеве кулоновых законов трения // Лекции о трении : пер. с фр. / П. Пэнлеве. — М. : Гостехтеоретиздат, 1954. — С. 249—257.
12. *Кугушев Е. И., Левин М. А., Попова Т. В.* О голономных системах на быстро колеблющемся основании // ПММ. — 2017. — Т. 81, № 5. — С. 523—533. — ISSN 0032-8235.

13. Лекционные курсы НОЦ // Гамильтонова механика. Вып. 4. — М. : МИАН, 2006. — ISBN 5-98419-016-8. — DOI: 10.4213/book646.
14. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — К. : Наукова думка, 1971. — 440 с.
15. *Самсонов В. А.* Очерки о механике. Некоторые задачи, явления и парадоксы. — М. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — ISBN 5-93972-045-5.
16. Система компьютерной алгебры Maxima. — URL: <http://maxima.sourceforge.net/ru/>.
17. *Сумбатов А. С., Юнин Е. К.* Избранные задачи механики систем с сухим трением. — М. : Физматлит, 2013. — ISBN 978-5-9221-1444-8.
18. Теоретическая механика / С. В. Болотин [и др.]. — М. : Академия, 2010. — 432 с. — ISBN 978-5-7695-5946-4.
19. Устойчивость перевёрнутого маятника (запись рассказа Владимира Игоревича Арнольда). — URL: <http://www.etudes.ru/ru/etudes/arnold-pendulum/>.
20. *Чичкарёв Е. А.* Компьютерная математика с Maxima : Руководство для школьников и студентов. — URL: <https://www.altlinux.org/images/0/0b/MaximaBook.pdf>.
21. *Швец А. Н.* Стандартное отображение Чирикова — демонстрационное приложение. — URL: <http://mech.math.msu.su/~shvetz/practicum/SCM.svg>.
22. *Швец А. Н.* Стандартное отображение Чирикова — поведение орбит при возрастании малого параметра. — URL: <http://mech.math.msu.su/~shvetz/practicum/SCM.mp4>.

Учебное издание

Зобова Александра Александровна,
Кугушев Евгений Иванович,
Попова Татьяна Валентиновна,
Трещёв Дмитрий Валерьевич,
Швец Антон Николаевич

**КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.
КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Заведующий типографией:

С. М. Сейидов

Технический редактор:

А. Г. Алиев

ISBN 978-9952-8353-9-7



9 789952 835397

Подписано в печать 25.12.2019. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная 80 г. Печать цифровая.
Объём 2,5 усл. печ. л. Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии
Филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Баку