

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова"

На правах рукописи

Лапин Николай Иванович

**Применение метода неприводимых тензоров
в задачах динамики твердого тела в
неоднородных силовых полях**

01.02.01. – Теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Урман Юрий Михайлович

Москва – 2013

Содержание

Введение	4
Глава 1. Мультипольное разложение	16
1.1. Пространство дифференцируемых функций, заданных на сфере	17
1.2. Мультипольное разложение скалярного поля	19
1.3. Разложение векторного поля на шаровые векторы	22
1.4. Группа симметрии уравнения Гельмгольца	25
1.5. Тензорное решение уравнения Гельмгольца	32
Глава 2. Инвариантные представления физических взаимодействий	35
2.1. Инвариантное разложение силовой функции двух объемных зарядовых распределений	35
2.2. Физический смысл неприводимых тензоров	38
2.3. Свойства силовой функции распределения двух объемных зарядовых распределений	38
2.4. Вычисление силы и момента сил по силовой функции	41
2.5. Инвариантное разложение силовой функции взаимодействия двух объемных токовых распределений	43
2.6. Свойства силовой функции распределения двух объемных токовых распределений	48
2.7. Запись силовой функции взаимодействия токового витка с диамагнитной пластиной	51
Глава 3. Потенциальная энергия и силовые характеристики	

ки квазисферического диамагнитного ротора в произвольном магнитном поле	53
3.1. Представление потенциальной энергии взаимодействия произвольного по форме ротора с произвольным магнитным полем	54
3.2. Силовая функция диамагнитного ротора близкого по форме к сфере в магнитном поле	59
3.3. Вычисление силы, действующей на ротор	62
3.4. Определение области устойчивости для диамагнитного ротора по форме близкого к сфере	68
3.5. Динамика диамагнитного ротора в магнитном поле	74
Заключение	82
Приложение	84
Литература	87

Введение

Актуальность работы. Техническое освоение космоса, точное приборо- и машиностроение, повышение скоростей вращения роторных устройств, увеличение дальности, скорости и ресурса действия подвижных объектов, бестигельная плавка и т.д. привели к созданию новых технологических процессов и систем, технические характеристики которых во многом определяются динамическим поведением твердого тела, взаимодействующего с полями различной физической природы.

Построение теории движения твердого тела в силовом поле произвольной природы включает, во-первых, проблему вычисления взаимодействия твердого тела с неоднородным полем, т.е. вычисление сил и моментов сил, действующих на тело, и, во-вторых, проблему исследования задач динамики.

При движении твердого тела в силовом поле возникает сложное переплетение электромагнитных сил, сил инерции, гравитационных сил, различного рода сил трения и диссипации энергии электромагнитного поля в твердом теле. Специфический характер сил и моментов приложенных к твердому телу, приводит к постановке новых задач, которые обладают качественным отличием от известных в классической теории задач движения твердого тела с закрепленной точкой. Это отличие главным образом связано с существенным усложнением математических моделей взаимодействия твердого тела с полем.

Математическое моделирование приводит к проблеме изучения совместной системы уравнений электродинамики и уравнений динамики твердого тела, что в общей постановке является чрезвычайно сложной для исследования задачей. Очевидно, что попытки получить точное ана-

литическое решение задачи в общем случае обречены на неудачу. Поэтому актуальная задача разработки математического аппарата, позволяющего адекватно исследовать различные сложные взаимодействия тела с полем и облегчающего нахождение приближенных уравнений, описывающих динамику твердого тела в неоднородном поле произвольной физической природы.

Задачи, в которых происходит сложное переплетение сил различной природы, решаются с использованием различных упрощений или приближений. В частности, возможно рассмотрение взаимодействия тела с однородным или квазиоднородным полем. При решении некоторых задач успешным оказывается применение различных асимптотических методов, например, при решении задачи динамики проводящего тела произвольной формы в магнитном поле [29, 30, 42]. Так же используется разложение по базисным функциям, заданным в определенной системе координат, например: разложение силовой функции гравитационного притяжения двух тел [47], вычисление электростатического взаимодействия двух зарядовых распределений [8, 25, 34]. Все эти разложения обладают существенным недостатком: привязка к определенной системе координат, в которой происходит разложение, не позволяет полностью исследовать силовую функцию.

Поэтому желательно исключить отмеченные недостатки и получить разложение силовой функции в инвариантном виде. Этого удалось достигнуть в данном исследовании, используя математический аппарат неприводимых тензоров.

Математический аппарат неприводимых тензоров создавался для нужд квантовой механики и оказался весьма универсальным. Насколько известно автору, в механике этот аппарат впервые был применен в

работах Ю.М. Урмана и Г.Г. Денисова [24, 54, 57]. Его использование позволяет видеть ясный физический смысл сложных взаимодействий, выражать эти взаимодействия в инвариантном виде, легко проводить преобразования из одной системы координат в другую, рассматривать довольно сложные взаимодействия в компактной форме записи, легко использовать наличие симметрии как формы твердого тела, так и структуры силового поля, проводить процедуру осреднения не покомпонентно, а всего объекта целиком. Это дает значительное преимущество при рассмотрении динамики твердого тела в полях различной природы. На основе свойств неприводимых тензоров удастся записать силовую функцию взаимодействия твердого тела с произвольным полем, получить теоремы сложения, используемые в разложении силовой функции при трансляциях, записать инвариантные разложения силовой функции взаимодействия пространственных зарядовых и токовых распределений, рассмотреть динамику твердого тела в силовом поле.

Произвольную функцию потенциальной энергии или силовую функцию взаимодействия твердого тела с неоднородным полем, как показано [24, 50, 51, 53], можно представить в виде суммы скалярных произведений неприводимых тензоров (мультипольное разложение [46])

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_i = \sum_i V_i,$$

$$V_i = (\mathfrak{M}_i \cdot \mathfrak{N}_i),$$

где \mathfrak{M}_i – неприводимый тензор, связанный с телом, \mathfrak{N}_i – тензор связанный с полем. Каждый член V_i имеет свой физический смысл, так как при повороте системы координат отвечает определенному закону преобразования физических величин, участвующих во взаимодействии. Тогда ряд сложных задач динамики твердого тела можно свести к нахождению

тензоров, описывающих либо тело, либо поле. Например, взаимодействие твердого тела с закрепленной точкой, не совпадающей с центром тяжести, с однородным гравитационным полем можно записать в виде V_1 , вектор, связанный с телом - вектор дебаланса, вектор расстояния между центром тяжести и точкой закрепления, вектор поля - это вектор силы тяжести. Функция V_2 , описывает тензорное взаимодействие твердого тела с неоднородным гравитационным полем, тензор, связанный с телом - это тензор моментов инерции [51]. Взаимодействие магнетика произвольной формы с однородным магнитным полем можно записать $V_1 = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{H})$. В неконтактных гироскопах при учете малой несферичности получается взаимодействие типа V_2 , где тензор, связанный с телом – тензор формы [22].

В приведенных случаях использование математического аппарата позволяет представить силовую функцию взаимодействия тела с полем без решения сложной граничной задачи математической физики.

Например, известны работы, связанные с задачами небесной механики [51, 52], в которых получены результаты, дополняющие и обобщающие результаты Белецкого В.В. [15–17], Черноусько Ф.Л. [61] о движении спутника в гравитационном поле Земли и о решении ограниченной задачи трех тел.

Универсальность математического аппарата неприводимых тензоров позволяет получить разложение скалярного и векторного полей на мультиполи, выявить физический смысл каждого члена разложения. В некоторых задачах математической физики требуется представить решение уравнения Гельмгольца или уравнения Лапласа, записанное в одной системе координат, через решение того же уравнения в другой системе координат, сдвинутой относительно первой. Такая проблема возникает,

когда необходимо связать краевые условия для двух или более тел в задачах электродинамики или теплопроводности, при разложении по мультиполям энергии взаимодействия двух гравитирующих тел, либо двух зарядовых или токовых пространственных распределений.

Формулы преобразования (теоремы сложения) для скалярных решений уравнения Гельмгольца (скалярных волновых функций) при трансляциях системы координат получены в [5, 27, 28, 50]. Из них, как частный случай, вытекают найденные другим способом в [41] теоремы сложения для решений уравнения Лапласа.

Особый интерес представляют аналогичные формулы для решения тензорных уравнения Гельмгольца.

Теоремы сложения широко используются при рассмотрении различных вопросов, связанных с расчетами сложных процессов, протекающих в интегральных схемах суперкомпьютеров и в СВЧ–печах, процессах одновременного протекания быстрых и медленных колебаний при распространении волнового пакета. Хороший обзор литературы по вопросам применения теорем сложения и приведения данных теорем к виду, который наиболее подходит для использования численных методов, приведен в работе [4]. В работе [6] рассматривается применение теорем сложения для расчета возбуждений мод свободных колебаний Земли в результате землетрясений, и в более общем случае мультипольное представление сейсмических источников.

Теоремы сложения для тензорных решений уравнения Гельмгольца при трансляциях применяются в задачах о нахождении инвариантных представлений физических взаимодействий. В работах [50, 51] получены инвариантные разложения силовых функций N тел произвольной формы и любого распределения плотности масс, магнитного взаимодействия

пространственных токовых распределений. Выявлен физический смысл неприводимых тензоров, входящих в инвариантное разложение.

Особое место в работе уделено расчету силовой функции взаимодействия квазисферического диамагнитного ротора с магнитным полем подвеса. На основе полученной силовой функции удалось вычислить и исследовать силовые и моментные характеристики подвеса диамагнитного тела.

Одна из проблем свободного подвеса диамагнитных тел—это проблема устойчивого удержания тела в поле подвеса, которая включает в себя определение силовых характеристик подвеса (сил и жесткостей), так как эти характеристики определяют свойства подвеса.

Существует много работ, посвященных нахождению условий устойчивости твердого тела в поле подвеса. Большая библиография по теории гироскопа с электростатическим подвесом приведена в монографии Мартыненко Ю.Г. [42]. Левитация находит применение во многих приложениях [7, 26]. Рассмотрим работы о возможности вывешивания диамагнитных тел в магнитном поле.

Браунбек [3] в 1939 году доказал, что левитация в системах, в которых одновременно действует гравитационное, магнитное и электрическое поля, возможна для тел с магнитной проницаемостью меньше единицы (диамагнетики и сверхпроводники). Он же впервые осуществил подвес кусочков графита массой 75 мг. в поле электромагнита $B \approx 2 - 3T$. Основная сложность по вывеске диамагнитных тел состоит в создании магнитного поля значительной величины. Магниты, которые создают постоянное магнитное поле свыше $20T$, появились в 90-х годах прошлого столетия [1, 9, 10, 12]. Появилась возможность вывешивать различные материалы, обладающие слабым диамагнетизмом, такие как дерево, пла-

стик, вода, алмаз и многие другие подобные вещества, а так же живых существ. Хотя магнитная восприимчивость большинства тел очень мала, для мощных магнитов даже слабых сил достаточно для левитации диамагнитных материалов. Поэтому, естественно, во всем мире возник интерес к проведению всевозможных экспериментов по свободному подвесу диамагнитных тел и его использованию в различных областях науки и техники. Левитация предметов в магнитном поле важна для множества практических приложений. Она открывает новые возможности для управления биологическими объектами, для сепарации нанотрубок, полимеров, обладающих различной плотностью, для выращивания белковых кристаллов 1 см, для синтеза новых материалов и многого другого. Наиболее отличительная черта и преимущество диамагнитной левитации по сравнению с другими известными или возможными схемами, включая сверхпроводящую левитацию, есть то, что для однородного материала существуют магнитные поля с определенным профилем квадрата магнитной индукции, когда гравитация скомпенсирована фактически на уровне отдельных атомов и молекул. Это делает возможным симулировать состояние невесомости в очень хорошем приближении прямо на Земле и позволяет заменить дорогостоящие эксперименты в космосе на более дешевые.

Эксперименты по подвеске слабых диамагнетиков, выполненные ранее, главным образом проводились для подтверждения возможности левитации различных тел и живых существ и для наблюдения за их движением или поведением в магнитном поле [11]. Теоретические исследования динамики диамагнитных тел в поле подвеса почти не проводились, а если и проводились, то на уровне простых моделей, основанных на квазиоднородном приближении, что не позволяет учесть форму вывешен-

ваемого тела. Так как интерес к различным применениям диамагнитного подвеса колоссально возрос, и с каждым годом будет расти все больше и больше (в настоящее время созданы электромагниты, генерирующие магнитные поля с индукцией $B \approx 40T$), то возникла необходимость в теоретическом осмыслении динамики различных слабых диамагнитных тел в магнитном поле.

Цель диссертационной работы. Целью работы является развитие общих методов описания и исследования взаимодействия твердого тела с неоднородным силовым полем произвольной физической природы. Развитие аналитических и качественных методов исследования эволюционных движений твердого тела. Изучение причин, влияющих на устойчивость в неконтактном магнитном подвесе диамагнитного тела произвольной формы.

Научная новизна. I. Обосновано использование математического аппарата неприводимых тензоров при описании и исследовании сложных взаимодействий твердого тела с силовым полем произвольной природы.

II. Представлены и проанализированы инвариантные разложения силовой функции взаимодействия пространственных зарядовых и токовых распределений.

III. Предложена методика расчета силовых характеристик подвеса диамагнитного ротора в неконтактном подвесе.

IV. Найдены условия консервативной устойчивости и определена область устойчивости квазисферического диамагнитного ротора в магнитном поле кругового тока.

V. Показана эффективность использования неприводимых тензоров для построения и изучения эволюционных уравнений движения твердого тела и их осреднения.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическую и практическую значимость представляют предложенные в работе методы построения и исследования силовой функции взаимодействия твердого тела с неоднородным силовым полем. Данные методы могут быть использованы для получения результатов при решении задач связанных с изучением: пассивной и управляемой левитации диамагнитных и сверхпроводящих тел в магнитном поле, динамики ротора в неконтактном подвесе, динамики высокоскоростного транспорта, основанного на принципе "MagLev поведения живых культур в условиях микрогравитации, симулируемой на Земле, принципов транспортировки и сборки сложных технических устройств с применением левитации в электрическом и магнитном полях, движении космического аппарата в гравитационном и магнитном поле Земли, создании центрифуг, использующихся в ядерных исследованиях. В качестве конкретного практического приложения методов расчета можно рассматривать результаты нахождения области устойчивости диамагнитного ротора, близкого по форме к сфере, в магнитном поле кругового тока и результаты исследования эволюционных движений ротора в магнитном поле. Они могут быть использованы для создания различных приборов и устройств, использующихся в науке и технике, основанных на работе неконтактного подвеса.

Основные результаты диссертационной работы получены в ходе исследований, проводимых при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-31133 мол-а на 2012-2013 годы, № 08-01-00333-а на 2008-2010 годы).

Апробация работы. Результаты исследования докладывались на X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2011); на Международной

конференции Устойчивость, управление и динамика твердого тела (Донецк, 2011); на X Международной молодежной научно-технической конференции "Будущее технической науки" (Нижний Новгород, 2011); на Международной конференции "Тараповские чтения" (Харьков, 2011); на IV Всероссийской молодежной научно-инновационной школе "Математика и математическое моделирование" (Саров, 2010); на Нижегородской сессии молодых ученых (Нижний Новгород, 2006–2010).

По теме диссертации были сделаны доклады на семинаре "Математическое моделирование динамических систем и процессов управления" в НИИ ПМК ННГУ имени Н.И. Лобачевского (рук. проф. Д.В. Баландин), семинаре кафедры физики и физического образования НГПУ им. Козьмы Минина (рук. проф. Ю.М. Урман).

Структура и объем диссертации. В диссертации рассматриваются два вопроса: использование математического аппарата неприводимых тензоров в задачах взаимодействия твердого тела с произвольным полем и построение общих методов нахождения силовых характеристик подвеса произвольного по форме и однородного по составу диамагнитного ротора в произвольном магнитном поле.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и приложения.

Во введении определяется место и значение рассматриваемых в работе задач, где обосновывается актуальность исследуемой проблемы, дается краткий обзор литературы по теме диссертации, отмечаются основные моменты, определяющие новизну постановки задачи, приводится краткое изложение содержания работы по главам.

Первая глава диссертации посвящена мультиполюльному разложению физических полей. Основываясь на свойствах неприводимых тензоров,

удаётся представить компактную запись мультиполей разложения скалярного и векторного полей и охарактеризовать физический смысл членов разложения. Особую роль в задачах, где необходимо связать краевые условия двух и более тел, играет разложения при трансляциях. В данной главе рассматривается способ получения общего выражения теоремы сложения тензорных решений уравнения Гельмгольца. Из данной теоремы в частном случае получаются теоремы сложения как для скалярных, так и для векторных решений уравнения Гельмгольца.

Во второй главе диссертации строятся инвариантные разложения силовых функций электромагнитного взаимодействия пространственных зарядовых и токовых распределений. Выясняется физический смысл неприводимых тензоров, связанных с телом. Исследуются свойства силовой функции, зависящие как от симметрии тела, так и от симметрии структуры силового поля. Строятся инвариантные представления силы и момента сил в форме произведения неприводимых тензоров.

Третья глава посвящена представлению методики расчета силовых характеристик подвеса диамагнитного ротора произвольной формы в магнитном поле. Методика основывается на записи силовой функции взаимодействия ротора с полем в удобном для исследования виде. Приводится разложение силовой функции на сумму силовых функций, которые соответственно отвечают взаимодействию сферического ротора с полем и на взаимодействие, обусловленное его несферичностью. Находятся координаты состояния равновесия ротора. Приводится расчет области устойчивости для ротора по форме близкого к сфере в поле кругового тока.

Исследуется динамика диамагнитного ротора.

В приложении приведены основные сведения из математического

аппарата неприводимых тензоров.

Заключение посвящено основным результатам и выводам диссертации.

Глава 1

Мультипольное разложение

Математический аппарат неприводимых тензоров создавался для нужд квантовой механики и теории атомных спектров. Основные положения данного математического аппарата изложены в монографии Е.Вигнера [20].

Объемная библиография по использованию данного аппарата в различных задачах физики приведена в книге [19]. В данной книге приведены основные свойства неприводимых тензоров.

Опираясь на работы [14, 18–21, 45, 54, 57, 59, 60] удастся в удобной форме представить мультипольное разложение скалярного и векторного полей. На основе разложения удастся выявить физический смысл каждого члена разложения, записать в компактной форме данное разложение, что в значительной степени упрощает задачу представления решения уравнений при переходе из одной системы координат в другую при поворотах системы координат. Это играет важную роль при рассмотрении задач со сложными граничными условиями.

Для перехода из одной системы координат в другую используются операции трансляции. Разложения при трансляциях играют важную роль при рассмотрении задач теплопроводности, взаимодействия двух и более тел со сложной границей.

В данной главе рассматривается задача разложения скалярного и векторного полей на мультиполи, выявляется их физический смысл, приводится разложение при трансляциях, получаются тензорные теоремы сложения для решений уравнения Гельмгольца.

