МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

УДК 519.21

Демичев Вадим Петрович

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ ОТ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор А. В. Булинский

Москва 2013

Оглавление

Введение

Исследование разнообразных функций от случайных полей играет важную роль в современной теории вероятностей. При этом многие теоретические проблемы и прикладные задачи требуют рассмотрения нелинейных функций, что часто сопряжено со значительными трудностями. Примером таких функций могут служить индикаторы, возникающие при изучении эмпирических распределений, разнообразных непараметрических статистик, а также экскурсионных множеств. Настоящая диссертационная работа посвящена разработке техники получения предельных закономерностей для нелинейных функций от слабо зависимых случайных полей. Установленные результаты применяются к обобщению ряда известных теорем теории вероятностей и случайных процессов.

Диссертация состоит из титульного листа, оглавления, введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 102 наименования. Во введении дается краткий обзор содержания диссертации и проводится сопоставление полученных результатов с предшествующими. При этом точные формулировки доказанных утверждений отнесены в основную часть работы, а во введении указываются номера соответствующих результатов и формул.

Начиная с 80-х годов прошлого века активно исследуются случайные поля, обладающие свойством ассоциированности или каким-либо родственным типом зависимости. Интерес к ним обусловлен с одной стороны простотой проверки этого свойства для широкого класса случайных объектов, а с другой — наличием развитой техники получения предельных теорем для таких полей. В этой связи укажем на монографию А. В. Булинского и А. П. Шашкина [10]. Ассоциированность позволяет устанавливать множество предельных закономерностей при наложении ограничений исключительно на моменты рассматриваемого поля и на его ковариационную функцию. Так, например, согласно теореме Ньюмена [82] строго стационарное ассоциированное случайное поле $\xi = \{\xi_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\} \in \mathsf{L}_2$ удовлетворяет центральной предельной теореме (ЦПТ), если выполнено условие конечной восприимчивости (1.6), т.е. его ковариационная функция суммируема. Ч. Ньюменом также была выдвинута гипотеза, что вместо (1.6) достаточно потребовать всего лишь, чтобы функция K_ξ, определяемая соотношением $K_\xi(n) = \sum_{\|k\|_\infty \leqslant n} cov(\xi_0, \xi_k)$, $n \in \mathbb{N}$, была медленно меняющейся на бесконечности. Однако через четыре года данная гипотеза была опровергнута в работе Н. Херрндорфа [69]. Позднее А. П. Шашкин [38] показал, что требование выполнения условия конечной восприимчивости является в определенном смысле оптимальным. Наконец, в 2011-м году А. В. Булинским [7] был установлен критерий, обеспечивающий справедливость ЦПТ для положительно ассоциированных случайных полей с медленно меняющейся функцией K_ξ.

Доказанная в работе А. В. Булинского и Э. Шабанович [9] ковариационная оценка (1.2) для липшицевых функций от положительно или отрицательно ассоциированных случайных полей является основным инструментом, позволяющим устанавливать предельные теоремы для таких полей. В последствии квадратично интегрируемые случайные поля, удовлетворяющие неравенству (1.2), были названы А. В. Булинским и Ш. Сюкэ [53] квази-ассоциированными (QA). Оказалось, что на класс QA полей можно распространить множество предельных результатов, доказанных ранее в предположении ассоциированности. В [53] был также определен класс (BL, θ)-зависимых случайных полей, расширяющий класс квази-ассоциированных полей, заданных на целочисленной решетке и удовлетворяющих условию конечной восприимчивости. (BL, θ)-зависимые поля часто возникают при рассмотрении липшицевых фукнций от элементов QA полей, причем как представляющие самостоятельный интерес случайные объекты, так и как аппроксимации некоторых нелипшицевых функций от наборов величин, входящих в QA поле.

Если элементы исследуемого поля представимы в виде нелипшицевой функции от элементов положительно или отрицательно ассоциированного поля, то задача проверки условия конечной восприимчивости является нетривиальной и обычно требует применения различных приемов аппроксимации. В случае, когда рассматриваются индикаторные функции, для ее решения можно использовать ковариационную оценку, доказанную в работах И. Багай и Б. Пракаса-Рао [41], а также Хао Ю [101], и имеющую вид (1.7). В дальнейшем эта оценка была обобщена в статье П. Матулы и М. Зиемба [77] на случай неограниченности плотностей рассматриваемых случайных величин. П. Матула [76] также доказал несколько ее уточнений при наложении на характер зависимости случайных величин X и Y (фигурирующих в (1.7)) достаточно жестких ограничений. Оценка (1.7) играет основополагающую роль при доказательстве предельных теорем во множестве работ, посвященных анализу асимптотического поведения самых разных случайных объектов. В частности, она имеет ряд приложений к теории непараметрических статистик. Для семейств независимых величин многие их свойства хорошо исследованы (см., напр., [31] и там же ссылки), однако перенос классических результатов на случай зависимых величин часто сопряжен со значительными трудностями. В предположении ассоциированности оценка (1.7) позволила получить варианты ЦПТ, например, для U-статистики [61] и T-статистики [62]. Отметим, что величина показателя степени в правой части (1.7) напрямую влияет на ограничения, которые приходится налагать на скорость убывания на бесконечности ковариационной функции рассматриваемого случайного поля. В данной работе мы показываем, что показатель степени может быть сколь угодно близок к $1/2$. Более того, полученная нами оценка является оптимальной с точностью до постоянного множителя.

В качестве примера применения доказанной нами ковариационной оценки мы ослабляем ограничения на скорость убывания ковариационной функции ассоциированной случайной последовательности в ЦПТ для эмпирических функций распределения, полученной Хао Ю [101]. Подобные варианты ЦПТ играют важную роль в математической статистике. Среди результатов для случайных полей со структурой зависимости типа ассоциированности следует отметить также функциональную центральную предельную теорему (ФЦПТ) в пространстве Скорохода для эмпирических функций распределения, доказанную вначале Хао Ю [101], и в дальнейшем обобщенную в работах К.-М. Шао и Хао Ю [94] и С. Луиши [75]. П. Оливейрой и Ш. Сюкэ [88], а затем В. Морелем и Ш. Сюкэ [80] исследовались и ФЦПТ для эмпирических функций распределения в пространствах интегрируемых функций.

В первой главе мы также доказываем (теорема 1.4.1) оценку для L_p норм сумм мультииндексированных (BL,θ)-зависимых случайных величин, взятых по многомерным блокам. Подобные моментные оценки находят широкое применение при анализе предельного поведения траекторий случайных полей. Так, например, на них опирается ряд методов доказательства принципов инвариантности. Для ассоциированных, положительно или отрицательно ассоциированных, а также (BL, θ)-зависимых полей результаты в этой области были получены Т. Биркелом [44], А. В. Булинским [5], К.-М. Шао и Хао Ю [94], А. П. Шашкиным [37], Т. Кристофидесом и Е. Ваггелату [55], А. В. Булинским и А. П. Шашкиным [51], М. А. Вронским [12]. Отметим также моментную оценку Н. Ю. Крыжановской [25] для сумм по произвольным множествам, доказанную с применением методов секционирования из [28] и [4]. Установленный нами результат обобщает оценку из [94]. Кроме того, одно из его следствий является обобщением моментного неравенства из [51].

Полученная в диссертации моментная оценка применяется к доказательству ФЦПТ типа Донскера-Прохорова для (BL, θ)-зависимых случайных полей. Задачи, связанные с исследованием подобных ФЦПТ, образуют крупную область современной теории случайных процессов. Толчком к рассмотрению так называемых слабых принципов инвариантности послужила появившаяся в 1946-м году работа П. Эрдеша и М. Каца [64], в которой доказывалась сходимость распределений четырех функционалов от процессов частных сумм независимых случайных величин к распределениям соответствующих функционалов от броуновского движения. В общей постановке варианты ФЦПТ были установлены М. Донскером [63] и Ю. В. Прохоровым [32]. В дальнейшем было доказано множество подобных утверждений для случайных полей с тем или иным характером зависимости. Так, например, для случайных величин, обладающих свойством перемешивания, результаты, относящиеся к принципу инвариантности, изложены в монографии П. Биллингсли [3]. Рассмотрению ассоциированных, положительно или отрицательно ассоциированных, а также (BL, θ)-зависимых полей посвящены работы Ч. Ньюмена и А. Райта [84], Булинского и М. Кина [49], Л.-К. Жанга и Дж. Вена [102], А. П. Шашкина [36], А. В. Булинского и А. П. Шашкина [10]. Результаты такого рода также установлены А. В. Булинским и Э. Шабанович [9]. В диссертации удалось обобщить одновременно варианты ФЦПТ из [49] и [10] (теорема 5.1.5, (д)).

Изучение различных геометрических характеристик случайных поверхностей является одной из самых динамично развивающихся областей современной стохастической геометрии, см., напр., труд Р. Адлера и Дж. Тэйлора [39] и там же ссылки. Особое место в рамках данной теории занимает исследование свойств экскурсионных множеств и множеств уровня случайных полей, см., напр., недавнюю книгу Ж.-М. Азаиса и М. Вшебора [40]. В монографии Н. Н. Леоненко и А. В. Иванова [26] среди прочих результатов была установлена ЦПТ для объемов экскурсионных множеств гауссовских случайных полей, заданных на последовательности расширяющихся шаров Доказательство этого результата было проведено с помощью техники, основанной на разложении рассматриваемой функции (в данном случае эта функция — индикатор) по системе полиномов Чебышева-Эрмита. В дальнейшем ряд результатов, касающихся свойств экскурсионных множеств гауссовских случайных полей, был получен в работах Д. Н. Запорожца, И. А. Ибрагимова, А. П. Шашкина и Д. Мешенмозера (см., напр., [20], [30], [95]). В 2012-м году А. В. Булинским, Е. Сподаревым и Ф. Тиммерманном [52] был разработан новый метод, позволивший получить ЦПТ для объемов экскурсионных множеств QA полей. Существенную роль при этом сыграло понятие (BL,θ)-зависимости случайных полей, заданных на пространстве $\mathbb{R}^d$, предложенное А. В. Булинским в [48]. Отметим также статью Д. Мешенмозера и А. П. Шашкина [78], в которой доказывается ФЦПТ в пространстве Скорохода $D(\mathbb{R})$ для объемов экскурсионных множеств, индексированных уровнем экскурсии $u \in \mathbb{R}$. Эта теорема представляет собой аналог ФЦПТ для эмпирических функций распределения, только вместо последовательности случайных величин в ней рассматривается некоторое случайное поле на $\mathbb{R}^d$.

Во второй главе диссертации доказаны три предельные теоремы для объемов экскурсионных множеств строго стационарных случайных полей. Первая из них (теорема 2.1.1) представляет собой вариант ЦПТ из [52] для ассоциированных полей. Замена требования квази-ассоциированности более жестким условием ассоциированности позволила применить полученную в первой главе диссертации ковариационную оценку для индикаторных функций и, таким образом, ослабить ограничения, налагаемые на ковариационную функцию исследуемого случайного поля. Вторая предельная теорема (теорема 2.2.1) является функциональным вариантом первой. Рассматриваются объемы экскурсионных множеств на блоках $(0, n_1 t_1] \times \cdots \times (0, n_d t_d]$, $t = (t_1, \ldots, t_d) \in [0,1]^d$, $n = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, и доказывается их сходимость по распределению в пространстве непрерывных функций $C([0,1]^d)$ при $n \to \infty$ (в секвенциальном смысле). Наконец, мы также доказываем подобную ФЦПТ и для QA случайных полей (см. теорему 2.3.1). Отметим, что обе ФЦПТ установлены при тех же ограничениях на ковариационную функцию случайного поля, что и соответствующие ЦПТ. Их доказательства опираются на моментную оценку для (BL, θ)-зависимых случайных полей из первой главы диссертации и теорему Морица [81].

Многие годы активно развивается теория дифференциальных уравнений с частными производными, начальные данные для которых задаются некоторыми случайными объектами. Уравнение Бюргерса является одним из наиболее интенсивно исследуемых. Известно, что с помощью так называемой подстановки Хопфа-Коула его можно свести к уравнению теплопроводности, так что решение задачи Коши для уравнения Бюргерса представимо в явном виде как отношение двух интегралов с определенными ядрами. Данное уравнение описывает множество физических явлений (см., напр., [13]), причем немаловажную роль играют модели, в которых начальный потенциал задается некоторым стационарным случайным полем $\{\xi_x,\ x \in \mathbb{R}^d\}$. Так, например, подобные стохастические конструкции возникают при анализе крупномасштабного строения Вселенной. Исследованию асимптотических свойств преобразованных решений уравнения Бюргерса со случайными начальными данными посвящены работы М. Розенблатта, А. В. Булинского, С. А. Молчанова, Я. Г. Синая, Д. Сургаилиса, В. Войчинского, Н. Н. Леоненко, Ю. Ю. Бахтина и многих других (см., напр., [91], [45], [8], [96], [46], [47], [97], [73], [1], [2], [98], [74]). При этом часто задача анализа асимптотики решений сводится к получению ЦПТ для интегралов от определенных гладких функций по случайной мере $M(dx) = e^{\xi_x} dx$. В третьей главе диссертации установлен ряд ЦПТ и ФЦПТ для интегралов по случайным мерам, которые затем применяются к обобщению ФЦПТ Бахтина для решений уравнения Бюргерса со случайными начальными данными.

В первом параграфе третьей главы доказывается обобщение ЦПТ Эванса

[66] для интегралов от ограниченных интегрируемых функций по стационарным квадратично интегрируемым случайным мерам. Потребность в таком результате обусловлена желанием иметь возможность применить подобную ЦПТ к мерам вида $M(dx) = F(\xi_x)dx$ (где F — неотрицательная липшицева функция) для достаточно широкого класса квази-ассоциированных случайных полей ξ, в то время как ЦПТ Эванса применима только к ассоциированным случайным мерам. Во втором параграфе рассматриваются интегралы по случайным мерам от гладких функций с параметром. При этом предложен новый метод оценки второго момента приращений подобных интегралов на блоках, позволяющий установить для них ФЦПТ при весьма широких ограничениях на рассматриваемую меру и интегрируемую функцию. Наконец, в третьем параграфе с помощью этой ФЦПТ выводится обобщение теоремы Бахтина.

Важным примером квадратично интегрируемой случайной меры является пуассоновский точечный процесс и его различные модификации. В четвертом параграфе в качестве начальных потенциалов в задаче Коши для уравнения Бюргерса рассматриваются порожденные им случайные поля дробового шума. Подобная модель изучалась в работах А. В. Булинского [45], [46], А. В. Булинского и С. А. Молчанова [8], Д. Сургаилиса и В. Войчинского [97], а также других исследователей. Распределение пуассоновского точечного процесса характеризуется его интенсивностью. Мы рассматриваем случай, когда интенсивность равна натуральному n, и устанавливаем функциональную предельную теорему (ФПТ) для соответствующих решений уравнения Бюргерса при $n \to \infty$. При этом интересно отметить, что функциональную сходимость удалось доказать не только в пространстве непрерывных функций, но и получить более сильный результат в пространстве гладких функций.

В пятом параграфе третьей главы рассматривается дважды стохастический пуассоновский процесс $Z = \{Z(t),\ t \geqslant 0\}$, называемый также процессом Кокса, и некоторая последовательность случайных величин $X = \{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, не зависящая от Z. В недавних работах В. Ю. Королева и соавторов ([22], [23]) исследуется предельное поведение макс-обобщенного процесса Кокса $\{\max_{k=1,\dots,Z(t)} X_k,\ \ t \geqslant 0\}$ в случае, когда X состоит из независимых одинаково распределенных величин. Этот процесс имеет ряд приложений к теории риска (см. монографию [24]). В диссертации рассмотрена более общая модель, когда случайные величины X_n, $n \in \mathbb{N}$, вообще говоря, зависимы, и распределение X_n может зависеть от n. Оказывается, что если для их максимумов $M_n = \max_{k=1,\dots,n} X_k$ справедлива определенная предельная теорема при $n \to \infty$, то можно без каких-либо дополнительных ограничений на распределение X получить предельный результат для соответствующих макс-обобщенных процессов Кокса.

Результаты диссертации опубликованы в работах автора [14]-[19] и [58]-[60] (без соавторов).

Обозначения и сокращения. Все рассматриваемые случайные объекты предполагаются заданными на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Сумма по пустому множеству индексов полагается равной нулю, а произведение — единице.

В работе используются следующие общепринятые обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел;

$\mathbb{Z}_q$ — множество неотрицательных целых чисел, меньших $q \in \mathbb{N}$;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;

$\lfloor x \rfloor$ — целая часть числа $x \in \mathbb{R}$;

$x \wedge y = \min\{x, y\}$, $x \vee y = \max\{x, y\}$, $x_+ = x \vee 0$, $x_- = (-x)_+$, $x, y \in \mathbb{R}$;

$x * y = (x_1 y_1, \dots, x_d y_d)$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$;

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово скалярное произведение;

$\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ — скалярное произведение в пространстве E;

$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_d|^p)^{1/p}$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1, \infty)$;

$\|x\|_\infty = |x_1| \vee \dots \vee |x_d|$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$;

$|x| = \|x\|_2$, $x \in \mathbb{R}^d$;

$\langle x \rangle = x_1 \dots x_d$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$;

$|A|$ — число элементов конечного множества A, либо объем измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^d$;

∂A — граница множества $A \subset \mathbb{R}^d$;

$\mathbb{I}\{A\}$ — индикатор множества A;

$aA = Aa = \{ax,\ x \in A\}$, $a \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^d$;

$A \oplus B = \{x + y,\ x \in A,\ y \in B\}$, $A, B \subset \mathbb{R}^d$;

$a \oplus A = A \oplus a = \{a + x,\ x \in A\}$, $a \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^d$;

$a * A = \{a * x,\ x \in A\}$, $a \in \mathbb{R}^d$, $A \subset \mathbb{R}^d$;

$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ — симметрическая разность множеств A и B;

$\mathcal{B}(E)$ — борелевская σ-алгебра топологического пространства E;

$\mathsf{E}X$ или $\mathsf{E}(X)$ — математическое ожидание случайной величины X;

$\mathsf{Var}X$ или $\mathsf{Var}(X)$ — дисперсия случайной величины X;

$X \sim Y$ или $X \stackrel{d}{=} Y$ — совпадение законов распределения случайных элементов X и Y;

$\|X\|_p$ — норма случайной величины X в пространстве $\mathsf{L_p} = L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $p \in [1, \infty]$;

$\|f\|_p$ — норма измеримой действительной функции f на $\mathbb{R}^d$ в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d) = L_p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), mes)$, $p \in [1, \infty]$, где mes — мера Лебега;

$\xi \in \mathsf{A}$ — случайное поле ξ ассоциировано;

$\xi \in \mathsf{PA}$ — случайное поле ξ положительно ассоциировано;

$\xi \in \mathsf{NA}$ — случайное поле ξ отрицательно ассоциировано;

$\xi \in \mathsf{QA}$ — случайное поле ξ квази-ассоциировано;

$\xi \in (BL, \theta)$ — случайное поле ξ является (BL, θ)-зависимым;

$\xi \in \mathsf{L_p}$ — элементы случайного поля ξ принадлежат пространству $\mathsf{L_p}$;

ЦПТ — центральная предельная теорема;

ФЦПТ — функциональная центральная предельная теорема;

ФПТ — функциональная предельная теорема;

с.в. — случайная величина;

ф.р. — функция распределения;

п.н. — почти наверное;

п.в. — почти всюду.

Благодарности. Автор очень признателен профессору А. В. Булинскому за постановку задач, постоянное внимание и неоценимую помощь в работе. Автор также благодарен доценту А. П. Шашкину за полезные замечания.

Глава 1. Ковариационные и моментные оценки для слабо зависимых случайных полей

В данной главе исследуются ковариационные и моментные оценки для определенных классов слабо зависимых случайных полей, а также даются приложения этих оценок к выводу предельных теорем для таких полей. Основными результатами главы являются теоремы 1.2.1 и 1.2.2, посвященные доказательству оценки ковариации индикаторных функций от положительно или отрицательно ассоциированных случайных величин и проверке ее оптимальности, теорема 1.4.1, обобщающая ряд известных ранее моментных оценок для сумм слабо зависимых случайных полей, и теорема 1.5.1, обобщающая ФЦПТ Булинского-Кина. Результаты данной главы применяются далее в главе 2.

1.1. Ассоциированность случайных полей и родственные понятия

Напомним несколько основных понятий.

Определение 1.1.1 ([65]). Семейство случайных величин $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$ называется *ассоциированным* (пишут $\xi \in \mathsf{A}$), если для любых конечных множеств $I = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$, $J = \{s_1, \ldots, s_m\} \subset T$ и ограниченных покоординатно неубывающих функций $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$cov(F(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}), G(\xi_{s_1}, \ldots, \xi_{s_m})) \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Определение 1.1.2 ([83]). Семейство $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$ *слабо ассоциировано* или *положительно ассоциировано* (пишут $\xi \in \mathsf{PA}$), если соотношение (1.1) справедливо для любых конечных множеств $I = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$, $J = \{s_1, \ldots, s_m\} \subset T$ таких, что $I \cap J = \varnothing$, и ограниченных покоординатно неубывающих функций $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Определение 1.1.3 ([70]). Семейство $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$ *отрицательно ассоциировано* (пишут $\xi \in \mathsf{NA}$), если левая часть (1.1) неположительна, когда I, J и F, G удовлетворяют условиям из определения 1.1.2.

Будем также говорить, что случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, обладает одним из перечисленных выше типов зависимости, если этим свойством обладает множество случайных величин, составленное из его компонент.

Очевидно, что ассоциированность семейства случайных величин влечет положительную ассоциированность. В то же время обратное утверждение неверно даже для двухэлементных семейств (см. [65]). Нетрудно показать, что система независимых случайных величин является (см., напр., [10], теорема 1.1.8) одновременно ассоциированной и отрицательно ассоциированной. Кроме того, любое гауссовское случайное поле с неотрицательной ковариационной функцией будет ассоциированным [89]. Также известно [70], что гауссовский вектор, различные компоненты которого неположительно коррелированы, отрицательно ассоциирован.

Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, — некоторая липшицева функция. Для $i = 1, \ldots, n$ положим

$$Lip_i(F) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{\Delta x_i \neq 0} \frac{1}{|\Delta x_i|} |F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - F(x)|$$

и введем $Lip(F) = \max_{i=1,\ldots,n} Lip_i(F)$. Легко видеть, что $Lip(F)$ является липшицевой константой функции F по отношению к l_1 норме в пространстве $\mathbb{R}^n$.

