Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Демичев Вадим Петрович

Предельные теоремы для нелинейных функций от слабо зависимых случайных полей

01.01.05 —теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2014

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей
механико-математического факультета
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Булинский Александр Вадимович.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Никитин Яков Юрьевич,
заведующий кафедрой теории вероятностей
и математической статистики математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета

кандидат физико-математических наук
Мусин Максим Маратович,
доцент кафедры дискретной математики факультета инноваций
и высоких технологий Московского физико-технического института

Ведущая организация:
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 14 марта 2014 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан ____ ______________________ _________г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин.

Актуальность темы

Положительно или отрицательно зависимые семейства случайных величин играют важную роль в рамках современной теории случайных процессов и полей. Такие формы зависимости исследовались в основопологающих работах Т. Харриса, Е. Лемана, Дж. Изери, Ф. Прошана, Д. Уолкапа, К. Фортуина, П. Кастелейна, Ж. Жинибра, К. Алама, К. Саксены и К. Йоаг-Дева. Интерес к подобным стохастическим системам обусловлен наличием у них широкого класса приложений к задачам математической статистики, теории надежности, теории перколяции и статистической физики. Ключевым понятием тут является ассоциированность рассматриваемых случайных величин, представляющая собой одно из обобщений независимости. Начиная с 80-х годов прошлого века ведется активная работа по установлению классических предельных теорем теории вероятностей для ассоциированных случайных полей, а также полей, обладающих родственными формами зависимости. Данной тематике посвящены труды Ч. Ньюмена, А. Райта, А. В. Булинского, А. П. Шашкина, Т. Биркела, Хао Ю, К.-М. Шао, С. Луиши, П. Оливейры, Ш. Сюкэ, Б. Мореля, М. А. Вронского, Н. Ю. Крыжановской, Л.-К. Жанга, Дж. Вена, Б. Пракаса Рао и других исследователей. Условия, обеспечивающие выполнение многих предельных теорем для упомянутых полей, формулируются достаточно просто и легко проверяются. Так, например, при рассмотрении стационарного поля обычно предполагается, что входящие в него случайные величины обладают абсолютным моментом определенного порядка, а ковариационная функция убывает достаточно быстро при росте аргументов.

В диссертации основное внимание уделяется изучению нелинейных функций, берущихся от семейств зависимых случайных величин. Примером таких функций могут служить индикаторы, возникающие при исследовании эмпирических распределений, непараметрических статистик, экскурсионных множеств. Доказательства ряда предельных теорем для таких стохастических объектов опираются на оценку ковариаций индикаторных функций от ассоциированных случайных величин, установленную в работе

И. Багай, Б. Пракаса Рао[1]. В диссертации получено уточнение упомянутой оценки и показано, что этот результат является в определенном смысле оптимальным.

В диссертации также исследуются (BL, θ)-зависимые случайные поля, которые часто возникают при рассмотрении нелинейных функций от элементов ассоциированных полей. Получена новая оценка моментов мультииндексированных сумм (BL, θ)-зависимых случайных величин, обобщающая теоремы К.-М. Шао, Хао Ю[2] и А. В. Булинского, А. П. Шашкина[3]. С ее помощью устанавливается новый вариант слабого принципа инвариантности для зависимых случайных величин. А именно, обобщаются результаты А. В. Булинского, М. С. Кина[4] и А. В. Булинского, А. П. Шашкина[5] (теорема 5.1.5 (д)).

Теория экскурсионных множеств и множеств уровня случайных полей является одной из динамично развивающихся областей стохастической геометрии. Отметим вклад в изучение подобных случайных объектов, который внесли Ю. К. Беляев, А. В. Иванов, Н. Н. Леоненко, А. П. Шашкин, Д. Н. Запорожец, И. А. Ибрагимов, Д. Мешенмозер, Р. Адлер, Д. Тейлор, Ж.-М. Азаис, М. Вшебор. В диссертации получены несколько предельных теорем для объемов экскурсионных множеств стационарных случайных полей с непрерывной ковариационной функцией. В частности, установлен функциональный вариант центральной предельной теоремы из работы А. В. Булинского, Е. Сподарева и Ф. Тиммерманна[6].

Кроме того, в диссертации изучаются асимптотические свойства ряда функций от случайных мер. Получено обобщение центральной предельной теоремы С. Эванса[7] для интегралов по случайным мерам и

---

[1] Bagai I., Prakasa Rao B. L. S., Estimation of the survival function for stationary associated processes // *Statistics and Probability Letters*, 1991, 12, **5**, 385-391.