1.1. Пространство дифференцируемых функций, заданных на сфере

Рассмотрим пространство дифференцируемых функций $f(\mathbf{n}) = f(\theta, \varphi)$, определенных на поверхности сферы единичного радиуса. Вектор \mathbf{n} задается полярными углами θ, φ . Действие оператора вращения записывается

$$\hat{D}_R f(\mathbf{n}) = f(R^{-1}\mathbf{n}). \quad (1.1)$$

Оператор \hat{D}_R образует представление группы вращений \mathfrak{R}_3 . Инфинитезимальные операторы имеют вид [55]

$$X = -[\mathbf{r} \times \nabla], \quad (1.2)$$

а их проекции в декартовом базисе – вид

$$X_1 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}; X_2 = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}; X_3 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}. \quad (1.3)$$

Выразим (1.2) в сферическом базисе

$$X = \begin{vmatrix} e_r & e_\theta & e_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = e_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - e_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (1.4)$$

Используя связь сферических ортов с декартовыми ортами

$$e_\theta = e_1 \cos \theta \cos \varphi + e_2 \cos \theta \sin \varphi - e_3 \sin \theta,$$

$$e_\varphi = -e_1 \sin \varphi + e_2 \cos \varphi,$$

получим

$$X = e_1 \left[\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + e_2 \left[\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right] - e_3 \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (1.5)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
X_1 &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
X_2 &= -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
X_3 &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Подставим уравнения (1.6) в первые два уравнения системы [21, 55]

$$\begin{aligned}
J^2 v_{jm} &= (j(j+1))v_{jm} \\
J_3 v_{jm} &= m v_{jm} \\
J_+ &= (J_1 + iJ_2) v_{jm} = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} v_{jm+1} \\
J_- &= (J_1 - iJ_2) v_{jm} = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} v_{jm-1}, \quad (1.7)
\end{aligned}$$

где J^2 оператор Казимира, получаем

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + j(j+1)f = 0, \quad (1.8)$$

$$-i \frac{\partial f}{\partial \varphi} = m f. \quad (1.9)$$

Уравнения (1.8) и (1.9) совпадают с уравнениями для сферических функций и имеют решения только при $j = l$. Таким образом, согласно [23], орты канонического базиса неприводимого представления с целым весом l в пространстве неприводимых функций $f(\theta, \varphi)$ имеют вид

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta), \quad (1.10)$$

где $P_l^m(\cos \theta)$ – нормированная присоединенная функция Лежандра.

Пространство дифференцируемых функций, заданных на сфере единичного радиуса, представляет набор сферических функций. Следовательно, любую функцию можно разложить на сферические функции.

Если задана скалярная функция, которая остается инвариантной при преобразовании системы координат, то существует скалярное поле. Тогда, опираясь на разложение скалярной функции, можно разложить скалярное поле.

1.2. Мультипольное разложение скалярного поля

Рассмотрим функцию $U(r, \theta, \varphi)$, которая описывает скалярное поле. Данную функцию можно разложить в ряд по сферическим функциям. Приведем разложение и определим физический смысл каждого члена разложения.

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_l r^l Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (1.11)$$

Первый член разложения при $l = 0$ описывает взаимодействие скалярного характера. При $l = 1$ описывается дипольное взаимодействие, при $l = 2$ - квадрупольное.

Рассмотрим разложение на примере конкретного поля. Приведем разложение электрического потенциала.

Пусть система неподвижных электрических зарядов, т.е. некоторое заряженное тело, занимает ограниченный объем в некоторой области пространства Ω , а распределение электрического заряда в теле задано объемной плотностью заряда $\rho(N)$, $N \in \Omega$. Введем систему координат с началом в точке O внутри Ω и обозначим через \mathbf{r} радиус-вектор точки N , а через \mathbf{R} радиус-вектор, определяющий положение некоторой точки M вне заряженного тела (рис. 2.1.)

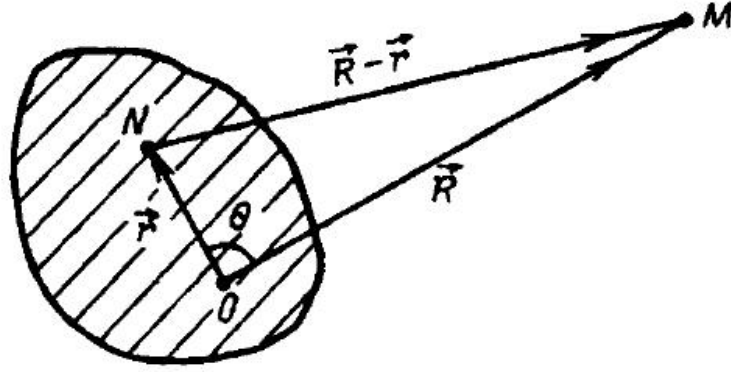


Рис. 1.1.

Как показано в [35], потенциал в точке M можно представить в виде объемного потенциала

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dV. \quad (1.12)$$

Учитывая, что точка M выбрана так, что $R \gg r$, представим $\varphi(M)$ в виде разложения по степеням $1/R$:

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n)}}{R^{n+1}} = \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q^{(1)}}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{q^{(2)}}{4\pi\epsilon_0 R^3} + \dots \quad (1.13)$$

Такое разложение потенциала называется разложением по мультиполям, а каждый $q^{(n)}$ коэффициент этого разложения – электрическим моментом n -го порядка данной системы зарядов заряженного тела.

Определим коэффициенты $q^{(n)}$ разложения (1.13). Для этого введем угол $\chi = (\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{R}})$ между векторами \mathbf{r} и \mathbf{R} и малый параметр задачи $\delta = r/R$. Если обозначить $x = \cos \chi$, то по теореме косинусов можно записать

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = |R^2 + r^2 - 2Rr \cos \chi|^{-1/2} = R^{-1}(1 + \delta^2 - 2\delta x)^{-1/2}. \quad (1.14)$$

Разложим выражение в круглых скобках в правой части этого равенства

в степенной ряд по малому параметру δ :

$$(1 + \delta^2 - 2\delta x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\delta^n, \quad (1.15)$$

где

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \delta^n} (1 + \delta^2 - 2\delta x)^{-1/2} \Big|_{\delta=0}, \quad (1.16)$$

полиномы Лежандра.

Таким образом

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\delta^n = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \chi) \left(\frac{r}{R}\right)^n \quad (1.17)$$

Дополнительно введем сферические углы Θ, Φ и θ, φ образуемые соответственно векторами \mathbf{R} и \mathbf{r} с фиксированными осями системы координат с центром в точке O и воспользуемся теоремой сложения для сферических функций [5]

$$P_n(\cos \chi) = \sum_{m=-n}^n \frac{(n - |m|)!}{(n + |m|)!} P_n^{|m|}(\cos \Phi) P_n^{|m|}(\cos \varphi) e^{-im(\Phi - \varphi)}, \quad (1.18)$$

где $P_n^{|m|}$ —присоединенные полиномы Лежандра. При использовании сферических функций разложение (1.17) принимает вид

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{r^n}{R^{n+1}} \frac{4\pi}{2n + 1} Y_{nm}^*(\Theta, \Phi) Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (1.19)$$

Подставляя разложение (1.19) в интеграл (1.12) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^{n+1}} \sum_{m=-n}^n \sqrt{\frac{4\pi}{2n + 1}} q^{(n)} Y_{nm}^*(\Theta, \Phi), \quad (1.20)$$

где

$$q^{(n)} = \sum_{n=0}^n \sqrt{\frac{4\pi}{2n + 1}} \int_V r^n Y_{nm}(\theta, \varphi) dV - \quad (1.21)$$

электрический момент n -го порядка.

При заданном n совокупность $(2n + 1)$ величин $q^{(n)}$ преобразующихся при повороте координат как сферические функции Y_{nm} , образует неприводимый тензором ранга n . При этом $q^{(0)}$ –полный заряд системы, $q^{(1)}$ –дипольный момент системы зарядов, $q^{(2)}$ –квадрупольный момент системы зарядов, который выражается через компоненты квадрупольного момента системы [35].

1.3. Разложение векторного поля на шаровые векторы

Рассмотрим векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 A_i(r)\mathbf{e}_i$. Векторы \mathbf{e}_i – единичные векторы вдоль координатных осей, а A_i – компоненты вектора \mathbf{A} по этим осям. Выясним, как преобразуется векторное поле при вращении. Подвергнем векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ произвольному вращению R . В результате данного вращения получим новое векторное поле $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$. Найдем выражение $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ через вектор $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Данное выражение согласно [21] можно записать

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = R\mathbf{A}(R^{-1}\mathbf{r}). \quad (1.22)$$

Следовательно, каждому вращению R отвечает преобразование $\hat{D}(R)$ векторных функций, определяемое формулой

$$\hat{D}(R)\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = R\mathbf{A}(R^{-1}\mathbf{r}). \quad (1.23)$$

Очевидно, что эти преобразования определяют представления группы вращений.

Приведем процесс инвариантного относительно вращений разложения векторного поля \mathbf{A} . Для этого требуется найти орты канонического

базиса, в котором представление $\hat{D}(R)$ распадается на неприводимые.

При преобразовании вращения векторное поле A_μ ($\mu = 1, 0, -1$) преобразуется по формуле

$$A_\mu(\mathbf{r}) = \sum D_{\mu\hat{\mu}}^1 A_{\hat{\mu}}(R^{-1}\mathbf{r}). \quad (1.24)$$

Найдем инфинитезимальные операторы этого преобразования. Рассмотрим поворот вокруг оси Z . При повороте вокруг оси Z на угол α компоненты вектора A_μ преобразуются по формуле

$$A'_\mu(r, \theta, \varphi) = e^{-i\mu\alpha} A_\mu(r, \theta, \varphi - \alpha). \quad (1.25)$$

Раскладывая это выражение по степеням α , мы получим с точностью порядка α

$$A'_\mu = A_\mu - \alpha \left(i\mu + \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) A_\mu. \quad (1.26)$$

Следовательно, оператор X_3 равен

$$X_3 = X_0 = - \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial\varphi} = -\mathbf{e}_3 \times -\frac{\partial}{\partial\varphi}. \quad (1.27)$$

Аналогично можно найти операторы X_1 и X_{-1} . В общем случае инфинитезимальный оператор поворота векторного поля будет иметь вид

$$X_\mu = -\hat{S}_\mu - [\mathbf{r}\nabla]_\mu, \quad (1.28)$$

где операторы $\hat{S}_\mu = e_\mu \times$. Матричный вид оператора \hat{S}_μ имеет вид

$$\hat{S}_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_0 = i \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{S}_{-1} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, представление группы вращений при поворотах векторного поля есть произведение представлений, действующих в трехмерном пространстве базисных векторов \mathbf{e}_μ и в пространстве функций, заданных на сфере, базис которого образуют сферические функции. Поэтому орты канонического базиса, в котором это произведение представлений распадается на неприводимые, состоит из функций

$$\mathbf{Y}_{jM}^{l1}(\theta, \varphi) = \mathbf{Y}_{jM}^l(\theta, \varphi) = \{\mathbf{Y}_l \otimes \mathbf{e}_1\}_{jM}. \quad (1.29)$$

Индексы j и l - целые неотрицательные числа. При заданном значении j величина l может принимать три значения $l = j, j + 1, j - 1$ (в частном случае, когда $j = 0$, величина l имеет только одно значение). Следовательно, существуют три линейно независимых вектора. Так как они составляют трехмерное пространство, то очевидно, что для заданных индексов j, M они образуют полную систему. Это означает, что любое векторное поле можно разложить по этим векторам.

Теорема 1.1 (Теорема Гельмгольца [32]) *Всякий вектор $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ можно разложить в ряд по шаровым векторам Y_{jM}^l , то есть представить в виде*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{jM} A_{jM}^l(r) Y_{jM}^l(\theta, \varphi), \quad (1.30)$$

где

$$A_{jM}^l = \int \mathbf{F}(\mathbf{r}) Y_{jM}^{l*}(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (1.31)$$

На основе теоремы можно получить правило, которое в дальнейшем будет полезно. Если скалярная функция $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ разлагается в ряд по сферическим функциям вида

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum A_l(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) Y_{lm}^*(\Omega_1) Y_{lm}(\Omega_2), \quad (1.32)$$

то для векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{r}_2)\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ разложение по шаровым векторам Y_{jM}^l будет иметь вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_2)\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum A_l(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) [\mathbf{F}(\mathbf{r}_2)Y_{lm}^{l*}] Y_{jM}^l(\Omega_1). \quad (1.33)$$

В качестве примера приведем разложение векторного потенциала.

Согласно [35] имеем для векторного потенциала

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dV, \quad (1.34)$$

где \mathbf{i}/c —плотность тока.

Разложение функции Грина $\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}$ можно представить в виде

$$\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \sum B_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}) [j(\mathbf{r})Y_{jM}^{l*}] Y_{jM}^l(\Omega_r), \quad (1.35)$$

где

$$B_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \frac{r^l}{R^{l+1}}, r < R,$$

$$B_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \frac{R^l}{r^{l+1}}, r > R.$$

1.4. Группа симметрии уравнения Гельмгольца

Обобщим полученные разложения по мультиполям скалярного и векторного полей.

Известно, что группа движений пространства $E(3)$, состоящая из вращений относительно начала координат и сдвигов, является группой симметрии уравнений Гельмгольца. Она отображает решения уравнения Гельмгольца снова в решения этого же уравнения. Элементы $E(3)$ в трехмерном пространстве могут быть реализованы как элементы множества

вещественных 4 на 4 - матриц, имеющих вид:

$$g(A, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \end{pmatrix}, A \in SO_3, \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$$

Элемент $g(A, \mathbf{a})$ отображает точку $\mathbf{x} \in R^3$ в точку $\mathbf{x}g = \mathbf{x}A + \mathbf{a} \in R^3$.

Групповое произведение определяется произведением матриц

$$g(A, \mathbf{a})g(A', \mathbf{a}') = g(AA', \mathbf{a}A' + \mathbf{a}').$$

Геометрически g соответствует повороту A относительно начала координат $(0, 0, 0) \in R^3$ с последующим переносом на вектор \mathbf{a} .

Пусть $\psi(\mathbf{r})$ —решение уравнения $(\Delta + \omega^2)\psi(\mathbf{r}) = 0$. Образование Фурье

$$\psi(\mathbf{r}) = \iint_{S_2} \exp(i\omega\mathbf{r}\mathbf{k})h(\mathbf{k})d\Omega = I(h). \quad (1.36)$$

также удовлетворяет уравнению Гельмгольца. В формуле (1.36) \mathbf{k} —единичный вектор $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) = 1$, пробегающий единичную сферу S_2 : $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$, $d\Omega$ —обычная мера телесного угла на этой сфере и h —произвольная комплекснозначная измеримая функция на S_2 (относительно $d\Omega$) такая, что

$$\iint_{S_2} h(\mathbf{k})^2 d\Omega(\mathbf{k}) < \infty.$$

Множество $L_2(S_2)$ таких функций h образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(h_1, h_2) = \iint_{S_2} h_1(\mathbf{k})h_2^*(\mathbf{k})d\Omega(\mathbf{k}).$$

Элементы $g(A, \mathbf{a})$ группы $E(3)$ действуют на решение рассматриваемого уравнения Гельмгольца посредством операторов $\hat{T}(g)$. Используя (1.36) мы находим, что

$$\hat{T}(g)\psi(\mathbf{r}) = I(\hat{T}(g)h) \quad (1.37)$$

каждый раз, когда $\psi = I(h)$. Операторы $\hat{T}(g)$ в пространстве $L_2(S_2)$ определяются следующими соотношениями:

$$\hat{T}(g)h(\mathbf{k}) = \exp(i\omega \mathbf{a} \mathbf{k} A)h(\mathbf{k}A), \quad g = (A, \mathbf{a}), \quad A \in SO_3, \quad a \in R^3. \quad (1.38)$$

Таким образом, операторы $\hat{T}(g)$, действуя на функции $\psi(\mathbf{r})$, индуцируют операторы (которые мы также обозначаем $\hat{T}(g)$), действующие на функции h . Операторы (1.38) обладают свойством гомоморфизма $\hat{T}(g_1 g_2) = \hat{T}(g_1)\hat{T}(g_2)$. Более того в силу инвариантности меры при повороте ($d\Omega(\mathbf{k}A) = d\Omega(\mathbf{k})$) эти операторы унитарны в $L_2(S_2)$

$$(\hat{T}(g)h_1, \hat{T}(g)h_2) = (h_1, h_2). \quad (1.39)$$

Инфинитезимальные операторы алгебры Ли в $L_2(S_2)$ определяются следующими соотношениями:

$$P_1 = i\omega k_1, \quad P_2 = i\omega k_2, \quad P_3 = i\omega k_3, \\ X_1 = k_3 \frac{\partial}{\partial k_2} - k_2 \frac{\partial}{\partial k_3}, \quad X_2 = k_1 \frac{\partial}{\partial k_3} - k_3 \frac{\partial}{\partial k_1}, \quad X_3 = k_2 \frac{\partial}{\partial k_1} - k_1 \frac{\partial}{\partial k_2}. \quad (1.40)$$

Связь между этими операторами и групповыми операторами (1.38) задается соотношением

$$\hat{T}(g) = \exp(\alpha X_3) \exp(\beta X_1) \exp(\gamma X_2) \exp(\mathbf{a}, \mathbf{p}), \quad (1.41)$$

где α, β, γ — углы Эйлера, параметризующим элементы группы вращений.

Таким образом, операторы $\hat{T}(g)$ определяют унитарное (неприводимое) представление группы $E(3)$ на пространстве функций $L_2(S_2)$.

Теперь рассмотрим пространство H , состоящее из решений уравнения Гельмгольца $\psi(\mathbf{r})$, определенных формулой (1.36): $\psi(\mathbf{r}) = I(h)$ для некоторого $h \in L_2(S_2)$. Пространство H является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(\psi_1, \psi_2^*) = (h_1, h_2^*), \psi_j = I(h_j). \quad (1.42)$$

Следовательно, I является унитарным преобразованием из $L_2(S_2)$ в H . Существование унитарного отображения дает нам возможность переходить в задачах от пространства H к пространству $L_2(S_2)$.

В задачах, связанных с решением уравнения Гельмгольца, большое значение имеет получение формул, дающих разложение базисных функций с разделяющимися переменными $\psi_n^{(j)}$ в одной криволинейной системе координат в виде суммы или интеграла от базисных функций $\psi_m^{(l)}$ в другой криволинейной системе координат. Часто бывает необходимо применить евклидово преобразование к функции $\psi_n^{(j)}$ и затем осуществить разложение по базису $\psi_m^{(l)}$. Поскольку H —гильбертово пространство, мы имеем

$$\hat{T}(g)\psi_n^{(j)} = \sum_m (\hat{T}(g)\psi_n^{(j)}, \psi_m^{(l)})\psi_m^{(l)}, \quad (1.43)$$

где сумма заменяется интегралом, если $\psi_m^{(l)}$ —собственные функции непрерывного спектра. На основании формулы (1.42)

$$(\hat{T}(g)\psi_n^{(j)}, \psi_m^{(l)}) = (\hat{T}(g)f_n^{(j)}, f_m^{(l)}), \quad (1.44)$$

где $f_n^{(j)}, f_m^{(l)}$ —базисы в $L_2(S_2)$, соответствующие при отображении I базисам $\psi_n^{(j)}, \psi_m^{(l)}$.

Следовательно, мы можем найти коэффициенты разложения в пространстве $L_2(S_2)$ вместо того, чтобы искать их в пространстве H . Это значительно упрощает задачу. Для случая, когда $j = l$ и произвольного $g \in E(3)$ формула (1.44) дает так называемую теорему сложения для базиса $\psi_n^{(j)}$ а коэффициенты $T_{nm}^{(j)} = (\hat{T}(g)f_n^{(j)}, f_m^{(j)})$ называются матричными элементами оператора $\hat{T}(g)$ в базисе $\psi_n^{(j)}$.

Рассмотрим неприводимое представление $\hat{T}(g)$ группы $E(3)$ в $L_2(S_2)$, определяемое соотношением (1.38). Если ограничить \hat{T} на подгруппу SO_3 , то оно становится приводимым и разбивается на прямую сумму

$$\hat{T} | SO_3 \cong \sum_{l=0}^{\infty} \oplus D_l, \quad (1.45)$$

где D_l —унитарные неприводимые представления группы SO_3 . Известно, что эти представления конечномерны и $\dim D_l = 2l + 1, l = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом $L_2(S_2)$ можно разложить на прямую сумму взаимно ортогональных подпространств V_l , где $\dim V_l = 2l + 1$ и действие операторов $\hat{T}(A)$ на инвариантное подпространство V_l унитарно и эквивалентно D_l . Элементы h из этих подпространств являются собственными функциями оператора Лапласа на сфере S_2 и совпадают со сферическими функциями (орты канонического базиса неприводимого представления с целым весом l). Следовательно, базис для пространств V_l состоит из собственных функций

$$f_m^l(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos(\theta)),$$

где $P_l^m(\cos(\theta))$ —нормированная присоединенная функция Лежандра.