В работе [9] показано, что если семейство $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\} \in \mathsf{L}_2$ является положительно или отрицательно ассоциированным, то для произвольных непересекающихся конечных множеств $I = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$, $J = \{s_1, \ldots, s_m\} \subset T$ и ограниченных липшицевых функций $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$|cov(F(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}), G(\xi_{s_1}, \ldots, \xi_{s_m}))|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Lip_i(F) Lip_j(G) |cov(\xi_{t_i}, \xi_{s_j})| \tag{1.2}$$
$$\leqslant Lip(F) Lip(G) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |cov(\xi_{t_i}, \xi_{s_j})|. \tag{1.3}$$

Неравенство (1.3) играет ключевую роль при доказательстве предельных теорем для подобных полей. Поэтому естественным расширением класса квадратично интегрируемых положительно или отрицательно ассоциированных случайных полей является класс L_2 полей, удовлетворяющих (1.2). В [53] этот класс был назван классом квази-ассоциированных случайных полей. Он включает в себя не только PA и NA поля. Согласно [35] любое гауссовское случайное поле, ковариационная функция которого, вообще говоря, может принимать как положительные, так и отрицательные значения, удовлетворяет (1.2). В [6] предложено несколько более общее определение квази-ассоциированности:

Определение 1.1.4 ([6]). Случайное поле $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\} \in \mathsf{L}_2$ называется *квази-ассоциированным* (пишут $\xi \in \mathsf{QA}$), если соотношение (1.3) справедливо для любых конечных множеств $I = \{t_1, \dots, t_n\} \subset T$, $J = \{s_1, \dots, s_m\} \subset T$ таких, что $I \cap J = \varnothing$, и ограниченных липшицевых функций $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Это определение мы и будем использовать в данной работе.

Отметим, что с понятием квази-ассоциированности тесно связано понятие (BL, θ)-зависимости, также введенное в [53].

Определение 1.1.5 ([53]). Случайное поле

$$\xi = \{\xi_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\} \tag{1.4}$$

называется (BL, θ)-*зависимым* (пишут $\xi \in (BL, \theta)$), если найдется такая монотонно убывающая к нулю функция $\theta(r)$, $r \in \mathbb{N}$, что для произвольных непересекающихся конечных множеств $I = \{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{Z}^d$, $J = \{s_1, \dots, s_m\} \subset \mathbb{Z}^d$ и ограниченных липшицевых функций $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} &|cov(F(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}), G(\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_m}))| \\ &\leqslant Lip(F) Lip(G) (|I| \wedge |J|) \theta_{dist(I,J)}, \end{aligned}$$

где $dist(I, J) = \inf_{x \in I, y \in J} \|x - y\|_\infty$.

Множество примеров случайных полей, удовлетворяющих перечисленным выше определениям, можно найти в монографии [10]. Отметим, что в [57] рассматривается ряд близких мер зависимости систем случайных величин.

Формулой

$$u_\xi(r) = \sup_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d : \|k\|_\infty \geqslant r} |cov(\xi_n, \xi_k)|, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.5}$$

задается так называемый *коэффициент Кокса-Гримметта* поля ξ вида (1.4). Если $u_\xi(0) < \infty$, т.е.

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |cov(\xi_n, \xi_k)| < \infty, \tag{1.6}$$

то говорят, что поле ξ удовлетворяет *условию конечной восприимчивости*. Легко видеть, что если для квази-ассоциированного случайного поля ξ вида (1.4) выполнено условие конечной восприимчивости, то в силу (1.3) ξ является (BL, θ)-зависимым с функцией $\theta(r) = u_\xi(r)$, $r \in \mathbb{N}$. Отметим также, что любое (BL, θ)-зависимое случайное поле $\xi = \{\xi_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$, для которого

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathsf{E}(\xi_k - \mathsf{E}\xi_k)^2 < \infty,$$

удовлетворяет условию конечной восприимчивости (см., напр., [10], замечание 3.1.10).

Нам также понадобится следующий вариант свойства (BL, θ)-зависимости, предложенный в [48] для полей на $\mathbb{R}^d$. Для произвольного положительного Δ рассмотрим решетку $T(\Delta) = (\mathbb{Z}/\Delta)^d$, $d \in \mathbb{N}$.

Определение 1.1.6 ([48]). Случайное поле $\xi = \{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}^d\}$ называется (BL, θ)-*зависимым*, если найдется такая монотонно убывающая к нулю функция $\theta(r)$, $r > 0$, что при любом Δ, превосходящем некоторое $\Delta_0 > 0$, для произвольных непересекающихся конечных множеств $I = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T(\Delta)$, $J = \{s_1, \ldots, s_m\} \subset T(\Delta)$ и ограниченных липшицевых функций $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$|cov(F(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}), G(\xi_{s_1}, \ldots, \xi_{s_m}))| \leqslant Lip(F)Lip(G)(|I| \wedge |J|)\Delta^d \theta_{dist(I,J)}.$$

В случае, когда поле ξ является (BL, θ)-зависимым в одном из этих двух смыслов с некоторой функцией θ, мы будем часто писать θ_ξ вместо θ. Понятие (BL, θ)-зависимости можно естественным образом распространить на случайные поля, заданные на некоторых подмножествах соответственно $\mathbb{Z}^d$ или $\mathbb{R}^d$.

1.2. Оптимальная оценка ковариаций индикаторных функций от положительно или отрицательно ассоциированных случайных величин

Пусть X, Y — квадратично интегрируемые случайные величины, имеющие соответственно функции распределения (ф.р.) F_X, F_Y и ограниченные плотности p_X, p_Y. В [41] показано, что если $(X, Y) \in \mathsf{A}$, то для любого $T > 0$

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} cov(\mathbb{I}\{X > x\}, \mathbb{I}\{Y > y\}) \leqslant C_1(T^2 cov(X, Y) + \frac{1}{T}(\|p_X\|_\infty + \|p_Y\|_\infty)),$$

где $\mathbb{I}\{\cdot\}$ обозначает индикатор события. Здесь и далее $C_1, C_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots$ — некоторые положительные константы. Минимизируя последнее выражение по $T > 0$, получаем

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} cov(\mathbb{I}\{X > x\}, \mathbb{I}\{Y > y\}) \leqslant C_2 \left((\|p_X\|_\infty + \|p_Y\|_\infty)^2 cov(X, Y)\right)^{1/3}.$$

Записывая эту оценку для случайных величин k_1X, k_2Y и минимизируя правую часть по $k_1, k_2 > 0$, имеем

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} cov(\mathbb{I}\{X > x\}, \mathbb{I}\{Y > y\}) \leqslant C_3 \left(\|p_X\|_\infty \|p_Y\|_\infty cov(X, Y)\right)^{1/3}. \tag{1.7}$$

Отметим, что оценка вида (1.7) также фигурирует в работе [101]. Позже в [76] (теоремы 1 и 3) были получены более точные оценки, однако при весьма жестких ограничениях на характер зависимости рассматриваемых случайных величин. В статье [77] оценка (1.7) была обобщена на случай, когда плотности, вообще говоря, не ограничены, но принадлежат пространству $L_p(\mathbb{R})$, $p > 1$.

Оценка (1.7) позволяет контролировать поведение ковариации индикаторных функций от ассоциированных случайных величин с помощью ковариации самих случайных величин. Поэтому она играет основополагающую роль при доказательстве предельных результатов для ряда функций от ассоциированных случайных полей, таких, например, как эмпирические функции распределения ([41], [101], [88], [72], см. также [86], теоремы 5.37 и 5.38) некоторые другие статистики ([92], [61], [62], [68]), объемы экскурсионных множеств [52] (отметим, что в последней работе рассматривается более общий случай QA поля). Обзор результатов, полученных с помощью упомянутой оценки, также дается в монографии [90]. Таким образом, несомненный интерес представляет задача уточнения (1.7).

Введем функцию f, которая строго монотонно и непрерывно отображает отрезок $[0,1]$ на себя, формулой:

$$f(0)=0, \quad f(x)=\frac{x^2}{\log\frac{e}{x}},\ x\in(0,1].$$

Следующая теорема улучшает оценку (1.7).

Теорема 1.2.1. *Если квадратично интегрируемый случайный вектор (X,Y) положительно или отрицательно ассоциирован, и существуют ограниченные плотности p_X, p_Y, то имеет место неравенство*

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} |cov(\mathbb{I}\{X>x\},\mathbb{I}\{Y>y\})| \leqslant C_4 f^{inv}(\|p_X\|_\infty\|p_Y\|_\infty|cov(X,Y)|\wedge 1), \quad (1.8)$$

где f^{inv} — обратная функция к f.

Оптимальность этой оценки демонстрирует

Теорема 1.2.2. *Для любого $r\in(0,1]$ найдется случайный вектор $(X,Y)\in\mathsf{PA}\cap\mathsf{L}_2$ такой, что $cov(X,Y)\in(0,r]$, $\|p_X\|_\infty=\|p_Y\|_\infty=1$, и*

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} cov(\mathbb{I}\{X>x\},\mathbb{I}\{Y>y\}) \geqslant c_1 f^{inv}(cov(X,Y)).$$

Прежде чем приступить к доказательству теорем, мы выведем простое

Следствие 1.2.3. *Для любого $0<\delta<1/2$ найдется такое $C=C(\delta)>0$, что*

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} |cov(\mathbb{I}\{X>x\},\mathbb{I}\{Y>y\})| \leqslant C\left(\|p_X\|_\infty\|p_Y\|_\infty|cov(X,Y)|\right)^\delta, \quad (1.9)$$

если $(X,Y)\in\mathsf{PA}\cap\mathsf{L}_2$ или $(X,Y)\in\mathsf{NA}\cap\mathsf{L}_2$, а соответствующие плотности p_X и p_Y существуют и ограничены. В то же время оценку вида (1.9) нельзя получить при $\delta=1/2$.

Доказательство. Вначале установим соотношение (1.9) при $\delta\in(0,1/2)$. Для произвольных $0<a\leqslant b\leqslant 1$ имеем

$$\frac{f(b)}{f(a)}=\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{\log\frac{e}{a}}{\log\frac{e}{b}}=\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{\log\frac{e}{b}+\log\frac{b}{a}}{\log\frac{e}{b}}=\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(1+\frac{\log\frac{b}{a}}{\log\frac{e}{b}}\right) \quad (1.10)$$

$$\leqslant \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(1 + \log \frac{b}{a}\right) \leqslant A(x) \left(\frac{b}{a}\right)^x, \quad x > 2, \tag{1.11}$$

где $A(\cdot)$ — некоторая положительная функция. Подставляя в (1.11) $a = f^{inv}(\alpha)$, $b = f^{inv}(\beta)$, $0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, получаем

$$\frac{\beta}{\alpha} \leqslant A(x) \left(\frac{f^{inv}(\beta)}{f^{inv}(\alpha)}\right)^x \Rightarrow f^{inv}(\alpha) \leqslant f^{inv}(\beta) A^{1/x}(x)(\alpha/\beta)^{1/x}.$$

Полагая $\beta = 1$, имеем оценку

$$f^{inv}(\alpha) \leqslant A^{1/x}(x)\alpha^{1/x}.$$

Искомое утверждение вытекает из последнего неравенства и теоремы 1.2.1 при $x = \delta^{-1}$ и $C(\delta) = C_4 A(\delta^{-1})^\delta$.

Перейдем теперь к доказательству невозможности получить оценку вида (1.9) при $\delta = 1/2$. По теореме 1.2.2 найдутся последовательность действительных чисел $r_n \in (0, 1]$, $r_n \to 0$, $n \to \infty$, и последовательность случайных векторов (X_n, Y_n) с $cov(X_n, Y_n) = r_n$, удовлетворяющих условиям из формулировки теоремы 1.2.2, такие, что

$$\sup_{x,y \in \mathbb{R}} cov(\mathbb{I}\{X_n > x\}, \mathbb{I}\{Y_n > y\}) \geqslant c_1 f^{inv}(r_n).$$

Подставляя $a = f^{inv}(r_n)$ и $b = 1$ в равенство (1.10), имеем

$$\frac{\left(f^{inv}(r_n)\right)^2}{r_n} = \left(1 + \log \frac{1}{f^{inv}(r_n)}\right) \Rightarrow f^{inv}(r_n) = r_n^{1/2} \left(1 + \log \frac{1}{f^{inv}(r_n)}\right)^{1/2}.$$

Искомое утверждение теперь вытекает из того факта, что $f^{inv}(r_n) \to 0$, а значит, $\left(1 + \log \frac{1}{f^{inv}(r_n)}\right) \to \infty$, когда $n \to \infty$. Следствие доказано. $\square$

Введем

$$H(x, y) = H_{X,Y}(x, y)$$

$$= cov(\mathbb{I}\{X > x\}, \mathbb{I}\{Y > y\}) = F_{X,Y}(x, y) - F_X(x)F_Y(y),\ x, y \in \mathbb{R},$$

где $F_{X,Y}$ — ф.р. случайного вектора (X, Y). Отметим, что если $(X, Y) \in \mathsf{PA}$ или $(X, Y) \in \mathsf{NA}$, то H соответственно неотрицательна или неположительна на всей области определения. Нам потребуется следующий вариант формулы Хефдинга.

Лемма ([101]). *Пусть f, g — действительные функции, абсолютно непрерывные на любом ограниченном промежутке из $\mathbb{R}$. Тогда для произвольных случайных величин X, Y имеет место соотношение*

$$cov(f(X), g(Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} f'(x)g'(y)H_{X,Y}(x,y)dxdy, \tag{1.12}$$

если интеграл Лебега в правой части (1.12) существует.

Отметим, что в силу (1.12) при $(X, Y) \in \mathsf{PA} \cap \mathsf{L}_2$ или $(X, Y) \in \mathsf{NA} \cap \mathsf{L}_2$ верно равенство $|cov(X, Y)| = \|H\|_1$.

Так как и левая и правая части соотношения (1.8) инвариантны относительно домножения X и Y на положительные числа, чтобы доказать теорему 1.2.1 достаточно проверить выполнение неравенства

$$\|H\|_1 \geqslant c_2 f(\|H\|_\infty) \tag{1.13}$$

для всех положительно или отрицательно ассоциированных случайных величин $X, Y \in \ \mathsf{L}_2$ таких, что

$$\|p_X\|_\infty = \|p_Y\|_\infty = 1. \tag{1.14}$$

Действительно, требуется показать, что соотношение (1.13) влечет оценку $\|H\|_\infty \leqslant C_4 f^{inv}(\|H\|_1 \wedge 1)$. Отметим, что $\|H\|_\infty \leqslant 1 = f^{inv}(1)$ по определению функции H. Кроме того, в силу (1.13)

$$\|H\|_\infty \leqslant f^{inv}\left(\left(\frac{1}{c_2}\|H\|_1\right) \wedge 1\right) \leqslant f^{inv}\left(\left(\frac{1}{c_2 \wedge 1}\|H\|_1\right) \wedge 1\right)$$
$$= f^{inv}\left(\left(\frac{1}{c_2 \wedge 1}(\|H\|_1 \wedge 1)\right) \wedge 1\right).$$

Из (1.10) вытекает неравенство

$$\frac{f(b)}{f(a)} \geqslant \left(\frac{b}{a}\right)^2, \ 0 < a \leqslant b \leqslant 1. \tag{1.15}$$

Подставляя в (1.15) $a = f^{inv}(\|H\|_1 \wedge 1)$ и $b = f^{inv}\left(\left(\frac{1}{c_2 \wedge 1}(\|H\|_1 \wedge 1)\right) \wedge 1\right)$, получаем оценку

$$f^{inv}\left(\left(\frac{1}{c_2 \wedge 1}(\|H\|_1 \wedge 1)\right) \wedge 1\right)$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{c_2 \wedge 1}\right)^{1/2} f^{inv}(\|H\|_1 \wedge 1) = C_4 f^{inv}(|cov(X, Y)| \wedge 1)$$

при $C_4 = (c_2^{1/2} \wedge 1)^{-1}$.

В свою очередь, утверждение теоремы 1.2.2 будет доказано, если установить существование для каждого $r \in (0,1]$ такого случайного вектора $(X,Y) \in \mathsf{PA} \cap \mathsf{L}_2$ с $cov(X,Y) \in (0,r]$ и $\|p_X\|_\infty = \|p_Y\|_\infty = 1$, что

$$\|H\|_1 \leqslant C_5 f(\|H\|_\infty). \tag{1.16}$$

Действительно, используя (1.15), имеем неравенство

$$\frac{f^{inv}(\|H\|_1)}{f^{inv}\left(\frac{1}{C_5 \vee 1}\|H\|_1\right)} \leqslant (C_5 \vee 1)^{1/2}.$$

В то же время в силу (1.16)

$$\|H\|_\infty \geqslant f^{inv}\left(\frac{1}{C_5 \vee 1}\|H\|_1\right) \geqslant (C_5 \vee 1)^{-1/2} f^{inv}(\|H\|_1) = c_1 f^{inv}(cov(X,Y))$$

при $c_1 = (C_5 \vee 1)^{-1/2}$.

Положим

$$\blacksquare(H) = \inf_{x,y \in \mathbb{R}} \inf_{\Delta x, \Delta y > 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y}\Big(H(x,y) + H(x+\Delta x, y+\Delta y)$$
$$-H(x+\Delta x, y) - H(x, y+\Delta y)\Big).$$

Нам понадобится следующее

Предложение 1.2.4. *Предположим, что случайные величины* X, Y *имеют ограниченные плотности, и выполнено равенство* (1.14)*. Тогда функция* H *обладает следующими свойствами:*

(A1) $\blacksquare(H) \geqslant -1$*;*

(A2) $Lip_1(H) \vee Lip_2(H) \leqslant 1$.

Если к тому же $(X,Y) \in \mathsf{PA}$*, то справедливо соотношение*

(A3) $0 \leqslant H(x,y) \leqslant 1$*,* $x, y \in \mathbb{R}$.

Если же $(X,Y) \in \mathsf{NA}$*, то свойствами* (A1)-(A3) *обладает функция* $G(x,y) = -H(-x,y)$*,* $x, y \in \mathbb{R}$.

Доказательство. *Свойство* (A1) *функции* H. Для $x, y \in \mathbb{R}$, $\Delta x, \Delta y \geqslant 0$ имеем

$$H(x,y) + H(x+\Delta x, y+\Delta y) - H(x+\Delta x, y) - H(x, y+\Delta y)$$

$$= F_{X,Y}(x,y) + F_{X,Y}(x+\Delta x, y+\Delta y) - F_{X,Y}(x+\Delta x, y) - F_{X,Y}(x, y+\Delta y)$$

$$-(F_X(x)F_Y(y) + F_X(x+\Delta x)F_Y(y+\Delta y) - F_X(x+\Delta x)F_Y(y) - F_X(x)F_Y(y+\Delta y))$$

$$\geqslant -(F_X(x)F_Y(y) + F_X(x+\Delta x)F_Y(y+\Delta y) - F_X(x+\Delta x)F_Y(y) - F_X(x)F_Y(y+\Delta y)).$$

В то же время

$$F_X(x)F_Y(y) + F_X(x+\Delta x)F_Y(y+\Delta y) - F_X(x+\Delta x)F_Y(y) - F_X(x)F_Y(y+\Delta y)$$

$$= (F_X(x+\Delta x) - F_X(x))(F_Y(y+\Delta y) - F_Y(y)) \leqslant \Delta x \Delta y.$$

Свойство (A2) *функции* H. Покажем, что $Lip_1(H) \leqslant 1$ (неравенство $Lip_2(H) \leqslant 1$ проверяется аналогичным образом). Для $x, y \in \mathbb{R}$, $\Delta x \geqslant 0$ имеем

$$H(x+\Delta x, y) - H(x,y) = F_{X,Y}(x+\Delta x, y) - F_{X,Y}(x,y)$$

$$-F_X(x+\Delta x)F_Y(y) + F_X(x)F_Y(y) \geqslant -(F_X(x+\Delta x) - F_X(x))F_Y(y) \geqslant -\Delta x.$$

Кроме того,

$$F_{X,Y}(x+\Delta x, y) - F_{X,Y}(x,y) - F_X(x+\Delta x)F_Y(y) + F_X(x)F_Y(y)$$

$$\leqslant F_{X,Y}(x+\Delta x, y) - F_{X,Y}(x,y) \leqslant F_{X,Y}(x+\Delta x, \infty) - F_{X,Y}(x,\infty)$$

$$= F_X(x+\Delta x) - F_X(x) \leqslant \Delta x.$$

Свойство (A1) *функции* G. Для $x, y \in \mathbb{R}$, $\Delta x, \Delta y \geqslant 0$ имеем

$$G(x,y) + G(x+\Delta x, y+\Delta y) - G(x+\Delta x, y) - G(x, y+\Delta y)$$

$$= -H(-x,y) - H(-x-\Delta x, y+\Delta y) + H(-x-\Delta x, y) + H(-x, y+\Delta y)$$

$$= H(-x-\Delta x, y) + H(-x, y+\Delta y) - H(-x,y) - H(-x-\Delta x, y+\Delta y).$$

Последнее выражение не меньше $-\Delta x \Delta y$ в силу свойства (A1) функции H.

Свойство (A2) *функции* G вытекает из свойства (A2) функции H.

Свойство (A3) *функций* H *и* G проверяется тривиально.

Предложение доказано. □

Легко видеть, что теорема 1.2.1 будет доказана, если мы установим следующий результат.

Лемма 1.2.5. *Для любой функции* $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *обладающей свойствами* (A1)-(A3), *выполнено неравенство* (1.13).

Теорема 1.2.2 является следствием следующих двух утверждений.

Лемма 1.2.6. *Для каждого* $r \in (0,1]$ *найдется такая действительная функция* H *на* $\mathbb{R}^2$, *обладающая свойствами* (A1) *и* (A3), *что* $Lip_1(H) \vee Lip_2(H) \leqslant 1/4$, $supp(H) \subset [-1/4, 1/4]^2$, $\|H\|_1 \in (0, r]$, *и выполнено* (1.16).

Лемма 1.2.7. *Для каждой функции* H, *удовлетворяющей условиям из формулировки леммы* 1.2.6, *найдется такой случайный вектор* $(X,Y) \in \mathsf{PA} \cap \mathsf{L}_2$, *что выполнено* (1.14), *и* $H(x,y) = cov(\mathbb{I}\{X > x\}, \mathbb{I}\{Y > y\})$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Прежде чем перейти непосредственно к доказательству лемм 1.2.5-1.2.7, мы установим еще несколько вспомогательных утверждений.