[2] Shao Q.-M., Yu H., Weak convergence for weighted empirical processes of dependent sequences // *Annals of Probability*, 1996, 24, **4**, 2098-2127.

[3] Bulinski A., Shashkin A., Strong invariance principle for dependent random fields // *IMS Lecture Notes — Monograph Series Dynamics and Stochastics*, 2006, 48, 128-143.

[4] Bulinski A. V., Keane M. S., Invariance principle for associated random fields // *Journal of Mathematical Sciences*, 1996, 81, **5**, 2905-2911.

[5] Булинский А. В., Шашкин А. П., *Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем.* Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

[6] Bulinski A. V., Spodarev E., Timmermann F., Central limit theorems for the excursion sets volumes of weakly dependent random fields // *Bernoulli*, 2012, 18, **1**, 100-118.

[7] Evans S. N., Association and random measures // *Probability Theory and Related Fields*, 1990, 86, **1**, 1-19.

доказан ее функциональный вариант. В качестве примера применения этого результата установлено обобщение теоремы Ю. Ю. Бахтина[8] для преобразованных решений уравнения Бюргерса со случайными начальными данными. Предельные свойства таких решений интенсивно изучаются начиная с 90-х годов прошлого века. Им посвящены работы М. Розенблатта, А. В. Булинского, С. А. Молчанова, Д. Сургайлиса, В. Войчинского, Я. Г. Синая, Н. Н. Леоненко, Э. Орзингера, Т. Фунаки, М. Руиз-Медины, О. Барндорфф-Нильсена и других исследователей. В диссертации также доказана функциональная предельная теорема в пространстве гладких функций для решений уравнения Бюргерса, соответствующих начальным потенциалам, задаваемым определенными полями дробового шума.

Отметим, что в диссертации уделяется внимание и исследованию макс-обобщенных процессов Кокса, играющих важную роль при анализе неоднородных потоков экстремальных событий, см., напр., монографию В. Ю. Королева и И. А. Соколова[9].

Цель работы

Цель данной диссертации состоит в решении следующих взаимосвязанных задач: получить оптимальную ковариационную оценку для индикаторных функций от положительно или отрицательно ассоциированных случайных величин; обобщить слабый принцип инвариантности Булинского-Кина; доказать функциональный вариант предельной теоремы Булинского-Сподарева-Тиммерманна для объемов экскурсионных множеств; обобщить предельную теорему Эванса для интегралов по случайным мерам; изучить асимптотические свойства решений уравнения Бюргерса, соответствующих начальным потенциалам, задаваемым определенными полями дробового шума; исследовать предельные свойства макс-обобщенных процессов Кокса, порожденных зависимыми случайными величинами.

---

[8] Бахтин Ю. Ю., Функциональная центральная предельная теорема для преобразованных решений многомерного уравнения Бюргерса со случайными начальными данными // *Теория вероятностей и ее применения*, 2001, 46, **3**, 427-448.

[9] Королев В. Ю., Соколов И. А., *Математические модели неоднородных потоков экстремальных событий.* Москва: ТОРУС-ПРЕСС, 2008.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Перечислим основные из них:

1. Установлена оптимальная ковариационная оценка для индикаторных функций от положительно или отрицательно ассоциированных случайных полей. Кроме того, найдена новая моментная оценка для сумм зависимых случайных величин, обобщающая неравенства К.-М. Шао, Хао Ю и А. В. Булинского, А. П. Шашкина.

2. Доказаны новые варианты функциональных предельных теорем, в частности, для объемов экскурсионных множеств ассоциированных и квази-ассоциированных стационарных случайных полей, заданных на последовательности многомерных блоков.

3. Получена центральная предельная теорема для интегралов по случайным мерам, обобщающая результат С. Эванса. Установлена ее функциональная версия.

4. Доказана функциональная предельная теорема в пространстве гладких функций для решений уравнения Бюргерса, соответствующих начальным потенциалам, задаваемым определенными полями дробового шума.

5. Получена предельная теорема для макс-обобщенных процессов Кокса, порожденных зависимыми случайными величинами, обобщающая результат статьи В. Ю. Королева и И. А. Соколова.

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и получены автором самостоятельно.