Матричные элементы операторов переноса $\hat{T}(E, \mathbf{a}) = \exp(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})$ на базисных функциях $L_2(S_2)$ определяются формулой

$$T_{lm, l'm'}(\mathbf{a}) = (\hat{T}(E, \mathbf{a})f_{m'}^{(l)}, f_m^{(l)}) = \iint_{S_2} \exp(i\omega \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}) Y_{l'm'}(\mathbf{k}) Y_{lm}^*(\mathbf{k}) d\Omega(\mathbf{k})$$

Для вычисления интеграла используем формулу разложения плоской волны [34]:

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sum_{l,m} i^l (2l+1) J_l(\mathbf{k}\mathbf{r}) Y_{lm}(\mathbf{r}) Y_{lm}^*(\mathbf{r})$$

и значение интеграла

$$\int Y_{lm}^*(\mathbf{k}) Y_{l_1 m_1}(\mathbf{k}) Y_{l_2 m_2}(\mathbf{k}) d\Omega = C_{l_1 0 l_2 0}^{l 0} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{lm}$$

где $J_l(\mathbf{k}\mathbf{r})$ – сферическая функция Бесселя, $C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{lm}$ – коэффициент Глебша-Гордана для SO_3 [19], тогда получим

$$(\hat{T}(E, \mathbf{a}) Y_{l'm'}, Y_{lm}) = \sum_{s,q} i^s (2s+1) J_s(\omega a) Y_{sq}^*(\mathbf{a})$$

$$\int Y_{sq}(\mathbf{k}) Y_{l'm'}(\mathbf{k}) Y_{lm}(\mathbf{k}) d\Omega = \sum_{s,q} i^s (2s+1) J_s(\omega a) C_{s 0 l' 0}^{l 0} C_{s q l' m'}^{lm} Y_{sq}^*(\Omega_a).$$

Таким образом, матричные элементы оператора трансляции имеют вид

$$T_{lm, l'm'}(\mathbf{a}) = \sum_{s,q} i^s (2s+1) J_s(\omega a) C_{s 0 l' 0}^{l 0} C_{s q l' m'}^{lm} Y_{sq}^*(\Omega_a). \quad (1.46)$$

Матричные элементы (1.46) можно использовать для получения теоремы сложения решений уравнения Гельмгольца в сферической системе координат. Используя формулы (1.43) и (1.44), получаем

$$\psi_M^L(\mathbf{R}) = \sum_{l,m} T_{lm, LM}(\mathbf{a}) \psi_m^l(\mathbf{r}), \quad (1.47)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{a}.$$

В явном виде теорема сложения может быть представлена как разложение по неприводимым тензорным произведениям сферических функций.

$$Z_j(\omega R) Y_{jM}(\Omega_R) = \sum_{l,Q} i^{l+Q-j} \frac{(2l+1)(2Q+1)}{2j+1} C_{l 0 Q 0}^{j 0} \times \\ \times J_l(\omega a) Z_Q(\omega r) \{Y_l(\Omega_a) \otimes Y_Q(\Omega_r)\}_{jM}; a < r \quad (1.48)$$

Здесь $Z_l(\omega r)$ —любая сферическая функция Бесселя. В случае $a > r$ в формуле (1.48) нужно произвести замену $a \leftrightarrow r$. Выражение в фигурных скобках представляет собой неприводимый тензор, который раскрывается следующим образом [19]

$$\{Y_l \otimes Y_Q\}_{jM} = \sum_{m,n} C_{lmQn}^{jM} Y_{lm} Y_{Qn}.$$

Выбирая в формуле (1.48) в качестве $Z_l(\omega r)$ сферическую функцию Бесселя $j_L(\omega r)$, устремляя $\omega \rightarrow 0$ и учитывая при этом, что $j_L(x) \Rightarrow \frac{2^L L!}{2L+1} x^L$ получим формулы для преобразования при трансляциях решений уравнения Лапласа, не имеющего особенности в нуле

$$\mathfrak{S}_j(\mathbf{r} + \mathbf{a} = \mathbf{R}) = \sum_{l,Q=0,l+Q=j} \sqrt{\frac{(2j)!}{(2l)!(2Q)!}} \{\mathfrak{S}_l(\mathbf{a}) \otimes \mathfrak{S}_Q(\mathbf{r})\}_j. \quad (1.49)$$

Аналогично, выбираем в качестве $Z_L(\omega r)$ функцию Неймана $n_L(\omega r)$ и устремляя $\omega \rightarrow 0$ получим при $n_L(\omega r) \Rightarrow -(2L-1)!! x^{-(L+1)}$, решение уравнения Лапласа, имеющее особенности в нуле

$$\mathfrak{R}_j(\mathbf{R}) = \sum_{l,Q=0,Q-l=j}^{\infty} \sqrt{\frac{(2Q+1)!}{(2l)!(2j+1)!}} \{\mathfrak{S}_l(\mathbf{r}) \otimes \mathfrak{R}_Q(\mathbf{a})\}_j. \quad (1.50)$$

В формулах (1.49) и (1.50)

$$\mathfrak{S}_n(\mathbf{r}) \rightarrow \mathfrak{S}_{nm}(\mathbf{r}) = r^n Y_{nm}(\Omega_r)$$

$$\mathfrak{R}_n(\mathbf{r}) \rightarrow \mathfrak{R}_{nm}(\mathbf{r}) = r^{-(n+1)} Y_{nm}(\Omega_r)$$

регулярные и иррегулярные (в соответствии с их поведением в точке $r = 0$) шаровые функции.

1.5. Тензорное решение уравнения Гельмгольца

Тензорной сферической волновой функцией будем называть решение уравнения Гельмгольца вида

$$Z_L(kr)Y_{jM}^{LS}(\theta, \varphi), \quad (1.51)$$

где $Z_L(kr)$ —любая сферическая функция Бесселя,

$$Y_{jM}^{LS}(\theta, \varphi) = \{Y_L \otimes \chi_S\}_{jM} = \sum_{m, \mu} Y_{Lm} \chi_{S\mu} C_{LmS\mu}^{jM} \quad (1.52)$$

шаровой тензор [19], являющийся неприводимым тензорным произведением ранга l сферических и спиновых функций.

Из формулы (1.51) при $S = 0$ следуют частные решения скалярного, а при $S = 1$ векторного уравнения Гельмгольца. Выбирая в качестве $Z_L(kr)$ сферическую функцию Бесселя $j_L(kr)$ или функцию Неймана $n_L(kr)$ и делая предельный переход $k \rightarrow 0$, получаем частные тензорные решения уравнения Лапласа $r^L Y_{jM}^{LS}(\theta, \varphi)$ с особенностью на бесконечности и $r^{-(L+1)} Y_{jM}^{LS}(\theta, \varphi)$ с особенностью в нуле. Будем их обозначать соответственно

$$\mathfrak{S}_{jM}^{LS}(\mathbf{r}) = r^L Y_{jM}^{LS}(\theta, \varphi), \quad \mathfrak{R}_{jM}^{LS}(\mathbf{r}) = r^{-(L+1)} Y_{jM}^{LS}(\theta, \varphi), \quad (1.53)$$

Для получения формул преобразований при трансляциях тензорных решений уравнения Гельмгольца $Z_L(kr)Y_{jM}^{LS}$ используем изменение схемы связи в неприводимых тензорных произведениях [19] и теорему сложения для скалярных волн. Имеем последовательно

$$\begin{aligned} Z_L(\omega R)Y_{jM}^{LS}(\Omega_R) &= Z_L(\omega R)\{Y_L(\Omega_R) \otimes \chi_S\}_{jM} = \{Z_L(\omega R)Y_L(\Omega_R) \otimes \chi_S\}_{jM} = \\ &= \sum_{l, Q} i^{l+Q-L} \frac{(2l+1)(2Q+1)}{2j+1} C_{l0Q0}^{L0} J_L(\omega a) Z_Q(\omega r) \{ \{Y_l(\Omega_a) \otimes Y_Q(\Omega_r)\}_L \otimes \chi_S \}_{jM}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Изменим схему связи для неприводимого тензорного произведения в формуле (1.54), тогда получим

$$\begin{aligned}
& \{\{Y_l(\Omega_a) \otimes Y_Q(\Omega_r)\}_L \otimes \chi_S\}_j = \\
& = (-1)^{l+Q+j+S} \sum_h \sqrt{(2h+1)(2L+1)} \times \\
& \times \left\{ \begin{matrix} l & Q & L \\ S & j & h \end{matrix} \right\} \{\{Y_l(\Omega_a) \otimes \{Y_Q(\Omega_r) \otimes \chi_S\}_h\}_j = \\
& = (-1)^{j+S-L} \sum_h \sqrt{(2h+1)(2L+1)} \left\{ \begin{matrix} Q & l & L \\ S & j & h \end{matrix} \right\} \{\{Y_l(\Omega_a) \otimes Y_h^{QS}(\Omega_r)\}_j.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Подставляя формулу (1.55) в (1.54) получаем искомую формулу преобразований сферических тензорных волн при трансляциях

$$\begin{aligned}
Z_L(\omega R) Y_{jM}^{LS}(\Omega_R) &= \sum_{Q,h,l} i^{l+Q-L} (-1)^{S+Q-j} (2l+1) \sqrt{(2h+1)(2Q+1)} C_{l0L0}^{Q0} \times \\
& \times \left\{ \begin{matrix} L & l & Q \\ h & S & j \end{matrix} \right\} J_l(\omega a) Z_Q(\omega r) \{\{Y_l(\Omega_a) \otimes Y_h^{QS}(\Omega_r)\}_{jM} \tag{1.56}
\end{aligned}$$

Аналогично получению формул для трансляций скалярных решений уравнения Лапласа, получим формулы для тензорных решений уравнения Лапласа.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{jM}^{LS}(\mathbf{R}) &= \sum_{l,Q,h,l+Q=h} (-1)^{S+l+h} \sqrt{\frac{(2L+1)!(2h+1)!}{(2l)!(2Q)!}} \left\{ \begin{matrix} l & Q & L \\ j & S & h \end{matrix} \right\} \\
& \{\mathfrak{S}_h^{lS}(\mathbf{r}) \otimes \mathfrak{S}_Q(\mathbf{a})\}_{jM}, \tag{1.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_{jM}^{LS}(\mathbf{R}) &= \sum_{l,Q,h,l+Q=h} (-1)^{S+l+h} \sqrt{\frac{(2L+1)!(2h+1)!}{(2l)!(2Q)!}} \left\{ \begin{matrix} l & Q & L \\ j & S & h \end{matrix} \right\} \\
& \{\mathfrak{S}_h^{lS}(\mathbf{r}) \otimes \mathfrak{R}_Q(\mathbf{a})\}_{jM}. \tag{1.58}
\end{aligned}$$

В найденных формулах выражения $\left\{ \begin{matrix} l & Q & L \\ S & j & h \end{matrix} \right\}$ —6j-символы Вигнера [19].

Результаты, полученные в данной главе, являются дополнением и обобщением работ [2, 13, 50]. Хотя в последней работе утверждается, что до автора работы никто не использовал математический аппарат неприводимых тензоров в электродинамике.

Глава 2

Инвариантные представления физических взаимодействий

На основе полученных выражений в предыдущей главе и работ [39, 58] удастся получить инвариантное разложение силовых функций сложных взаимодействий. На основе изложенных подходов находятся разложения силовых функций пространственных зарядовых и токовых распределений. Рассматриваются свойства силовых функций. Приводятся частные примеры инвариантных взаимодействий.

На основе силовой функции находятся сила и момент силы.

2.1. Инвариантное разложение силовой функции двух объемных зарядовых распределений

Рассмотрим два заряженных тела произвольной формы с однородной диэлектрической проницаемостью и объемной плотностью заряда ρ_1 и ρ_2 , находящихся на расстоянии значительно меньшем размеров тела. Найдем силовую функцию и силовые характеристики двух взаимодействующих зарядовых распределений.

Из теории потенциала известно, что

$$U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{V_1} \rho_1 dV_1 \int_{V_2} \frac{\rho_2 dV_2}{\Delta} = \int_{V_1} \bar{U} \rho_1 dV_1, \quad (2.1)$$

где

$$\bar{U} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{V_2} \frac{\rho_2 dV_2}{\Delta}$$

силовая функция тела 2, в данной точке ρ_1 тела 1, Δ –расстояние между единичными зарядами тел 1 и 2, ε_0 –электрическая постоянная.

Обозначим через \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 радиус-векторы частиц тел 1 и 2 относительно некоторых точек, выбранных за их центр, а через \mathbf{R} –радиус вектор центра тела 2 относительно центра тела 1. Тогда

$$\Delta = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{a}|, \mathbf{a} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 < \mathbf{R}.$$

Сначала найдем разложение скалярной функции \bar{U} . Для этого используем разложение вида (1.19) и понятие регулярной и иррегулярной шаровой функции:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{a}|} = \sum_{l=1}^{\infty} (J_l(\mathbf{r}_2) \mathfrak{R}_l(\mathbf{a})), \quad (2.2)$$

где

$$J_{ln}(\mathbf{r}) = r^l Y_{ln}(\hat{r}), \mathfrak{R}_{ln}(\mathbf{r}) = r^{-(l+1)} Y_{ln}(\hat{r}) \quad (2.3)$$

–регулярные и иррегулярные шаровые функции, здесь сферические функции $Y_{ln}(\hat{r})$ используются без множителя $\sqrt{(2l+1)/4\pi}$. Выражение в круглых скобках (2.2) представляет собой скалярное произведение двух неприводимых тензоров, определяемое по правилу

$$(A_l \cdot B_l) = \sum_{l=-m}^m A_{lm} B_{lm}^* = \sum_{l=-m}^m (-1)^{-m} A_{lm} B_{lm}.$$

Подставляя выражение (2.2) в интеграл, определяющий \bar{U} , получим

$$\bar{U} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} (I_l(2) \mathfrak{R}_l(\mathbf{a})). \quad (2.4)$$

Здесь

$$I_l(2) = \int_{V_2} \rho_2 J_l(\mathbf{r}_2) dV_2$$

неприводимый тензор ранга l .

Подставив формулу (2.4) в выражение (2.1), будем иметь

$$U_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} I_l(2) \int_{V_1} \mathfrak{R}_l(\mathbf{a}) dV_1. \quad (2.5)$$

Для вычисления интеграла в этой формуле используем соотношения (1.50)

$$\mathfrak{R}_l(\mathbf{a}) = \mathfrak{R}_l(\mathbf{r}_2 + \mathbf{R}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(2l+2n+1)!}{(2l+1)!(2n)!}} \{J_n(\mathbf{r}_2) \otimes \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R})\}_l, \quad (2.6)$$

где выражение в фигурных скобках - тензорное произведение неприводимых тензоров ранга n и l .

Подставим соотношение (2.6) в формулу (2.5), после интегрирования получим

$$U_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{l,n}^{\infty} \sqrt{\frac{(2l+2n+1)!}{(2l+1)!(2n)!}} (I_l(1) \{I_n(2) \otimes \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R})\}_l). \quad (2.7)$$

Применяя формулу изменения связи неприводимых тензоров [19, 50], находим еще одно, более удобное выражение силовой функции

$$U_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{l,n}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{(2l+2n)!}{(2l)!(2n)!}} (\{I_l(1) \otimes I_n(2)\}_{l+n} \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R})). \quad (2.8)$$

Фазовый множитель в (2.8) зависит от направления вектора \mathbf{R} . Если \mathbf{R} будет направлен от тела 2 к 1, то в (2.8) нужно $(-1)^n$ заменить на $(-1)^l$, так как $\mathfrak{R}_{l+n}(-\mathbf{R}) = (-1)^{l+n} \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R})$.

При получении разложений (2.8) и (2.7) не вводилась система координат, и сам вид разложений – скалярное произведение инвариантных объектов – показывает, что они представляют собой инварианты. Каждый член в разложении (2.7) можно трактовать как взаимодействие,

описываемое скалярным произведением тензора $I_l(1)$, связанного с телом 1, и с электрическим полем тела 2, определяемым тензором $\{I_n(2) \otimes \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R})\}_l$. Разложение (2.8) трактуется как взаимодействие мультиполей разных порядков тел 1 и 2.

2.2. Физический смысл неприводимых тензоров

Рассмотрим, какой физический смысл имеют неприводимые тензоры I_l для некоторых конкретных значений индекса l . Положим в интеграле

$$I_l = \int_V \rho J_l(\mathbf{r}) dV$$

последовательно $l = 0, 1, 2$, тогда получим

- $l = 0, I_0 = \int \rho dV = q$ – заряд, распределенный по объему тела;
- $l = 1, I_{1\mu} = \int \mathbf{r}_{1\mu} \rho dV$ – дипольный момент, где $\mathbf{r}_{1\mu}^c$ – вектор из точки, принятой за центр тела, до центра масс. Очевидно, что если центр тела взят в центре масс, то $I_1 = 0$;
- $l = 2, I_{2\mu} = \int \rho J_{2\mu}(\mathbf{r}) dV$ – электрический момент 2-го порядка.

2.3. Свойства силовой функции распределения двух объемных зарядовых распределений

Силовая функция может быть явно выражена через углы, характеризующие положение тел относительно выбранной (опорной) системы координат. Это может быть любая система координат, удобная для решения конкретной задачи. Для получения явной зависимости силовой

функции от углов, нужно выразить компоненты тензоров I_l в опорной системе координат, через компоненты того же тензора в системе координат, связанной с телом по формуле преобразования неприводимых тензоров см. Приложение

$$I_{lq} = \sum_{\dot{q}} I_{l\dot{q}} D_{q\dot{q}}^{l*}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (2.9)$$

где

$$D_{q\dot{q}}^l(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-iq\alpha} d_{q\dot{q}}^l(\beta) e^{-i\dot{q}\gamma}.$$

–матрица конечных вращений [19].

Подставив выражение (2.9) в разложения (2.8) или (2.7), получим выражение силовой функции, явно зависящей от углов, характеризующих положение тел в "опорной" системе координат. Положение центров сгустков зарядов в "опорной" системе координат определяется вектором \mathbf{R} . Таким образом, вопрос о выражении силовой функции через обобщенные координаты решается полностью.

Если плотность электрического заряда в сгустке симметрична относительно некоторой, проходящей через него оси, то всегда можно выбрать систему координат, связанную с телом так, чтобы неприводимый тензор I_l имел в этой системе координат только одну компоненту I_{l0} . Тогда (2.9) приобретает вид

$$I_{lq} = I_{l0} Y_{lq}(\beta, \alpha) = I_{l0}(\mathbf{e}), \quad (2.10)$$

где \mathbf{e} – единичный вектор оси симметрии.

Если распределение зарядов обладает симметрией, то выражение силовой функции запишется в виде:

$$U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{l,n} (-1)^n \sqrt{\frac{(2l+2n)!}{(2l)!(2n)!}} I_{l0} I_{n0} (\{Y_l(\mathbf{e}_1) \otimes Y_n(\mathbf{e}_2)\}_{l+n} \cdot \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R})). \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что силовая функция разлагается по неприводимым тензорным произведениям сферических функций, задающим направление осей симметрии в пространстве

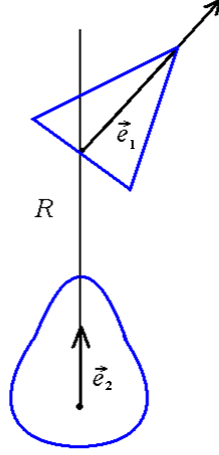


Рис. 2.1. Оси симметрии объемных зарядовых распределений

Рассмотрим несколько случаев:

а) направление \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 параллельны.