Введем класс $\mathcal{G}$, состоящий из финитных непрерывных действительных функций g, заданных на $(-\infty, 0]$. Определим оператор S формулой

$$S[g](x) = g(x) + (\inf_{s \leqslant x} g(s))_-, \ \ g \in \mathcal{G}, \ x \leqslant 0.$$

Напомним, что $a_+ = a \vee 0$, $a_- = (-a)_+$, $a \in \mathbb{R}$.

Предложение 1.2.8. *Для любых* $g, g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ *и допустимых значений аргументов справедливы следующие утверждения:*

(B1) $S[g](x) \geqslant g(x)_+$;

(B2) *если* $x_1 < x_2$, *то* $S[g](x_2) - S[g](x_1) \geqslant g(x_2) - g(x_1)$;

(B3) *если функция* $h(x) \geqslant 0$ *такова, что для любых* $x_1 < x_2$ *выполнено неравенство* $h(x_2) - h(x_1) \geqslant g(x_2) - g(x_1)$, *то* $h(x) \geqslant S[g](x)$ *при всех* x;

(B4) *если для любых* $x_1 < x_2$ *выполнено неравенство* $g_1(x_2) - g_1(x_1) \leqslant g_2(x_2) - g_2(x_1)$, *то* $S[g_1](x) \leqslant S[g_2](x)$ *при всех* x.

Доказательство. Утверждения (B1) и (B2) вытекают непосредственно из определения S. Докажем (B3). Пусть $S[g](x) > 0$ для некоторого $x \leqslant 0$. Обозначим $x_0 = \sup\{s < x : \ S[g](s) = 0\}$. При $t \in (x_0, x]$ справедливо соотношение

$$0 < S[g](t) = g(t) + (\inf_{s \leqslant t} g(s))_-.$$

Следовательно, $(\inf_{s \leqslant x} g(s))_- = (\inf_{s \leqslant x_0} g(s))_-$. Действительно, предположим, что равенства нет, т.е. $(\inf_{s \leqslant x} g(s))_- > (\inf_{s \leqslant x_0} g(s))_-$. Допустим, что $(\inf_{s \leqslant x} g(s))_-$ достигается в некоторой точке $s_0 \in (x_0, x]$. Имеем

$g(s_0)_- > (\inf_{s\leqslant x_0} g(s))_-$, т.е. $g(s_0) < 0$, а значит, $(\inf_{s\leqslant x} g(s))_- = -g(s_0)$. Поэтому

$$0 < S[g](s_0) = g(s_0) + (\inf_{s\leqslant s_0} g(s))_- \leqslant g(s_0) + (\inf_{s\leqslant x} g(s))_- = g(s_0) - g(s_0) = 0.$$

Получили противоречие. Таким образом,

$$S[g](x) = S[g](x) - S[g](x_0) = g(x) - g(x_0) \leqslant h(x) - h(x_0) \leqslant h(x).$$

Докажем (B4). В силу (B2) для любых $x_1 < x_2$

$$S[g_2](x_2) - S[g_2](x_1) \geqslant g_2(x_2) - g_2(x_1) \geqslant g_1(x_2) - g_1(x_1).$$

Следовательно, (B4) вытекает из (B3). Предложение доказано. □

Для $w > 0$ и $y \geqslant 0$ определим оператор T_y^w формулой

$$T_y^w[g](x) = g(x) - y(x+w)_+, \ \ g \in \mathcal{G}, \ x \leqslant 0.$$

Предложение 1.2.9. *При любых $w > 0$, $y \geqslant 0$ и $g \in \mathcal{G}$ имеет место равенство*

$$S[T_y^w[g]](x) = S[T_y^w[S[g]]](x), \ \ x \leqslant 0.$$

Доказательство. Возьмем произвольные $x_1 < x_2 \leqslant 0$. Имеем

$$(T_y^w[S[g]](x_2) - T_y^w[S[g]](x_1)) - (T_y^w[g](x_2) - T_y^w[g](x_1))$$

$$= (S[g](x_2) - S[g](x_1)) - (g(x_2) - g(x_1)).$$

В силу (B2) последнее выражение неотрицательно. Значит, по свойству (B4) выполнено неравенство $S[T_y^w[g]](x) \leqslant S[T_y^w[S[g]]](x)$, $x \leqslant 0$. Остается проверить, что $S[T_y^w[g]](x) \geqslant S[T_y^w[S[g]]](x)$, $x \leqslant 0$. В силу (B3) достаточно показать, что для всех $x_1 < x_2 \leqslant 0$

$$S[T_y^w[g]](x_2) - S[T_y^w[g]](x_1) \geqslant T_y^w[S[g]](x_2) - T_y^w[S[g]](x_1). \tag{1.17}$$

Для любого $x \leqslant 0$ справедливы равенства

$$S[T_y^w[g]](x) = g(x) - y(x+w)_+ + (\inf_{s\leqslant x}(g(s) - y(s+w)_+))_-,$$

$$T_y^w[S[g]](x) = g(x) - y(x+w)_+ + (\inf_{s\leqslant x} g(s))_-.$$

Пусть $\inf_{s\leqslant x_1} g(s)$ достигается в точке s_1, а $\inf_{s\leqslant x_2} g(s)$ достигается в точке s_2. Если $s_2 \leqslant x_1$, то $\inf_{s\leqslant x_1} g(s) = \inf_{s\leqslant x_2} g(s)$, следовательно,

$$(S[T_y^w[g]](x_2) - S[T_y^w[g]](x_1)) - (T_y^w[S[g]](x_2) - T_y^w[S[g]](x_1))$$

$$= (\inf_{s\leqslant x_2}(g(s) - y(s+w)_+))_- - (\inf_{s\leqslant x_1}(g(s) - y(s+w)_+))_- \geqslant 0,$$

и (1.17), очевидно, выполнено. Рассмотрим случай $s_2 > x_1$. Имеем

$$(S[T_y^w[g]](x_2) - S[T_y^w[g]](x_1)) - (T_y^w[S[g]](x_2) - T_y^w[S[g]](x_1))$$

$$= (\inf_{s\leqslant x_2}(g(s) - y(s+w)_+))_- - (\inf_{s\leqslant x_1}(g(s) - y(s+w)_+))_- - (g(s_2)_- - g(s_1)_-)\,.$$

Кроме того,

$$(\inf_{s\leqslant x_1}(g(s) - y(s+w)_+))_- \leqslant (g(s_1) - y(x_1+w)_+)_-,$$

$$(\inf_{s\leqslant x_2}(g(s) - y(s+w)_+))_- \geqslant (g(s_2) - y(s_2+w)_+)_- \geqslant (g(s_2) - y(x_1+w)_+)_-.$$

Заметим, что для любых действительных $a \leqslant b$ и $c \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$((a-c)_- - (b-c)_-) - (a_- - b_-) \geqslant 0.$$

Поэтому

$$(S[T_y^w[g]](x_2) - S[T_y[g]](x_1)) - (T_y^w[S[g]](x_2) - T_y^w[S[g]](x_1))$$

$$\geqslant (g(s_2) - y(x_1+w)_+)_- - (g(s_1) - y(x_1+w)_+)_- - (g(s_2)_- - g(s_1)_-) \geqslant 0.$$

Предложение доказано. $\square$

Доказательство леммы 1.2.5. Если $\|H\|_\infty = 0$, или $\|H\|_1 = \infty$, то искомая оценка тривиальна. Пусть $\|H\|_\infty > 0$, $\|H\|_1 \leqslant \infty$. Поскольку H липшицева и интегрируема, $\sup_{x,y\in\mathbb{R}} H(x,y)$ достигается в некоторой точке. Без ограничения общности предполагаем, что $H(0,0) = \|H\|_\infty > 0$. Отметим, что можно считать функцию H финитной по x: $supp(H) \subset [-1,1]\times\mathbb{R}$. Действительно, положим

$$G(x,y) = \frac{1}{3}H(x,y)\phi(x), \quad x,y\in\mathbb{R},$$

где $\phi(x) = exp\left\{-\frac{1}{1-x^2}\right\}\mathbb{I}\{|x|<1\}$. Очевидно, что $\|G\|_1 \leqslant \|H\|_1$, и в то же время $\|G\|_\infty \geqslant \frac{1}{3e}\|H\|_\infty$. Кроме того, легко видеть, что функция G удовлетворяет (A3).

Проверим теперь, пользуясь оценкой $\|\phi'\|_\infty \leqslant 2$, что G обладает свойствами (A1), (A2). Для $x, y \in \mathbb{R}$, $\Delta x, \Delta y \geqslant 0$ имеем

$$|H(x+\Delta x, y)\phi(x+\Delta x) - H(x,y)\phi(x)|$$

$$\leqslant |H(x+\Delta x, y)\phi(x+\Delta x) - H(x+\Delta x, y)\phi(x)| + |H(x+\Delta x, y)\phi(x) - H(x,y)\phi(x)|$$

$$\leqslant 3\Delta x,$$

следовательно, $Lip_1(G) \leqslant 1$. Поскольку

$$|H(x, y+\Delta y)\phi(x) - H(x,y)\phi(x)| \leqslant \Delta y,$$

справедливо неравенство $Lip_2(G) \leqslant 1/3$. Кроме того,

$$H(x+\Delta x, y+\Delta y)\phi(x+\Delta x) - H(x, y+\Delta y)\phi(x)$$

$$-(H(x+\Delta x, y)\phi(x+\Delta x) - H(x,y)\phi(x))$$

$$= H(x+\Delta x, y+\Delta y)\phi(x+\Delta x) - H(x, y+\Delta y)\phi(x+\Delta x)$$

$$+H(x, y+\Delta y)\phi(x+\Delta x) - H(x, y+\Delta y)\phi(x)$$

$$-(H(x+\Delta x, y)\phi(x+\Delta x) - H(x,y)\phi(x+\Delta x)$$

$$+H(x,y)\phi(x+\Delta x) - H(x,y)\phi(x))$$

$$= H(x+\Delta x, y+\Delta y)\phi(x+\Delta x) - H(x, y+\Delta y)\phi(x+\Delta x)$$

$$-(H(x+\Delta x, y)\phi(x+\Delta x) - H(x,y)\phi(x+\Delta x))$$

$$+H(x, y+\Delta y)\phi(x+\Delta x) - H(x, y+\Delta y)\phi(x)$$

$$-(H(x,y)\phi(x+\Delta x) - H(x,y)\phi(x))$$

$$\geqslant -\Delta x\Delta y + (H(x, y+\Delta y) - H(x,y))(\phi(x+\Delta x) - \phi(x)) \geqslant -3\Delta x\Delta y.$$

Таким образом, $\blacksquare(G) \geqslant -1$.

Введем

$$U(x,y) = S[T^1_y[H(\cdot, 0)]](x), \quad x \leqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

По свойству (B4) оператора S функция $U(x,y)$ не возрастает по y при всех $x \leqslant 0$. Непосредственно из определений операторов S и T^1_y, $y \geqslant 0$, вытекает вложение $supp(U) \subset [-1, 0] \times [0, \infty)$. В силу оценки $Lip_1(H) \leqslant 1$ функция $T^1_y[H(\cdot, 0)]$ неположительна и не возрастает при $y \geqslant 1$, следовательно, $supp(U) \subset [-1, 0] \times [0, 1]$. Так как H обладает свойством (A1), для любых

$-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0$ и $y \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$H(x_1,0) + H(x_2,y) - H(x_2,0) - H(x_1,y) \geqslant -y(x_2 - x_1)$$

$$\Leftrightarrow H(x_2,y) - H(x_1,y) \geqslant H(x_2,0) - H(x_1,0) - y(x_2 - x_1)$$
$$= H(x_2,0) - y(x_2+1) - (H(x_1,0) - y(x_1+1))$$
$$= H(x_2,0) - y(x_2+1)_+ - (H(x_1,0) - y(x_1+1)_+)$$
$$= T^1_y[H(\cdot,0)](x_2) - T^1_y[H(\cdot,0)](x_1).$$

Поэтому по свойству (B3) $H(x,y) \geqslant U(x,y)$, $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$. Таким образом, $\|H\|_1 \geqslant \|U\|_1$. Кроме того, очевидно, $U(0,0) = H(0,0)$. А значит, достаточно доказать оценку $\|U\|_1 \geqslant c_3 f(U(0,0))$.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$ введем $y_k = ak/2$, где $a = U(0,0)$. Воспользовавшись предложением 1.2.9, получаем, что для любых $k \in \mathbb{Z}_+$ и $-1 \leqslant x \leqslant 0$

$$U(0,y_{k+1}) - U(x,y_{k+1}) = S[T^1_{y_{k+1}}[H(\cdot,0)]](0) - S[T^1_{y_{k+1}}[H(\cdot,0)]](x)$$

$$= S[T^1_{y_{k+1}-y_k}[T^1_{y_k}[H(\cdot,0)]]](0) - S[T^1_{y_{k+1}-y_k}[T^1_{y_k}[H(\cdot,0)]]](x)$$
$$= S[T^1_{y_{k+1}-y_k}[S[T^1_{y_k}[H(\cdot,0)]]]](0) - S[T^1_{y_{k+1}-y_k}[S[T^1_{y_k}[H(\cdot,0)]]]](x)$$
$$= S[T^1_{y_{k+1}-y_k}[U(\cdot,y_k)]](0) - S[T^1_{y_{k+1}-y_k}[U(\cdot,y_k)]](x).$$

По свойству (B2) последнее выражение не меньше

$$T^1_{y_{k+1}-y_k}[U(\cdot,y_k)](0) - T^1_{y_{k+1}-y_k}[U(\cdot,y_k)](x)$$

$$= U(0,y_k) - (y_{k+1}-y_k)(0+1) - (U(x,y_k) - (y_{k+1}-y_k)(x+1))$$
$$= U(0,y_k) - U(x,y_k) - y_{k+1} + y_k + y_{k+1} - y_k + x(y_{k+1}-y_k)$$
$$= U(0,y_k) - U(x,y_k) + x(y_{k+1}-y_k).$$

Следовательно,

$$U(x,y_k) \geqslant U(x,y_{k+1}) + U(0,y_k) - U(0,y_{k+1}) + x(y_{k+1}-y_k). \tag{1.18}$$

Так как $U(x,y_k) \geqslant U(x,y_{k+1})$, то

$$U(x,y_k) \geqslant U(x,y_{k+1}) + (U(0,y_k) - U(0,y_{k+1}) + x(y_{k+1}-y_k))_+. \tag{1.19}$$

Заметим, что если подставить $x = -1$ в (1.18), мы получим неравенство $U(0,y_k) - U(0,y_{k+1}) \leqslant y_{k+1} - y_k$. Таким образом,

$$\int_{-1}^{0} (U(0,y_k) - U(0,y_{k+1}) + x(y_{k+1} - y_k))_+ dx$$

$$\geqslant \int_{-(U(0,y_k)-U(0,y_{k+1}))/(y_{k+1}-y_k)}^{0} (U(0,y_k) - U(0,y_{k+1}) + x(y_{k+1} - y_k)) dx$$

$$= (U(0,y_k) - U(0,y_{k+1}))^2/(y_{k+1} - y_k) - (y_{k+1} - y_k)\frac{1}{2}\left(\frac{U(0,y_k) - U(0,y_{k+1})}{y_{k+1} - y_k}\right)^2.$$

Поэтому интегрируя обе части неравенства (1.19) по $x \in [-1,0]$, приходим к оценке

$$\int_{-1}^{0} U(x,y_k)dx \geqslant \int_{-1}^{0} U(x,y_{k+1})dx + \frac{(U(0,y_k) - U(0,y_{k+1}))^2}{2(y_{k+1} - y_k)}.$$

Положим $N = \lfloor 2/a \rfloor$, где $\lfloor\cdot\rfloor$ — целая часть числа. Справедливо неравенство

$$\int_{-1}^{0} U(x,y_k)dx \geqslant \sum_{l=k}^{N} \frac{(U(0,y_l) - U(0,y_{l+1}))^2}{2(y_{l+1} - y_l)} = \frac{1}{a}\sum_{l=k}^{N}(U(0,y_l) - U(0,y_{l+1}))^2.$$

Обозначая $d_k = U(0,y_k) - U(0,y_{k+1})$, $k = 1,\ldots,N$, получаем

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-1}^{0} U(x,y)dxdy \geqslant \sum_{k=1}^{N}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\int_{-1}^{0} U(x,y)dxdy$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{N}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\int_{-1}^{0} U(x,y_k)dxdy = \sum_{k=1}^{N}(y_k - y_{k-1})\int_{-1}^{0} U(x,y_k)dx$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{N}\frac{a}{2}\sum_{l=k}^{N}\frac{1}{a}d_l^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} k d_k^2. \tag{1.20}$$

Поскольку $U(0,y) = 0$ при $y \geqslant 1$, по свойству (B1) имеем

$$\sum_{k=1}^{N} d_k = U(0,y_1) - U(0,y_{N+1}) = U(0,y_1)$$

$$\geqslant T^1_{y_1}[H(\cdot,0)](0) = H(0,0) - y_1 = \frac{a}{2}. \tag{1.21}$$

Рассмотрим задачу минимизации (1.20) при условии (1.21) по $d_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, N$. Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(d_1, \ldots, d_N, \lambda_0, \ldots, \lambda_{N+1}) = \lambda_0 \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} k d_k^2 - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k d_k - \lambda_{N+1} \left(\sum_{k=1}^{N} d_k - \frac{a}{2} \right).$$

Верна следующая система уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N+1} \lambda_k^2 > 0 & \\ \lambda_k \geqslant 0, & k = 0, \ldots, N+1 \\ \lambda_k d_k = 0, & k = 1, \ldots, N \\ \lambda_{N+1} \left(\sum_{k=1}^{N} d_k - \frac{a}{2} \right) = 0 & \\ \lambda_0 k d_k - \lambda_k - \lambda_{N+1} = 0, & k = 1, \ldots, N \end{cases}$$

Если $\lambda_0 = 0$, то последнее уравнение влечет равенство $\lambda_k = -\lambda_{N+1}$, $k = 1, \ldots, N$, которое противоречит первым двум уравнениям. Поэтому без ограничения общности полагаем $\lambda_0 = 1$. Если $\lambda_{N+1} = 0$, то $\lambda_k = k d_k$, $k = 1, \ldots, N$. В силу третьего уравнения имеем $d_k = 0$, $k = 1, \ldots, N$, что противоречит (1.21). Пусть $\lambda_{N+1} > 0$. Пятое уравнение дает представление

$$d_k = \frac{\lambda_{N+1} + \lambda_k}{k} > 0, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Используя третье уравнение, видим, что $\lambda_k = 0$, $k = 1, \ldots, N$, а значит,

$$d_k = \frac{\lambda_{N+1}}{k}, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{1.22}$$

С помощью четвертого уравнения находим

$$\lambda_{N+1} = \frac{a}{2} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \right)^{-1}.$$

Таким образом, в силу (1.22)

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} k d_k^2 \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} k \frac{a^2}{4k^2} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \right)^{-2} = \frac{a^2}{8} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \right)^{-1}$$

$$\geqslant \frac{a^2}{8} (1 + \log N)^{-1} \geqslant \frac{a^2}{24 \log N}$$

$$= \frac{a^2}{24\log\lfloor\frac{2}{a}\rfloor} \geqslant \frac{a^2}{24\log\lfloor\frac{e}{a}\rfloor} \geqslant \frac{a^2}{24\log\frac{e}{a}} = \frac{1}{24}f(a).$$

Лемма доказана. $\square$

Доказательство леммы 1.2.6. Пусть $a = f^{-1}(r) \in (0,1]$, $N = \lfloor 4/a\rfloor$. Введем $d_k = a/(64k\log N)$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим монотонно возрастающую функцию $g(x)$, $x \leqslant 0$, вида

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -\frac{Na}{16}; \\ \sum_{l=k+1}^{N} d_l + \frac{16}{a}\left(x - \left(-\frac{ka}{16}\right)\right) d_k, & -\frac{ka}{16} \leqslant x \leqslant -\frac{(k-1)a}{16},\ k = 1,\dots,N. \end{cases}$$

Имеем $1 > g(0) = \sum_{k=1}^{N} d_k \geqslant a/64$, $Lip(g) \leqslant 1/4$, $supp(g) \subset [-1/4, 0]$. Положим

$$H(x,y) = S[T_y^{1/4}[g]](x), \quad x \leqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

Введем $k_y = \lfloor (4y\log N)^{-1}\rfloor \wedge N$, $y > 0$.

Отметим, что функция $H(\cdot, y)$ обращается в нуль при $x \leqslant -k_y a/16$. Действительно, если $k_y = N$, то это утверждение очевидно, поскольку $g(x) = 0$, $x \leqslant -\frac{Na}{16}$. Рассмотрим случай $k_y < N$. При $x \leqslant -\frac{k_y a}{16}$ производная g не превосходит (в тех точках, где она существует)

$$\frac{16}{a} d_{k_y+1} = \frac{1}{4(k_y+1)\log N}$$

$$= \frac{1}{4(\lfloor (4y\log N)^{-1}\rfloor + 1)\log N} \leqslant \frac{1}{4(4y\log N)^{-1}\log N} = y.$$

Поэтому производная кусочно линейной функции $T_y^{1/4}[g] = g(x) - y(x+1/4)_+$ на $[-1/4, -\frac{k_y a}{16}]$ неположительна (в тех точках, где она существует). В то же время на $(-\infty, -1/4)$ функция $T_y^{1/4}[g]$ тождественно равна нулю. Таким образом, $T_y^{1/4}[g]$ неположительна и не возрастает на $(\infty, -\frac{k_y a}{16}]$, откуда и следует равенство $H(\cdot, y)$ нулю на этом промежутке. Отметим, что так как $k_y = 0$ при $y \geqslant 1/4$, то $supp(H) \subset [-1/4, 0] \times [0, 1/4]$.

Покажем теперь, что если $-k_y a/16 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 0$, то

$$H(x_2,y) - H(x_1,y) = T_y^{1/4}[g](x_2) - T_y^{1/4}[g](x_1) = g(x_2) - g(x_1) - y(x_2 - x_1). \quad (1.23)$$

На промежутке $\left[-\frac{k_y a}{16}, 0\right]$ производная g не меньше (в тех точках, где она существует)

$$\frac{16}{a} d_{k_y} = \frac{1}{4k_y\log N} = \frac{1}{4(\lfloor (4y\log N)^{-1}\rfloor \wedge N)\log N}$$

$$\geqslant \frac{1}{4\lfloor (4y\log N)^{-1}\rfloor \log N} \geqslant \frac{1}{4(4y\log N)^{-1}\log N} = y.$$

Следовательно, на этом промежутке $T_y^{1/4}[g]$ не убывает. Поэтому при $x \in \left[-\frac{k_y a}{16}, 0\right]$ имеет место равенство

$$(\inf_{s\leqslant x} T_y^{1/4}[g](s))_- = (\inf_{s\leqslant -\frac{k_y a}{16}} T_y^{1/4}[g](s))_-.$$

Таким образом, приращения $H(\cdot, y)$ на $\left[-\frac{k_y a}{16}, 0\right]$ равны приращениям $T_y^{1/4}[g]$. Как следствие, функция $H(\cdot, y)$ тоже не убывает на $x \in \left[-\frac{k_y a}{16}, 0\right]$.