Методы исследования

В диссертации использовалась разнообразная техника. Помимо вероятностных методов изучения распределений случайных функций автором применяется аппарат теории функции и функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Доказанные в ней новые предельные теоремы для систем слабо зависимых случайных величин будут полезны при изучении асимптотического поведения широкого класса стохастических моделей. Результаты диссертации могут быть использованы специалистами МГУ им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургского государственного университета, Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, а также других ведущих научных центров.

Апробация работы

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова:

— Большом семинаре кафедры теории вероятностей под рук. академика РАН А. Н. Ширяева (2013),

— семинаре «Асимптотический анализ случайных процессов и полей» под рук. профессора А. В. Булинского и доцента А. П. Шашкина (2011-2013),

а также

— Санкт-Петербургском городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике под рук. академика РАН И. А. Ибрагимова (2013),

— семинаре «Forschungsseminar Stochastische Geometrie und raumliche Statistik» университета г. Ульм под рук. профессора Е. Сподарева и профессора Ф. Шмидта (2011).

Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях: «Ломоносов-2011» (Москва, 2011), «XXIX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models» (Светлогорск, 2011), «Ломоносов-2012» (Москва, 2012), «Ломоносов-2013» (Москва, 2013), «XXXI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models» (Москва, 2013), «29-th European Meeting of Statisticians» (Будапешт, Венгрия, 2013).

Работа автора поддержана грантом РФФИ 10-01-00397-а.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 9 работах автора, из которых три — в журналах из перечня ВАК. Список работ приведен в конце автореферата [1-9]. Все работы написаны без соавторов.

Структура диссертации

Диссертация изложена на 105 страницах и состоит из титульного листа, оглавления, введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 102 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается обзор исследований, относящихся к анализу асимптотических свойств слабо зависимых случайных полей, приводится краткое описание результатов диссертации, а также их сопоставление с предшествующими.

В первой главе изучаются ковариационные и моментные оценки для определенных классов слабо зависимых случайных полей, а также даются приложения этих оценок к выводу предельных теорем для таких полей.

Чтобы сформулировать основные результаты главы, нам потребуется несколько определений.

Определение 1.1.1[10]. Семейство случайных величин $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$ называется *ассоциированным* (пишут $\xi \in \mathsf{A}$), если для любых конечных множеств $I = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$, $J = \{s_1, \ldots, s_m\} \subset T$ и ограниченных покоординатно неубывающих функций $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$cov(F(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}), G(\xi_{s_1}, \ldots, \xi_{s_m})) \geqslant 0. \tag{1}$$

Определение 1.1.2[11]. Семейство $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$ *слабо ассоциировано* или *положительно ассоциировано* (пишут $\xi \in \mathsf{PA}$), если соотношение (1) справедливо для любых конечных множеств $I = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$, $J = \{s_1, \ldots, s_m\} \subset T$ таких, что $I \cap J = \varnothing$, и ограниченных покоординатно неубывающих функций $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

---

[10]Esary J. D., Proschan F., Walkup D. W., Association of random variables, with applications // *Annals of Mathematical Statistics*, 1967, 38, **5**, 1466-1474.

[11]Newman C. M., Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables // *Tong I. L. (Ed.), Inequalities in Statistics and probability*, Hayward, 1984, 127-140.

Определение 1.1.3[12]. Семейство $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$ *отрицательно ассоциировано* (пишут $\xi \in \mathsf{NA}$), если левая часть (1) неположительна, когда I, J и F, G удовлетворяют условиям из определения 1.1.2.

Будем также говорить, что случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, обладает одним из перечисленных выше типов зависимости, если этим свойством обладает множество случайных величин, составленное из его компонент.

Ассоциированность семейства случайных величин влечет положительную ассоциированность. В то же время обратное утверждение неверно даже для двухэлементных семейств. Кроме того, система независимых случайных величин является одновременно ассоциированной и отрицательно ассоциированной. Известно, что любое гауссовское случайное поле с неотрицательной ковариационной функцией является ассоциированным, а гауссовский вектор, различные компоненты которого неположительно коррелированы, отрицательно ассоциирован.

Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, — некоторая липшицева функция. Для $i = 1, \ldots, n$ положим

$$Lip_i(F) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{\Delta x_i \neq 0} \frac{1}{|\Delta x_i|} |F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - F(x)|$$

и введем $Lip(F) = \max_{i=1,\ldots,n} Lip_i(F)$. Легко видеть, что $Lip(F)$ является липшицевой константой функции F по отношению к l_1 норме в пространстве $\mathbb{R}^n$.