Используя формулу

$$\{Y_{l_1} \otimes Y_{l_2}\} = C_{l_1 0 l_2 0}^{l 0} Y_{lm}$$

и значение коэффициента Глебша-Гордана $C_{l_1 0 l_2 0}^{l 0}$ [19], получим

$$U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{l,n} (-1)^n \frac{(l+n)!}{l!n!} I_{l0}(1) I_{n0}(2) \frac{P_{l+n}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{R})}{R^{(l+n+1)}}. \quad (2.12)$$

б) направление \mathbf{e} и \mathbf{R} параллельны.

В дополнение к формуле для вычисления предыдущего выражения используем формулу связи неприводимых тензоров [19]

$$(\{P_a \otimes Q_b\}_c \cdot R_c) = (-1)^a \sqrt{\frac{2c+1}{2b+1}} (Q_b \cdot \{P_a \otimes R_c\}_b),$$

и получим

$$U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{l,n} (-1)^n \frac{(l+n)!}{l!n!} I_{l0}(1) I_{n0}(2) \frac{P_{l+n}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)}{R^{(l+n+1)}}. \quad (2.13)$$

Здесь $P_{l+n}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{R})$ и $P_{l+n}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)$ – полиномы Лежандра, зависящие от косинусов углов между соответствующими единичными векторами.

в) свяжем с осью симметрии первого зарядового распределения "опорную" систему координат, пусть одна из ее осей совпадает с осью симметрии, а две другие лежат в плоскости, перпендикулярные ей. Тогда силовая функция взаимодействия двух зарядовых распределений относительно этой системы координат зависит только от направления оси симметрии второго распределения зарядов и радиус-вектора \mathbf{R} между центрами распределений (см. рис.2.1). Из выражения (2.11) следует

$$U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{l,n} \frac{(2l+2n+1)!}{(2l+1)!(2n)!} I_{l0}(1) \cdot I_{n0}(2) \{Y_n(\mathbf{e}_2) \otimes \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R})\}_{l0}. \quad (2.14)$$

Не представляет труда рассмотреть произвольное расположение двух зарядовых распределений, что будет показано на примере токовых распределений.

2.4. Вычисление силы и момента сил по силовой функции

Для определения силы, действующей со стороны первого зарядового распределения на второе, найдем вариацию силовой функции при бесконечно малом изменении $\delta\mathbf{R}$. Получаем

$$\delta U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{l,n} \frac{(2l+2n)!}{(2l)!(2n)!} (\{I_l(1) \otimes I_n(2)\}_{l+n} \cdot \delta \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R})). \quad (2.15)$$

Выражение для вариации имеет вид

$$\delta \mathfrak{R}(\mathbf{R}) = (\delta R \cdot \nabla) \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R}) = \sqrt{(l+n+1)(2l+2n+1)} \{ \mathfrak{R}_{l+n+1} \otimes \delta \mathbf{R}_l \}_{l+n}. \quad (2.16)$$

При вычислении вариации (2.16) используется соотношение

$$\Delta_{1\mu} \mathfrak{R}_{l+n} = \sqrt{(l+n+1)(2l+2n+3)} C_{l+n+1s-\mu}^{l+ns} \mathfrak{R}_{l+n+1s-\mu}.$$

Подставив выражение (2.16) в (2.15), после некоторых преобразований получим

$$F_l = -\frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{l,n} (-1)^n \sqrt{\frac{(2l+2n+1)!(l+n+1)(2l+2n+3)}{3(2l)!(2n)!}} \{\{I_l(1) \otimes I_n(2)\} \cdot \mathfrak{R}_{l+n+1}(\mathbf{R})\}_l. \quad (2.17)$$

Минус в формуле (2.17) означает, что сила направлена от второго распределения зарядов к первому.

Для получения формулы момента сил рассмотрим вариацию силовой функции при бесконечно малом повороте $\delta\varphi$.

Вариация неприводимого тензора при бесконечно малом повороте определяется формулой

$$\delta A_l = -i\sqrt{l(l+1)}\{\delta\varphi_l \otimes A_l\}_l. \quad (2.18)$$

Определим вариацию силовой функции с учетом формулы вариации при бесконечно малом повороте. После преобразований получаем

$$\delta U = \frac{i}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{l,n} (-1)^n \sqrt{\frac{(2l+2n+1)!l(l+1)(2l+1)}{3(2l+1)!(2n)!}} (\delta\varphi \cdot \{I_l(1) \otimes \{I_n(2) \otimes \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R})\}_l\}). \quad (2.19)$$

Отсюда находим момент силы, действующий со стороны второго зарядового распределения на первое.

$$M_1(1) = \frac{i}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{l,n} (-1)^n \sqrt{\frac{(2l+2n+1)!l(l+1)(2l+1)}{3(2l+1)!(2n)!}} \{I_l(1) \otimes \{I_n(2) \otimes \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R})\}_l\}_1. \quad (2.20)$$

Для определения момента силы, действующего на второе зарядовое распределение со стороны первого, нужно в формуле (2.20) сделать замену $1 \rightleftharpoons 2$, $l \rightleftharpoons n$, а фазовый множитель оставить без изменения.

2.5. Инвариантное разложение силовой функции взаимодействия двух объемных токовых распределений

В предыдущем параграфе рассматривалось инвариантное разложение скалярной функции взаимодействия, здесь приведем пример инвариантного разложения векторной функции взаимодействия.

Рассмотрим две пространственные области, обтекаемые квазистационарными токами. Энергия их взаимодействия выражается интегралом

$$V_M = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_{v_1} dv_1 \int_{v_2} \frac{(\mathbf{j}(1) \cdot \mathbf{j}(2))}{\Delta} dv_2, \quad (2.21)$$

где dv_1, dv_2 —элементы объема каждой из областей, по которым течет ток плотностью $\mathbf{j}(1)$ и $\mathbf{j}(2)$, Δ —взаимное расстояние между точками пространственных распределений тока. Обозначим через \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 радиус-векторы точек объема v_1 и v_2 относительно их центров, а через \mathbf{R} —радиус-вектор центра тела v_2 относительно центра тела v_1 . Тогда

$$\Delta = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{a}|; \mathbf{a} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 < \mathbf{R}$$

Воспользуемся разложением функции Грина векторного уравнения Лапласа (1.35), считая $\mathbf{r}_1 < \mathbf{a}$

$$\frac{\mathbf{j}(1)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{a}|} = \sum_{l,L,q} (\mathbf{j}(1) \cdot \mathfrak{S}_{lq}^{L*}(\mathbf{r}_1)) \mathfrak{R}_{lq}^L(\mathbf{a}), \quad (2.22)$$

где $\mathfrak{S}_{lq}^L(\mathbf{r})$ –регулярная, а $\mathfrak{R}_{lq}^L(\mathbf{r})$ –иррегулярные шаровые векторы, которые соответствуют формулам

$$\mathfrak{S}_{jM}^{LS}(\mathbf{r}) = r^L Y_{jM}^{LS}(\theta, \varphi), \mathfrak{R}_{jM}^{LS}(\mathbf{r}) = r^{-(L+1)} Y_{jM}^{LS}(\theta, \varphi), \quad (2.23)$$

при $S = 1$.

Подставляя (2.22) в (2.21), получаем

$$V_M = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{l,L,q} \mathfrak{M}_{lq}^L(1) \int_{v_2} \mathbf{j}(2) \mathfrak{R}_{lq}^L(\mathbf{a}) dv_2, \quad (2.24)$$

где

$$\mathfrak{M}_{lq}^L(1) = \int (\mathbf{j}(1) \mathfrak{S}_{lq}^L(\mathbf{r})) dv \quad (2.25)$$

векторный мультипольный момент.

В выражении мультипольного момента (2.25) индекс L в силу свойств шарового вектора \mathfrak{S}_{lq}^L может принимать три значения $L = 1, L = l + 1, L = l - 1$. Покажем что при $L = l - 1$ мультипольный момент (2.25) равен нулю.

Действительно, учитывая, что при $L = l - 1$

$$\mathfrak{S}_{lq}^{l-1} = \frac{1}{\sqrt{l(2l-1)}} \nabla(\mathfrak{S}_{lq}^l(\mathbf{r}))$$

[19] и принимая во внимание векторное соотношение

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \cdot \varphi) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla \varphi$$

получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{lq}^{l-1} &= \frac{1}{\sqrt{l(2l+1)}} \int_v (\mathbf{j} \cdot \nabla \mathfrak{S}_{lq}^l(\mathbf{r})) dv = \\ &= \frac{1}{\sqrt{l(2l+1)}} \int_v [\operatorname{div}(\mathbf{j} \cdot \mathfrak{S}_{lq}^l(\mathbf{r})) - \mathfrak{S}_{lq}^l(\mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{j}] dv. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Переходя в первом интеграле к поверхностному интегралу и учитывая, что в силу квазистатики $J_n = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, получаем $\mathfrak{M}_{lq}^{l-1} = 0$.

Покажем теперь, что при $L = l + 1$

$$\int \mathbf{j} \mathfrak{R}_{lq}^{l+1} = 0$$

. Для этого заметим, что $\mathfrak{R}_{lq}^{l+1} = [(l+1)(2l-3)]^{-\frac{1}{2}} \nabla \mathfrak{R}_{lq}$. Поэтому, проводя такие же рассуждения, как и выше, получаем искомый результат.

Таким образом, согласно (2.26), в разложении (2.24) индекс L принимает только одно значение, равное l .

Рассмотрим векторный мультипольный момент \mathfrak{M}_{lq}^l . Используя определение шарового вектора \mathfrak{S}_{lq}^l , имеем последовательно

$$(\mathbf{j} \cdot \mathfrak{S}_{lq}^l) = \sum_{\mu, \sigma} C_{l\mu 1\sigma}^{lq} \mathfrak{S}_{l\mu 1\sigma} \cdot \mathbf{j} = \sum_{\mu, \sigma} C_{l\mu 1\sigma}^{lq} \mathfrak{S}_{l\mu} J_{1\sigma} = \{\mathfrak{S}_l \otimes j_1\}_{lq} \quad (2.27)$$

Подставляя (2.27) в интеграл (2.25), получаем выражение, где верхний индекс можно не писать, и тогда формула для векторного мультиполя принимает вид

$$\mathfrak{M}_{lq} = \int \{\mathfrak{S}_l \otimes j_1\}_{lq} dv. \quad (2.28)$$

Положим в (2.28) $l = 1$. Тогда

$$\mathfrak{M}_{1q} = \int \{\mathbf{r}_1 \otimes j_1\}_{1q} dv = i\sqrt{2}\mathfrak{M}_{1q}, \quad (2.29)$$

что соответствует известному выражению вектора полного магнитного дипольного момента системы $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dv$.

Для вычисления интеграла в формуле (2.24) используем теорему сложения, которая получена в главе 1 для шарового вектора $\mathfrak{R}_{lq}^l(\mathbf{a})$. По-

сле подстановки в формулу (1.50) имеем

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_{lq}^l(\mathbf{a}) &= \mathfrak{R}_{lq}^l(\mathbf{r}_2 + \mathbf{R}) = \\
&= - \sum_n \left[\sqrt{\frac{(2l+2n+1)!ln}{(2l+1)!(2n)!(l+1)(n+1)}} \{\mathfrak{S}_n^n(\mathbf{r}_2) \otimes \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R})\}_{lq} + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{(2l+2n-1)!(l+n)}{(2l+1)!(2n-2)!(l+1)n}} \{\mathfrak{S}_n^{n-1}(\mathbf{r}_2) \otimes \mathfrak{R}_{l+n-1}(\mathbf{R})\}_{lq} \right] \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Подставляя (2.30) в (2.24) и учитывая, что $\mathfrak{M}_{lq}^{l-1} = \mathfrak{M}_{lq}^{l+1} = 0$, получаем выражение для энергии взаимодействия пространственных токовых распределений

$$V_M = -\frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{l,n} \sqrt{\frac{(2l+2n)!ln}{(2l+1)!(2n)!(l+1)(n+1)}} (\mathfrak{M}_l(1) \cdot \{\mathfrak{M}_n(2) \otimes \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R})\}_l). \quad (2.31)$$

Используя изменение схемы связи неприводимых тензоров, можно выражение (2.31) привести к виду

$$\begin{aligned}
V_M &= -\frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{l,n} (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{(2l+2n)!ln}{(2l+1)!(2n)!(l+1)(n+1)}} \\
&\quad (\{\mathfrak{M}_l(1) \otimes \mathfrak{M}_n(2)\}_{l+n} \cdot \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R})). \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Формулу (2.31) можно трактовать как взаимодействие векторных мультиполей одного токового распределение с полем, создаваемым другим токовым распределением. А формула (2.32) описывает взаимодействие векторных мультиполей одного токового распределения с векторными мультиполями другого.

Формулу (2.32), описывающую взаимодействие двух пространственных токовых распределений, легко обобщить на попарное взаимодействие N пространственных токовых распределений. Обозначим одно из

взаимодействующих токовых распределений индексом k , а второе j . Тогда, суммируя взаимодействия, когда k и j пробегают значения от 1 до N и учитывая, что взаимодействия $V_{kj} = V_{jk}$, получаем

$$V_M = -\frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0, k \neq j}^{N-1} \sum_{l,n} (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{(2l+2n)!ln}{(2l)!(2n)!(l+1)(n+1)}} \times \\ \times (\{\mathfrak{M}_l(k) \otimes \mathfrak{M}_n(j)\}_{l+n} \cdot \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R}_{kj})). \quad (2.33)$$

Выражение энергии (2.32) для случая $l = n = 1$ при учете (2.29) принимает вид

$$V_M = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sqrt{6} (\{\mathfrak{M}_1(1) \otimes \mathfrak{M}_1(2)\}_2 \cdot \mathfrak{R}_2(\mathbf{R})) \rightarrow \\ \rightarrow -\frac{\mu_0}{4\pi} R^{-3} [(\mathfrak{M}(1) \cdot \mathfrak{M}(2)) - 3(\mathfrak{M}(1) \cdot \mathbf{R})(\mathfrak{M}(2) \cdot \mathbf{R})], \quad (2.34)$$

что соответствует диполь-дипольному взаимодействию. Поле, создаваемое диполем $\mathfrak{M}(1)$ выражается через неприводимый тензор по формуле

$$H_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \sqrt{10} \{\mathfrak{M}_1(1) \otimes \mathfrak{R}_2(\mathbf{R})\}_1. \quad (2.35)$$

и тогда (2.34) принимает известную форму взаимодействия поля диполя $\mathfrak{M}_1(1)$ с диполем $\mathfrak{M}_1(2)$:

$$V_M = (H_1 \cdot \mathfrak{M}_1). \quad (2.36)$$

Аналогично можно рассмотреть взаимодействие мультиполей более высокого порядка.

Если проводник, по которому течет ток, достаточно тонок, то интегрирование по объему проводника заменяется интегрированием по его контуру заменой в формуле (2.25) $\mathbf{j}dv \rightarrow I d\mathbf{l}$, где I —полный ток, протекающий по проводнику. Проведя замену в выражении (2.28) получим

$$\mathfrak{M}_{lq} = I \int \{\mathfrak{S}_l \otimes dl_1\}_{lq}. \quad (2.37)$$

Применим эту формулу для определения мультипольных моментов витка радиусом b с током I .

Направим ось z прямоугольной системы координат, связанной с витком, вдоль оси симметрии витка. Тогда оси x, y будут лежать в плоскости витка. Определяя циклические проекции вектора

$$dl_1 : dl_{1\mu} = ib\mu Y_{1\mu}\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) d\varphi$$

и расписывая интеграл (2.37), получим

$$\mathfrak{M}_{lq} = Ib^{l+1}i \sum_{\mu,\nu} C_{l\nu 1\mu}^{lq} Y_{l\nu}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) Y_{1\mu}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \int_0^{2\pi} e^{i(\mu+\nu)\varphi} d\varphi,$$

откуда после интегрирования

$$\mathfrak{M}_{l0} = 2\pi Ib^{l+1}i Y_{l1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right). \quad (2.38)$$

Знание этих мультиполей позволяет найти энергию взаимодействия витков при произвольном их расположении.

2.6. Свойства силовой функции распределения двух объемных токовых распределений

Применим полученные результаты к нахождению силовой функции двух взаимодействующих витков. Для получения явной зависимости силовой функции от углов, свяжем опорную систему координат с первым витком. Пусть единичный вектор \mathbf{e}_1 отвечает направлению оси первого витка, а единичный вектор \mathbf{e}_2 —направлению оси второго витка. Тогда в силу осевой симметрии мультипольный момент первого витка $\mathfrak{M}_{lq}(1) = \mathfrak{M}_{l0}(1)Y_{lq}(\mathbf{e}_1)$, а второго витка $\mathfrak{M}_{lq}(2) = \mathfrak{M}_{l0}(2)Y_{lq}(\mathbf{e}_2)$. Будем считать,

что первый виток имеет радиус a , а второй b . Тогда выражение энергии взаимодействия витков (2.32) примет вид

$$V_M = -\frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{l,n} (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{(2l+2n)!ln}{(2l)!(2n)!(l+1)(n+1)}} \mathfrak{M}_{l_0}(1)\mathfrak{M}_{l_0}(2) \times \\ \times (\{Y_l(\mathbf{e}_1) \otimes Y_n(\mathbf{e}_2)\}_{l+n} \cdot \mathfrak{R}_{l+n}(\mathbf{R})). \quad (2.39)$$

Разложение взаимодействия двух токовых витков представлено в работе [31]. Но выражение (2.39) более предпочтительно из-за своей инвариантности.

Рассмотрим несколько частных случаев.

а) Витки расположены так, как показано на рис.2.2.

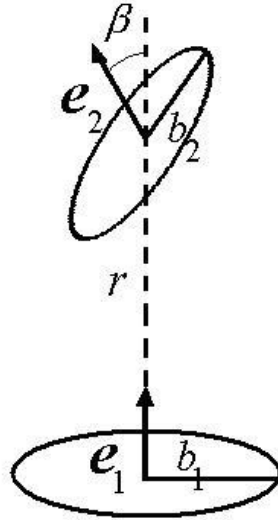


Рис. 2.2. Расположение токовых витков

Выражение для энергии запишется в виде:

$$V_M = \frac{\mu_0 \pi I_a I_b}{2} \sum_{l,n} (-1)^n \frac{(l+n)!}{l!n!} \sqrt{\frac{ln}{(l+1)(n+1)}} \frac{a^{l+1} b^{n+1}}{r^{l+n+1}} \times$$

$$\times Y_{l1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) Y_{n1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) P_n(\cos(\beta));$$

$$\cos(\beta) = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2). \quad (2.40)$$

б) Если витки расположены параллельно (как показано на рис.2.3.),

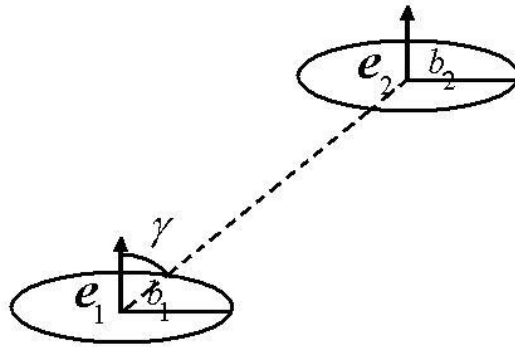


Рис. 2.3. Параллельное расположение токовых витков

выражение для тензорного произведения неприводимых тензоров при использовании правила $\{Y_{l1} \otimes Y_{n1}\}_{l+n} = C_{l1n1}^{l+n1} Y_{l+n1}$ [19] примет вид:

$$V_M = \frac{\mu_0 \pi I_a I_b}{2} \sum_{l,n} (-1)^n \frac{(l+n)!}{l!n!} \sqrt{\frac{ln}{(l+1)(n+1)}} \frac{a^{l+1} b^{n+1}}{r^{l+n+1}} \times$$

$$\times Y_{l1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) Y_{n1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) P_{l+n} \cos(\gamma);$$

$$\cos(\gamma) = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_r). \quad (2.41)$$

в) В случае, который показан на рис.2.4.