Заметим, что в силу (1.23) для любых $-1/4 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 0$ и $0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant 1/4$ справедлива оценка

$$H(x_2, y_1) - H(x_1, y_1) \geqslant H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2). \tag{1.24}$$

Кроме того, по предложению 1.2.9 и свойству (B2)

$$\begin{aligned}
H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) &= S[T_{y_2}^{1/4}[g]](x_2) - S[T_{y_2}^{1/4}[g]](x_1) \\
&= S[T_{y_2-y_1}^{1/4}[S[T_{y_1}^{1/4}[g]]]](x_2) - S[T_{y_2-y_1}^{1/4}[S[T_{y_1}^{1/4}[g]]]](x_1) \\
&= S[T_{y_2-y_1}^{1/4}[H(\cdot, y_1)]](x_2) - S[T_{y_2-y_1}^{1/4}[H(\cdot, y_1)]](x_1) \\
&\geqslant T_{y_2-y_1}^{1/4}[H(\cdot, y_1)](x_2) - T_{y_2-y_1}^{1/4}[H(\cdot, y_1)](x_1) \\
&= H(x_2, y_1) - (y_2 - y_1)(x_2 + 1/4) - (H(x_1, y_1) - (y_2 - y_1)(x_1 + 1/4)) \\
&= H(x_2, y_1) - H(x_1, y_1) - (y_2 - y_1)(x_2 - x_1).
\end{aligned}$$

Учитывая оценку (1.24), имеем

$$0 \geqslant H(x_1, y_1) + H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) \geqslant -(x_2 - x_1)(y_2 - y_1). \tag{1.25}$$

Подставляя $y_2 = 1/4$ в (1.25), получаем

$$0 \leqslant H(x_2, y_1) - H(x_1, y_1) \leqslant (1/4 - y_1)(x_2 - x_1) \leqslant \frac{1}{4}(x_2 - x_1),$$

откуда $Lip_1(H) \leqslant 1/4$. Подставляя $x_1 = -1/4$ в (1.25), получаем

$$-\frac{1}{4}(y_2 - y_1) \leqslant -(x_2 + 1/4)(y_2 - y_1) \leqslant H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) \leqslant 0,$$

откуда $Lip_2(H) \leqslant \frac{1}{4}$.

Продолжим $H(x,y)$ на $\mathbb{R}^2$, полагая

$$H(x,y) = H(-x,y) = H(x,-y) = H(-x,-y), \quad (x,y) \in (-\infty,0] \times [0,\infty).$$

Таким образом определенная функция H, очевидно, обладает свойством (A3), а свойство (A1) вытекает из (1.25). Оценим $\|H\|_1$ сверху. В силу (1.24)

$$H(x,y) = H(x,y) - H(-k_y a/16, y) \leqslant H(x,0) - H(-k_y a/16, 0)$$

$$= g(x) - g(-k_y a/16), \quad y \geqslant 0, \quad -k_y a/16 \leqslant x \leqslant 0.$$

Поэтому при любом $y \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{0} H(x,y)dx = \int_{-\frac{k_y a}{16}}^{0} H(x,y)dx \leqslant \int_{-\frac{k_y a}{16}}^{0} (g(x) - g(-k_y a/16))dx$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{k_y} \int_{-\frac{ka}{16}}^{-\frac{(k-1)a}{16}} (g(-(k-1)a/16) - g(-k_y a/16))dx$$

$$= \sum_{k=1}^{k_y} \left(\sum_{l=k}^{k_y} d_l \right) \frac{a}{16} = \frac{a}{16} \sum_{l=1}^{k_y} l d_l.$$

Интегрируя все функции последнего соотношения по $y \in (0, 1/4]$, получаем оценку

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{0} H(x,y)dxdy \leqslant \int_0^{(4N\log N)^{-1}} \frac{a^2 N}{1024 \log N} dy + \int_{(4N\log N)^{-1}}^{\frac{1}{4}} \frac{a^2 (4y \log N)^{-1}}{1024 \log N} dy$$

$$\leqslant \frac{a^2}{4096 \log^2 N} + \frac{a^2 \log(4N\log N)}{4096 \log^2 N} \leqslant C_6 \frac{a^2}{\log N} \leqslant C_6 f(a),$$

где $0 < C_6 \leqslant 1/4$. Следовательно,

$$\|H\|_1 = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{0} H(x,y)dxdy$$

$$\leqslant 4C_6 f(a) \leqslant 4C_6 f((64\|H\|_\infty) \wedge 1) \leqslant 4C_6 (64)^3 f(\|H\|_\infty).$$

При этом $\|H\|_1 \leqslant 4C_6 f(a) = 4C_6 r \leqslant r$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство леммы 1.2.7. Пусть $F_X(t) = F_Y(t) = (t + 1/2)_+ \wedge 1$, $t \in \mathbb{R}$. Условие (1.14), очевидно, выполнено. Положим $F_{X,Y}(x,y) = H(x,y) + F_X(x)F_Y(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Заметим, что $F_{X,Y}$ является функцией распределения некоторого случайного вектора (X, Y). Действительно, в силу (A1) приращение $F_{X,Y}$ на любом прямоугольнике неотрицательно. Легко видеть, что $F_{X,Y}$ обладает и другими свойствами ф.р. Кроме того, $cov(\mathbb{I}\{X > x\}, \mathbb{I}\{Y > y\}) = F_{X,Y}(x, y) - F_X(x)F_Y(y) \geqslant 0$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$, откуда вытекает положительная ассоциированность (X, Y) (см., напр., [10], теорема 1.1.5). Лемма доказана. □

1.3. ЦПТ для эмпирических функций распределения

Следствие 1.2.3 позволяет обобщить центральную предельную теорему для эмпирических функций распределения, полученную в работе [101].

Пусть $X = \{X_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ — строго стационарная последовательность случайных величин, имеющих непрерывную ф.р. F. Введем случайные процессы β_n, $n \in \mathbb{N}$, формулой

$$\beta_n(u) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{I}\{X_k \leqslant u\} - F(u)\right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1.3.1. *Предположим, что* $X \in \mathsf{PA} \cup \mathsf{NA}$, *и*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |cov(F(X_0), F(X_k))|^\delta < \infty,$$

при некотором $\delta \in (0, 1/2)$. *Тогда конечномерные распределения процессов* β_n *сходятся при* $n \to \infty$ *к конечномерным распределениям центрированного гауссовского случайного процесса* β *с ковариационной функцией*

$$cov(\beta(u), \beta(v)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} cov(\mathbb{I}\{X_0 \leqslant u\}, \mathbb{I}\{X_k \leqslant v\}), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

В [101] ЦПТ доказана для $\delta = 1/3$ и случая ассоциированной последовательности X. Заметим также, что в [75] функциональная ЦПТ для эмпирических функций распределения получена при условии $cov(F(X_0), F(X_k)) = O(k^{-\alpha})$, $k \to \infty$, для некоторого $\alpha > 4$.

Доказательство теоремы 1.3.1. Отметим, что поскольку $X \in \mathsf{PA}$ или $X \in \mathsf{NA}$, а функция F не убывает, случайные величины (с.в.) $F(X_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, соответственно тоже положительно или отрицательно ассоциированы (см., напр., [10], теорема 1.1.8). Поэтому, согласно рассуждению из [101] (с. 358), в силу непрерывности F достаточно проверить искомое утверждение для $F(x) = x_+ \wedge 1$, $x \in \mathbb{R}$. Далее предполагаем $X \in \mathsf{PA}$. Случай $X \in \mathsf{NA}$ рассматривается аналогично. Воспользуемся приемом Крамера-Уолда и покажем, что для любых $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{R}$, $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$ с.в. $B_n = \sum_{i=1}^p c_i \beta_n(u_i)$ сходятся по распределению к гауссовской случайной величине $B = \sum_{i=1}^p c_i \beta(u_i)$ при $n \to \infty$. Заметим, что из (1.3) вытекает (BL, θ)-зависимость с.в. $\xi_k = \sum_{i=1}^p c_i \mathbb{I}\{X_k \leqslant u_i\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Действительно, последовательность случайных векторов $(\mathbb{I}\{X_k \leqslant u_i\})_{i=1}^p$, $k \in \mathbb{Z}$, положительно ассоциирована, причем

$$\sup_{i=1,\ldots,p} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^p cov(\mathbb{I}\{X_0 \leqslant u_i\}, \mathbb{I}\{X_k \leqslant u_j\})$$

$$= \sup_{i=1,\ldots,p} \sum_{j=1}^p cov(\mathbb{I}\{X_0 \leqslant u_i\}, \mathbb{I}\{X_0 \leqslant u_j\})$$

$$+ \sup_{i=1,\ldots,p} \sum_{j=1}^p \sum_{k\neq 0} cov(\mathbb{I}\{X_0 \leqslant u_i\}, \mathbb{I}\{X_k \leqslant u_j\})$$

$$\leqslant p + p \sum_{k\neq 0} C cov(X_0, X_k)^\delta < \infty,$$

где $C = C(\delta)$ фигурирует в (1.9). Таким образом, в силу ЦПТ для (BL, θ)-зависимых случайных полей из [10] (теорема 3.1.12) с.в. B_n сходятся по распределению при $n \to \infty$ к центрированной гауссовской с.в. с дисперсией

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} cov(\xi_0, \xi_k) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p c_i c_j \sum_{k\in\mathbb{Z}} cov(\mathbb{I}\{X_0 \leqslant u_i\}, \mathbb{I}\{X_k \leqslant u_j\}) = \mathsf{Var}(B).$$

Теорема доказана. $\square$

1.4. Моментная оценка для сумм (BL, θ)-зависимых случайных величин

Введем семейство блоков в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, положив

$$\mathcal{B}_d = \{(a_1, b_1] \times \ldots \times (a_d, b_d],\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i,\ i = 1, \ldots, d\}.$$

Множество $\{x \in \partial B :\ \prod_{i=1}^d (x_i - a_i) = 0\}$ будем называть нижней границей блока $B = (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_d, b_d]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, d$. Здесь ∂B — граница B.

Если $B_1 = (a_1, b_1^{(1)}] \times ... \times (a_d, b_d^{(1)}]$ и $B_2 = (a_1, b_1^{(2)}] \times ... \times (a_d, b_d^{(2)}]$ — два блока из $\mathcal{B}_d$, причем $b_i^{(1)} \leqslant b_i^{(2)}$, $i = 1, \ldots, d$, будем писать $B_1 \lhd B_2$.

Пусть $\mathcal{U}_d \subset \mathcal{B}_d$ — подмножество блоков, вершины которых имеют целочисленные координаты. Нами установлена

Теорема 1.4.1. *Пусть $X = \{X_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ — некоторое центрированное (BL, θ)-зависимое случайное поле с $\theta_X(r) \leqslant Cr^{-\lambda}$, $r \in \mathbb{N}$, где $C, \lambda > 0$. Предположим, что найдется $2 < s \leqslant \infty$, для которого справедливо соотношение*

$$M_s = \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \|X_k\|_s < \infty. \tag{1.26}$$

Тогда для любого блока $U \in \mathcal{U}_d$, и всех $p \in (2, s)$ и $\nu > 0$ выполнено неравенство

$$\mathsf{E}\left|\sum_{k \in U} X_k\right|^p$$

$$\leqslant K\left(|U|^{1+\nu} \max_{k \in U} \mathsf{E}|X_k|^p + |U|^{\gamma} C^{(s-p)/(s-2)} M_s^{s(p-2)/(s-2)} + |U|^{p/2} Q^{p/2}(X)\right). \tag{1.27}$$

Здесь $K = K(d, s, p, \nu, \lambda) > 0$, $\gamma = \max\{(s(p-1) - p - \lambda(s-p)/d)/(s-2), 1+\nu\}$,

$$Q(X) = \sup_{U \in \mathcal{U}_d} \frac{1}{|U|} \mathsf{E}\left(\sum_{k \in U} X_k\right)^2.$$

Подобные моментные оценки играют ключевую роль при доказательстве принципов инвариантности для случайных полей (см., напр., [10], гл. 5). Данный результат обобщает неравенство из [94]. В работе [5] показано, что оценка (1.27) является в определенном смысле оптимальной. Кроме того, в [5] получена схожая оценка для ассоциированных случайных полей, но в несколько более общей постановке задачи. Отметим, что метод доказательства, примененный в [5], не допускает непосредственного обобщения на случай (BL, θ)-зависимых полей, поскольку существенно опирается на неравенство $cov(X, F(Y)) \leqslant Lip(F) cov(X, Y)$, справедливое для ассоциированных квадратично-интегрируемых случайных величин X и Y, но, вообще говоря, неверное, если заменить требование ассоциированности условием (BL, θ)-зависимости.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 1.4.1 верно неравенство $u_X(0) < \infty$, поскольку (BL, θ)-зависимые случайные поля с равномерно ограниченным вторым моментом обладают свойством конечной восприимчивости. Кроме того, справедлива очевидная оценка $Q(X) \leqslant u_X(0)$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, мы установим следующий вспомогательный результат.

Лемма 1.4.2. *Предположим, что условия теоремы* 1.4.1 *справедливы при некотором* $s \in (2, \infty)$. *Пусть* I, J *— два конечных непересекающихся подмножества* $\mathbb{Z}^d$, $|I| + |J| \leqslant n$, $dist(I, J) \geqslant m$, $n, m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$cov\Big(\Big|\sum_{i\in I} X_i\Big|, \Big|\sum_{j\in J} X_j\Big|^{p-1}\Big)$$

$$\leqslant 2(p-1)^{(s-p)/s_p} C^{(s-p)/s_p} M_s^{s(p-2)/s_p} n m^{-\lambda(s-p)/s_p} \Big(\mathsf{E}\Big|\sum_{j\in J} X_j\Big|^p\Big)^{(s-1)(p-2)/s_p},$$

где $s_p = s(p-1) - p$.

Доказательство следует подходу, предложенному в [94]. Возьмем $A > 0$ и рассмотрим функции $f(x) = (x_+ \wedge A)^{p-1}$, $g(x) = x_+^{p-1} - f(x)$. Имеем $\Big|\sum_{j\in J} X_j\Big|^{p-1} = f\Big(\Big|\sum_{j\in J} X_j\Big|\Big) + g\Big(\Big|\sum_{j\in J} X_j\Big|\Big)$. Поэтому

$$cov\Big(\Big|\sum_{i\in I} X_i\Big|, \Big|\sum_{j\in J} X_j\Big|^{p-1}\Big)$$

$$= cov\Big(\Big|\sum_{i\in I} X_i\Big|, f\Big(\Big|\sum_{j\in J} X_j\Big|\Big)\Big) + cov\Big(\Big|\sum_{i\in I} X_i\Big|, g\Big(\Big|\sum_{j\in J} X_j\Big|\Big)\Big) = \Delta_1 + \Delta_2.$$

В силу наложенного условия (BL, θ)-зависимости случайного поля X справедливо неравенство

$$\Delta_1 \leqslant n(p-1)A^{p-2} C m^{-\lambda}.$$

Кроме того,

$$\Delta_2 \leqslant \mathsf{E}\Big|\sum_{i\in I} X_i\Big| g\Big(\Big|\sum_{j\in J} X_j\Big|\Big) \leqslant \sum_{i\in I} \mathsf{E}|X_i| g\Big(\Big|\sum_{j\in J} X_j\Big|\Big)$$

$$\leqslant \sum_{i\in I} \mathsf{E}|X_i| \Big|\sum_{j\in J} X_j\Big|^{p-1} \mathbb{I}\Big(\Big|\sum_{j\in J} X_j\Big| > A\Big)$$

$$\leqslant \sum_{i\in I}\|X_i\|_s\Big(\mathsf{E}\Big|\sum_{j\in J}X_j\Big|^{s(p-1)/(s-1)}\mathbb{I}\Big(\Big|\sum_{j\in J}X_j\Big|>A\Big)\Big)^{(s-1)/s}.$$

Поскольку $p-s(p-1)/(s-1)=\frac{ps-p-sp+s}{s-1}=(s-p)/(s-1)$, верна оценка

$$\mathsf{E}\Big|\sum_{j\in J}X_j\Big|^{s(p-1)/(s-1)}\mathbb{I}\Big(\Big|\sum_{j\in J}X_j\Big|>A\Big)$$

$$\leqslant \mathsf{E}\Big|\sum_{j\in J}X_j\Big|^{p}A^{-(s-p)/(s-1)}\mathbb{I}\Big(\Big|\sum_{j\in J}X_j\Big|>A\Big).$$

Следовательно,

$$\Delta_2\leqslant \sum_{i\in I}\|X_i\|_sA^{-(s-p)/s}\Big(\mathsf{E}\Big|\sum_{j\in J}X_j\Big|^{p}\Big)^{(s-1)/s}$$

$$\leqslant nM_sA^{-(s-p)/s}\Big(\mathsf{E}\Big|\sum_{j\in J}X_j\Big|^{p}\Big)^{(s-1)/s}.$$

Положим

$$a=n(p-1)Cm^{-\lambda},\ b=nM_s\Big(\mathsf{E}\Big|\sum_{j\in J}X_j\Big|^{p}\Big)^{(s-1)/s},\ \alpha=p-2,\ \beta=(s-p)/s.$$

При $A=(ba^{-1})^{1/(\alpha+\beta)}$ выражение $aA^\alpha+bA^{-\beta}$ обращается в $2(a^\beta b^\alpha)^{1/(\alpha+\beta)}$. Так как

$$\alpha+\beta=s_p/s,\ \beta s/s_p=(s-p)/s_p,\ \alpha s/s_p=s(p-2)/s_p,$$

справедливо неравенство

$$\Delta_1+\Delta_2\leqslant 2n\Big((p-1)Cm^{-\lambda}\Big)^{(s-p)/s_p}M_s^{s(p-2)/s_p}\Big(\mathsf{E}\Big|\sum_{j\in J}X_j\Big|^{p}\Big)^{(s-1)(p-2)/s_p}.$$

Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.4.1 следует плану, предложенному в [44] и получившему дальнейшее развитие в [5] и [94]. Идея доказательства состоит в разделении определенным образом области суммирования U на несколько меньших областей с последующим применением предположения индукции (по $|U|$) к каждой из них. База индукции тривиальна, поскольку при $|U|=1$ левая часть (1.27) не превосходит $\max_{k\in U}\mathsf{E}|X_k|^p$. Установим шаг индукции. Доказательство проведем для $s\in(2,\infty)$: случай $s=\infty$ рассматривается аналогично. Без ограничения общности можно считать, что $\nu\leqslant p/2-1$ и $U=(0,n_1]\times\cdots\times(0,n_d]$,

$n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_d > 0$. Пусть $a = a(s,p,\nu)$ — некоторое число из интервала $(0, 1/2)$, выбор которого мы уточним далее. Рассмотрим $m = \lfloor n_1 a \rfloor + 1$, $N = \lfloor n_1/(2m) \rfloor + 1$. Будем предполагать, что $n_1 a \geqslant 1$, так как в противном случае искомое соотношение имеет место при $K = K_0 = a^{-(p-1)d}$ в силу неравенства треугольника в пространстве L_p.

Отметим, что $m \geqslant 1$, $N \geqslant 1$, и $2Nm \geqslant n_1$. Неравенство $n_1 a \geqslant 1$ также обеспечивает оценку $m < n_1$, которая понадобится нам, чтобы применить предположение индукции. Действительно, $n_1 \geqslant a^{-1} > 2$, следовательно, $n_1 \geqslant 3$. Если $n_1 = 3$, то $\lfloor n_1 a \rfloor = 1$, а значит, $m = 2 < 3 = n_1$. Если же $n \geqslant 4$, то $m = \lfloor n_1 a \rfloor + 1 \leqslant n_1/2 + 1 \leqslant n_1/2 + (n_1/2 - 1) = n_1 - 1 < n_1$.