А. В. Булинский и Э. Шабанович[13] показали, что если семейство случайных величин $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$ квадратично интегрируемо ($\xi \in \mathsf{L}_2$) и является положительно или отрицательно ассоциированным, то для произвольных непересекающихся конечных множеств $I = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$, $J = \{s_1, \ldots, s_m\} \subset T$ и ограниченных липшицевых функций $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ верна оценка

[12] Joag-Dev K., Proschan F., Negative association of random variables, with applications // *Annals of Statistics*, 1983, 11, **1**, 286-295.

[13] Булинский А. В., Шабанович Э., Асимптотическое поведение некоторых функционалов от положительно и отрицательно зависимых случайных полей // *Фундаментальная и прикладная математика*, 1998, 4, **2**, 479-492.

$$\begin{aligned}
&|cov(F(\xi_{t_1},\dots,\xi_{t_n}),G(\xi_{s_1},\dots,\xi_{s_m}))| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Lip_i(F)Lip_j(G)|cov(\xi_{t_i},\xi_{s_j})| \\
&\leqslant Lip(F)Lip(G)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|cov(\xi_{t_i},\xi_{s_j})|. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Определение 1.1.4[14]. Случайное поле $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$, где $\xi \in \mathsf{L}_2$, называется *квази-ассоциированным* (пишут $\xi \in \mathsf{QA}$), если справедливо соотношение (2).

В силу (2) положительная или отрицательная ассоциированность квадратично интегрируемого поля влечет его квази-ассоциированность. Кроме того, согласно С. Луиши и А. П. Шашкину[15] (последним автором рассматривались векторнозначные поля) любое гауссовское случайное поле автоматически квази-ассоциировано.

С понятием квази-ассоциированности тесно связано понятие (BL,θ)-зависимости.

Определение 1.1.5[16]. Случайное поле $\xi = \{\xi_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ называется (BL,θ)*-зависимым*, если найдется такая монотонно убывающая к нулю функция $\theta(r)$, $r \in \mathbb{N}$, что для произвольных непересекающихся конечных множеств $I = \{t_1,\dots,t_n\} \subset \mathbb{Z}^d$, $J = \{s_1,\dots,s_m\} \subset \mathbb{Z}^d$ и ограниченных липшицевых функций $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$|cov(F(\xi_{t_1},\dots,\xi_{t_n}),G(\xi_{s_1},\dots,\xi_{s_m}))| \leqslant Lip(F)Lip(G)(|I| \wedge |J|)\theta_{dist(I,J)},$$

где $dist(I,J) = \inf_{x\in I, y\in J}\|x-y\|_\infty$, а $|I|$ обозначает число элементов конечного множества I.

В случае, когда поле ξ является (BL,θ)-зависимым с некоторой функцией θ, мы часто будем писать θ_ξ вместо θ.

[14] Булинский А. В., Статистический вариант центральной предельной теоремы для векторных случайных полей // *Математические заметки*, 2004, 76, **4**, 490-501.

[15] Шашкин А. П., Квазиассоциированность гауссовской системы случайных векторов // *Успехи математических наук*, 2002, 57, **6**, 199-200.

[16] Bulinski A. V., Suquet C., Normal approximation for quasi-associated random fields // *Statistics and Probability Letters*, 2001, 54, **2**, 215-226.

Рассмотрим случайное поле $\xi = \{\xi_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$. Формулой

$$u_\xi(r) = \sup_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d : \|k\|_\infty \geqslant r} |cov(\xi_n, \xi_k)|, \quad r \in \mathbb{Z}_+,$$

задается так называемый *коэффициент Кокса-Гримметта.* Если $u_\xi(0) < \infty$, то говорят, что ξ удовлетворяет *условию конечной восприимчивости.* Легко видеть, что если для квази-ассоциированного случайного поля $\xi = \{\xi_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ выполнено условие конечной восприимчивости, то ξ является (BL, θ)-зависимым в силу (2) с $\theta_\xi(r) = u_\xi(r)$, $r \in \mathbb{N}$. Отметим также, что любое (BL, θ)-зависимое случайное поле $\xi = \{\xi_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$, для которого

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathsf{E}(\xi_k - \mathsf{E}\xi_k)^2 < \infty,$$

удовлетворяет условию конечной восприимчивости.