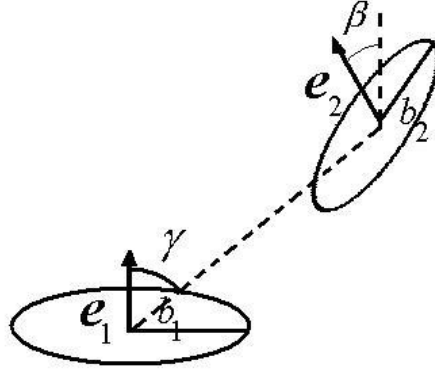


Рис. 2.4. Произвольное расположение токовых витков

выражение энергии запишется в виде:

$$V_M = \frac{\mu_0 \pi I_a I_b}{2} \sum_{l,n,q} (-1)^{n-q} \frac{(l+n)!}{l!} \sqrt{\frac{ln}{(l+1)(n+1)(n+q)(n-q)}} \frac{a^{l+1} b^{n+1}}{r^{l+n+1}} Y_{l1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) Y_{n1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) Y_{nq}(\mathbf{e}_2) Y_{l+n-q}(\mathbf{e}_r). \quad (2.42)$$

2.7. Запись силовой функции взаимодействия токового витка с диамагнитной пластиной

В работе [40] приводится сравнение результатов, полученных классическим [48, 49] способом вычисления энергии взаимодействия двух коаксиальных витков, с результатами, полученными согласно методике, представленной в диссертации.

Рассмотрим взаимодействие кругового тока с диамагнитной пластиной толщиной d и магнитной проницаемостью μ . Виток располагается на высоте h над плоскостью диамагнитной пластины. Согласно [48] изображение токового витка задается двумя контурами: контуром-изображе-

нием с током

$$I' = \left[\frac{(\mu - \mu_0)}{(\mu + \mu_0)} \right] I.$$

Направление тока I' таково, что проекции I и I' на границу раздела сред совпадают друг с другом как по положению, так и по направлению. В среде с проницаемостью μ циркулирует ток

$$I'' = 2 \frac{I\mu}{(\mu + \mu_0)}.$$

У нас получается система трех токов. Используем формулы (2.33) и (2.40), для записи общего выражения взаимодействие токового витка с диамагнитной пластиной. После подстановки получаем

$$\begin{aligned} V_M = \frac{\mu_0 \pi I^2}{2(\mu + \mu_0)} \sum_{l,n} (-1)^n \frac{(l+n)!}{l!n!} \sqrt{\frac{ln}{(l+1)(n+1)}} \\ \left(\frac{(\mu - \mu_0)a^{l+n+2}}{(d+2h)^{l+n+1}} Y_{l1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) Y_{n1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) P_n(\cos(\beta)) \right. \\ \left. + \frac{2\mu a^{l+n+2}}{\left(\frac{d}{2} + h\right)^{l+n+1}} Y_{l1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) Y_{n1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) P_n(\cos(\beta)) \right), \quad (2.43) \end{aligned}$$

выражение, описывающее взаимодействие токового витка с диамагнитной пластиной в удобном для исследования виде.

Глава 3

Потенциальная энергия и силовые характеристики квазисферического диамагнитного ротора в произвольном магнитном поле

Основная особенность диамагнитных тел (воды, дерева, пластика, сыра, ацетона, графита и т.д., а так же живых существ) состоит в том, что их магнитная проницаемость меньше единицы и поэтому в магнитном поле они перемещаются в направлении уменьшения напряженности магнитного поля, т.е. выталкиваются из поля. Это свойство диамагнетиков позволяет создать свободный подвес диамагнитных тел в постоянном магнитном поле, т.е. скомпенсировать магнитную и гравитационную силы так, что диамагнитное тело может устойчиво висеть в поле тяжести без контакта.

В наши дни неконтактный подвес - это уже не экзотика, а красивая инженерная задача, реализованная во многих технических устройствах. Это и "вечные" подшипники, которые не претерпевают износа во все время эксплуатации, и новый вид высокоскоростного транспорта - поезда на магнитной подвеске (магнитопланы), и накопители энергии для высокоэффективных двигателей, и суперцентрифуги, и вакуумные насосы, а так же сверхточные навигационные приборы: гироскопы, градиентометры, гирокомпасы.

Для осуществления работы данных устройств требуется выполнение условий, позволяющих осуществить вывешивание диамагнитного ротора

в магнитном поле.

В этой главе обсуждается возможность вывешивания диамагнитного ротора произвольной формы в магнитном поле. Вычисляется сила, действующая на ротор со стороны поля, находятся условия устойчивости ротора в поле.

Методика расчета, приведенная в данной главе, базируется на вычислении потенциальной энергии взаимодействия ротора с полем.

3.1. Представление потенциальной энергии взаимодействия произвольного по форме ротора с произвольным магнитным полем

Вычисление силовых характеристик подвеса можно произвести, если известна потенциальная энергия ротора, находящегося в поле подвеса.

Потенциальная энергия W магнетика во внешнем поле определяется выражением [34]

$$W = -\frac{\mu\mu_0}{2} \int_V \mathbf{J} \mathbf{H}_0 dV, \quad (3.1)$$

где интеграл берется по всему объему тела, \mathbf{J} - вектор намагниченности единицы объема, \mathbf{H}_0 - напряженность магнитного поля, которая была до внесения тела.

Полная сила и момент, действующие на тело в магнитном поле, выражаются следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mu\mu_0 \int_V (\mathbf{J} \nabla) \mathbf{H}_0 dV, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{M} = \mu\mu_0 \int_V [\mathbf{J} \times \mathbf{H}_0] dV + \mu\mu_0 \int_V [\mathbf{r} \times (\mathbf{J} \nabla) \mathbf{H}_0] dV. \quad (3.3)$$

Намагниченность \mathbf{J} в линейных средах в первом приближении пропорциональна полному полю \mathbf{H}

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}, \quad (3.4)$$

где $\chi = \frac{\mu}{\mu_0} - 1$ - магнитная восприимчивость. Для сверхпроводящих тел $\chi = -1$, для диамагнитных $\chi < 0$ и очень мала. В силу малости магнитной восприимчивости можно в первом приближении пренебречь искажением поля вызываемым наличием тела и считать, что намагниченность пропорциональна внешнему магнитному полю \mathbf{H}_0 . Тогда формулы энергии, силы, момента примут вид:

$$W = -\frac{\chi\mu_0}{2} \int_V H_0^2 dV, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\chi\mu_0}{2} \int_V \nabla(H_0^2) dV, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\chi\mu_0}{2} \int_V [\mathbf{r} \times \nabla(H_0^2)] dV. \quad (3.7)$$

Из формулы для момента следует, что диамагнитное тело в первом приближении не испытывает момента сил в однородном поле, так как первый член в (3.3) пропадает. Для появления момента сил необходима неоднородность поля.

Для описания поведения ротора в поле подвеса необходимо найти поле. Прделаем это для однородного по составу ротора произвольной формы. Введем следующие системы координат: X_i , ($i = 1, 2, 3$)—система координат с началом в центре ротора, Y_i ($i = 1, 2, 3$)—система координат, связанная с источником поля. Положение систем координат таково: ось X_3 и Y_3 параллельны и сонаправлены, плоскость X_1X_2 и Y_1Y_2 параллельны. Обозначим через \mathbf{r} - радиус-вектор некоторой точки в системе

координат X_i , а через \mathbf{r}' – радиус-вектор той же точки в системе координат Y_i . Пусть \mathbf{R} – вектор смещения центра масс тела относительно системы координат, связанной с источником поля, тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}$$

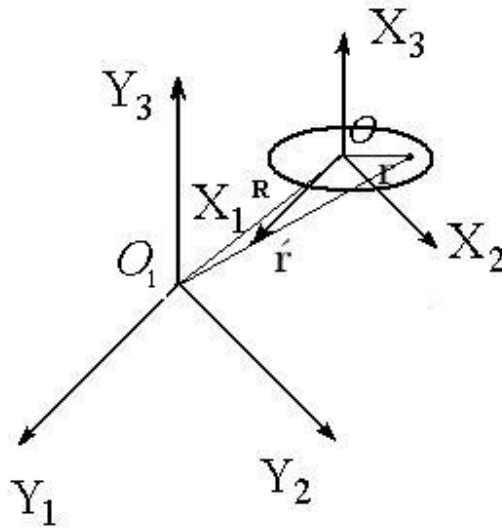


Рис. 3.1. Взаимное положение систем координат

Потенциал поля в окрестности начала координат системы X_i равен

$$\varphi_0 = \sum_l (a_l \cdot J_l(\mathbf{r})), \quad (3.8)$$

а в системе координат Y_i в окрестности точки O_1

$$\varphi_0 = \sum_l (c_l \cdot J_l(\mathbf{r}')), \quad (3.9)$$

где $J_{lm}(\mathbf{r}) = r^l Y_{lm}(\mathbf{r})$ – шаровая функция. Величины c_l являются функциями от коэффициентов разложения внешнего поля и вектора \mathbf{R} . Найдем связь между этими величинами. Так как потенциалы (3.8) и (3.9) описывают одну и ту же функцию в разных системах координат, то в некоторой

точке $\dot{\mathbf{r}}$

$$\sum_l (a_l \cdot J_l(\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{R})) = \sum_l (c_l \cdot J_l(\dot{\mathbf{r}})). \quad (3.10)$$

Воспользуемся формулой (1.49)

$$J_l(\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{R}) = \sum_{j, Q, j+Q=l} \sqrt{\frac{(2l)!}{(2j)!(2Q)!}} \{J_j(\mathbf{R}) \otimes J_Q(\dot{\mathbf{r}})\}_l, \quad (3.11)$$

где выражение в фигурных скобках представляет собой тензорное произведение двух неприводимых тензоров индексов "j" и "Q".

Подставляя (3.11) в (3.10), после упрощения получаем

$$\sum_l \left(\sum_{j=0}^l \sqrt{\frac{(2l+2j+1)!}{(2j)!(2j+1)!}} (\{J_l(\mathbf{R}) \otimes a_{l+j}\} \cdot J_l(\dot{\mathbf{r}})) \right) = \sum_l (c_l \cdot J_l(\dot{\mathbf{r}})).$$

Откуда следует

$$c_l = \sum_{j=0}^l (-1)^j \sqrt{\frac{(2l+2j+1)}{(2j)!(2l+1)!}} \{J_j(\mathbf{R}) \otimes a_{l+j}\}_l. \quad (3.12)$$

Учтем, что

$$\nabla(r^l Y_{lm}(\mathbf{r})) = \sqrt{l(2l-1)} r^{l-1} Y_{lm}^{l-1}(\mathbf{r}),$$

где $Y_{lm}^{l-1} = \{Y_{l-1} \otimes l_1\}_{lm}$ – шаровой вектор, и найдем напряженность магнитного поля в системе Y_i .

$$\mathbf{H}_0 = -\nabla\varphi_0 = -\sum_l \sqrt{l(2l-1)} r^{l-1} (c_l \cdot Y_l^{l-1}). \quad (3.13)$$

Выражение для H_0^2 тогда получим в виде

$$H_0^2 = \sum_{l, l'} \sqrt{l'l'(2l-1)(2l'-1)} r^{l+l'-2} (c_l \cdot Y_l^{l-1})(c_{l'} \cdot Y_{l'}^{l'-1}). \quad (3.14)$$

Выражение (3.14) преобразуется к виду

$$H_0^2 = \sum_{l, l', L} \sqrt{\frac{(l+l'+L+1)!(l+l'-L)!}{(l+l'+L-1)!(l+l'-L-2)!}} C_{l-10l'-10}^{L0} r^{l+l'-2} (\{c_l \otimes c_{l'}\}_L \cdot Y_L(\dot{\mathbf{r}})), \quad (3.15)$$

где $C_{l-10l-10}^{L0}$ – коэффициенты Глебша - Гордана.

Подставив выражение (3.15) в интеграл (3.1), получим потенциальную энергию произвольного по форме диамагнитного тела в магнитном поле

$$W = \frac{\mu_0 \chi}{4} \sum_{l, l', L} \sqrt{\frac{(l + l' + L + 1)!(l + l' - L)!}{(l + l' + L - 1)!(l + l' + L - 2)!}} C_{l-10l-10}^{L0} \left(\{c_l \otimes c_{l'}\}_L \cdot \int_V r^{l+l'-2} Y_L(\mathbf{e}_r) dV \right) \quad (3.16)$$

Здесь и выше выражение в круглых скобках есть скалярное произведение неприводимых тензоров, которое можно расписать

$$(A_l B_l) = \sum_{l=-m}^{l=m} A_{lm} B_{lm}^* = \sum_{l=-m}^{l=m} (-1)^{-m} A_{lm} B_{lm},$$

а

$$\{c_l \otimes c_{l'}\}_l -$$

неприводимый тензор второго порядка, связанный с полем.

$$c_l = \sum_{j=m}^l \frac{a_{l+j} (l+j)!}{2^m m! (j-m)!} \frac{1}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}} z^{j-m} (x+iy)^m \left[1 - \frac{(j-m)(j-m-1)}{2(2m+2)} \frac{x^2+y^2}{z^2} + \frac{(j-m)\dots(j-m-3)}{8(2m+2)(2m+4)} \frac{(x^2+y^2)^2}{z^4} - \dots \right], \quad (3.17)$$

где a_l – коэффициенты разложения внешнего магнитного поля на магнитные мультиполи.

Интеграл в выражении (3.16)

$$\int_V r^{l+l'-2} Y_L(\mathbf{e}_r) dV \quad (3.18)$$

- тензор, связанный с формой тела.

3.2. Силовая функция диамагнитного ротора близкого по форме к сфере в магнитном поле

Приведем вычисления силовой функции для симметричного диамагнитного эллипсоида в общем виде.

В общем виде форму ротора, близкую к сферической, можно представить через разложение по сферическим функциям

$$R(\theta', \phi') = R_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=-k}^k \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \varepsilon'_{ks} Y_{ks}^*(\theta', \phi') \right),$$

где R_0 -радиус "средней" сферы, ε'_{ks} - неприводимый тензор формы тела, который характеризует геометрию ротора. При этом ε'_{2s} отвечает эллипсоидальности, ε'_{3s} -грушевидности. Неприводимый тензор формы вычисляется в системе координат, связанной с телом. Значение данного тензора в системе координат, связанной с источником, можно получить действием матрицы конечного вращения D_{ps}^k [19]

$$\varepsilon_{kp} = \sum_{s=-k}^k D_{ps}^k(\alpha, \beta, \gamma) \varepsilon'_{ks} \quad (3.19)$$

α, β, γ -углы Эйлера, задающие ориентацию системы координат, связанной с телом, относительно системы, связанной с источником.

Аналитическое вычисление объемного интеграла (3.18) для произвольной формы ротора представляет определенные трудности. Однако для близких шару форм этот интеграл удастся вычислить в аналитическом виде.

Рассмотрим симметричный эллипсоид, радиус средней сферы кото-

рого равен R_0 . В этом случае аналитическое вычисление интеграла (3.18)

$$\begin{aligned}
\int_V \hat{r}^{l+l'-2} Y_L(\mathbf{e}_r) dV &= \int_0^{R_0} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int \hat{r}^{l+l'-2} Y_L(\mathbf{e}_r) \sin \theta d\theta = \\
&= \int \frac{\hat{r}^{l+l'+1}}{l+l'+1} Y_{LM} d\Omega = \frac{R_0^{l+l'+1}}{l+l'+1} 4\pi + R_0^{l+l'+1} \int (\varepsilon_k Y_k) \cdot Y_L d\Omega = \\
&= R_0^{l+l'+1} \sum_{ks} \varepsilon_{ks} \int Y_{ks}^* Y_L d\Omega = 4\pi \frac{R_0^{l+l'+1}}{l+l'+1} + R_0^{l+l'+1} \frac{4\pi}{2k+1} \varepsilon_{ks}. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Подставим результат вычисления интеграла в выражение для потенциальной энергии (3.16). Учтем, что функция от коэффициентов разложения внешнего поля и вектора \mathbf{R} имеет вид (3.17) тогда выражение (3.16) примет вид:

$$\begin{aligned}
W &= -\frac{\mu_0 \chi}{2} \sum_l \frac{l}{2l+1} R_0^{2l+1} (a_l \cdot a_l) - \\
&\quad - \frac{\mu_0 \chi}{5} \sum_{l,l',s} \sqrt{\frac{(l+l'+3)!(l+l'-2)!}{(l+l'-3)!(l+l'+2)!}} \times \\
&\quad \times C_{l-10l'-10}^{20} R_0^{l+l'+1} (\{a_l \otimes a_{l'}\}_{2s} \cdot \varepsilon_{2s}). \quad (3.21)
\end{aligned}$$

В данном выражении согласно [36–39] первое слагаемое описывает силовую функцию шара, второе отвечает за вклад, обусловленный несферичностью.

Для случая осесимметричного эллипсоида согласно выражению (3.19) тензор формы имеет вид

$$\varepsilon_{2p} = D_{p0}^2 \varepsilon'_{20} = \varepsilon'_{20} Y_{2p}^*(\alpha, \beta). \quad (3.22)$$

Перепишем выражение (3.21) через сумму двух слагаемых

$$W = W_0(r) + W_\varepsilon(r, \theta), \quad (3.23)$$

где $W_0(r)$ -потенциальная энергия диамагнитного шара в магнитном поле, а $W_\varepsilon(r, \theta)$ - энергия, обусловленная несферичностью.

Энергию, обусловленную несферичностью, можно записать через силовой тензор [33]:

$$W_\varepsilon(r, \theta) = (\varepsilon_k \cdot Q_k^*), \quad (3.24)$$

где Q_k^* - силовой тензор - величина, определяемая положением и силой источников поля.

Распишем скалярное произведение неприводимых тензоров, отвечающее за вклад, обусловленный несферичностью, в выражении (3.21) до второго порядка малости

$$\begin{aligned} (\{a_l \otimes a_j\}_{2s} \cdot \varepsilon_{2s}) &= (\{a_l \otimes a_j\}_k \cdot Y_k) \dot{\varepsilon}_{k0} = \\ &= \dot{\varepsilon}_{k0}[(A_k + zB_k + z^2C_k + x^2D_k)P_k(\cos \beta) + \\ &+ (xE_k + xzF_k)P_k^1(\cos \beta) \cos \alpha + x^2G_kP_k^2(\cos \beta) \cos 2\alpha]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь $P_k^n(\cos \beta)$ присоединенные полиномы Лежандра, $A_k, B_k, C_k, D_k, E_k, F_k, G_k$ постоянные величины, представляющие коэффициенты разложения поля. Их можно найти из выражений

$$\begin{aligned} \{a_l \otimes a_j\}_{k0} &= A_k + zB_k + z^2C_k + x^2D_k \\ \{a_l \otimes a_j\}_{k1} &= -\sqrt{k(k+1)}(xE_k + xzF_k) \\ \{a_l \otimes a_j\}_{k2} &= \sqrt{\frac{(k+2)!}{(k-2)!}}x^2G_k. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Следовательно, общее выражение энергии для тела, близкого по

форме к шару, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
W = & -\frac{\mu_0\chi}{2} \sum_l \frac{l}{2l+1} R_0^{2l+1} (a_l \cdot a_l) - \\
& -\frac{\mu_0\chi}{5} \sum_{l,\acute{l},s} \sqrt{\frac{(l+\acute{l}+3)!(l+\acute{l}-2)!}{(l+\acute{l}-3)!(l+\acute{l}+2)!}} \\
& C_{l-10\acute{l}-10}^{20} R_0^{l+\acute{l}+1} \sum_{s=-2}^2 (\{a_l \otimes a_{\acute{l}}\}_{2s} \cdot \varepsilon_{2s}), \quad (3.27)
\end{aligned}$$

который наиболее удобен для расчетов. Суммирование по \acute{l} производится для трех значений $\acute{l} = l, \acute{l} = l - 1, \acute{l} = l + 1$. Константы (3.26) вычисляются через коэффициенты разложения поля. Представленное выражение позволяет найти силовые характеристики для обеспечения устойчивого удержания диамагнитного симметричного эллипсоида в произвольном магнитном поле.