Положим

$$L_j = \{k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : \ k_1 \in [(j-1)m + 1, jm \wedge n_1]\}, \quad j = 1, \ldots, 2N.$$

Введем обозначения

$$\xi_i = \sum_{k \in L_{2i-1}} X_k, \ \eta_i = \sum_{k \in L_{2i}} X_k, \ i = 1, \ldots, N,$$

$$S_1(U) = \sum_{i=1}^N \xi_i, \ S_2(U) = \sum_{i=1}^N \eta_i, \ S(U) = S_1(U) + S_2(U),$$

где сумма по пустому множеству индексов полагается равной нулю. Используя неравенство $|a+b|^r \leqslant (2^{r-1} \vee 1)(|a|^r + |b|^r)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $r > 0$, получаем

$$\mathsf{E}|S(U)|^p \leqslant 2^{p-1}(\mathsf{E}|S_1(U)|^p + \mathsf{E}|S_2(U)|^p). \tag{1.28}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}|S_1(U)|^p \\
&= \mathsf{E}|S_1(U)||S_1(U)|^{p-1} \leqslant \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^N |\xi_i|\right)|S_1(U)|^{p-1} = \sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i||S_1(U)|^{p-1} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i| 2^{p-2}(|\xi_i|^{p-1} + |S_1(U) - \xi_i|^{p-1}) \\
&= 2^{p-2}\left(\sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|^p + \sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i||S_1(U) - \xi_i|^{p-1}\right)
\end{aligned}$$

$$= 2^{p-2}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}|\xi_i|^p + \sum_{i=1}^{N} cov(|\xi_i|, |S_1(U)-\xi_i|^{p-1}) + \sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}|\xi_i|\mathsf{E}|S_1(U)-\xi_i|^{p-1}\right).$$

Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}|\xi_i|\mathsf{E}|S_1(U)-\xi_i|^{p-1}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}|\xi_i|2^{p-2}(\mathsf{E}|\xi_i|^{p-1}+\mathsf{E}|S_1(U)|^{p-1})$$

$$= 2^{p-2}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}|\xi_i|\mathsf{E}|\xi_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}|\xi_i|\mathsf{E}|S_1(U)|^{p-1}\right)$$

$$\leqslant 2^{p-2}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}|\xi_i|^p + \sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}|\xi_i|\left(\mathsf{E}|S_1(U)|^p\right)^{1-1/p}\right).$$

При получении последнего неравенства мы воспользовались тем (см. [10], теорема 1.1.8), что если X — с.в., то $\{|X|\}$ — ассоциированное семейство, следовательно, $cov(|X|, |X|^{p-1}) = cov(|X|_+, |X|_+^{p-1}) \geqslant 0$. В силу леммы 1.4.2 для $i = 1, \ldots, N$ справедлива оценка

$$cov(|\xi_i|, |S_1(U)-\xi_i|^{p-1})$$

$$\leqslant DC^{(s-p)/s_p}M_s^{s(p-2)/s_p}|U|m^{-\lambda(s-p)/s_p}\left(\mathsf{E}|S_1(U)-\xi_i|^p\right)^{(s-1)(p-2)/s_p}.$$

Здесь и далее множители $0 < D, D_1, \ldots$ зависят только от s и p. Таким образом,

$$\mathsf{E}|S_1(U)|^p \leqslant (2^{2(p-2)}+2^{p-2})\sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}|\xi_i|^p + 2^{2(p-2)}\sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}|\xi_i|\left(\mathsf{E}|S_1(U)|^p\right)^{1-1/p}$$

$$+\sum_{i=1}^{N} DC^{(s-p)/s_p}M_s^{s(p-2)/s_p}|U|m^{-\lambda(s-p)/s_p}\left(\mathsf{E}|S_1(U)-\xi_i|^p\right)^{(s-1)(p-2)/s_p}.$$

Заметим, что при любом $i \in \{1, \ldots, N\}$

$$\left(\mathsf{E}|S_1(U)-\xi_i|^p\right)^{(s-1)(p-2)/s_p}$$

$$\leqslant 2^{(s-1)(p-1)(p-2)/s_p}\left(\left(\mathsf{E}|S_1(U)|^p\right)^{(s-1)(p-2)/s_p} + \left(\mathsf{E}|\xi_i|^p\right)^{(s-1)(p-2)/s_p}\right).$$

Кроме того, поскольку

$$1-(s-1)(p-2)/s_p = (sp-s-p-sp+2s+p-2)/(sp-s-p) = (s-2)/s_p,$$

в силу соотношения (4.27) из [94] имеет место неравенство

$$C^{(s-p)/s_p} M_s^{s(p-2)/s_p} |U| m^{-\lambda(s-p)/s_p} (\mathsf{E}|\xi_i|^p)^{(s-1)(p-2)/s_p}$$

$$= \left(\left(C^{(s-p)/s_p} M_s^{s(p-2)/s_p} |U| m^{-\lambda(s-p)/s_p}\right)^{s_p/(s-2)}\right)^{(s-2)/s_p} (\mathsf{E}|\xi_i|^p)^{(s-1)(p-2)/s_p}$$

$$\leqslant \left(C^{(s-p)/s_p} M_s^{s(p-2)/s_p} |U| m^{-\lambda(s-p)/s_p}\right)^{s_p/(s-2)} + \mathsf{E}|\xi_i|^p.$$

В итоге имеем

$$\mathsf{E}|S_1(U)|^p \leqslant D_1 \sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|^p + D_1 \sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i| \left(\mathsf{E}|S_1(U)|^p\right)^{1-1/p}$$

$$+D_1 N C^{(s-p)/s_p} M_s^{s(p-2)/s_p} |U| m^{-\lambda(s-p)/s_p} (\mathsf{E}|S_1(U)|^p)^{1-(s-2)/s_p}$$

$$+D_1 N \left(C^{(s-p)/s_p} M_s^{s(p-2)/s_p} |U| m^{-\lambda(s-p)/s_p}\right)^{s_p/(s-2)}.$$

По лемме 4.4 из [94] последнее неравенство влечет оценку

$$\mathsf{E}|S_1(U)|^p \leqslant D_2 \sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|^p + D_2 \left(\sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|\right)^p$$

$$+D_2 \left(N C^{(s-p)/s_p} M_s^{s(p-2)/s_p} |U| m^{-\lambda(s-p)/s_p}\right)^{s_p/(s-2)}$$

$$+D_2 N \left(C^{(s-p)/s_p} M_s^{s(p-2)/s_p} |U| m^{-\lambda(s-p)/s_p}\right)^{s_p/(s-2)}$$

$$\leqslant D_3 \sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|^p + D_3 \left(\sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|\right)^p + D_3 \left(N C^{(s-p)/s_p} M_s^{s(p-2)/s_p} |U| m^{-\lambda(s-p)/s_p}\right)^{s_p/(s-2)}$$

$$= D_3 \sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|^p + D_3 \left(\sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|\right)^p$$

$$+D_3 C^{(s-p)/(s-2)} M_s^{s(p-2)/(s-2)} N^{s_p/(s-2)} |U|^{s_p/(s-2)} m^{-\lambda(s-p)/(s-2)}.$$

Кроме того,

$$\mathsf{E}|\xi_i| \leqslant \left(\mathsf{E}\xi_i^2\right)^{1/2} \leqslant Q^{1/2}(X)|U|^{1/2},\ i = 1, \ldots, N.$$

Поэтому

$$\mathsf{E}|S_1(U)|^p \leqslant D_3 \sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|^p + D_3 N^p Q^{p/2}(X)|U|^{p/2}$$

$$+D_3 C^{(s-p)/(s-2)} M_s^{s(p-2)/(s-2)} N^{s_p/(s-2)} |U|^{s_p/(s-2)} m^{-\lambda(s-p)/(s-2)}.$$

Аналогичным образом устанавливается соотношение

$$\mathsf{E}|S_2(U)|^p \leqslant D_3 \sum_{i=1}^{N} \mathsf{E}|\eta_i|^p + D_3 N^p Q^{p/2}(X)|U|^{p/2}$$

$$+D_3 C^{(s-p)/(s-2)} M_s^{s(p-2)/(s-2)} N^{s_p/(s-2)} |U|^{s_p/(s-2)} m^{-\lambda(s-p)/(s-2)}.$$

Используя оценку (1.28), неравенства $m^{-\lambda} \leqslant (an_1)^{-\lambda} \leqslant a^{-\lambda}|U|^{-\lambda/d}$, $N \leqslant n_1/(2m) + 1 \leqslant 1/(2a) + 1 \leqslant a^{-1}$, $m \leqslant 2an_1$ и предположение индукции, получаем

$$\mathsf{E}|S(U)|^p \leqslant D_4 a^{-1} K \Big((a|U|)^{1+\nu} \max_{k\in U} \mathsf{E}|X_k|^p + (a|U|)^{p/2} Q^{p/2}(X)$$

$$+(a|U|)^{(s(p-1)-p-\lambda(s-p)/d)/(s-2)\vee(1+\nu)} C^{(s-p)/(s-2)} M_s^{s(p-2)/(s-2)} \Big)$$

$$+D_4 a^{-p} Q^{p/2}(X)|U|^{p/2}$$

$$+D_4 C^{(s-p)/(s-2)} M_s^{s(p-2)/(s-2)} a^{-s_p/(s-2)} |U|^{s_p/(s-2)} \left(a^{-\lambda}|U|^{-\lambda/d}\right)^{(s-p)/(s-2)}.$$

Последние два слагаемых можно сделать меньше соответствующих слагаемых искомой оценки, поделенных на два, путем выбора достаточно большого $K = K(a, D_4)$. Внутри скобки, домножаемой на $D_4 a^{-1} K$, каждое слагаемое содержит a в степени не менее чем $1+\nu$, соответственно, при сокращении с a^{-1} получится число, не превосходящее a^{ν}. Выбирая a так, что $a^{\nu} D_4 \leqslant 1/2$, получаем искомое утверждение. Теорема доказана. □

В дальнейшем нам потребуются следующие два следствия теоремы 1.4.1.

Следствие 1.4.3. *Если выполнены условия теоремы* 1.4.1, *то найдется множитель* $D > 0$ *и такое* $p \in (2, s)$, *что для любого блока* $U \in \mathcal{U}_d$ *верна оценка*

$$\mathsf{E}|S(U)|^p \leqslant D|U|^{p/2}. \tag{1.29}$$

Доказательство. Можно считать $s \in (2, \infty)$. Достаточно найти $p \in (2, s)$ такое, что

$$(s(p-1) - p - \lambda(s-p)/d)/(s-2) \leqslant p/2,$$

а потом подобрать $\nu > 0$, чтобы выполнялось неравенство $1 + \nu \leqslant p/2$. Имеем

$$(s(p-1) - p - \lambda(s-p)/d)/(s-2) \leqslant p/2$$

$$\Leftrightarrow 2sp - 2s - 2p - 2\lambda(s-p)/d \leqslant ps - 2p$$

$$\Leftrightarrow sp - 2s - 2\lambda(s-p)/d \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (s + 2\lambda/d)p \leqslant s(2\lambda/d + 2).$$

Такое p существует тогда и только тогда, когда $s(2\lambda/d+2) > 2(s+2\lambda/d)$, т.е. $2\lambda/d(s-2) > 0$. Последнее неравенство справедливо при любых $s > 2$ и $d \in \mathbb{N}$. Следствие доказано. □

Следствие 1.4.3 обобщает оценку из [51], поскольку в последней работе налагаются дополнительные ограничения на λ. Еще одно обобщение оценки из [51] было получено в [25], где вместо сумм по параллелепипедам рассматривалось суммирование по произвольным конечным множествам. Далее мы применим следствие 1.4.3 к доказательству слабого принципа инвариантности для (BL,θ)-зависимых случайных полей. Отметим, что неравенства вида (1.29) также используются, например, для оценки скорости сходимости в статистическом варианте ЦПТ для таких полей [50].

Следствие 1.4.4. *Предположим, что условия теоремы* 1.4.1 *выполнены при* $s = \infty$. *Тогда оценку* (1.27) *можно записать в виде*

$$\mathsf{E}\left|\sum_{k\in U} X_k\right|^p \leqslant K\left(|U|^{1+\nu} + C|U|^{(1+\nu)\vee(p-1-\lambda/d)} + Q^{p/2}(X)|U|^{p/2}\right),$$

где K *зависит только от* d, M_∞, p, ν *и* λ.

Следствие 1.4.4 понадобится нам при доказательстве ФЦПТ для объемов экскурсионных множеств.

1.5. ФЦПТ для (BL,θ)-зависимых случайных величин

Пусть $X = \{X_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ — стационарное в широком смысле центрированное случайное поле. Для $n = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ положим

$$W_n(t) = \langle n\rangle^{-1/2} \sum_{k\in(0,n\star t]\cap\mathbb{Z}^d} X_k, \quad t \in [0,1]^d. \tag{1.30}$$

Здесь $x * y = (x_1y_1, \ldots, x_dy_d)$, $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, $\langle n\rangle = n_1 \ldots n_d$. Будем говорить, что поле X удовлетворяет слабому принципу инвариантности (функциональной центральной предельной теореме), если имеет место сходимость по распределению в пространстве Скорохода $D([0,1]^d)$ (см., напр., [43], с. 1662)

$$W_n \xrightarrow{d} \sigma W, \quad n \to \infty, \tag{1.31}$$

где W есть d-параметрическое броуновское движение (случайное поле Винера-Ченцова или броуновский лист; см., напр., [29], с. 33), а σ — некоторое неотрицательное число. Здесь и далее сходимость при $n \to \infty$, где $n \in \mathbb{N}^d$, понимается в секвенциальном смысле: для любой последовательности $n^{(k)} = (n_1^{(k)}, \ldots, n_d^{(k)}) \in \mathbb{N}^d$ с $n_l^{(k)} \to \infty$, $k \to \infty$, $l = 1, \ldots, d$, сходимость имеет место, и предел не зависит от выбора такой последовательности.

Нами установлена

Теорема 1.5.1. *Предположим, что описанное выше случайное поле X является (BL, θ)-зависимым, и*

$$\theta_X(r) = O(r^{-\lambda}), \quad r \to \infty, \tag{1.32}$$

где $\lambda > 0$. Пусть также справедливо соотношение (1.26). *Тогда X удовлетворяет слабому принципу инвариантности, причем*

$$\sigma^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} cov(X_0, X_k).$$

В [49] соотношение (1.31) доказывается при более жестких условиях на поле X: вместо (BL, θ)-зависимости требуется ассоциированность, и, соответственно, вместо $\theta_X(r) = O(r^{-\lambda})$ используется соотношение $u_X(r) = O(r^{-\lambda})$, где u_X — коэффициент Кокса-Гримметта случайного поля X (см. (1.5)). Теорема 1.5.1 также обобщает пункт (д) теоремы 5.1.5 из [10], в котором тоже рассматриваются (BL, θ)-зависимые случайные поля, однако при этом вводятся дополнительные ограничения на λ.

Интересно отметить, что при определенных условиях для выполнения (1.31) необязательно требовать справедливость оценки (1.26). Пусть поле X квадратично интегрируемо и строго стационарно. Тогда если X является (BL, θ)-зависимым, и $\lambda > 3d$, где λ фигурирует а (1.32), то имеет место (1.31) (см. [36]). Соотношение (1.31) также выполнено и для отрицательно ассоциированного поля X (см. [102]). Кроме того, с помощью красивого применения техники демимартингалов в работе [84] принцип инвариантности был установлен для случая $X \in \mathsf{PA}$ и $d \leqslant 2$. К сожалению, этот метод не работает при размерности $d \geqslant 3$, поскольку требует, чтобы естественный частичный порядок на множестве $\mathbb{R}^{d-1}$ являлся отношением порядка.

Отметим, что впервые результат, устанавливающий сходимость (1.31), был получен в работе [63] для независимых одинаково распределенных квадратично интегрируемых случайных величин. В дальнейшем он получил множество обобщений. Скажем, вариант ФЦПТ для случайных величин, обладающих свойством перемешивания, содержится в [3] (теорема 20.1). Ряд работ также посвящен доказательству слабого принципа инвариантности в пространстве L_2 (см., напр., [85], [87]).

Доказательство теоремы 1.5.1. Сходимость конечномерных распределений случайных полей W_n к конечномерным распределениям поля W является следствием теоремы 3.1.21, а также лемм 5.1.8 и 5.1.9 из [10]. Секвенциальная плотность распределений W_n вытекает из следствия 1.4.3, леммы 5.1.7 (случай (б)) и теоремы 5.1.3 из [10]. Остается отметить, что слабая сходимость мер в пространстве Скорохода $D([0,1]^d)$ следует из их плотности и сходимости конечномерных распределений (см., напр., [43], с. 1663). Теорема доказана. $\square$

Глава 2. Предельные теоремы для объемов экскурсионных множеств случайных полей

В данной главе рассматриваются приложения полученных в первой главе ковариационных и моментных оценок к исследованию асимптотических свойств объемов экскурсионных множеств стационарных случайных полей. Основными результатами главы являются теоремы 2.2.1 и 2.3.1, устанавливающие ФЦПТ для объемов экскурсионных множеств ассоциированных и квазиассоциированных случайных полей. Ряд вспомогательных результатов данной главы используется далее в главе 3.

2.1. ЦПТ для объемов экскурсионных множеств ассоциированных случайных полей

В последние годы активно исследуются различные геометрические характеристики экскурсионных множеств и множеств уровня случайных полей. Интерес к подобным стохастическим объектам обусловлен широким кругом как математических, так и естественнонаучных приложений, в которых они возникают (см., напр., [39], [40]). В монографии [26] (теорема 2.4.6) получена ЦПТ для объемов экскурсионных множеств гауссовских случайных полей с непрерывной ковариационной функцией, заданных на последовательности расширяющихся шаров. В [52] ЦПТ такого рода установлена для более широкого класса квазиассоциированных случайных полей. Отметим также, что в [78] доказана ФЦПТ в пространстве Скорохода $D(\mathbb{R})$ для объемов экскурсионных множеств ассоциированных полей, рассматриваемых как функции экскурсионного уровня.

Говорят, что последовательность ограниченных измеримых множеств $V_n \subset \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *растет в смысле Ван Хова*, если $|V_n| \to \infty$, и для любого $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\frac{|\partial V_n \oplus [-\varepsilon, \varepsilon]^d|}{|V_n|} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Здесь $\oplus$ обозначает сложение по Минковскому. Если $U_n \subset \mathbb{Z}^d$, $n \in \mathbb{N}$, — такая последовательность конечных множеств, что

$$|U_n| \longrightarrow \infty, \quad \frac{|\partial U_n|}{|U_n|} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

то U_n, $n \in \mathbb{N}$, называют *регулярно растущей*. Известно (см., напр., [10], лемма 3.1.5), что если последовательность $V_n \subset \mathbb{Z}^d$, $n \in \mathbb{N}$, растет в смысле Ван Хова, то последовательность $U_n = V_n \cap \mathbb{Z}^d$ является регулярно растущей.

Рассмотрим $\xi = \{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}^d\}$ — квадратично интегрируемое измеримое строго стационарное случайное поле с непрерывной ковариационной функцией. Предположим, что ξ_0 имеет плотность p_{ξ_0} такую, что $\|p_{\xi_0}\|_\infty \leqslant a$. Пусть V — некоторое ограниченное измеримое подмножество $\mathbb{R}^d$. Возьмем произвольное $u \in \mathbb{R}$ и введем экскурсионное множество

$$A(V,u) = A_\xi(V,u) = \{t \in V:\ \xi_t > u\}. \tag{2.1}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathsf{Var}|A(V,u)| &= \int_V \int_V cov(\mathbb{I}\{\xi_s > u\}, \mathbb{I}\{\xi_t > u\}) ds dt \\ &\leqslant |V| \int_{\mathbb{R}^d} |cov(\mathbb{I}\{\xi_0 > u\}, \mathbb{I}\{\xi_t > u\})| dt. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Пусть V_n, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность множеств, растущая в смысле Ван Хова. В [52] показано, что если случайное поле ξ квази-ассоциировано, и

$$R(t) = cov(\xi_0, \xi_t) = O(|t|^{-\alpha}),\ |t| \to \infty, \tag{2.3}$$

где $\alpha > 3d$, то при любом действительном уровне экскурсии u последовательность случайных величин $|A(V_n,u)|$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет центральной предельной теореме:

$$\frac{|A(V_n,u)| - \mathsf{E}|A(V_n,u)|}{\sqrt{|V_n|}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(u)), \ \ n \to \infty, \tag{2.4}$$

где

$$\sigma^2(u) = \int_{\mathbb{R}^d} cov(\mathbb{I}\{\xi_0 > u\}, \mathbb{I}\{\xi_t > u\}) dt. \tag{2.5}$$

Если наложить на ξ более жесткое условие ассоциированности и воспользоваться следствием 1.2.3, то можно получить ЦПТ (2.4) при менее строгих ограничениях на ковариационную функцию ξ.

Теорема 2.1.1. *Если описанное выше случайное поле $\xi \in A$, и* (2.3) *справедливо при некотором $\alpha > 2d$, то имеет место* (2.4).

Доказательство является упрощенным вариантом доказательства из [52], в котором вместо оценки (1.7) (точнее ее версии для квази-ассоциированных случайных величин) используется следствие 1.2.3. Введем множества

$$U_n = V_n \cap \mathbb{Z}^d,\ W_n^+ = V_n \backslash (U_n \oplus (0,1]^d),\ W_n^- = (U_n \oplus (0,1]^d) \backslash V_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$Z_n = |A(W_n^+, u)| - \mathsf{E}|A(W_n^+, u)| - (|A(W_n^-, u)| - \mathsf{E}|A(W_n^-, u)|)$$

$$= |A(V_n, u)| - \mathsf{E}|A(V_n, u)| - (|A(U_n \oplus (0,1]^d, u)| - \mathsf{E}|A(U_n \oplus (0,1]^d, u)|), \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу (2.2) справедливо неравенство

$$\mathsf{Var} \frac{Z_n}{\sqrt{|V_n|}} \leqslant 4 \frac{|\partial V_n \oplus [-1,1]^d|}{|V_n|} \sigma^2(u), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $n \to \infty$, поскольку

$$\sigma^2(u) \leqslant C(\delta) a^{2\delta} \int_{\mathbb{R}^d} R^\delta(t) dt < \infty, \quad \delta \in (d/\alpha, 1/2),$$

где функция C фигурирует в (1.9). Таким образом, по лемме Слуцкого достаточно установить ЦПТ (2.4) для случая $V_n = U_n \oplus (0,1]^d$, где U_n, $n \in \mathbb{N}$, — регулярно растущая последовательность подмножеств $\mathbb{Z}^d$.

Рассмотрим случайное поле $X = \{X_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$, где $X_k = |A(k \oplus (0,1]^d, u)|$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Легко видеть, что X удовлетворяет условию конечной восприимчивости. Поэтому для того, чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно показать, что X является ассоциированным, а затем применить ЦПТ для (BL, θ)-зависимых случайных полей (см. [10], теорема 3.1.12). Рассмотрим последовательность ассоциированных полей

$$X_k^{(N)} = \frac{1}{N^d} \sum_{l \in \mathbb{Z}_N^d} \mathbb{I}\{\xi_{k+l/N} > u\}, \quad k \in \mathbb{Z}^d, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Для $N \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}^d$ имеем п.н.

$$X_k - X_k^{(N)} = \sum_{l \in \mathbb{Z}_N^d} \left(\int_{k+l/N \oplus (0,1/N]^d} \left(\mathbb{I}\{\xi_t > u\} - \mathbb{I}\{\xi_{k+l/N} > u\} \right) dt \right).$$

Введем семейство функций

$$h_{v,\gamma}(x) = \Big(\gamma^{-1}(x - v + \gamma)_+\Big) \wedge 1, \quad v \in \mathbb{R}, \quad \gamma > 0. \tag{2.6}$$

Возьмем произвольное $\gamma > 0$. Заметим, что

$$\mathsf{E}|h_{u,\gamma}(\xi_0) - \mathbb{I}\{\xi_0 > u\}| = \int_{\mathbb{R}} |h_{u,\gamma}(x) - \mathbb{I}\{x > u\}| p_{\xi_0}(x) dx$$

$$= \int_{u-\gamma}^{u} |h_{u,\gamma}(x) - \mathbb{I}\{x > u\}| p_{\xi_0}(x) dx \leqslant a\gamma, \tag{2.7}$$

При $l \in \mathbb{Z}_N^d$ и $t \in (k + l/N \oplus (0, 1/N]^d)$ справедлива цепочка неравенств

$$\mathsf{E}|\mathbb{I}\{\xi_t > u\} - \mathbb{I}\{\xi_{k+l/N} > u\}| \leqslant 2a\gamma + \mathsf{E}|h_{u,\gamma}(\xi_t) - h_{u,\gamma}(\xi_{k+l/N})|$$

$$\leqslant 2a\gamma + \gamma^{-1}\mathsf{E}|\xi_t - \xi_{k+l/N}| \leqslant 2a\gamma + \gamma^{-1}\sqrt{\mathsf{E}(\xi_t - \xi_{k+l/N})^2}$$

$$\leqslant 2a\gamma + \gamma^{-1} \sup_{\|t\|_\infty \leqslant 1/N} \sqrt{2(R(0) - R(t))}.$$

В силу непрерывности ковариационной функции R и произвольности выбора $\gamma > 0$ имеем $\mathsf{E}|X_k - X_k^{(N)}| \to 0$, $N \to \infty$. Значит, конечномерные распределения случайных полей $X^{(N)}$ сходятся к конечномерным распределениям X, когда $N \to \infty$. Следовательно, X также является ассоциированным (см., напр., [10], теорема 1.1.8). Теорема доказана. □

2.2. ФЦПТ для объемов экскурсионных множеств ассоциированных случайных полей

Зафиксируем некоторое действительное число u и рассмотрим случайное поле $\xi = \{\xi_t, t \in \mathbb{R}^d\}$, удовлетворяющее условиям теоремы 2.1.1. Введем семейство полей

$$S_n(t) = \langle n \rangle^{-1/2} \left(|A((0, n * t], u)| - \mathsf{E}|A((0, n * t], u)|\right), \quad t \in [0,1]^d, \quad n \in \mathbb{N}^d,$$

где A определено в (2.1). Следующее утверждение является функциональным вариантом теоремы 2.1.1.