Введем функцию f, которая строго монотонно и непрерывно отображает отрезок $[0, 1]$ на себя, формулой:

$$f(0) = 0, \quad f(x) = \frac{x^2}{\log \frac{e}{x}},\ x \in (0, 1].$$

Следующая теорема уточняет ковариационную оценку И. Багай и Б. Пракаса Рао[1].

Теорема 1.2.1. *Если квадратично интегрируемый случайный вектор (X, Y) положительно или отрицательно ассоциирован, и у его компонент существуют ограниченные плотности p_X, p_Y, то имеет место неравенство*

$$\sup_{x,y \in \mathbb{R}} |cov(\mathbb{I}\{X > x\}, \mathbb{I}\{Y > y\})| \leqslant C f^{inv}(\|p_X\|_\infty \|p_Y\|_\infty |cov(X, Y)| \wedge 1),$$

где f^{inv} — обратная функция к f, а C — положительная константа.

Оптимальность этой оценки демонстрирует

Теорема 1.2.2. *Для любого $r \in (0, 1]$ найдется случайный вектор $(X, Y) \in \mathsf{PA} \cap \mathsf{L}_2$ такой, что $cov(X, Y) \in (0, r]$, $\|p_X\|_\infty = \|p_Y\|_\infty = 1$, и*

$$\sup_{x,y \in \mathbb{R}} cov(\mathbb{I}\{X > x\}, \mathbb{I}\{Y > x\}) \geqslant c f^{inv}(cov(X, Y)),$$

где c — положительная константа.

Следствие 1.2.3. *Для любого δ из интервала $(0, 1/2)$ найдется такое $C = C(\delta) > 0$, что*

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} |cov(\mathbb{I}\{X > x\}, \mathbb{I}\{Y > y\})| \leqslant C\left(\|p_X\|_\infty \|p_Y\|_\infty |cov(X,Y)|\right)^\delta, \quad (3)$$

если $(X,Y) \in \mathsf{PA} \cap \mathsf{L}_2$ или $(X,Y) \in \mathsf{NA} \cap \mathsf{L}_2$, а соответствующие плотности p_X и p_Y существуют и ограничены. В то же время оценку вида (3) *нельзя получить при $\delta = 1/2$.*

В статье И. Багай и Б. Пракаса Рао[1] оценка (3) была установлена при $\delta = 1/3$ для ассоциированных случайных величин X и Y. В дальнейшем это неравенство использовалось при доказательстве предельных результатов для эмпирических функций распределения[1,17,18,19], некоторых других статистик[20,21,22,23], объемов экскурсионных множеств случайных полей[6]. Отметим, что следствие 1.2.3 позволило нам обобщить центральную предельную теорему Хао Ю[17] для эмпирических функций распределения.

Введем семейство блоков в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, положив

$$\mathcal{B}_d = \{(a_1, b_1] \times ... \times (a_d, b_d],\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i,\ i = 1, \ldots, d\}.$$

Пусть $\mathcal{U}_d \subset \mathcal{B}_d$ — подмножество блоков, вершины которых имеют целочисленные координаты. В диссертации установлена

Теорема 1.4.1. *Пусть $X = \{X_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ — некоторое центрированное (BL,θ)-зависимое случайное поле с $\theta_X(r) \leqslant Cr^{-\lambda}$, $r \in \mathbb{N}$, где $C, \lambda > 0$. Предположим, что найдется $2 < s \leqslant \infty$, для которого справедливо соотношение*

$$M_s = \sup_{k\in\mathbb{Z}^d} \|X_k\|_s < \infty. \quad (4)$$

[17] Yu H., A Glivenko-Cantelli lemma and weak convergence for empirical processes of associated sequences // *Probability Theory and Related Fields*, 1993, 95, **3**, 357-370.

[18] Oliveira P. E., Suquet Ch., Weak convergence in $L^p(0,1)$ of the uniform empirical process under dependence // *Statistics and Probability Letters*, 1998, 39, 363-370.

[19] Kim T.-S., Ko M.-H., Yoo Y.-S., Estimation of the distribution function for stationary random fields of associated processes // *Communications of the Korean Mathematical Society*, 2004, 19, **1**, 169-177.

[20] Roussas G. G., Asymptotic normality of a smooth estimate of a random field distribution function under association // *Statistics and Probability Letters*, 1995, 24, **1**, 77-90.