В следующих параграфах представлены вычисления силы, действующей на ротор, по форме близкий к сфере, определена область устойчивости для данного ротора и исследована динамика ротора в магнитном поле.

3.3. Вычисление силы, действующей на ротор

Для вычисления силы, действующей на ротор, по форме близкий к сфере, используем общее выражение для энергии (3.16). Введем обозначения

$$\begin{aligned}
\int_v \acute{r}^{l+\acute{l}-2} Y_L(\mathbf{e}_r) dV &= A_L, \\
A_{Lp} &= \sum_{S=-L}^L D_{pS}^L(\alpha, \beta, \gamma) \acute{A}_{LS}.
\end{aligned}$$

Считаем, что тело обладает осевой симметрией, тогда

$$A_{Lp} = D_{p0}^L(\alpha, \beta, \gamma) \acute{A}_{L0} = \acute{A}_{L0} Y_{Lp}^*(\alpha, \beta).$$

Следовательно, при учете осевой симметрии тела потенциальная энергия (3.16) примет вид:

$$W = \frac{\mu_0 \chi}{4} \sum_{l, \acute{l}, L} \sqrt{\frac{(l + \acute{l} + L + 1)!(l + \acute{l} - L)!}{(l + \acute{l} + L - 1)!(l + \acute{l} + L - 2)!}} C_{l-10 \acute{l}-10}^{L0} \acute{A}_{L0} (\{c_l \otimes c_{\acute{l}}\}_L Y_L) \quad (3.28)$$

Вычислим первую вариацию потенциальной энергии

$$\begin{aligned} \delta W &\sim \delta (\{c_l \otimes c_{\acute{l}}\}_L Y_L) = (\{\delta c_l \otimes c_{\acute{l}}\}_L Y_L) + (\{c_l \otimes \delta c_{\acute{l}}\}_L Y_L) = \\ &= \sqrt{(l+1)(2l+3)} (\{\{c_{l+1} \otimes \delta R_1\}_l \otimes c_{\acute{l}}\}_L Y_L) + \\ &\quad + \sqrt{(\acute{l}+1)(2\acute{l}+3)} (\{c_l \otimes \{c_{\acute{l}+1} \otimes \delta R_1\}_{\acute{l}}\}_L Y_L). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Здесь и далее R_1 -вектор смещения центра эллипсоида. Во втором члене суммы меняем $\acute{l} \rightarrow l, l \rightarrow \acute{l}$ и учитываем, что $l + \acute{l} - L$ – четное, получаем

$$\delta (\{c_l \otimes c_{\acute{l}}\}_L Y_L) = 2\sqrt{(l+1)(2l+1)} (\{\{c_{l+1} \otimes \delta R_1\}_l \otimes c_{\acute{l}}\}_L Y_L). \quad (3.30)$$

Используя формулу из [19]

$$\{\{P_a \otimes Q_b\}_c \otimes R_d\}_f = (-1)^{a+b+f+d} \sum_h {}_{hc} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & f & h \end{Bmatrix} \{\{P_a \otimes \{Q_b \otimes R_d\}_h\}_f\} \quad (3.31)$$

и правило для коммутирующих тензоров

$$\{\mathfrak{M}_{j_1} \otimes \mathfrak{N}_{j_2}\}_{j_M} = (-1)^{j_1+j_2-j} \{\mathfrak{N}_{j_2} \otimes \mathfrak{M}_{j_1}\}_{j_M} \quad (3.32)$$

найдем

$$\{\{c_{l+1} \otimes \delta R_1\}_l \otimes c_{\acute{l}}\}_L = \sum_h \begin{Bmatrix} l+1 & 1 & l \\ L & \acute{l} & h \end{Bmatrix} \{\delta R_1 \otimes \{c_{l+1} \otimes c_{\acute{l}}\}_h\}_L. \quad (3.33)$$

После преобразований имеем

$$\delta(\{c_l \otimes c_i\}_L Y_L) = 2\sqrt{\frac{(l+1)(2l+3)(2L+1)}{3}} \sum_h (-1)^{1-L} \sqrt{2h+1} \left\{ \begin{matrix} l+1 & 1 & l \\ L & l & h \end{matrix} \right\} (\{\{c_{l+1} \otimes c_i\}_h \otimes Y_L\}_1 \delta R_1). \quad (3.34)$$

Учтем

$$\left\{ \begin{matrix} l+1 & 1 & l \\ L & l & h \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 & l & l+1 \\ l & h & L \end{matrix} \right\} = (-1)^{l+l+h+1} \left[\frac{2(2l)!(l+l+h+2)!(l-l+h+1)!(l+l-h+1)!}{(2l+3)!(l-l+h-1)!(h-L+1)!(L-h+1)!} \frac{(h+L-1)!(l-l+L)!}{(L+h+2)!(l+l-L)!(l-l+L)!(l+l+L-1)!} \right]^{1/2} \quad (3.35)$$

Тогда выражение первой вариации потенциальной энергии

$$\delta W = \frac{\mu_0 \chi}{2} \sum_{l, l, L, h} (-1)^h \left[\frac{(2h+1)(2L+1)(l+l-h+2)!(l-l+h+1)!}{3(l-l+h-1)!(h-L+1)!(L-h+1)!} \frac{(l+l-h+1)!(h+L-1)!(l-l+L)!}{(L+h+2)!(l+l-L-2)!(l-l+L)!(l+l+L-1)!} \right]^{1/2} C_{l-10, l-10}^{L0} \dot{A}_{L0} (\{\{c_{l+1} \otimes c_i\}_h \otimes Y_L\}_1 \cdot \delta R_1). \quad (3.36)$$

Отсюда следует

$$F_{1\mu} = 2 \sum_{l, l, L, h} (-1)^h \left[\frac{(2h+1)(2L+1)(l+l-h+2)!(l-l+h+1)!}{3(l-l+h-1)!(h-L+1)!(L-h+1)!} \frac{(l+l-h+1)!(h+L-1)!(l-l+L)!}{(L+h+2)!(l+l-L-2)!(l-l+L)!(l+l+L-1)!} \right]^{1/2} C_{l-10, l-10}^{L0} \dot{A}_{L0} \{\{c_{l+1} \otimes c_i\}_h \otimes Y_L\}_{1\mu} \quad (3.37)$$

выражение для силы, действующей со стороны подвеса на осесимметричный несферичный ротор.

Для осесимметричного поля выражение для силы переписется в виде

$$F_{1\mu} = 2 \sum_{l, \acute{l}, L, h} (-1)^h \left[\frac{(2h+1)(2L+1)(l+\acute{l}-h+2)!(l-\acute{l}+h+1)!}{3(\acute{l}-l+h-1)!(h-L+1)!(L-h+1)!} \right. \\ \left. \frac{(l+\acute{l}-h+1)!(h+L-1)!(\acute{l}-l+L)!}{(L+h+2)!(l+\acute{l}-L-2)!(l-\acute{l}+L)!(l+\acute{l}+L-1)!} \right]^{1/2} \\ C_{l-10\acute{l}-10}^{L0} \acute{A}_{L0} C_{h0L\mu}^{1\mu} \{a_{l+1} \otimes a_{\acute{l}}\}_{h0} Y_{L\mu} \quad (3.38)$$

Вычислим значение силы для шара и эллипсоида.

Для вычисления силы, действующей на шар со стороны подвеса в формуле (3.38) нужно положить $L = 0, h = 1, l = \acute{l}, \mu = 0$.

Учтем, что

$$C_{l-10\acute{l}-10}^{00} = (-1)^{l-1} \frac{1}{\sqrt{2l-1}}, C_{1000}^{10} = 1, C_{l+10\acute{l}0}^{10} = (-1)^l \sqrt{\frac{3(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}}, \\ \acute{A}_{00} = 4\pi \frac{R_0^{2l+1}}{2l+1}$$

Тогда значение силы, действующей на шар в осесимметричном поле

$$F_0 = \frac{1}{4\pi} \sum_l l(l+1) a_l a_{l+1} \acute{A}_{00}. \quad (3.39)$$

Выражение для силы в таком же виде было получено в работе [56], через разложение силовой функции в ряд Тейлора вблизи состояния равновесия.

Для вычисления силы, действующей со стороны подвеса на эллипсоид, в выражении (3.38) необходимо учесть $L = 2, h = 1, 3, \acute{l} = l-2, l, l+2$. При данных значениях коэффициенты Глебша - Гордана равны:

$$C_{l-10\acute{l}-10}^{20} = \frac{(-1)^g g! \sqrt{5}}{(g-l+1)!(g-\acute{l}+1)!(g-1)!} \left[\frac{(\acute{l}-l+2)!(l-\acute{l}+2)!(l+\acute{l}-4)!}{(l+\acute{l}+1)!} \right]^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
& l + \acute{l} = g \\
C_{l+10\acute{l}0}^{10} &= \frac{(-1)^{\acute{g}-1} g! \sqrt{5}}{(\acute{g} - l + 1)! (\acute{g} - \acute{l})! (\acute{g} - 1)!} \left[\frac{(\acute{l} - l)! (l - \acute{l} + 2)! (l + \acute{l})!}{(l + \acute{l} + 3)!} \right]^{1/2} \\
& l + \acute{l} + 2 = 2\acute{g} \\
C_{l+10\acute{l}0}^{30} &= \frac{(-1)^{g''-3} g''! \sqrt{7}}{(g'' - l - 1)! (g'' - \acute{l})! (g'' - 3)!} \left[\frac{(\acute{l} - l + 2)! (l - \acute{l} + 4)! (l + \acute{l} - 2)!}{(l + \acute{l} + 5)!} \right]^{1/2} \\
& l + \acute{l} + 4 = 2g''
\end{aligned}$$

Выражение для силы с учетом указанного выше запишется в виде:

$$\begin{aligned}
F_{1\mu} &= 2 \sum_{l, \acute{l}, h} = (-1)^h \left[\frac{5(2h+1)(l + \acute{l} + h + 2)! (l - \acute{l} + h + 1)! (l + \acute{l} - h + 1)!}{3(\acute{l} - l + h + 1)! (h - 1)! (3 - h)!} \right. \\
& \quad \left. \frac{(h + 1)! (\acute{l} - l + 2)!}{(4 + h)! (l + \acute{l} - 4)! (l - \acute{l} + 2)! (l + \acute{l} + 1)!} \right]^{1/2} \\
& \quad C_{l-10\acute{l}-10}^{20} \acute{A}_{20} C_{h02\mu}^{1\mu} \{a_{l+1} \otimes a_j\}_{h0} Y_{2\mu} \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Просуммируем данное выражение по h . Полученный результат записывается в виде

$$\begin{aligned}
F_{1\mu} &= -2 \sum_{l, \acute{l}} \left[\frac{5(l + \acute{l} + 3)! (l + \acute{l})!}{5! (l + \acute{l} - 4)! (l + \acute{l} + 1)!} \right]^{1/2} C_{l-10\acute{l}-10}^{20} \acute{A}_{20} C_{102\mu}^{1\mu} C_{l+10\acute{l}0}^{10} Y_{2\mu} a_{l+1} a_j - \\
& \quad - 2 \sum_{\acute{l}} \left[\frac{5 \cdot 7 \cdot 4! (l + \acute{l} + 5)! (l - \acute{l} + 4)! (l + \acute{l} - 2)! (\acute{l} - l + 2)!}{3 \cdot 2! \cdot 7! (\acute{l} - l + 4)! (l + \acute{l} - 4)! (l - \acute{l} + 2)! (l + \acute{l} + 1)!} \right]^{1/2} \\
& \quad C_{l-10\acute{l}-10}^{20} \acute{A}_{20} C_{302\mu}^{1\mu} C_{l+10\acute{l}0}^{30} a_{l+1} a_j Y_{2\mu} \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Введем в формулу значение коэффициентов Глебша-Гордана

$$\begin{aligned}
F_{1\mu} = & - \sum_{l, \acute{l}} \frac{(-1)^{g+\acute{g}-1} g! \acute{g}! \sqrt{3 \cdot 5}}{(g-l+1)!(g-\acute{l}+1)!(g-2)!(\acute{g}-l-1)!(\acute{g}-\acute{l})!(\acute{g}-1)!} \\
& \frac{(l+\acute{l})!(\acute{l}-l)!(l-\acute{l}+2)!}{(l+\acute{l}+1)!} \left[\frac{(\acute{l}-l+2)!(\acute{l}-l+1)!}{2 \cdot 3} \right]^{1/2} \acute{A}_{20} C_{102\mu}^{1\mu} a_{l+1} a_{\acute{l}} Y_{2\mu} - \\
& - \sum_{l, \acute{l}} \frac{(-1)^{g+g''-3} g! g''! \sqrt{5 \cdot 7}}{(g-l+1)!(g-\acute{l}+1)!(g-2)!(g''-l-1)!(g''-l)!(g''-3)!} \\
& \frac{(\acute{l}-l+2)!(l-\acute{l}+4)!(l+\acute{l}-2)!}{3(l+\acute{l}+1)!} \left[\frac{1}{(\acute{l}-l+4)!(\acute{l}-l+4)!} \right]^{1/2} \acute{A}_{20} C_{302\mu}^{1\mu} a_{l+1} a_{\acute{l}} Y_{2\mu}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Теперь суммируем по \acute{l} :

$$\begin{aligned}
F_{1\mu} = & - \sum_l \acute{A}_{20} Y_{2\mu} a_{l+1} a_l \\
& \left[\frac{(l-1)(l+1)l}{2l+1} 2\sqrt{5} C_{102\mu}^{1\mu} - \frac{(l-1)(l+1)l(l+2)}{(2l+1)(2l-1)} 2\sqrt{\frac{5 \cdot 7}{3}} C_{302\mu}^{1\mu} \right] - \\
& - \sum_l \acute{A}_{20} Y_{2\mu} a_{l+1} a_{l+2} \\
& \left[\frac{(l+2)(l+1)l}{2l+3} \sqrt{6 \cdot 5} C_{102\mu}^{1\mu} - \frac{(l+3)(l+1)l(l+2)}{(2l+1)(2l+3)} \frac{1}{3} \sqrt{\frac{7}{6}} C_{302\mu}^{1\mu} \right] - \\
& - \sum_l \acute{A}_{20} Y_{2\mu} a_{l+1} a_{l-2} \frac{(l-1)(l-2)(l+1)l}{(2l-1)(2l-3)} \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{2}} 2 \cdot 5 \cdot 6 C_{302\mu}^{1\mu} \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Запишем силу, действующую со стороны осесимметричного поля на осесимметричное тело, форма которого отлична от шара. При этом учтем численные значения коэффициентов Глебша-Гордана:

$$C_{1020}^{10} = -\sqrt{\frac{2}{5}}, C_{3020}^{10} = \frac{3}{\sqrt{3 \cdot 5}}, C_{1021}^{11} = \sqrt{\frac{3}{2 \cdot 5}}, C_{3021}^{11} = -2\sqrt{\frac{2}{5 \cdot 7}},$$

$$Y_{20} = P_2 = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \beta - 1), Y_{21} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cos \beta \sin \beta (\cos \alpha + \beta \sin \alpha)$$

$$F_0 = F_z, F_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(F_x + \beta F_y)$$

$$F_0 = -\dot{A}_{20} P_2(\cos \beta) \sum_l a_{l+1} a_l \left[-2\sqrt{2} \frac{(l-1)l(l+1)}{2l+1} - 2\sqrt{3} \frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l-1)} \right] + a_{l+1} a_{l+2} \left[-2\sqrt{3} \frac{l(l+1)(l+2)}{2l+1} - \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 6}} \frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{(2l+1)(2l+3)} \right] - a_{l+1} a_{l-2} \sqrt{23 \cdot 5 \cdot 6} \frac{(l-1)l(l+1)(l-2)}{(2l-1)(2l+3)} \quad (3.44)$$

Эта формула выражает значение силы, действующей со стороны подвеса на ротор, близкий по форме к сфере.

3.4. Определение области устойчивости для диамагнитного ротора по форме близкого к сфере

Состояние равновесия вычисляем из условия равенства нулю суммы сил и моментов действующих на тело. Для консервативных сил выполняется равенство $Q_n = -\frac{\partial U}{\partial q_n}$ [43]. Запишем систему уравнений, решением которой будут координаты состояния равновесия. Для этого удобно просуммировать общее выражение для потенциальной энергии (3.27) по l .
Общий вид системы уравнений:

$$\begin{aligned}
Q_z &= -F_z - 2zK_z - \acute{\epsilon}_{k0} \left(\frac{1}{2}(B_k + 2zC_k)(\cos^2 \beta - 1) + 3xF_k \sin \beta \cos \beta \cos \alpha \right) \\
Q_x &= -2xK_x - \acute{\epsilon}_{k0}(xD_k(\cos^2 \beta - 1) + 3(E_k + zF_k) \sin \beta \cos \beta \cos \alpha + \\
&\quad + 6xG_k \sin^2 \beta \cos 2\alpha) \\
M_\beta &= \acute{\epsilon}_{k0}(-(A_k + zB_k + z^2C_k + x^2D_k) \cos \beta \sin \beta + 3(xE_k + xzF_k) \cos^2 \beta \cos \alpha - \\
&\quad - 3(xE_k + xzF_k) \sin^2 \beta \cos \alpha + 6x^2G_k \sin \beta \cos 2\alpha \cos \beta) \\
M_\alpha &= \acute{\epsilon}_{k0}(-3(xE_k + xzF_k) \sin \beta \cos \beta \sin \alpha - 6x^2G_k \sin^2 \beta \sin 2\alpha)\alpha
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Здесь F_z - сила, действующая со стороны поля подвеса на шар; K_z, K_x - жесткости - отношение приращения силы, действующей на шар, к смещению шара от состояния равновесия, найдены в работе [56].

Решение данной системы позволяет найти координаты состояния равновесия. Исследование на устойчивость проводится по теореме Лагранжа [43], из которой следует, что для устойчивого положения необходимо, чтобы потенциальная энергия в состоянии равновесия имела изолированный минимум. Требование минимума выполняется при условии положительной определенности матриц вторых производных функции потенциальной энергии в состоянии равновесия.