Теорема 2.2.1. *Случайные поля S_n сходятся по распределению в пространстве $C([0,1]^d)$ при $n \to \infty$ к центрированному гауссовскому случайному* *полю $\sigma(u)W$, где σ фигурирует в (2.5), а W — d-параметрическое броуновское движение.*

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, мы установим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.2.2. *При каждом $p > 2$ и любом $\nu > 0$ найдется такой множитель $D > 0$, что для произвольного блока $B \in \mathcal{B}_d$ верна оценка*

$$\mathsf{E}\,||A(B,u)| - \mathsf{E}|A(B,u)||^p \leqslant D\left(|B|^{\left(1\vee\left(p-\frac{\alpha}{2d}\right)\right)+\nu} + |B|^{p/2}\right). \tag{2.8}$$

Доказательство. Если $|B| \leqslant 1$, то

$$\mathsf{E}\,||A(B,u)| - \mathsf{E}|A(B,u)||^p \leqslant \mathsf{E}|B|^p = |B|^p \leqslant |B|^{p/2},$$

а значит, неравенство (2.8) выполнено при $D = 1$. Рассмотрим случай $|B| > 1$. Без ограничения общности можно считать, что $B = (0, b_1] \times \cdots \times (0, b_d]$, где $b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_d > 0$. Пусть

$$q = \max\{i : \prod_{j=i}^{d} b_j > 1\}. \tag{2.9}$$

Заметим, что при $j = 1, \ldots, q$ справедливо неравенство $b_j > 1$. Для таких j определим

$$k_j = \begin{cases} \lfloor b_j \rfloor + 1, & j \in \{1, \ldots, q-1\}, \\ \left\lfloor \prod_{i=q}^{d} b_i \right\rfloor + 1, & j = q. \end{cases} \tag{2.10}$$

Легко видеть, что

$$b_j / k_j \geqslant 1/2, \quad j = 1, \ldots, q. \tag{2.11}$$

Действительно, при $j = 1, \ldots, q-1$ имеем

$$\frac{b_j}{k_j} = \frac{b_j}{\lfloor b_j \rfloor + 1} \geqslant \frac{b_j}{b_j + 1} > \frac{b_j}{2b_j} = \frac{1}{2}.$$

В то же время при $j = q$

$$\frac{b_j}{k_j} = \frac{b_q}{\left\lfloor \prod_{i=q}^{d} b_i \right\rfloor + 1} \geqslant \frac{b_q}{\left(\prod_{i=q}^{d} b_i\right) + 1} > \frac{b_q}{2\prod_{i=q}^{d} b_i} = \frac{1}{2\prod_{i=q+1}^{d} b_i} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Введем строго стационарное случайное поле $X = \{X_i,\ i \in \mathbb{Z}^q\}$ формулой

$$X_i = |A(B_i, u)| - \mathsf{E}\,|A(B_i, u)|, \quad i = (i_1, \ldots, i_q) \in \mathbb{Z}^q,$$

где

$$B_i = \bigotimes_{j=1}^{q} \left(\frac{i_j b_j}{k_j}, \frac{(i_j+1)b_j}{k_j} \right] \times \bigotimes_{j=q+1}^{d} (0, b_j], \quad i = (i_1, \dots, i_q) \in \mathbb{Z}^q. \qquad (2.12)$$

Отметим, что

$$|X_i| \leqslant |B_i| \leqslant \prod_{j=1}^{q} \frac{b_j}{k_j} \prod_{j=q+1}^{d} b_j \leqslant \left(\prod_{j=1}^{q-1} 1 \right) \frac{b_q}{b_q \dots b_d} \prod_{j=q+1}^{d} b_j = 1, \ i \in \mathbb{Z}^q. \qquad (2.13)$$

Точно так же, как и при доказательстве теоремы 2.1.1, получаем, что случайное поле X является ассоциированным. В силу (2.11) и (2.13) коэффициент Кокса-Гриммета $u_X(r)$ при любом $r \in \mathbb{N}$ допускает оценку

$$\begin{aligned} u_X(r) &\leqslant \int_{B_0} \int_{\|t-s\|_\infty \geqslant (r-1)/2} cov(\mathbb{I}\{\xi_s > u\}, \mathbb{I}\{\xi_t > u\}) ds dt \\ &\leqslant \int_{\|t\|_\infty \geqslant (r-1)/2} cov(\mathbb{I}\{\xi_0 > u\}, \mathbb{I}\{\xi_t > u\}) dt. \qquad (2.14) \end{aligned}$$

Пусть $\delta = \delta(\alpha, \nu, d)$ — некоторое число из интервала $(d/\alpha, 1/2)$, выбор которого мы уточним далее. По следствию 1.2.3 правая часть соотношения (2.14) не превосходит

$$C(\delta) a^{2\delta} \int_{\|t\|_\infty \geqslant (r-1)/2} R^\delta(t) dt \leqslant D_1 r^{d - \alpha\delta},$$

и справедливо неравенство

$$Q(X) \leqslant u_X(0) \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} cov(\mathbb{I}\{\xi_0 > u\}, \mathbb{I}\{\xi_t > u\}) dt \leqslant D_2.$$

Здесь R — ковариационная функция случайного поля ξ, а $D_1, D_2 > 0$ зависят только от a, d, α, δ и R. Введем

$$U = (-1, k_1 - 1] \times \dots \times (-1, k_q - 1] \in \mathcal{U}_q.$$

Заметим, что в силу (2.11)

$$|U| = \prod_{j=1}^{q} k_j \leqslant \left(\prod_{j=1}^{q-1} 2b_j \right) 2 \prod_{j=q}^{d} b_j = 2^q |B| \leqslant 2^d |B|.$$

Без ограничения общности можно предполагать, что $\nu \leqslant p/2 - 1$, и поэтому $|U|^{1+\nu} \leqslant |U|^{p/2}$. По следствию 1.4.4 имеем

$$\mathsf{E}\, ||A(B,u)| - \mathsf{E}|A(B,u)||^p = \mathsf{E} \left| \sum_{i \in U} X_i \right|^p$$

$$\leqslant K\left(|U|^{1+\nu} + D_1|U|^{(1+\nu)\vee(p-1-(\alpha\delta-d)/q)} + D_2^{p/2}|U|^{p/2}\right)$$
$$\leqslant K\left(D_1(2^d|B|)^{(1+\nu)\vee(p-1-(\alpha\delta-d)/d)} + (D_2^{p/2}+1)(2^d|B|)^{p/2}\right)$$
$$= K\left(D_1(2^d|B|)^{(1+\nu)\vee(p-(\alpha\delta)/d)} + (D_2^{p/2}+1)(2^d|B|)^{p/2}\right).$$

Осталось показать, что можно выбрать $\delta \in (d/\alpha, 1/2)$, для которого имеет место оценка

$$(1+\nu)\vee(p-(\alpha\delta)/d) \leqslant \left(1 \vee \left(p - \frac{\alpha}{2d}\right)\right) + \nu.$$

Однако последнее соотношение вытекает из неравенства

$$p - (\alpha\delta)/d - \nu \leqslant p - \frac{\alpha}{2d},$$

которое справедливо при любом $\delta \in (1/2 - d\nu/\alpha, 1/2)$. Лемма доказана. □

Пусть f — действительная функция на $\mathbb{R}^d$, $B = B_{d-1} \times B_1 \in \mathcal{B}_d$, где $B_{d-1} \in \mathcal{B}_{d-1}$, $B_1 = (a, b] \in \mathcal{B}_1$. Определим по индукции приращение функции f на блоке B формулой

$$f(B) = f(B_{d-1}, b) - f(B_{d-1}, a).$$

Легко видеть, что значение $f(B)$ инвариантно относительно изменения порядка нумерации координат в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Лемма 2.2.3. *Рассмотрим $S = \{S(t),\ t \in B \cup \partial B\}$ — случайное поле с п.н. непрерывными траекториями, заданное на замыкании блока $B \in \mathcal{B}_d$. Пусть для некоторых $\gamma \geqslant 1$, $\alpha, \beta > 1$, $a, b > 0$ и для любого блока $\tilde{B} \subset B$, $\tilde{B} \in \mathcal{B}_d$, выполнено неравенство*

$$\mathsf{E}|S(\tilde{B})|^\gamma \leqslant a|\tilde{B}|^\alpha + b|\tilde{B}|^\beta.$$

Тогда

$$\mathsf{E}\sup_{\tilde{B}\lhd B}|S(\tilde{B})|^\gamma \leqslant K(a|B|^\alpha + b|B|^\beta),$$

где $K = K(d, \gamma, \alpha, \beta) > 0$, а знак $\lhd$ определен на с. 35.

Доказательство. Без ограничения общности можем рассмотреть $B = (0, s]$, $s \in \mathbb{R}_+^d$. Поскольку траектории S непрерывны с вероятностью единица, по лемме Фату имеет место равенство

$$\mathsf{E}\sup_{t\in(0,s]}|S((0,t])|^\gamma \leqslant \liminf_{N\to\infty}\mathsf{E}\max_{t=(k*s+s)/N,\ k\in\mathbb{Z}_N^d}|S((0,t])|^\gamma.$$

Поэтому достаточно доказать при каждом $N \in \mathbb{N}$ оценку

$$\mathsf{E} \max_{t=(k*s+s)/N,\, k\in\mathbb{Z}_N^d} |S((0,t])|^\gamma \leqslant K(d,\gamma,\alpha,\beta)(a|B|^\alpha + b|B|^\beta).$$

Рассмотрим $\mu = \mu(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+1}{2\alpha} \vee \frac{\beta+1}{2\beta} < 1$. Проверим, что функция $f_{B,N}(x) = (a(N^{-d}|B|x)^\alpha + b(N^{-d}|B|x)^\beta)^\mu$, $x \geqslant 0$, является супераддитивной, т.е. $f_{B,N}(x+y) \geqslant f_{B,N}(x) + f_{B,N}(y)$, $x, y \geqslant 0$. Действительно, пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ имеет непрерывную неотрицательную вторую производную на $(0,\infty)$, и $f(0) = 0$. Тогда для $x \geqslant y > 0$ имеем

$$f(x+y) - f(x) = \int_x^{x+y} f'(u)du \geqslant yf'(x)$$

$$\geqslant yf'(y) = \int_0^y f'(y)du \geqslant \int_0^y f'(u)du = f(y).$$

Значит, f супераддитивна. Покажем теперь, что для любых $c_\alpha, c_\beta > 0$ вторая производная функции $g^\mu(x) = (c_\alpha x^\alpha + c_\beta x^\beta)^\mu$ неотрицательна при $x \in (0,\infty)$. Справедливо представление

$$\frac{d^2}{dx^2} g^\mu(x) = \frac{d}{dx}(\mu g^{\mu-1}(x)g'(x)) = \mu((\mu-1)g^{\mu-2}(x)(g'(x))^2 + g^{\mu-1}(x)g''(x)).$$

При этом

$$(\mu-1)g^{\mu-2}(x)(g'(x))^2 + g^{\mu-1}(x)g''(x) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow g^{\mu-1}(x)g''(x) \geqslant (1-\mu)g^{\mu-2}(x)(g'(x))^2 \Leftrightarrow g(x)g''(x) \geqslant (1-\mu)(g'(x))^2.$$

Имеем

$$g(x) = c_\alpha x^\alpha + c_\beta x^\beta,\ g'(x) = \alpha c_\alpha x^{\alpha-1} + \beta c_\beta x^{\beta-1},$$

$$g''(x) = \alpha(\alpha-1)c_\alpha x^{\alpha-2} + \beta(\beta-1)c_\beta x^{\beta-2}.$$

Поэтому

$$g(x)g''(x) \geqslant c_\alpha^2 \alpha(\alpha-1)x^{2\alpha-2} + c_\beta^2 \beta(\beta-1)x^{2\beta-2}.$$

Поскольку верно равенство $2(1-\mu) = \frac{\alpha-1}{\alpha} \wedge \frac{\beta-1}{\beta}$, справедлива оценка

$$(1-\mu)(g'(x))^2 \leqslant (1-\mu)2(c_\alpha^2\alpha^2 x^{2\alpha-2} + c_\beta^2\beta^2 x^{2\beta-2})$$

$$\leqslant \frac{\alpha-1}{\alpha} c_\alpha^2\alpha^2 x^{2\alpha-2} + \frac{\beta-1}{\beta} c_\beta^2\beta^2 x^{2\beta-2}$$

$$= c_\alpha^2 \alpha(\alpha-1)x^{2\alpha-2} + c_\beta^2 \beta(\beta-1)x^{2\beta-2}.$$

Супераддитивность $f_{B,N}$ установлена.

Введем случайное поле $X = \{X_k,\ k \in \mathbb{Z}_N^d\}$ формулой

$$X_k = S((k * s/N, (k * s + s)/N]),\ k \in \mathbb{Z}_N^d.$$

Рассмотрим произвольный блок $U = (u_1 - 1, v_1] \times \cdots \times (u_d - 1, v_d] \in \mathcal{U}_d$, $(u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{Z}_N^d$, $(v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{Z}_N^d$. Имеем

$$\sum_{k \in U} X_k = \sum_{k \in U} S((k * s/N, (k * s + s)/N]) = S(\tilde{B}),$$

где $|\tilde{B}| = N^{-d}|B||U|$. Поэтому

$$\mathsf{E}\left|\sum_{k \in U} X_k\right|^\gamma \leqslant a|\tilde{B}|^\alpha + b|\tilde{B}|^\beta = a(N^{-d}|B||U|)^\alpha + b(N^{-d}|B||U|)^\beta = f_{B,N}^{1/\mu}(|U|).$$

По теореме Морица ([81]; см. также [10], теорема 2.1.2) найдется такой множитель $K > 0$, зависящий только от d, γ и μ, что выполнено неравенство

$$\mathsf{E} \max_{t = (k*s+s)/N,\ k \in \mathbb{Z}_N^d} |S((0,t])|^\gamma = \mathsf{E} \max_{k \in \mathbb{Z}_N^d} \left|\sum_{i \in [0,k]} X_i\right|^\gamma \leqslant K f_{B,N}^{1/\mu}(N^d)$$

$$= K(a|B|^\alpha + b|B|^\beta).$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.2.4. *Пусть $\{S_\lambda(t),\ t \in [0,1]^d\}$, где $\lambda \in \Lambda$, — семейство случайных полей с п.н. непрерывными траекториями, обращающимися в нуль на нижней границе блока $(0,1]^d$. Пусть для некоторых $C > 0$, $\gamma \geqslant 1$ и $\alpha, \beta > 1$ справедлива оценка*

$$\mathsf{E}|S_\lambda(B)|^\gamma \leqslant C(|B|^\alpha + |B|^\beta), \quad B \subset [0,1]^d,\ B \in \mathcal{B}_d, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Тогда семейство распределений случайных полей S_λ, $\lambda \in \Lambda$, в пространстве $C([0,1]^d)$ является плотным.

Доказательство. Воспользуемся многомерной версией критерия плотности в пространстве непрерывных функций. А именно, покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{\delta \to 0+} \sup_{\lambda \in \Lambda} \mathsf{P}\left(\sup_{s,t \in [0,1]^d : |t-s| < \delta} |S_\lambda(t) - S_\lambda(s)| > \varepsilon\right) = 0. \tag{2.15}$$

Доказательство критерия (2.15) для случайных полей, обращающихся в нуль на нижней границе блока $(0,1]^d$, повторяет доказательство его одномерного варианта (см. [3], теорема 8.2). Пусть $\{e_1,\ldots,e_d\}$ — стандартный базис в пространстве $\mathbb{R}^d$. Мы покажем, что для любого $i\in\{1,\ldots,d\}$ и произвольного $\varepsilon>0$ имеет место равенство

$$\lim_{\delta\to 0+}\sup_{\lambda\in\Lambda}\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]^d,z\in(0,\delta):t_i+z\leqslant 1}|S_\lambda(t+ze_i)-S_\lambda(t)|>\varepsilon\right)=0. \tag{2.16}$$

Здесь и далее мы используем обозначения $t_i=\langle t,e_i\rangle$, $i=1,\ldots,d$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение векторов. Достаточно установить (2.16) для случая $i=1$. При $i=2,\ldots,d$ доказательство полностью аналогично. Зафиксируем произвольное $\lambda\in\Lambda$. Нетрудно показать, что при $\delta\in(0,1)$ верна оценка

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]^d,z\in(0,\delta):t_1+z\leqslant 1}|S_\lambda(t+ze_1)-S_\lambda(t)|>\varepsilon\right)$$

$$\leqslant\mathsf{P}\left(2\sup_{t\in[0,1]^d,z\in(0,2\delta):t_1\in\delta\mathbb{Z},t_1+z\leqslant 1}|S_\lambda(t+ze_1)-S_\lambda(t)|>\varepsilon\right)$$

$$\leqslant 2\delta^{-1}\max_{w\in[0,1)\cap\delta\mathbb{Z}}\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]^d,z\in(0,2\delta):t_1=w,w+z\leqslant 1}|S_n(t+ze_1)-S_n(t)|>\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Возьмем некоторое $w\in[0,1)\cap\delta\mathbb{Z}$. Рассмотрим $t\in[0,1]^d$ и $z\in(0,2\delta]$ такие, что $t_1=w$, $w+z\leqslant 1$. Введем блоки

$$B_{t,z}=(t_1e_1,t+ze_1]\in\mathcal{B}_d,\quad B=B_{(t_1,1,\ldots,1),(2\delta)\wedge(1-t_1)}. \tag{2.17}$$

Имеем

$$S_\lambda(t+ze_1)-S_\lambda(t)=S_\lambda(B_{t,z}).$$

Поэтому

$$\sup_{t\in[0,1]^d,z\in(0,2\delta):t_1=w,w+z\leqslant 1}|S_\lambda(t+ze_1)-S_\lambda(t)|=\sup_{\tilde B\lhd B}|S_\lambda(\tilde B)|.$$

В силу леммы 2.2.3 справедлива оценка

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]^d,z\in(0,2\delta):t_1=w,w+z\leqslant 1}|S_\lambda(t+ze_1)-S_\lambda(t)|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-\gamma} \mathsf{E}\left(\sup_{\tilde{B}\lhd B} |S_\lambda(\tilde{B})|\right)^\gamma$$

$$\leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-\gamma} KC(|B|^\alpha + |B|^\beta) \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-\gamma} KC((2\delta)^\alpha + (2\delta)^\beta).$$

Таким образом, левая часть (2.16) не превосходит

$$\lim_{\delta\to 0+} \sup_{\lambda\in\Lambda} 2\delta^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-\gamma} KC((2\delta)^\alpha + (2\delta)^\beta) = 0.$$

Лемма доказана. □

Замечание 2.2.5. *Утверждение леммы* 2.2.4 *остается верным, если заменить* $[0,1]^d$ *на произвольный замкнутый блок из* $\mathbb{R}^d$.

Доказательство теоремы 2.2.1. Выберем $p \in (1+\alpha/(2d), \alpha/d)$ и $\nu \in (0, \alpha/(2d) - p/2)$. Имеем

$$p > 2, \quad 1 < p - \frac{\alpha}{2d}, \quad p - \frac{\alpha}{2d} + \nu < p/2.$$

По лемме 2.2.2 случайные поля S_n, $n \in \mathbb{N}^d$, удовлетворяют условиям леммы 2.2.4, а значит, соответствующее семейство распределений плотно в пространстве $C([0,1]^d)$. Остается доказать сходимость конечномерных распределений S_n к конечномерным распределениям $\sigma(u)W$ при $n\to\infty$. Введем ассоциированное случайное поле $X = \{X_k,\ k\in\mathbb{Z}^d\}$ формулой

$$X_k = |A(k\oplus(0,1]^d, u)| - \mathsf{E}|A(k\oplus(0,1]^d, u)|, \quad k\in\mathbb{Z}^d.$$

Используя оценку (2.14), получаем, что X удовлетворяет условиям теоремы 1.5.1, причем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} cov(X_0, X_k) = \sigma^2(u).$$

Рассмотрим семейство случайных полей W_n, $n\in\mathbb{N}^d$, определенных в (1.30). Для любых $t\in[0,1]^d$, $n\in\mathbb{N}^d$ в силу (2.2) имеем

$$\mathsf{E}(S_n(t) - W_n(t))^2 \leqslant 4\langle n\rangle^{-1} \Big|(\partial(0, n*t]) \oplus [-1,1]^d\Big| \sigma^2(u) \longrightarrow 0, \quad n\to\infty.$$

Поэтому по лемме Слуцкого искомое утверждение вытекает из теоремы 1.5.1. Теорема доказана. □

2.3. ФЦПТ для объемов экскурсионных множеств квази-ассоциированных случайных полей

Следующий результат является функциональным вариантом ЦПТ из [52].