[21] Dewan I., Prakasa Rao B. L. S., Wilcoxon-signed rank test for associated sequences // *Statistics and Probability Letters*, 2005, 71, **2**, 131-142.

[22] Dewan I., Prakasa Rao B. L. S., Mann-Whitney test for associated sequences // *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 2006, 55, 111-119.

[23] Guessoum Z., Said E. O., Sadki O., Tatachak A., A note on the Lynden-Bell estimator under association // *Statistics and Probability Letters*, 2012, 82, **11**, 1994-2000.

Тогда для любого блока $U \in \mathcal{U}_d$, и всех $p \in (2,s)$ и $\nu > 0$ выполнено неравенство

$$\mathsf{E}\left|\sum_{k\in U} X_k\right|^p$$

$$\leqslant K\left(|U|^{1+\nu}\max_{k\in U}\mathsf{E}|X_k|^p + |U|^{\gamma}C^{(s-p)/(s-2)}M_s^{s(p-2)/(s-2)} + |U|^{p/2}Q^{p/2}(X)\right).$$

Здесь $K = K(d,s,p,\nu,\lambda) > 0$,

$$\gamma = \max\{(s(p-1)-p-\lambda(s-p)/d)/(s-2), 1+\nu\},$$

$$Q(X) = \sup_{U\in\mathcal{U}_d}\frac{1}{|U|}\mathsf{E}\left(\sum_{k\in U} X_k\right)^2.$$

Подобные моментные оценки играют ключевую роль при доказательстве принципов инвариантности для случайных полей. Данный результат обобщает неравенство из статьи К.-М. Шао и Хао Ю[2], а также оценку из работы А. В. Булинского и А. П. Шашкина[3].

Пусть $X = \{X_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ — стационарное в широком смысле центрированное случайное поле. Для $n \in \mathbb{N}^d$ положим

$$W_n(t) = \langle n\rangle^{-1/2}\sum_{k\in(0,n\star t]\cap\mathbb{Z}^d} X_k, \quad t\in[0,1]^d.$$

Здесь $x * y = (x_1y_1,\ldots,x_dy_d)$, $x = (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, $y = (y_1,\ldots,y_d) \in \mathbb{R}^d$. Будем говорить, что поле X удовлетворяет слабому принципу инвариантности (функциональной центральной предельной теореме), если имеет место сходимость по распределению в пространстве Скорохода $D([0,1]^d)$

$$W_n \xrightarrow{d} \sigma W, \quad n\to\infty,$$

где W есть d-параметрическое броуновское движение (случайное поле Винера-Ченцова или броуновский лист), а σ — некоторое неотрицательное число. Здесь и далее сходимость при $n \to \infty$, где $n \in \mathbb{N}^d$, понимается в секвенциальном смысле: для любой последовательности $n^{(k)} = (n_1^{(k)},\ldots,n_d^{(k)}) \in \mathbb{N}^d$ с $n_l^{(k)} \to \infty$, $k \to \infty$, $l = 1,\ldots,d$, сходимость имеет место, и предел не зависит от выбора такой последовательности.

С помощью теоремы 1.4.1 в диссертации установлена

Теорема 1.5.1. *Предположим, что описанное выше случайное поле X является (BL,θ)-зависимым, и $\theta(X)_r = O(r^{-\lambda})$, $r \to \infty$, где $\lambda > 0$. Пусть также справедливо соотношение (4). Тогда X удовлетворяет слабому принципу инвариантности, причем*

$$\sigma^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} cov(X_0, X_k).$$

В работе А. В. Булинского и М. С. Кина[4] принцип инвариантности доказывается при более жестких условиях на поле X. А именно, вместо (BL,θ)-зависимости требуется ассоциированность, и, соответственно, вместо $\theta_X(r) = O(r^{-\lambda})$ используется соотношение $u_X(r) = O(r^{-\lambda})$. Теорема 1.5.1 обобщает также пункт (д) теоремы 5.1.5 из монографии А. В. Булинского и А. П. Шашкина[5], в котором тоже фигурируют (BL,θ)-зависимые случайные поля, однако при этом вводятся дополнительные ограничения на λ.

Во второй главе рассматриваются приложения полученных в первой главе ковариационных и моментных оценок к доказательству предельных теорем для объемов экскурсионных множеств случайных полей.