В общем виде координаты состояния равновесия можно представить в виде

$$\{x_0, z_0, \beta_0, \alpha_0\}.$$

Запишем разложение потенциальной энергии вблизи состояния равновесия, ограничимся вторым порядком малости:

$$\begin{aligned}
W(x_0 - \xi, z_0 - \eta, \beta_0 - \varphi, \alpha_0 - \rho) &= A + \bar{F}_z \cdot \eta + \bar{K}_z \cdot \eta^2 + \\
&\quad + T_1 \cdot \xi\eta + T_2 \cdot \eta\varphi + T_3 \cdot \rho\eta + \bar{K}_x \cdot \xi^2 + T_4 \cdot \varphi\xi + \\
&\quad + T_5 \cdot \rho\xi + \bar{K}_\beta \cdot \varphi^2 + T_6 \cdot \rho\varphi + \bar{K}_\alpha \cdot \rho^2 + \dots
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Константы, входящие в разложение потенциальной энергии, определяются коэффициентами разложения поля.

$$A = A_0 + z_0 F_z + x_0^2 K_x + z_0^2 K_z + \epsilon'_{k0} \left(\frac{1}{2} (A_k + z_0 B_k + x_0^2 D_k + z_0^2 C_k) (\cos^2 \beta_0 - 1) + \right. \\ \left. + 3(x_0 E_k + x_0 z_0 F_k \sin \beta_0 \cos \beta_0 \cos \alpha_0 + 3x_0^2 G_k \sin^2 \beta_0 \cos 2\alpha_0) \right)$$

представляет свободный член в разложении энергии.

$$\bar{F}_z = -2z_0 K_z - F_z + \epsilon'_{k0} \left(3x_0 F_k \sin \beta_0 \cos \beta_0 \cos \alpha_0 + \frac{1}{2} (-2z_0 C_k - B_k) (\cos^2 \beta_0 - 1) \right)$$

сила, действующая на диамагнитное тело в магнитном поле подвеса.

$$\bar{K}_z = K_z + \frac{1}{2} \epsilon'_{k0} C_k (\cos^2 \beta_0 - 1)$$

жесткость по оси z .

$$\bar{K}_x = K_x + \epsilon'_{k0} \left(3G_k \sin^2 \beta_0 \cos 2\alpha_0 + \frac{1}{2} D_k (\cos^2 \beta_0 - 1) \right)$$

жесткость по оси x .

$$\bar{K}_\beta = \epsilon'_{k0} \left(\frac{1}{2} (A_k + z_0 B_k + x_0^2 D_k + z_0^2 C_k) (\sin^2 \beta_0 - \cos^2 \beta_0) + \right. \\ \left. + 3x_0^2 G_k (\cos^2 \beta_0 - \sin^2 \beta_0) \cos 2\alpha_0 - 6(x_0 E_k + x_0 z_0 F_k) \sin \beta_0 \cos \beta_0 \cos \alpha_0 \right)$$

$$\bar{K}_\alpha = \epsilon'_{k0} \left(-\frac{3}{2} (x_0 E_k + x_0 z_0 F_k) \sin \beta_0 \cos \alpha_0 + 6x_0^2 G_k \sin^2 \beta_0 \cos 2\alpha_0 \right)$$

коэффициенты смещения, а $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ перекрестные члены. Они необходимы для составления матрицы Гессе

$$H = \begin{bmatrix} \bar{K}_x & T_1 & T_4 & T_5 \\ T_1 & \bar{K}_z & T_2 & T_3 \\ T_4 & T_2 & \bar{K}_\beta & T_6 \\ T_5 & T_3 & T_6 & \bar{K}_\alpha \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Устойчивость определяется условием положительной определенности матрицы Гессе. В случае положительной определенности удается получить область устойчивости.

Определим область устойчивости для ротора, близкого по форме к сфере, в поле кругового тока. Ротор находится на оси симметрии поля. Форма ротора определяется неприводимым тензором второго ранга ε_2 . Для него имеется только одна ненулевая компонента ε_0 .

Приведем систему уравнений, решение которой есть координаты состояния равновесия симметричного эллипсоида в поле кругового тока, когда ось симметрии поля и ось симметрии ротора совпадает. Для этого в системе (3.45) нужно положить $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}
 Q_z &= -F_z - 2zK_z - \varepsilon_{k0} \left(\frac{1}{2}(B_k + 2zC_k)(\cos^2 \beta - 1) + 3xF_k \sin \beta \cos \beta \right) \\
 Q_x &= -2xK_x - \varepsilon_{k0}(xD_k(\cos^2 \beta - 1) + 3(E_k + zF_k) \sin \beta \cos \beta + \\
 &\quad + 6xG_k \sin^2 \beta) \\
 M_\beta &= \varepsilon_{k0}(- (A_k + zB_k + z^2C_k + x^2D_k) \cos \beta \sin \beta + 3(xE_k + xzF_k) \cos^2 \beta - \\
 &\quad - 3(xE_k + xzF_k) \sin^2 \beta + 6x^2G_k \sin \beta \cos \beta)
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Решения системы (3.48)

$$\{x_0 = 0, z_0 = z_1, \beta_0 = 0\}, \{x_0 = 0, z_0 = z_2, \beta_0 = \frac{\pi}{2}\}; \tag{3.49}$$

$$\{x_0 = 0, z_0 = z_1, \beta_0 = \pi\}, \{x_0 = 0, z_0 = z_2, \beta_0 = \frac{3\pi}{2}\}; \tag{3.50}$$

$$\{x_0 = x_1, z_0 = z, \beta_0\}, \tag{3.51}$$

где изменения угла в (3.51) представляются неравенством $47^\circ \leq \beta_0 \leq 57^\circ$, а сам ротор смещен от оси симметрии поля на x_1 .

Устойчивость состояний равновесия определяется критерием Сильвестра, согласно которому необходимо и достаточно, чтобы все главные

диагональные миноры $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ матрицы были положительны, то есть $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$.

Положение симметричного эллипсоида представлено на рис.3.2. Как обсуждалось ранее, у эллипсоида имеется несколько состояний равновесия, из которых устойчивы те, что имеют угол β_0 равный $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$. При $\beta_0 = 0, \pi, \dots$ равновесие неустойчиво.

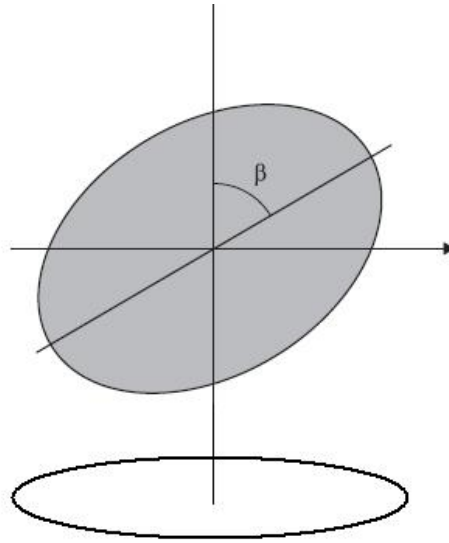


Рис. 3.2. Положение симметричного эллипсоида в поле кругового тока

Результаты вычислений для состояния равновесия $z_0 = z_1, x_0 = 0, \beta_0 = \pi/2$ представлены на рис.3.3.–рис.3.5. Здесь учтено, что поле симметрично и создается токовым витком, потенциал которого можно представить как:

$$\varphi_0 = \sum_l \left(\frac{\partial^l \varphi_0}{\partial z^l} \right)_{z_0=0} \frac{1}{l!} z^l, \quad (3.52)$$

коэффициенты разложения поля из данного выражения

$$a_l = \left(\frac{\partial^l \varphi_0}{\partial z^l} \right)_{z_0=0} \frac{1}{l!}, \quad (3.53)$$

где φ_0 –потенциал поля на оси. В системе координат, связанной с источ-

ником поля, потенциал на оси задается выражением

$$\varphi_0 = \frac{\mu_0 I}{2} \left(\frac{\eta + \nu}{\sqrt{1 + (\eta + \nu)^2}} - 1 \right), \quad (3.54)$$

где I —сила тока в витке, ν —величина, характеризующая положение центра ротора в системе координат, связанной с источником поля, отнесенная к радиусу витка, а η —положение начала координат, связанной с ротором, относительно плоскости витка, отнесенного к его радиусу.

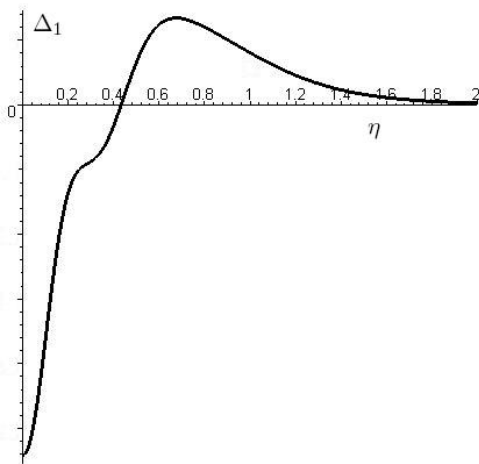


Рис. 3.3. Графическое представление первого главного минора в зависимости от безразмерной величины

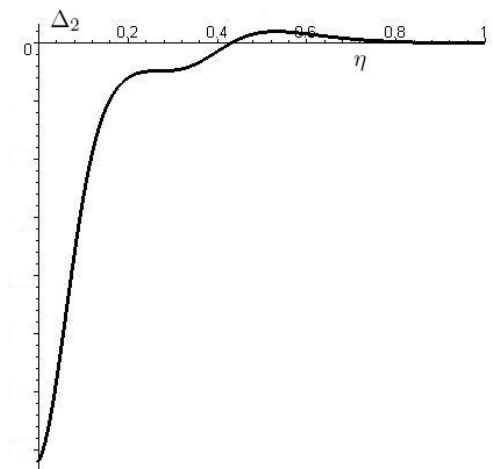


Рис. 3.4. Графическое представление второго главного минора в зависимости от безразмерной величины

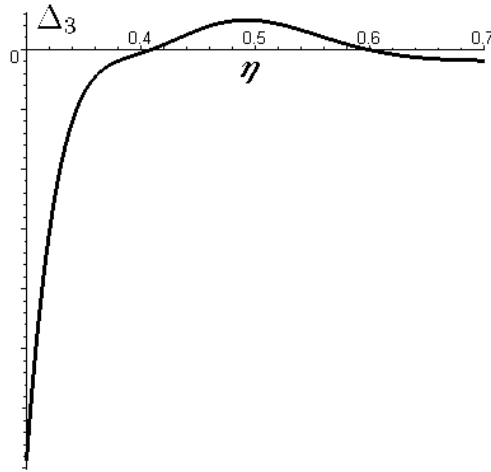


Рис. 3.5. Графическое представление третьего главного минора в зависимости от безразмерной величины

Анализ зависимостей позволяет определить область устойчивости симметричного эллипсоида в поле кругового тока. Для эллипсоида, у которого отношение радиуса средней сферы к радиусу витка составляет $R_0/d = 0.8$, область устойчивости лежит в пределах $0.408d \leq z \leq 0.597d$.

3.5. Динамика диамагнитного ротора в магнитном поле

Для рассмотрения динамики диамагнитного ротора в магнитном поле рассмотрим для начала несколько частных случаев, которые вытекают из формулы (3.16), при некоторых условиях, накладываемых на коэффициенты, по которым производится суммирование.

1. Если в формуле (3.16) положить $l = n = 1$, то

$$W = \frac{1}{4} \chi \mu_0 a_1^2 V. \quad (3.55)$$

Из (3.55) следует, что взаимодействие однородного поля с диамаг-

нитным телом произвольной формы не зависит от поворотов тела.

2. Теперь рассмотрим градиентное поле. В этом случае $l = n = 2$, тогда

$$W = \frac{1}{4}\chi\mu_0 \left[a_2^2 \int r^2 dV - \sqrt{\frac{7}{2}}(\{a_2 \otimes a_2\} \cdot I_2) \right]. \quad (3.56)$$

Здесь $\int r^2 dV$ – неприводимый тензор ранга 0, а

$$I_{2s} = \int r^2 Y_{2s}(\mathbf{e}_r) dV -$$

момент инерции тела единичной плотности - неприводимый тензор второго ранга. Если тело по форме эллипсоид, то вычисления представленных тензоров

$$\begin{aligned} \int r^2 dV &= \frac{1}{5}(a^2 + b^2 + c^2)V \\ I_{20} &= \frac{1}{10}(2c^2 - a^2 - b^2)V, \\ I_{22} &= \frac{\sqrt{3}}{40}(b^2 - a^2)V. \end{aligned}$$

Здесь a, b, c – главные полуоси эллипсоида, а $V = \frac{4}{3}abc$ – объем эллипсоида. Момент силы, действующий на диамагнитное тело в градиентном поле, определяется выражением

$$M_1 = -i\sqrt{35}\frac{\chi\mu_0}{4}\{\{a_1 \otimes a_2\} \otimes I_2\}_1. \quad (3.57)$$

3. Рассмотрим случай, когда поле имеет и однородную, и градиентную составляющие. Тогда в формуле (3.16) $n = l = 1, 2$ и

$$W = \frac{\chi\mu_0}{4}[a_1^2 V - \sqrt{10}(\{a_1 \otimes a_2\} \cdot I_1) + a_2 \int r^2 dV - \sqrt{\frac{7}{2}}(\{a_2 \otimes a_2\} \cdot I_2)], \quad (3.58)$$

следовательно, момент сил, действующий на диамагнитный ротор, в поле, имеющем однородную и градиентную составляющие, определяется

формулой

$$M_1 = 2i\sqrt{5}\frac{\chi\mu_0}{4}\{\{a_1 \otimes a_2\}_1 \otimes I_1\}_1 - i\sqrt{35}\frac{\chi\mu_0}{4}\{\{a_2 \otimes a_2\}_2 \otimes I_2\}_1. \quad (3.59)$$

Аналогично можно рассмотреть влияние на диамагнитное тело полей более сложной конфигурации. В формуле (3.58) величина

$$I_1 = \int rY_{1\mu}dV = \int \mathbf{r}dV = \mathbf{r}_cV -$$

есть вектор центра масс однородного по плотности тела. Поэтому, если в качестве начала системы координат выбран центр масс, то влияние момента сил от однородной составляющей поля равно нулю.

Рассмотрим подвес диамагнитного эллипсоида в магнитном поле, образованном круговым током. Первый исчезающий член разложения потенциала на оси относительно точки, в которой центр подвеса совпадает с центром масс тела, имеет вид

$$\varphi_0 = a_2r^2P_2(\cos(\theta)) = a_2(z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)),$$

если сила тяжести действует вдоль оси подвеса, то тело сместиться и разложение потенциала на оси относительно центра подвеса будет иметь вид

$$\varphi_0 = a_2 \left[(z + z_0)^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] = 2a_2zz_0 + a_2(z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + a_2z_0^2)$$

здесь z_0 —сдвиг центра масс диамагнитного тела вдоль направления силы тяжести относительно центра подвеса.

Таким образом, в новой системе координат, связанной с центром масс ротора, появится однородная составляющая поля вдоль оси системы

$$H_z = 2a_2z_0 = a_1, \quad (3.60)$$

и, следовательно, появится сила

$$F_z = -\nabla(\mu_0\chi a_2^2 z_0^2) = -2\mu_0\chi a_2^2 z_0, \quad (3.61)$$

которая находится дифференцированием формулы (3.58) после подстановки в нее выражения (3.60).

В состоянии равновесия

$$2\mu_0\chi a_2^2 z_0 = mg,$$

откуда

$$z_0 = \frac{mg}{2\mu_0\chi a_2^2},$$

то есть смещение тела зависит от величины магнитного квадруполья.

Рассмотрим теперь угловые движения диамагнитного тела. Для этого введем следующие системы координат: $X_i (i = 1, 2, 3)$ - опорная, связанная с подвесом, Z_i - связанная с твердым телом. Вращение тела относительно неподвижной точки можно рассматривать как наложение двух движений: движение относительно кинетического момента и вместе с кинетическим моментом. Поэтому введем еще одну систему координат Y_i , которая связана с вектором кинетического момента тела \mathbf{K} . Ось Y_3 сонаправлена с вектором \mathbf{K} , оси системы направлены вдоль главных центральных осей эллипсоида инерции тела с моментами инерции соответственно A, B, C .

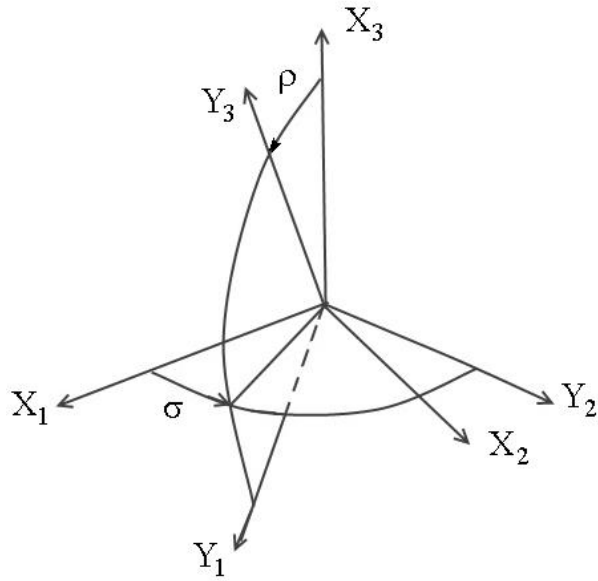


Рис. 3.6.

Переход от системы координат X_i к Y_i осуществляется путем двух последовательных поворотов на сферические углы ρ, σ , характеризующие положение вектора кинетического момента в системе X_i , а от Y_i к Z_i после трех последовательных поворотов на углы Эйлера α, β, γ .

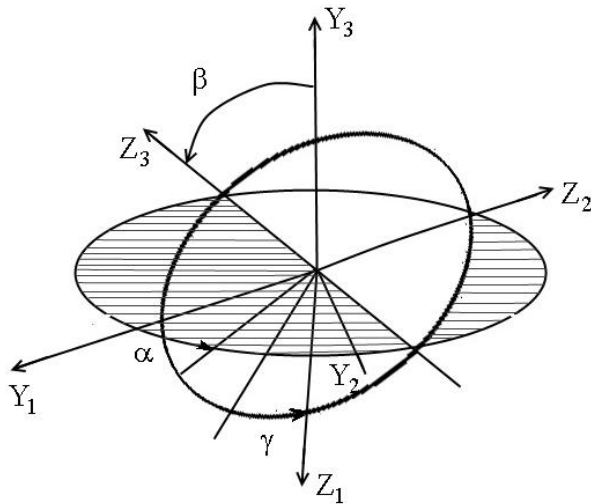


Рис. 3.7.

В качестве переменных, задающих движение тела относительно непо-

движной точки, выберем: величину $|\mathbf{K}|$ кинетического момента, углы $\rho, \sigma, \alpha, \beta, \gamma$

Моменты (3.57) и (3.59) малы в силу малости величины магнитной проницаемости и для анализа движения тела можно применить аппарат асимптотических методов теории колебаний [44], который позволяет переменные, описывающие движение, разделить на быстрые и медленные. Обычно основное значение для анализа возмущенного вращения тела имеет характер изменения медленных переменных, эволюция которых описывается системой дифференциальных уравнений, более простой по сравнению с исходной системой.

Различный вид эволюционных уравнений рассмотрен в [54]. Здесь мы используем уравнения вида:

$$K\dot{\rho} = -\frac{1}{\sin\rho} \frac{\partial\langle W\rangle}{\partial\sigma}, \quad K \sin\rho\dot{\sigma} = \frac{\partial\langle W\rangle}{\partial\rho}, \quad (3.62)$$

где $\langle W\rangle$ усредненная по быстрым переменным силовая функция (3.56).

Чтобы провести осреднение, преобразуем силовую функцию к фазовым переменным задачи. Так как I_{2s} - неприводимый тензор второго рода, то преобразование в опорную систему координат будет иметь вид

$$I_{2s} = \sum_{m,m',m''} D_{m,m'}^2(\sigma, \rho, 0) D_{m',m''}^2(\alpha, \beta, \gamma) I_{2m''},$$

тогда силовая функция преобразованная к фазовым переменным

$$W = \frac{\chi\mu_0}{4} \left[a_2 \int r^2 dV - \sqrt{\frac{7}{2}} \sum_{m,m',m''} \{a_2 \otimes a_2\}_{2m} D_{m,m'}^2(\sigma, \rho, 0) D_{m',m''}^2(\alpha, \beta, \gamma) I_{2m''} \right]. \quad (3.63)$$

Для осесимметричного поля ось X_3 опорной системы координат совпадает с осью поля, поэтому индекс $m = 0$. Следовательно, силовая функция не зависит от угла σ .

Осреднение силовой функции сводится к осреднению по свободному движению, которое представляет собой движение Эйлера - Пуансо. В работе [54] показано, что в нерезонансном случае, когда частоты свободного движения несоизмеримы, осреднение можно проводить двумя независимыми этапами: сначала по α , а затем по полодии.