Теорема 2.3.1. *Если вместо ассоциированности случайного поля ξ в формулировке теоремы* 2.2.1 *потребовать лишь квази-ассоциированность, то утверждение теоремы* 2.2.1 *остается справедливым при дополнительном предположении, что соотношение* (2.3) *имеет место при некотором $\alpha > 3d$.*

Нам понадобится

Лемма 2.3.2. *Рассмотрим $\xi = \{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}^d\} \in \mathsf{QA}$ — измеримое строго стационарное случайное поле с непрерывной ковариационной функцией $R(t) = cov(\xi_0, \xi_t)$, $t \in \mathbb{R}^d$, и некоторый блок $B = (0, b] \in \mathcal{B}_d$, $b = (b_1, \ldots, b_d)$, $b_1, \ldots, b_q \geqslant b_0 > 0$, $|B| \leqslant M$, где $d \geqslant q \in \mathbb{N}$. Пусть $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — липшицева функция. Введем случайное поле $X = \{X_k,\ k \in \mathbb{Z}^q\}$ формулой*

$$X_k = \int_{(k^{(0)} * b) \oplus B} F(\xi_t) dt, \tag{2.18}$$

где $k^{(0)} = (k, 0, \ldots, 0) = (k_1, \ldots, k_q, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^d$. Предположим, что функция $|R|$ непосредственно интегрируема по Риману на $\mathbb{R}^d$ (см. [33], XI.1, *с.* 426). *Тогда X является (BL, θ)-зависимым, причем θ_X завит только от d, $Lip(F)$, b_0, M и R. Кроме того, если $R(t) \leqslant C(\|t\|_\infty \vee 1)^{-\alpha}$, $t \in \mathbb{R}^d$, где $\alpha > d$, то $\theta_X(r) \leqslant K Lip^2(F) C r^{d-\alpha}$, $r \in \mathbb{N}$, где K зависит только от d, α, b_0 и M.*

Доказательство следует подходу, предложенному в [48] и [52]. Прежде всего отметим, что непосредственная интегрируемость по Риману функции $|R|$ на $\mathbb{R}^d$ влечет соотношение

$$D_r = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d : \|k\|_\infty \geqslant \lfloor r \rfloor} \sup_{t \in (k \oplus (0,1]^d)} |R(t)| < \infty, \quad r \geqslant 0.$$

Легко видеть, что в силу (1.3) случайное поле ξ является (BL, θ)-зависимым, и

$$\begin{aligned} \theta_\xi(r) &\leqslant \sup_{\Delta \geqslant 1} \Delta^{-d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d : \|k/\Delta\|_\infty \geqslant r} |R(k/\Delta)| \\ &\leqslant \sup_{\Delta \geqslant 1} \Delta^{-d} (\Delta + 1)^d D_r = 2^d D_r, \quad r > 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Рассмотрим последовательность (BL,θ)-зависимых случайных полей $X^{(N)} = \{X_k^{(N)},\ k \in \mathbb{Z}^q\}$, $N \in \mathbb{N}$, заданных формулой

$$X_k^{(N)} = \frac{1}{N^d} \sum_{t \in T(N) \cap ((k^{(0)} * b) \oplus B)} F(\xi_t), \quad k \in \mathbb{Z}^q,$$

где $T(N) = (\mathbb{Z}/N)^d$. Как и при доказательстве теоремы 2.1.1, имеем

$$\mathsf{E}|X_k - X_k^{(N)}| \to 0, \quad N \to \infty, \quad k \in \mathbb{Z}^q. \tag{2.20}$$

Пусть $I = \{t_1, \ldots, t_n\}$ и $J = \{s_1, \ldots, s_m\}$ — произвольные непересекающиеся подмножества $\mathbb{Z}^q$, а $G_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $G_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, — некоторые ограниченные липшицевы функции. В силу (2.20) и (2.19) справедливо соотношение

$$|cov(G_1(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}), G_2(X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}))|$$

$$= \lim_{N\to\infty} |cov(G_1(X_{t_1}^{(N)}, \ldots, X_{t_n}^{(N)}), G_2(X_{s_1}^{(N)}, \ldots, X_{s_m}^{(N)}))|$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty} Lip(G_1)Lip(G_2)Lip^2(F)\frac{1}{N^{2d}}|(NB) \oplus (0,1]^d|(|I| \wedge |J|)N^d 2^d D_{b_0(dist(I,J)-1)}$$

$$\leqslant Lip(G_1)Lip(G_2)(|I| \wedge |J|)Lip^2(F)M2^d D_{b_0(dist(I,J)-1)}.$$

Таким образом, $\theta_X(r) \leqslant 2^d M Lip^2(F) D_{b_0(r-1)}$, $r \in \mathbb{N}$.

Положим

$$I = I(d,\alpha) = \int_{\mathbb{R}^d} ((\|t\|_\infty - 2) \vee 1)^{-\alpha} dt.$$

Если $R(t) \leqslant C(\|t\|_\infty \vee 1)^{-\alpha}$, $t \in \mathbb{R}^d$, где $\alpha > d$, то при $x > 0$

$$D_x \leqslant \mathbb{I}\{x \leqslant 6\}CI + \mathbb{I}\{x > 6\}C \int_{\|t\|_\infty \geqslant x-2} ((\|t\|_\infty - 2) \vee 1)^{-\alpha} dt$$

$$\leqslant \mathbb{I}\{x \leqslant 6\}CI + \mathbb{I}\{x > 6\}2^\alpha C \int_{\|t\|_\infty \geqslant x/2} \|t\|_\infty^{-\alpha} dt$$

$$\leqslant \mathbb{I}\{x \leqslant 6\}CI + \mathbb{I}\{x > 6\}2^{2\alpha-d} C x^{d-\alpha} I \leqslant 2^{2\alpha-d+1} 6^{\alpha-d} C I x^{d-\alpha}.$$

Следовательно, при $r = 1$

$$\theta_X(r) \leqslant 2^d Lip^2(F) MCI = 2^d Lip^2(F) MCI r^{d-\alpha},$$

тогда как при $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$,

$$\theta_X(r) \leqslant 2^d M Lip^2(F) 2^{2\alpha-d+1} 6^{\alpha-d} C I b_0^{d-\alpha} (r/2)^{d-\alpha},$$

откуда и вытекает искомая оценка. Лемма доказана. □

Лемма 2.3.3. *Пусть случайное поле* $\xi = \{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}^d\}$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.3.1. *Тогда при каждом* $p > 2$ *и любом* $\nu > 0$ *найдется такой множитель* $D > 0$, *что для любых* $u \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ *и* $B \in \mathcal{B}_d$ *верна оценка*

$$\mathsf{E}\left|\int_B h_{u,\gamma}(\xi_x) - \mathsf{E}h_{u,\gamma}(\xi_0)dx\right|^p \leqslant D\left(\gamma^{-2}|B|^{(1+\nu)\vee(p-\alpha/d)} + |B|^{p/2}\right), \qquad (2.21)$$

где функция $h_{u,\gamma}$ *определена в* (2.6).

Доказательство. Если $|B| \leqslant 1$, то неравенство (2.21) выполнено при $D = 1$. Рассмотрим случай $|B| > 1$. Без ограничения общности можно считать, что $B = (0, b_1] \times \cdots \times (0, b_d]$, $b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_d > 0$. Определим q, k_j, $j = 1, \ldots, q$ и B_i, $i \in \mathbb{Z}^q$, согласно (2.9), (2.10) и (2.12) соответственно. Введем строго стационарное случайное поле $X = \{X_i,\ i \in \mathbb{Z}^q\}$ формулой

$$X_i = \int_{B_i}(h_{u,\gamma}(\xi_x) - \mathsf{E}h_{u,\gamma}(\xi_0))dx, \quad i \in \mathbb{Z}^q.$$

Отметим, что справедливы соотношения (2.11) и (2.13). По лемме 2.3.2 поле X является (BL, θ)-зависимым, причем

$$\theta_X(r) \leqslant D_1\gamma^{-2}r^{d-\alpha}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Здесь $D_1 > 0$ зависит только от d, α и R. Кроме того, по лемме 1 из [52] справедливо неравенство

$$\sup_{u,v\in\mathbb{R}} |cov(\mathbb{I}\{\xi_x > u\}, \mathbb{I}\{\xi_y > v\})| \leqslant D_2|R(y-x)|^{1/3}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

где $D_2 = C_7 a^{2/3}$, $\|p_{\xi_0}\|_\infty \leqslant a$. Поэтому

$$|cov(h_{u,\gamma}(\xi_x), h_{u,\gamma}(\xi_y))| \leqslant D_2|R(y-x)|^{1/3}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Действительно, по формуле Хефдинга (1.12)

$$|cov(h_{u,\gamma}(\xi_x), h_{u,\gamma}(\xi_y))| = \left|\int_{\mathbb{R}^2} H_{\xi_x,\xi_y}(s,t)h'_{u,\gamma}(s)h'_{u,\gamma}(t)dsdt\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{\mathbb{R}^2} D_2|R(y-x)|^{1/3}h'_{u,\gamma}(s)h'_{u,\gamma}(t)dsdt\right| \leqslant D_2|R(y-x)|^{1/3}\|h'_{u,\gamma}\|_\infty^2|supp(h'_{u,\gamma})|^2$$

$$= D_2|R(y-x)|^{1/3}\gamma^{-2}\gamma^2 = D_2|R(y-x)|^{1/3}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \qquad (2.22)$$

Таким образом,

$$Q(X) \leqslant D_2 \| |R|^{1/3} \|_1.$$

Положим $U = (-1, k_1 - 1] \times \cdots \times (-1, k_q - 1] \in \mathcal{U}_q$. Как и при доказательстве леммы 2.2.2, имеем $|U| \leqslant 2^q |B| \leqslant 2^d |B|$. Без ограничения общности считаем, что $\nu \leqslant p/2 - 1$, и, следовательно, $|U|^{1+\nu} \leqslant |U|^{p/2}$. В силу следствия 1.4.4 справедлива оценка

$$\mathsf{E}\left| \int_B h_{u,\gamma}(\xi_x) - \mathsf{E} h_{u,\gamma}(\xi_0) dx \right|^p = \mathsf{E}\left| \sum_{i \in U} X_i \right|^p$$

$$\leqslant K \left(|U|^{1+\nu} + D_1 \gamma^{-2} |U|^{(1+\nu) \vee (p-1-(\alpha-d)/q)} + (D_2 \| |R|^{1/3} \|_1)^{p/2} |U|^{p/2} \right)$$

$$\leqslant K \left(D_1 \gamma^{-2} (2^d |B|)^{(1+\nu) \vee (p-1-(\alpha-d)/d)} + ((D_2 \| |R|^{1/3} \|_1)^{p/2} + 1)(2^d |B|)^{p/2} \right).$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2.3.1. Вначале установим секвенциальную плотность распределений S_n, $n \in \mathbb{N}^d$, в пространстве $C([0,1]^d)$. А именно, проверим, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{\delta \to 0+} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\sup_{s,t \in [0,1]^d : |t-s| < \delta} |S_n(t) - S_n(s)| > \varepsilon \right) = 0. \tag{2.23}$$

Доказательство критерия плотности (2.23) аналогично доказательству (2.15). Достаточно установить для любого $i \in \{1, \ldots, d\}$ и произвольного $\varepsilon > 0$ равенство

$$\lim_{\delta \to 0+} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]^d, z \in (0,\delta) : t_i + z \leqslant 1} |S_n(t + z e_i) - S_n(t)| > \varepsilon \right) = 0.$$

Без ограничения общности можно считать i равным единице. Мы покажем, что

$$\lim_{\delta \to 0+} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]^d, z \in (0,\delta) : t_1 + z \leqslant 1} (S_n(t + z e_1) - S_n(t)) > \varepsilon \right) = 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{2.24}$$

Случай, когда под знаком вероятности в (2.24) вместо $S_n(t + z e_i) - S_n(t)$ стоит $S_n(t) - S_n(t + z e_i)$ рассматривается аналогично. Введем семейство случайных полей

$$S_{n,\gamma}(t) = \langle n \rangle^{-1/2} \int_{(0, n*t]} (h_{u,\gamma}(\xi_x) - \mathsf{E} h_{u,\gamma}(\xi_0)) dx, \quad t \in \mathbb{R}_+^d, \quad n \in \mathbb{N}^d, \ \gamma > 0.$$

Положим $\gamma_n = \langle n\rangle^{-1/2-\mu}$, где выбор $\mu > 0$ мы уточним далее. При каждом $n \in \mathbb{N}^d$ определим поле

$$Z_n(t) = S_{n,\gamma_n}(t), \quad t \in \mathbb{R}^d_+.$$

С помощью оценки (2.7) нетрудно показать, что условие (2.24) вытекает из соотношения

$$\lim_{\delta\to 0+} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]^d, z\in(0,\delta): t_1+z\leqslant 1} (Z_n(t+ze_1) - Z_n(t)) > \varepsilon\right) = 0, \ \varepsilon > 0. \quad (2.25)$$

Действительно, для $t \in [0,1]^d$ и $z \in (0,\delta)$, $t_1 + z \leqslant 1$, рассмотрим блок $B_{t,z}$, определенный в (2.17). Обозначим $x * B = \{x * b, \ b \in B\}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $B \subset \mathbb{R}^d$. Имеем

$$S_n(t+ze_1) - S_n(t) = S_n(B_{t,z}) = \langle n\rangle^{-1/2} \int_{n*B_{t,z}} (\mathbb{I}(\xi_x > u) - \mathsf{P}(\xi_0 > u))dx$$

$$\leqslant \langle n\rangle^{-1/2} \int_{n*B_{t,z}} (h_{u,\gamma_n}(\xi_x) - \mathsf{E}h_{u,\gamma_n}(\xi_0) + \mathsf{E}h_{u,\gamma_n}(\xi_0) - \mathsf{P}(\xi_0 > u))dx$$

$$\leqslant Z_n(t+ze_1) - Z_n(t) + \langle n\rangle^{-1/2} \int_{n*B_{t,z}} |\mathsf{E}h_{u,\gamma_n}(\xi_0) - \mathsf{P}(\xi_0 > u)|dx$$

$$\leqslant Z_n(t+ze_1) - Z_n(t) + \langle n\rangle^{-1/2}\langle n\rangle|B_{t,z}|a\gamma_n \leqslant Z_n(t+ze_1) - Z_n(t) + a\langle n\rangle^{-\mu}.$$

Поскольку $a\langle n\rangle^{-\mu}$ стремится к нулю при $n \to \infty$, соотношение (2.25) влечет (2.24).

Чтобы установить (2.25), достаточно убедиться, что семейство случайных полей Z_n, $n \in \mathbb{N}^d$, удовлетворяет условиям леммы 2.2.4. Пусть $p > 2, \nu > 0$, $B \in \mathcal{B}_d$. В силу леммы 2.3.3 верна оценка

$$\mathsf{E}|Z_n(B)|^p \leqslant \langle n\rangle^{-p/2} D(\gamma_n^{-2}(|B|\langle n\rangle)^{(1+\nu)\vee(p-\alpha/d)} + (|B|\langle n\rangle)^{p/2})$$

$$\leqslant D\left(\langle n\rangle^{1+2\mu-p/2+(1+\nu)\vee(p-\alpha/d)} + 1\right)\left(|B|^{(1+\nu)\vee(p-\alpha/d)} + |B|^{p/2}\right)$$

$$= D_n(|B|^{(1+\nu)\vee(p-\alpha/d)} + |B|^{p/2}).$$

Остается отметить, что $\sup_{n\in\mathbb{N}^d} D_n < \infty$, если взять

$$p \in (1+\alpha/d, 2\alpha/d - 2), \ \mu \in (0, (\alpha/d - p/2 - 1)/2), \ \nu \in (0, p - \alpha/d - 1).$$

Секвенциальная плотность распределений S_n доказана.

Приступим к проверке сходимости конечномерных распределений случайных полей S_n к конечномерным распределениям $\sigma(u)W$ при $n \to \infty$. Заметим, что

$$\begin{gathered}\mathsf{E}(S_{n,\gamma}(t) - S_n(t))^2 \\ = \langle n \rangle^{-1} \mathsf{E} \left(\int_{(0,n*t]} (h_{u,\gamma}(\xi_x) - \mathbb{I}\{\xi_x > u\} - \mathsf{E} h_{u,\gamma}(\xi_0) + \mathsf{P}(\xi_0 > u)) dx \right)^2 \\ \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |cov(h_{u,\gamma}(\xi_0) - \mathbb{I}\{\xi_0 > u\}, h_{u,\gamma}(\xi_x) - \mathbb{I}\{\xi_x > u\})| dx = \Delta(\gamma), \quad \gamma > 0.\end{gathered}$$

Для любого $x \in \mathbb{R}^d$ и всех $\gamma > 0$ соотношение (2.22) влечет оценку

$$|cov(h_{u,\gamma}(\xi_0) - \mathbb{I}\{\xi_0 > u\}, h_{u,\gamma}(\xi_x) - \mathbb{I}\{\xi_x > u\})| \leqslant D_1 |R(x)|^{1/3},$$

где $D_1 > 0$ зависит только от a. В силу (2.3) при $\alpha > 3d$ функция $|R|^{1/3}$ является интегрируемой. Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеем $\Delta(\gamma) \to 0$, $\gamma \to 0$. А значит,

$$\mathsf{E}(S_{n,\gamma}(t) - S_n(t))^2 \longrightarrow 0, \quad \gamma \to 0, \tag{2.26}$$

причем эта сходимость равномерна по $n \in \mathbb{N}^d$.

Зафиксируем некоторое $\gamma > 0$. Введем случайное поле $X = \{X_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ формулой

$$X_k = \int_{k \oplus (0,1]^d} (h_{u,\gamma}(\xi_x) - \mathsf{E} h_{u,\gamma}(\xi_0)) dx, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

По лемме 2.3.2 поле X удовлетворяет условиям теоремы 1.5.1. Положим

$$\sigma_\gamma^2(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} cov(X_0, X_k) = \int_{\mathbb{R}^d} cov(h_{u,\gamma}(\xi_0), h_{u,\gamma}(\xi_x)) dx.$$

Снова используя (2.22), имеем при любом $x \in \mathbb{R}^d$ неравенство

$$|cov(h_{u,\gamma}(\xi_0), h_{u,\gamma}(\xi_x))| \leqslant D_2 |R(x)|^{1/3},$$

где $D_2 > 0$ зависит только от a. Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\sigma_\gamma(u) \longrightarrow \sigma(u), \quad \gamma \to 0. \tag{2.27}$$

Проводя рассуждения, как при доказательстве теоремы 2.2.1, и используя лемму 2.3.2, получаем, что в силу теоремы 1.5.1 конечномерные распределения случайных полей $S_{n,\gamma}$ сходятся при $n \to \infty$ к конечномерным распределениям поля $\sigma_\gamma(u)W$. Учитывая соотношения (2.26), (2.27) и применяя лемму 5.1.14 из [10], получаем искомый результат. Теорема доказана. $\square$

Глава 3. Предельные теоремы для функций от случайных мер

Данная глава посвящена доказательству ряда предельных теорем для функций от случайных мер. Основными результатами главы являются теорема 3.1.1, обобщающая ЦПТ Эванса для интегралов по случайным мерам, теорема 3.2.1, представляющая собой ее функциональный вариант, теорема 3.4.1, устанавливающая сходимость по распределению в пространстве гладких функций решений уравнения Бюргерса с начальными потенциалами, задаваемыми определенными полями дробового шума, а также теорема 3.5.2, описывающая предельное поведение макс-обобщенных процессов Кокса.

3.1. Обобщение ЦПТ Эванса для интегралов по случайным мерам

Рассмотрим $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ — семейство ограниченных борелевских подмножеств $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Пусть $M(\omega, B)$ — стационарная *случайная мера* на $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, т.е. для почти всех $\omega \in \Omega$ функция $M(\omega, \cdot)$ является локально конечной мерой на σ-алгебре борелевских подмножеств $\mathbb{R}^d$, а $M(\cdot, B)$ — случайная величина для каждого $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$. Стационарность случайной меры означает, что для любых $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ и для произвольного t из $\mathbb{R}^d$ распределения случайных векторов $(M(B_1), \dots, M(B_k))$ и $(M(B_1 \oplus t), \dots, M(B_k \oplus t))$ совпадают.

Введем
$$B_q(k) = (k \oplus (0,1]^d)/q, \quad q \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$
Нас будет интересовать ситуация, когда мера M квадратично интегрируема, т.е. $\mathsf{E}M^2(B) < \infty$ при любом $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$. Для таких случайных мер обозначим
$$a_M = \mathsf{E}M(B_1(0))$$
и положим
$$\sigma_M^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} cov(M(B_1(0)), M(B_1(k))),$$

если этот ряд сходится абсолютно. Для $T > 0$ и произвольной борелевской функции f определим

$$M_T[f] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x/T)M(dx), \quad M[f] = M_1[f],$$

если интеграл существует почти наверное. Рассмотрим следующие два условия:

(C1) найдется $\Gamma_M \in \mathbb{R}_+$ такое, что для всех $q \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |cov(M(B_q(0)), M(B_q(k)))| \leqslant \Gamma_M q^{-d};$$

(C2) случайное поле $\{M(B_1(k))\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ является (BL,θ)-зависимым.

Отметим, что если для любых ограниченных борелевских множеств B_1 и B_2 справедливо неравенство

$$cov(M(B_1), M(B_2)) \geqslant 0, \tag{3.1}$$

то (C1) вытекает из условия конечной восприимчивости для случайной меры M, которое формулируется следующим образом: $\sigma_M^2 < \infty$. Если мера M ассоциирована (т.е. соответствующее семейство случайных величин, индексированное множествами из $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, является ассоциированным), то соотношение (3.1) автоматически выполнено.

Мы будем использовать (C1) для оценки дисперсий интегралов $M_T[f]$, тогда как условие (C2) позволит нам свести ЦПТ для $M_T[f]$ к ЦПТ для (BL,θ)-зависимых случайных полей. Положим

$$Z_T[f] = T^{-d/2}\left(M_T[f] - \mathsf{E}M_T[f]\right).$$

Нами установлена

Теорема 3.1.1. *Пусть выполнены условия* (C1) *и* (C2). *Тогда для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_\infty(\mathbb{R}^d)$ имеет место сходимость по распределению:*

$$Z_T[f] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_M^2\|f\|_2^2), \quad T \to \infty.$$

В [66] (теорема 4.4) аналогичное утверждение доказывается для ассоциированных случайных мер с $\sigma_M^2 < \infty$. Теорема 3.1.1 позволяет рассматривать более широкий класс стационарных случайных мер. Отметим, что ЦПТ в

[66] устанавливается для измеримой по Лебегу функции f. Однако для любой такой функции найдется некоторая измеримая по Борелю функция $\tilde{f}$, такая что $f(x) = \tilde{f}(x)$ для п.в. $x \in \mathbb{R}^d$. Поэтому понятие интеграла по стационарной квадратично интегрируемой случайной мере M легко распространить на класс измеримых по Лебегу функций, определив $M[f]$ как элемент L_2 формулой $M[f] = M[\tilde{f}]$. Корректность подобного определения является очевидным следствием следующего утверждения.