Пусть $\xi = \{\xi_t, t \in \mathbb{R}^d\}$ — измеримое строго стационарное квадратично интегрируемое случайное поле. Предположим, что ξ_0 имеет ограниченную плотность. Будем также считать, что ковариационная функция поля ξ, задаваемая соотношением $R(t) = cov(\xi_0, \xi_t)$, $t \in \mathbb{R}^d$, непрерывна и допускает оценку

$$R(t) = O(|t|^{-\alpha}),\ |t| \to \infty, \tag{5}$$

для некоторого $\alpha > 0$.

Возьмем произвольное $u \in \mathbb{R}$. Для любого ограниченного измеримого $V \subset \mathbb{R}^d$ определим экскурсионное множество

$$A(V,u) = A_\xi(V,u) = \{t \in V :\ \xi_t > u\}.$$

Введем семейство полей

$$S_n(t) = \langle n \rangle^{-1/2} \left(|A((0, n*t], u)| - \mathsf{E}|A((0, n*t], u)|\right), \quad t \in [0,1]^d, \quad n \in \mathbb{N}^d.$$

В диссертации получены следующие варианты функциональной центральной предельной теоремы для объемов экскурсионных множеств.

Теорема 2.2.1. *Если $\xi \in \mathsf{A}$, и (5) справедливо при $\alpha > 2d$, то случайные поля S_n сходятся по распределению в пространстве $C([0,1]^d)$ при $n \to \infty$ к центрированному гауссовскому полю $\sigma(u)W$, где*

$$\sigma^2(u) = \int_{\mathbb{R}^d} cov(\mathbb{I}\{\xi_0 > u\}, \mathbb{I}\{\xi_t > u\})dt,$$

а W есть d-параметрическое броуновское движение.

Теорема 2.3.1. *Если $\xi \in \mathsf{QA}$, и (5) справедливо при $\alpha > 3d$, то случайные поля S_n сходятся по распределению в пространстве $C([0,1]^d)$ к $\sigma(u)W$ при $n \to \infty$.*

Отметим, что теорема 2.3.1 является функциональной версией центральной предельной теоремы, доказанной в статье А. В. Булинского, Е. Сподарева и Ф. Тиммерманна[6].

Третья глава посвящена доказательству ряда предельных теорем для функций от случайных мер.

Рассмотрим $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ — семейство ограниченных борелевских подмножеств $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Пусть $M(\omega, B)$ — стационарная *случайная мера* на $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, т.е. для почти всех $\omega \in \Omega$ функция $M(\omega, \cdot)$ является локально конечной мерой на σ-алгебре борелевских подмножеств $\mathbb{R}^d$, а $M(\cdot, B)$ — случайная величина для каждого $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$. Стационарность случайной меры означает, что для любых $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ и для произвольного t из $\mathbb{R}^d$ распределения случайных векторов $(M(B_1), \ldots, M(B_k))$ и $(M(B_1 \oplus t), \ldots, M(B_k \oplus t))$ совпадают. Здесь $\oplus$ обозначает сложение по Минковскому.

Введем

$$B_q(k) = (k \oplus (0,1]^d)/q, \quad q \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Нас будет интересовать ситуация, когда мера M квадратично интегрируема, т.е. $\mathsf{E}M^2(B) < \infty$ при любом $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$. Для таких случайных мер положим

$$\sigma_M^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} cov(M(B_1(0)), M(B_1(k))),$$

если этот ряд сходится абсолютно. Рассмотрим следующие два условия:

(C1) найдется число $\Gamma_M \in \mathbb{R}_+$ такое, что для всех $q \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |cov(M(B_q(0)), M(B_q(k)))| \leqslant \Gamma_M q^{-d};$$

(C2) случайное поле $\{M(B_1(k))\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ является (BL,θ)-зависимым.

Отметим, что если для любых ограниченных борелевских множеств B_1 и B_2 справедливо неравенство

$$cov(M(B_1), M(B_2)) \geqslant 0, \tag{6}$$

то (C1) вытекает из конечности σ_M^2. Если мера M ассоциирована (т.е. соответствующее семейство случайных величин, индексированное множествами из $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, является ассоциированным), то (6) автоматически выполнено.