Не нарушая общности, будем считать, что $A < B < C$. Осредняя по углу α получим, полагая в формуле (3.63) $m' = 0$

$$W = \frac{\chi\mu_0}{4} \left[a_2 \int r^2 dV - \sqrt{\frac{7}{2}} \{a_2 \otimes a_2\}_{20} P_2(\cos \rho) \sum_{m''=-2}^2 D_{0,m''}^2(0, \beta, \gamma) I_{2m''} \right], \quad (3.64)$$

так как

$$D_{0,m''}^2(0, \beta, \gamma) = Y_{2-m''}(\beta, \gamma),$$

то

$$\sum_{m''=-2}^2 D_{0,m''}^2(0, \beta, \gamma) I_{2m''} = (Y_2 \cdot I_2).$$

Осреднение по полодии сводится к вычислению интегралов вида [24]

$$\langle Y_{ln}(\beta, \gamma) \rangle = \frac{1}{4\mathbb{k}} \int_0^{\mathbb{k}} Y_{ln}(\tau) d\tau,$$

где \mathbb{k} - полный эллиптический интеграл первого рода.

Осредненная силовая функция с точностью до константы будет иметь вид

$$\langle W \rangle = \frac{\chi\mu_0}{4} \sqrt{\frac{7}{2}} \{a_2 \otimes a_2\}_{20} (\langle Y_2 \rangle \cdot I_2) P_2(\cos \rho) \quad (3.65)$$

Для получения эволюционных движений, необходимо осредненную силовую функцию (3.65) подставить в систему уравнений (3.62), которые дают следующую картину движения диамагнитного тела в осесимметричном подвесе. Вектор кинетического момента, не меняя углового

положения относительно оси поля

$$\rho = const,$$

прецессирует вокруг оси с постоянной угловой скоростью прецессии

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{K \sin \rho} \frac{\partial \langle W \rangle}{\partial \rho}$$

$$\omega = \frac{3 \cos \rho_0}{8 K_0} \chi \mu_0 \sqrt{\frac{7}{2}} \{a_2 \otimes a_2\}_{20} (\langle Y_2 \rangle \cdot I_2)$$

а вокруг вектора кинетического момента тело совершает свободные движения Эйлера - Пуансо.

Если тело обладает осью симметрии ($A = B \neq C$), то $\langle Y_{2m} \rangle = P_2(\cos \rho)$. Картина движения не меняется, меняется только скорость прецессии.

Заключение

Сформулируем основные результаты, полученные в диссертации:

На основе математического аппарата неприводимых тензоров приведено математическое описание и исследование взаимодействия твердого тела с силовым полем различной физической природы:

- Получена теорема сложения для тензорных решений уравнения Гельмгольца. Общие формулы преобразований для тензорных решений уравнения Гельмгольца позволяют в частном случае получить формулы преобразования для скалярных и векторных решений уравнения Гельмгольца.
- На основе теоремы сложения, записаны инвариантные разложения силовой функции взаимодействия объемных зарядовых и токовых распределений.
- Записаны инвариантные представления силы и момента силы попарного электромагнитного взаимодействия двух объемных зарядовых распределений.
- Записана силовая функция взаимодействия диамагнитного ротора с магнитным полем.
- Найдена сила, действующая со стороны подвеса на диамагнитный ротор, по форме близкий к сфере.
- Для однородного диамагнитного ротора, по форме близкого к сфере, в поле кругового тока найдена область устойчивости.

- Найдены первая и вторая гармоника силовой функции, характеризующие взаимодействие с однородным и градиентным силовым полем, позволившие рассмотреть угловые движения ротора.
- получен момент сил, действующий на ротор в магнитном поле, которое имеет однородную и градиентную составляющие.
- Выявлен характер движения вектора кинетического момента и движения относительно вектора кинетического момента.

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю Юрию Михайловичу Урману за поддержку настоящей работы, плодотворные дискуссии, способствовавшие ее выполнению.

Приложение

Неприводимый тензор ранга l - это всякая физическая величина, которая при вращении пространства преобразуется по неприводимому представлению D^l группы вращений. Из определения следует, что при повороте системы координат, определяемом углами Эйлера α, β, γ , компоненты неприводимого тензора преобразуются линейно. Коэффициенты этого преобразования являются матрицы D^l представления

$$\mathfrak{M}_{lq} = \sum_p \mathfrak{M}_{lq} D_{pq}^l(\alpha, \beta, \gamma), \mathfrak{M}_{lq} = \sum_q \mathfrak{M}_{lq} D_{pq}^{l*}(\alpha, \beta, \gamma)$$

Свойства неприводимых тензоров:

Операция сложения

$$\mathfrak{L}_j = \mathfrak{M}_j + \mathfrak{N}_j.$$

Операция неприводимого тензорного произведения \mathfrak{L} ранга j двух неприводимых тензоров $\mathfrak{M}_{j_1} \mathfrak{N}_{j_2}$

$$\mathfrak{L}_{jM} = \{\mathfrak{M}_{j_1} \otimes \mathfrak{N}_{j_2}\} = \sum_{M_1 M_2} C_{j_1 M_1 j_2 M_2}^{jM} \mathfrak{M}_{j_1 M_1} \mathfrak{N}_{j_2 M_2}.$$

Прямое произведение двух неприводимых тензоров \mathfrak{M}_{j_1} и \mathfrak{N}_{j_2} определяется как совокупность $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ величин $\mathfrak{M}_{j_1} \cdot \mathfrak{N}_{j_2}$.

$$\mathfrak{M}_{j_1 M_1} \cdot \mathfrak{N}_{j_2 M_2} = \sum_{JM} C_{j_1 M_1 j_2 M_2}^{JM} \mathfrak{L}_{JM}.$$

Для коммутирующих тензоров

$$\{\mathfrak{M}_{j_1} \otimes \mathfrak{N}_{j_2}\}_{jM} = (-1)^{j_1 + j_2 - j} \{\mathfrak{N}_{j_2} \otimes \mathfrak{M}_{j_1}\}_{jM}.$$

Тензорное произведение тензора \mathfrak{M}_{j_1} самого на себя равно нулю, если j нечетно. Это свойство обобщает векторное умножение вектора самого на себя $[\mathbf{a} \times \mathbf{a}] = 0$.

Тензор, принадлежащий к единичному представлению группы – скаляр.

Скалярное произведение двух неприводимых тензоров $j = 0$

$$\{\mathfrak{M}_j \otimes \mathfrak{N}_j\}_{00} = \frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}} \sum_{j,M} (-1)^M \mathfrak{M}_{jM} \mathfrak{N}_{j-M} = \frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}} \sum_M \mathfrak{M}_{jM} \mathfrak{N}_{jM}^*$$

$$(\mathfrak{M}_j \cdot \mathfrak{N}_j) = \sum_M \mathfrak{M}_{jM} \cdot \mathfrak{N}_{jM} = \sum_M \mathfrak{M}_{jM} \mathfrak{N}_{jM}^*$$

Скалярное произведение лишь множителем отличается от неприводимого произведения ранга 0, которое записывается в виде

$$\{\mathfrak{M}_j \otimes \mathfrak{N}_j\}_{00} = \frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}} (\mathfrak{M}_j \cdot \mathfrak{N}_j).$$

Примеры неприводимых тензоров.

1. Сферические функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ -неприводимые тензоры ранга l , так как при вращении системы координат они преобразуются как неприводимые тензоры.
2. Столбец матрицы D^l является неприводимым тензором. Это следует из свойств группового произведения двух вращений. При вращении системы координат матрицы неприводимых представлений $D^l_{m'n'}$ преобразуются по формуле

$$D^l_{m'n'}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum D^l_{mk}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) D^l_{k'n'}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2).$$

3. Произвольный вектор \mathbf{A} является неприводимым тензором первого ранга. Его циклические компоненты выражаются через сферические функции

$$A_{1\mu} = |A| Y_{1\mu}, (\mu = 0, 1, -1)$$

или

$$\mathbf{A}_{10} = |\mathbf{A}|e_3, \mathbf{A}_{1\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathbf{A}|(e_1 \pm ie_2)$$

4. Из двух векторов \mathbf{A} , \mathbf{B} можно построить три неприводимых произведения рангов 0, 1, 2:

- неприводимое тензорное произведение ранга 0. Оно отличается от скалярного произведения векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} численным множителем

$$\{A_1 \otimes B_1\}_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}),$$

- неприводимое тензорное произведение ранга 1 выражается через векторное произведение векторов \mathbf{A} и \mathbf{B}

$$\{A_1 \otimes B_1\}_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}],$$

- компоненты тензорного произведения ранга 2 связаны с циклическими компонентами векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} следующим образом

$$\{A_1 \otimes B_1\}_{2M} = \sum_{\mu\nu} C_{1\mu 1\nu}^{2M} A_\mu B_\nu.$$

5. Тензорное произведение двух сферических гармоник разных аргументов образует неприводимый тензор, который называется биполярной сферической гармоникой

$$\{Y_{l_1}(\mathbf{n}_1) \otimes Y_{l_2}(\mathbf{n}_2)\}_{LM} = \sum_{m_1 m_2} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{LM} Y_{l_1 m_1}(n_1) Y_{l_2 m_2}(n_2).$$

Литература

- [1] Bird, M. The 45t hybrid insert / M.D. Bird, S. Bole, et al // Physica. — 2001. — Vol. B. — P. 639–642.
- [2] Boyer, C. Symmetry and separation of variables for the hemholtz and laplace equations / C.P. Boyer, E.G. Kalnins, W. Miller // Nagoya Math.J. — 1976. — no. 60. — P. 35–80.
- [3] Braunbek, W. Freischwebende korper im elektrischen und magnetischen feld / W. Braunbek // Z.Phys. — 1939. — no. 112. — P. 753–763.
- [4] Chew, W. Vector addition theorem and its diagonalization / W.C. Chew // Commun. Comput. Phys. — 2007. — Vol. 3, no. 2. — P. 330–341.
- [5] Friedman, B. Addition theorems for spherical waves / B. Friedman, O. Russek // Quart. Appl. Math. — 1954. — no. 12. — P. 13–23.
- [6] Jones, M. A group–theoretical formulation of geophysical elastodynamics / M.N. Jones // Proceeding of the Royal Society of London. Series A, Matematical and Physical Sciences. — 1977. — Vol. 356, no. 1687. — P. 549–568.
- [7] Moon, F. C. Superconducting Levitation: Applications to Bearing and Magnetic Transportation / Francis C. Moon. — WILEY-VCH Verlag GmbH: Wiley-Interscience, 2004. — 310 p.
- [8] Rose, M. The electrostatic interaction of two arbitrary charge distribution / M.E. Rose // J. of Math. Phys. — 1957. — Vol. 37, no. 3. — P. 215–222.

- [9] Sato, A. Development of a high field superconducting magnet cooled by 2k cryocooler-magnet and cooling system adv / A. Sato, S. Nimori, et al // *Cryogenic Eng.* — 2004. — Vol. 49. — P. 731–741.
- [10] Schneider-Muntau, H. High magnetic fields: Science and technology / H.J. Schneider-Muntau, Y. Nakagawa // Singapore: World Scientific. — 2003. — Vol. 1. — P. 99.
- [11] Simon, M. Diamagnetic levitation; flying frogs and floating magnets / M.D. Simon, A.K. Geim // *J. Appl. Phys.* — 2000. — Vol. 87. — P. 493–499.
- [12] Watanabe, K. Cryocooled nb3sn superconducting magnet with a 52 mm room temperature bore / K. Watanabe, S. Awaji, et al // *Jpn. J. Appl. Phys.* — 1998. — Vol. 37. — P. 1148–1150.
- [13] Агре, М. Мультипольные разложения в магнитостатике / М.Я. Агре // *УФН.* — 2011. — № 2. — С. 173–186.
- [14] Багавантам, С. Теория групп и ее применение к физическим проблемам / С. Багавантам, Т. Венкатарайуду. — М.: КомКнига, 2006. — 296 с.
- [15] Белецкий, В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс / В. В Белецкий. — М.: Наука., 1965. — 416 с.
- [16] Белецкий, В. В. Очерки о движении космических тел / В. В Белецкий. — М.: ЛКИ., 2009. — 432 с.
- [17] Белецкий, В. В. Вращательное движение намагниченного спутника / В. В Белецкий, А. А Хентов. — М.: Наука., 1985. — 288 с.

- [18] Борн, М. Лекции по атомной механике / М. Борн. — М.: Едиториал УРСС, 2011. — 312 с.
- [19] Варшалович, Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, Ф. Н. Москалев, В. К. Херсонский. — Л.: Наука. Ленин. отд., 1975. — 439 с.
- [20] Вигнер, Е. Теория групп и ее применение в квантомеханической теории атомных спектров / Е. Вигнер. — Н.: ИО НФМИ, 2000. — 440 с.
- [21] Виленкин, Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н. Я. Виленкин. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 576 с.
- [22] Воробьев, А. И. Силы и возмущающие моменты, действующие на ротор криогенного гироскопа / А. И. Воробьев, Ю. М. Урман // Изв. АН СССР. МТТ. — 1984. — № 2. — С. 15–23.
- [23] Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применение / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
- [24] Денисов, Г. Г. Прецессионные движения твердого тела под действием моментов, имеющих силовую функцию / Г. Г. Денисов, Ю. М. Урман // Изв. АН СССР. МТТ. — 1975. — № 6. — С. 5–14.
- [25] Джексон, Д. Классическая электродинамика / Дж. Джексон. — М.: Мир, 1965. — 704 с.
- [26] Журавлев, Ю. Активные магнитные подшипники. Теория, расчет, применение / Ю.Н. Журавлев. — М.: Политехника, 2003. — 206 с.

- [27] Иванов, Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е. А. Иванов. — Минск: Наука и техника, 1968. — 583 с.
- [28] Кобрин, А. И. Преобразование сферических функций при трансляции системы координат / А. И. Кобрин, Д.Б. Белицкий // Труды МЭИ. — 1977. — Т. 331. — С. 52—55.
- [29] Кобрин, А. И. Об одном методе построения асимптотического решения задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе / А. И. Кобрин, Ю. Г. Мартыненко // Изв. АН СССР. МТТ. — 1971. — № 3. — С. 40—47.
- [30] Кобрин, А. И. Применение теории сингулярно возмущённых уравнений для исследования гироскопических систем / А. И. Кобрин, Ю. Г. Мартыненко // Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 230, № 1. — С. 52—55.
- [31] Козороз, В. В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел / В. В. Козороз. — Киев: Наук. думка, 1981. — 140 с.
- [32] Корн, Г. А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. А. Корн, Т.М. Корн. — М: Наука, 1974. — 177 с.
- [33] Кузнецов, С. И. Влияние периодических изменений формы сверхпроводящего тела на его динамику в неконтактном магнитном подвесе / С. И. Кузнецов, А. О. Мальханов, Ю. М. Урман // Журнал технической физики. — 2008. — Т. 78, № 12. — С. 1–7.
- [34] Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Электродинамика сплошных

сред. Т.8 / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 656 с.

- [35] Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Теория поля. Т.2 / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 536 с.
- [36] Лапин, Н. И. Об устойчивом состоянии равновесия диамагнитного тела в поле магнитного подвеса / Н. И. Лапин // Подготовка специалистов на технологических факультетах педагогических вузов: Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 25-летию технолого-экономического факультета НГПУ. — Н. Новгород, 2009. — С. 252–255.
- [37] Лапин, Н. И. Применение метода неприводимых тензоров для описания взаимодействия диамагнитного тела с магнитным полем / Н. И. Лапин // XVI нижегородская сессия молодых учёных. Математические науки: материалы докладов. — Н. Новгород, 2010. — С. 34–35.
- [38] Лапин, Н. И. Теоретическое исследование области устойчивости диамагнитных тел в магнитном поле / Н. И. Лапин // Сборник материалов Четвертой Всероссийской молодежной научно-инновационной школы Математика и математическое моделирование. — г. Саров, 2010. — С. 77–81.
- [39] Лапин, Н. И. О левитации произвольного по форме диамагнитного тела в магнитном поле / Н. И. Лапин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского серия Механика. — 2011. — № 1. — С. 133–138.

- [40] Лапин, Н. И. Представление энергии взаимодействия токовых витков / Н. И. Лапин // ВНКСФ-17, Материалы Всероссийской конференции студентов физиков. — Екатеринбург, 2011. — С. 58–60.
- [41] Линьков, Р. В. Силовое воздействие на проводящий шар, движущийся в магнитном поле / Р. В. Линьков, Ю. М. Урман // Журнал технической физики. — 1977. — Т. 47, № 4. — С. 716–723.
- [42] Мартыненко, Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях / Ю. Г. Мартыненко. — М.: Наука, 1988. — 368 с.
- [43] Меркин, Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. — М.: Наука, 1976. — 305 с.
- [44] Моисеев, Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н. Н. Моисеев. — М.: Наука, 1969. — 380 с.
- [45] Понтрягин, Л. С. Непрерывные группы / Л. С. Понтрягин. — М.: Едиториал УРСС, 2009. — 520 с.
- [46] Роуз, М. Поля мультиполей / М. Роуз. — М: Иностранная литература, 1957. — 132 с.
- [47] Сарычев, В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников. Исследование космического пространства. Итоги науки и техники / В. А. Сарычев. — М: Наука, 1978. — 222 с.
- [48] Смайт, В. Электростатика и электродинамика / В. Смайт. — М: Издательство иностранной литературы, 1954. — 604 с.
- [49] Стрэттон, Д. А. Теория электромагнетизма / Дж. А. Стрэттон. — М:

Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. — 540 с.

- [50] Урман, Ю. М. Теоремы сложения для тензорных сферических функций / Ю. М. Урман // Журнал технической физики. — 1981. — Т. 51, № 3. — С. 457–460.
- [51] Урман, Ю. М. Инвариантное разложение силовой функции взаимного притяжения системы тел / Ю. М. Урман // Астрономический журнал. — 1989. — Т. 66, № 5. — С. 1081–1092.
- [52] Урман, Ю. М. Применение метода неприводимых тензоров в задачах небесной механики / Ю. М. Урман // Астрономический журнал. — 1995. — Т. 72, № 4. — С. 596–603.
- [53] Урман, Ю. М. Применение метода неприводимых тензоров в задачах об эволюционных движениях твердого тела с неподвижной точкой / Ю. М. Урман // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — № 4. — С. 10–20.
- [54] Урман, Ю. М. Неприводимые тензоры и их применение в задачах динамики твердого тела / Ю. М. Урман // Механика твердого тела. — 2007. — Т. 1, № 6. — С. 52–68.
- [55] Урман, Ю. М. Теория симметрии в классических системах / Ю. М. Урман. — г. Н.Новгород: НГПУ, 2009. — 100 с.
- [56] Урман, Ю. М. О левитации диамагнитных тел в магнитном поле / Ю. М. Урман, Н. А. Бугрова, Н. И. Лапин // Журнал Технической Физики. — 2010. — № 9. — С. 25–33.
- [57] Урман, Ю. М. Применение неприводимых представлений группы

вращений к задаче о прецессионных движениях твердого тела с закрепленной точкой / Ю. М. Урман, Г. Г. Денисов // Динамика систем–Межвуз. сб. — 1974. — № 2. — С. 61–107.

- [58] Урман, Ю. М. Теоремы сложения тензорных решений уравнения Гельмгольца / Ю. М. Урман, Н. И. Лапин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского серия Механика. — 2011. — № 5(1). — С. 137–143.
- [59] Чеботарев, Н. Г. Введению в теорию алгебр / Н. Г. Чеботарев. — М.: ЛКИ, 2008. — 88 с.
- [60] Чеботарев, Н. Г. Теория групп Ли / Н. Г. Чеботарев. — М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2011. — 400 с.
- [61] Черноусько, Ф. Л. О движении спутника относительно центра масс / Ф. Л. Черноусько // ПММ. — 1963. — Т. 27, № 3. — С. 474–483.