Для $T > 0$ и произвольной борелевской функции f определим

$$M_T[f] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x/T)M(dx),$$

если интеграл существует почти наверное. Положим

$$Z_T[f] = T^{-d/2}\left(M_T[f] - \mathsf{E}M_T[f]\right).$$

Теорема 3.1.1. *Пусть выполнены условия* (C1) *и* (C2). *Тогда для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_\infty(\mathbb{R}^d)$ имеет место сходимость по распределению:*

$$Z_T[f] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_M^2\|f\|_2^2), \quad T \to \infty.$$

Данный результат является обобщением центральной предельной теоремы С. Эванса[7] для интегралов по ассоциированным случайным мерам. В диссертации показано, что теорема 3.1.1 позволяет устанавливать варианты центральной предельной теоремы для интегралов по случайным мерам, порожденным квази-ассоциированными полями. Кроме того, в диссертации получена функциональная версия теоремы 3.1.1, с помощью которой удалось обобщить предельную теорему Ю. Ю. Бахтина[8] для параболически преобразованных решений уравнения Бюргерса со случайными начальными данными.

В третьей главе также изучаются решения уравнения Бюргерса, соответствующие начальным потенциалам, задаваемым определенными полями дробового шума. Для таких решений доказывается функциональная предельная теорема в пространстве гладких функций.

Рассмотрим процесс Кокса $Z = \{Z(t),\ t \geqslant 0\}$ и некоторую последовательность случайных величин $X = \{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, не зависящую от Z. В недавней работе В. Ю. Королева и И. А. Соколова[24] исследуется предельное поведение макс-обобщенного процесса Кокса $\{\max_{k=1,\dots,Z(t)} X_k,\ t \geqslant 0\}$ в случае, когда X состоит из независимых одинаково распределенных величин. Этот процесс имеет ряд приложений в теории риска[9]. В диссертации рассмотрена более общая модель, когда случайные величины X_n, $n \in \mathbb{N}$, вообще говоря, зависимы, и распределение X_n может зависеть от n. Оказывается, что если для их максимумов $M_n = \max_{k=1,\dots,n} X_k$ справедлива определенная предельная теорема при $n \to \infty$, то можно без каких-либо дополнительных ограничений на распределение X получить предельный результат для соответствующих макс-обобщенных процессов Кокса.

Благодарности. Автор очень признателен профессору А. В. Булинскому за постановку задач, постоянное внимание и неоценимую помощь в работе. Автор также благодарен доценту А. П. Шашкину за полезные замечания.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Демичев В. П., Предельные теоремы для экстремальных потоков событий // *Математические заметки*, 2009, 86, **2**, 184-189.

[2] Демичев В. П., Функциональная центральная предельная теорема для объемов экскурсионных множеств квази-ассоциированных случайных полей // *Записки научных семинаров ПОМИ*, 2013, 412, 109-120.

[3] Демичев В. П., Функциональная предельная теорема для решений уравнения Бюргерса со случайными начальными данными // *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика*, 2013, 2, 42-46.

[4] Демичев В. П., Центральная предельная теорема для интегралов по стационарным случайным мерам // *XVIII Международная научная*

[24] Королев В. Ю., Соколов И. А., Некоторые вопросы анализа катастрофических рисков, связанных с неоднородными потоками экстремальных событий // *Системы и средства информатики, Специальный выпуск: “Математические модели и методы информатики, стохастические технологии и системы”*, Москва: ИПИ РАН, 2005, 108-124.

конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов", секция "Математика и механика", Тезисы докладов, Москва: МАКС Пресс, 2011, 1.

[5] Demichev V. P., CLT for associated systems // *XXIX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models and V International Workshop "Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics related to modeling of information systems"*, Book of Abstracts, Moscow: Institute of Informatics Problems, RAS, 2011, 15-16.

[6] Демичев В. П., Функциональная центральная предельная теорема для интегралов по случайным мерам // *XIX Международная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов", секция "Математика и механика"*, Тезисы докладов, Москва: МАКС Пресс, 2012, 1.

[7] Демичев В. П., Принцип инвариантности для слабо зависимых случайных полей // *XX Международная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов", секция "Математика и механика"*, Тезисы докладов, Москва: МАКС Пресс, 2013, 1.

[8] Demichev V. P., A moment inequality for a certain class of weakly dependent random fields // *XXXI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models and VII International Workshop "Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics Related to Modeling of Information Systems" and International Workshop "Applied Probability Theory and Theoretical Informatics"*, Moscow: Institute of Informatics Problems, RAS, 2013, 18.

[9] Demichev V. P., Covariance estimate for indicator functions of associated random variables and applications // *Abstracts of the 29-th European Meeting of Statisticians*, Budapest, 2013, 86.