Предложение 3.1.2. *Пусть M — описанная выше случайная мера. Тогда если множество $E \subset \mathbb{R}^d$ имеет меру нуль, то $M(E) = 0$ п.н.*

Доказательство. Заметим, что в силу стационарности M верно равенство

$$\mathsf{E}M(B_q(k)) = a_M \frac{|B_q(k)|}{|B_1(0)|} = a_M |B_q(k)|, \quad k \in \mathbb{Z}^d, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим $\mathcal{K}$ — кольцо всевозможных конечных объединений непересекающихся блоков из семейства $\{B_q(k)\}_{k \in \mathbb{Z}^d, q \in \mathbb{N}}$. В силу (3.2) справедлива формула

$$\mathsf{E}M(K) = a_M |K|, \quad K \in \mathcal{K}.$$

Отметим, что $\mathcal{K}$ порождает борелевскую σ-алгебру на $\mathbb{R}^d$. Так как $|E| = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность непересекающихся множеств $K_n^{(\varepsilon)} \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^{(\varepsilon)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} |K_n^{(\varepsilon)}| < \varepsilon.$$

Поскольку с вероятностью единица M является локально конечной мерой на $\mathbb{R}^d$, имеет место оценка

$$\mathsf{E}M(E) \leqslant \mathsf{E}M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^{(\varepsilon)}\right) = \mathsf{E}\sum_{n=1}^{\infty} M(K_n^{(\varepsilon)}) < a_M \varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем равенство $\mathsf{E}M(E) = 0$, которое и влечет искомое утверждение. Предложение доказано. $\square$

Будем говорить, что функция f является *простой*, если она представляется в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbb{I}\{B_q(k^{(i)})\}(x), \; x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.3}$$

где $q, m \in \mathbb{N}$, $k^{(1)}, \dots, k^{(m)} \in \mathbb{Z}^d$, и $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$. Можно считать, что $k^{(i)} \neq k^{(j)}$ при $i \neq j$. Нам потребуется следующий результат, являющийся тривиальным следствием леммы 8.1.8 из [10].

Лемма 3.1.3 ([10]). *Пусть финитная функция $f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_\infty(\mathbb{R}^d)$, и $supp(f) \subset [-K, K]^d$ для некоторого положительного K. Тогда существует последовательность простых функций f_n, $n \in \mathbb{N}$, которая п.в. сходится к f. Эту последовательность можно выбрать так, что $\|f_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$, и $supp(f_n) \subset [-K-1, K+1]^d$, $n \in \mathbb{N}$.*

Ключевую роль при доказательстве теоремы 3.1.1 играет оценка дисперсий интегралов по случайным мерам, удовлетворяющим $(\mathsf{C}1)$. В [66] (лемма 4.2) аналогичное неравенство выводится для ассоциированных случайных мер.

Лемма 3.1.4. *Если для описанной выше случайной меры M выполнено условие $(\mathsf{C}1)$, то для каждой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_\infty(\mathbb{R}^d)$ верна оценка $\mathsf{Var}(M[f]) \leqslant \Gamma_M \|f\|_\infty \|f\|_1$.*

Доказательство этого утверждения проведем в несколько этапов.

Шаг 1. Вначале рассмотрим простую функцию f вида (3.3). Имеем

$$\mathsf{Var}(M[f]) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_i c_j cov(M(B_q(k^{(i)})), M(B_q(k^{(j)})))$$

$$\leqslant \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{m} |c_i| \Gamma_M q^{-d} = \Gamma_M \|f\|_\infty \|f\|_1.$$

Шаг 2. Пусть теперь $f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_\infty(\mathbb{R}^d)$, и $supp(f) \subset [-K, K]^d$ для некоторого $K > 0$. Возьмем последовательность простых функций f_n, $n \in \mathbb{N}$, фигурирующую в формулировке леммы 3.1.3. Применяя предложение 3.1.2 и теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем, что с вероятностью единица $M[f_n] \to M[f]$, $n \to \infty$. Так как

$$|M[f_n]| \leqslant \|f\|_\infty M([-K-1, K+1]^d), \quad n \in \mathbb{N},$$

мы можем снова применить теорему Лебега. Имеем

$$\mathsf{Var}(M[f_n]) \to \mathsf{Var}(M[f]), \quad n \to \infty.$$

Поскольку для всех n верна оценка $\mathsf{Var}(M[f_n]) \leqslant \Gamma_M \|f_n\|_\infty \|f_n\|_1$, и при этом $\|f_n\|_\infty \|f_n\|_1 \to \|f\|_\infty \|f\|_1$, $n \to \infty$, то $\mathsf{Var}(M[f]) \leqslant \Gamma_M \|f\|_\infty \|f\|_1$.

Шаг 3. Рассмотрим теперь случай произвольной f из $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Покажем, что интеграл $M[f]$ существует п.н., причем $\mathsf{E}M[f] = a_M \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$. В силу леммы 3.1.3 найдется такая сходящаяся п.в. к $f\mathbb{I}\{[-K,K]^d\}$ последовательность простых функций $\{f_{K,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\|f_{K,n}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$, и $supp(f_{K,n}) \subset [-K-1, K+1]^d$. Лемма о монотонной сходимости влечет соотношение

$$\mathsf{E}M[|f|] = \lim_{K\to\infty} \mathsf{E}M[|f|\mathbb{I}\{[-K,K]^d\}] = \lim_{K\to\infty}\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}M[|f_{K,n}|]$$
$$= \lim_{K\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_M \|f_{K,n}\|_1 = a_M\|f\|_1.$$

Представляя f в виде разности двух неотрицательных функций $f = f_+ - f_-$ и применяя полученную выше формулу, имеем

$$\mathsf{E}M[f] = \mathsf{E}M[f_+] - \mathsf{E}M[f_-] = a_M(\|f_+\|_1 - \|f_-\|_1) = a_M \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

Аналогичным образом можно показать, что $\mathsf{E}M^2[|f|] < \infty$. Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\mathsf{Var}(M[f]) = \lim_{K\to\infty} \mathsf{E}M^2[f\mathbb{I}\{[-K,K]^d\}] - \left(a_M \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx\right)^2$$
$$= \lim_{K\to\infty}\left[\mathsf{Var}(M[f\mathbb{I}\{[-K,K]^d\}]) + (\mathsf{E}M[f\mathbb{I}\{[-K,K]^d\}])^2\right] - \left(a_M \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx\right)^2$$
$$\leqslant \Gamma_M\|f\|_\infty\|f\|_1.$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 3.1.1 следует схеме, предложенной в [66]. Вначале установим искомое утверждение для простой функции f вида (3.3). Покажем, что имеет место сходимость случайных векторов по распределению

$$\{Z_T[\mathbb{I}\{B_q(k^{(i)})\}]\}_{i=1}^m \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_M^2 q^{-d} I_m), \quad T\to\infty, \tag{3.4}$$

где I_m — единичная матрица порядка m. Достаточно установить (3.4) при T вида nq, $n \in \mathbb{N}$. Действительно, положим $T_q = q\lfloor T/q\rfloor$. Введем отображение $\tilde{M} : \Omega \times \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\tilde{M}(B) = M(B) - \mathsf{E}M(B), \quad B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d).$$

Для $T \geqslant q$ и произвольного блока $B \in \mathcal{B}_d$ имеем

$$\mathsf{Var}\left(Z_T[\mathbb{I}\{B\}] - Z_{T_q}[\mathbb{I}\{B\}]\right) = \mathsf{E}\left(T^{-d/2}\tilde{M}(TB) - T_q^{-d/2}\tilde{M}(T_qB)\right)^2$$

$$\leqslant 2(T^{-d/2} - T_q^{-d/2})^2\mathsf{E}\left(\tilde{M}(TB)\right)^2 + 2T_q^{-d}\mathsf{E}\left(\tilde{M}(TB) - \tilde{M}(T_qB)\right)^2$$

$$\leqslant 2(T^{-d/2} - T_q^{-d/2})^2\Gamma_M T^d|B| + 2T_q^{-d}\Gamma_M|(TB)\triangle(T_qB)|$$

$$= 2(T^{-d/2} - T_q^{-d/2})^2\Gamma_M T^d|B| + 2\Gamma_M|(T_q^{-1}TB)\triangle B|.$$

Легко видеть, что последнее выражение стремится к нулю, когда $T \to \infty$.

При $T = nq$, $n \in \mathbb{N}$, справедливо равенство

$$Z_T[\mathbb{I}\{B_q(k^{(i)})\}] = q^{-d/2}Z_n[\mathbb{I}\{B_1(k^{(i)})\}].$$

Поэтому сходимость (3.4) вытекает из ($\mathsf{C2}$) и ЦПТ для (BL,θ)-зависимых случайных полей (см. [10], следствие 3.1.17).

Рассмотрим теперь случай функции f общего вида. Для каждого $K > 0$ существует такая сходящаяся п.в. к $f\mathbb{I}\{[-K,K]^d\}$ последовательность простых функций $\{f_{K,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, что для всех натуральных n выполнено неравенство $\|f_{K,n}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. В силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости имеем

$$f_{K,n} \xrightarrow{L_1} f\mathbb{I}\{[-K,K]^d\}, \quad n \to \infty.$$

Так как

$$f\mathbb{I}\{[-K,K]^d\} \xrightarrow{L_1} f, \quad K \to \infty,$$

существует последовательность простых функций g_n, $\|g_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$, сходящаяся в пространстве L_1 к функции f. Кроме того, при всех натуральных n справедливо соотношение

$$Z_T[g_n] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_M^2\|g_n\|_2^2), \quad T \to \infty.$$

Имеем

$$\mathsf{E}(Z_T[f] - Z_T[g_n])^2 = \mathsf{E}(Z_T[f - g_n])^2 \leqslant \Gamma_M 2\|f\|_\infty\|f - g_n\|_1, \quad T > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\|f - g_n\|_1 \to 0$, и $\sigma_M^2\|g_n\|_2^2 \to \sigma_M^2\|f\|_2^2$, $n \to \infty$, искомое утверждение является следствием леммы 5.1.14 из [10]. Теорема доказана. □

Следствие 3.1.5. *Пусть $\xi = \{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}^d\}$ — строго стационарное измеримое квадратично интегрируемое случайное поле, $\xi \in \mathsf{QA}$. Предположим,* *что ковариационная функция ξ непрерывна, и ее модуль непосредственно интегрируем по Риману на $\mathbb{R}^d$. Тогда для любой функции f из $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_\infty(\mathbb{R}^d)$ и произвольной липшицевой $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ имеет место сходимость по распределению*

$$T^{-d/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(t/T) F(\xi_t) dt - \mathsf{E} \int_{\mathbb{R}^d} f(t/T) F(\xi_t) dt \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2 \|f\|_2^2)$$

при $T \to \infty$, где

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}^d} cov(F(\xi_0), F(\xi_t)) dt$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} cov \left(\int_{B_1(0)} F(\xi_t) dt, \int_{B_1(k)} F(\xi_t) dt \right).$$

Для доказательства следствия 3.1.5 нам понадобится

Лемма 3.1.6. *Пусть $\xi = \{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}^d\}$ — строго стационарное измеримое квадратично интегрируемое случайное поле с ковариационной функцией $R(t) = cov(\xi_0, \xi_t)$, $t \in \mathbb{R}^d$. Предположим, что $\xi_t \geqslant 0$ п.н., $t \in \mathbb{R}^d$. Введем отображение M из $\Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ в $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ формулой*

$$M(E) = \int_E \xi_t dt, \quad E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \tag{3.5}$$

(Далее при выполнении (3.5) будем писать $M(dt) = \xi_t dt$.) Тогда если $R \in L_1(\mathbb{R}^d)$, то M является стационарной квадратично интегрируемой случайной мерой, причем справедливо соотношение (C1) *при $\Gamma_M = \|R\|_1$.*

Доказательство. По теореме Фубини $M(E)$ является случайной величиной при $E \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ в силу измеримости и интегрируемости ξ. Кроме того, теорема Фубини обеспечивает локальную интегрируемость траекторий ξ и п.в. неотрицательность ξ п.н. Поэтому M — случайная мера. Стационарность и квадратичная интегрируемость M следуют из стационарности и квадратичной интегрируемости поля ξ. Кроме того,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |cov(M(B_q(0)), M(B_q(k)))|$$

$$\leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{B_q(0)} \int_{B_q(k)} |R(t-s)| ds dt = |B_q(0)| \|R\|_1 = q^{-d} \|R\|_1, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Лемма доказана. □

Доказательство следствия 3.1.5. Введем функцию M формулой $M(dt) = F(\xi_t)dt$. В силу леммы 3.1.6 можно утверждать, что M является стационарной квадратично интегрируемой случайной мерой, удовлетворяющей (C1). Рассмотрим $B = B_1(0)$, $q = d$. По лемме 2.3.2 поле X, определенное в (2.18), является (BL, θ)-зависимым. А значит, M удовлетворяет и условию (C2). Таким образом, искомое утверждение вытекает из теоремы 3.1.1. Следствие доказано. □

Оказывается, что аналог следствия 3.1.5 можно доказать и для функций F, не являющихся липшицевыми. Мы рассмотрим случай $F(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, который понадобится нам при исследовании решений уравнения Бюргерса.

Следствие 3.1.7. *Пусть выполнены условия следствия* 3.1.5. *Предположим, что для некоторых $C > 0$, $0 < \delta < 1$ и $p \geqslant 2$ справедливы следующие соотношения:*

(D1) $\int_{\mathbb{R}^d} |R(x)|^\delta dx < \infty$;

(D2) $\mathsf{E}e^{p\xi_0} < \infty$;

(D3) *для всех $a > 0$ верна оценка $\|e^{(\xi_0 - a)_+} - 1\|_q \leqslant Ce^{-a(1+\delta)/(1-\delta)}$, где $1/p + 1/q = 1$.*

Тогда случайная мера $M(dt) = e^{\xi_t}dt$ удовлетворяет (C1), *и для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_\infty(\mathbb{R}^d)$ имеет место сходимость по распределению*

$$T^{-d/2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(t/T)e^{\xi_t}dt - \mathsf{E}\int_{\mathbb{R}^d} f(t/T)e^{\xi_t}dt\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_M^2\|f\|_2^2) \qquad (3.6)$$

при $T \to \infty$, где

$$\sigma_M^2 = \int_{\mathbb{R}^d} cov(e^{\xi_0}, e^{\xi_t})dt.$$

Нам потребуется

Лемма 3.1.8. *При выполнении условий следствия* 3.1.7 *найдется такой множитель $D > 0$, что оценка*

$$\left|cov\left(e^{\xi_0 \wedge u}, e^{\xi_t \wedge v}\right)\right| \leqslant D|R(t)|^\delta \qquad (3.7)$$

справедлива для любых $t \in \mathbb{R}^d$ и $0 < u, v \leqslant \infty$.

Доказательство. Вначале заметим, что если $R(t) = 0$, то ξ_0 и ξ_t независимы (см. [10], следствие 1.5.5), и (3.7) выполнено. Если $|R(t)| \geqslant 1$, то (3.7) является следствием $(\mathsf{D2})$. Поэтому мы будем рассматривать случай $0 < |R(t)| < 1$. Положим $a = (\delta - 1)\log(|R(t)|)/2 > 0$. В силу квази-ассоциированности случайного поля ξ и $(\mathsf{D3})$ имеем

$$\left|cov\left(e^{\xi_0\wedge u}, e^{\xi_t\wedge v}\right)\right| \leqslant \left|cov\left(e^{\xi_0\wedge u\wedge a}, e^{\xi_t\wedge v\wedge a}\right)\right|$$
$$+\left|cov\left(e^{\xi_0\wedge u} - e^{\xi_0\wedge u\wedge a}, e^{\xi_t\wedge v\wedge a}\right)\right| + \left|cov\left(e^{\xi_0\wedge u}, e^{\xi_t\wedge v} - e^{\xi_t\wedge v\wedge a}\right)\right|$$
$$\leqslant e^{2a}|R(t)| + 2\|e^{\xi_t}\|_p e^a \|e^{(\xi_0-a)_+} - 1\|_q + 2\|e^{\xi_0}\|_p e^a \|e^{(\xi_t-a)_+} - 1\|_q$$
$$\leqslant |R(t)|^\delta + 4\|e^{\xi_0}\|_p C|R(t)|^\delta.$$

Лемма доказана. □

Доказательство следствия 3.1.7. Отметим, что лемма 3.1.8 влечет интегрируемость ковариационной функции $\rho(t) = cov(e^{\xi_0}, e^{\xi_t})$, $t \in \mathbb{R}^d$. Поэтому по лемме 3.1.6 мера M удовлетворяет $(\mathsf{C1})$ при $\Gamma_M = \|\rho\|_1$. Докажем теперь (3.6). Рассмотрим случайные поля

$$\zeta_n(t) = e^{\xi_t\wedge n}, \quad t \in \mathbb{R}^d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\int_{\mathbb{R}^d} cov(\zeta_n(0), \zeta_n(t))dt \longrightarrow \sigma_M^2, \;\; n \to \infty.$$

Легко видеть, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ для поля ζ_n выполнены условия следствия 3.1.5, а мера, задаваемая соотношением $M_n(dt) = \left(e^{\xi_t} - \zeta_n(t)\right)dt$, удовлетворяет $(\mathsf{C1})$ по лемме 3.1.6. В силу леммы 3.1.4 для любого $T > 0$ имеем

$$\mathsf{Var}\left(T^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} f(t/T)\left(e^{\xi_t} - \zeta_n(t)\right)dt\right)$$
$$\leqslant \|f\|_\infty \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^d} \left|cov(e^{\xi_0} - \zeta_n(0), e^{\xi_t} - \zeta_n(t))\right| dt = \Delta(f, n).$$

Пользуясь оценкой

$$\left|cov(e^{\xi_0} - \zeta_n(0), e^{\xi_t} - \zeta_n(t))\right| \leqslant 4D|R(t)|^\delta, \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

где D фигурирует в (3.7), снова применяем теорему Лебега и получаем, что

$$\Delta(f, n) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Отсюда вытекает (см. [10], лемма 5.1.14) искомое утверждение. Следствие доказано. □

3.2. ФЦПТ для интегралов по случайным мерам

Пусть M — квадратично интегрируемая стационарная случайная мера на $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющая условиям ($\mathsf{C1}$) и ($\mathsf{C2}$), или же $M(dt) = e^{\xi_t}dt$, и для $\xi = \{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}^m\}$ выполнены условия следствия 3.1.7. Пусть также $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ — некоторая борелевская функция на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{R}$. Введем семейство случайных полей $Z_T[f]$, $T > 0$, формулой

$$Z_T[f](x) = T^{-m/2} \left(M_T[f(x, \cdot)] - \mathsf{E} M_T[f(x, \cdot)] \right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

если при всех $x \in \mathbb{R}^n$ интегралы в правой части равенства существуют с вероятностью единица.

Рассмотрим $C(\mathbb{R}^n)$ — пространство действительных непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах. Функциональным вариантом теоремы 3.1.1 является

Теорема 3.2.1. *Пусть $f(\cdot, y) \in C^n(\mathbb{R}^n)$ при каждом $y \in \mathbb{R}^m$. Предположим, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдется такая ограниченная интегрируемая действительная функция ϕ_K на $\mathbb{R}^m$, что при $y \in \mathbb{R}^m$ справедлива оценка $|f(x, y)| \leqslant \phi_K(y)$, $x \in K$, и все частные производные $f(x, y)$ по переменным $x_1, \dots, x_n$ вплоть до порядка n включительно также не превосходят по модулю $\phi_K(y)$, когда $x \in K$. Тогда семейство распределений случайных полей $Z_T[f]$, $T > 0$, в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ является плотным, и $Z_T[f]$ сходится по распределению в этом пространстве при $T \to \infty$ к центрированному гауссовскому полю Z с ковариационной функцией*

$$cov(Z(s), Z(t)) = \sigma_M^2 \langle f(s, \cdot), f(t, \cdot) \rangle_{L_2(\mathbb{R}^m)}, \quad s, t \in \mathbb{R}^n.$$

Далее мы воспользуемся этим результатом при исследовании предельного поведения параболически преобразованных решений уравнения Бюргерса со случайными начальными данными. Чтобы доказать теорему 3.2.1, нам потребуются несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2.1. *Тогда при любом $T > 0$ траектории случайного поля $Z_T[f]$ непрерывны с вероятностью единица.*

Доказательство. Достаточно установить искомое утверждение при $T = 1$, поскольку

$$Z_T[f](x) = T^{-m/2} Z_1[\tilde{f}](x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y/T), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Выберем некоторое $a > 0$ и докажем п.н. непрерывность $Z_1[f]$ на $K = [-a, a]^n$. Непрерывность функции

$$\mathsf{E} M[f(x, \cdot)] = a_M \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy, \quad x \in K,$$

очевидна. Поэтому достаточно установить п.н. непрерывность $M[f(x, \cdot)]$ по $x \in K$. В силу определения случайной меры и леммы 3.1.4 с вероятностью единица мера $M(\omega, \cdot)$ локально конечна, и $\phi_K \in L_1(\mathbb{R}^d, M)$. Пусть ν — локально конечная мера на $\mathbb{R}^d$, и $\phi_K \in L_1(\mathbb{R}^d, \nu)$. В силу оценки $|f(x, y)| \leqslant \phi_K(y)$, $x \in K$, $y \in \mathbb{R}^m$, интеграл

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \nu(dy), \quad x \in K,$$

сходится равномерно по $x \in K$. А значит, функция g непрерывна на K. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.2.3. *Пусть $g \in C^n(\mathbb{R}^n)$ — некоторая действительная функция. Тогда для любого блока $B \in \mathcal{B}_n$ справедлива оценка*

$$|g(B)| \leqslant |B| \sup_{x=(x_1,\ldots,x_n)\in B} \left| \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} g(x_1, \ldots, x_n) \right|.$$

Доказательство проведем индукцией по n. База индукции при $n = 1$ вытекает из формулы Лагранжа. Установим шаг индукции. Представим блок B в виде

$$B = B_{n-1} \times (a, b], \quad B_{n-1} \in \mathcal{B}_{n-1}.$$

Введем функцию $h(y) = g(B_{n-1}, y)$, $y \in \mathbb{R}$. В силу формулы Лагранжа

$$g(B) = h(b) - h(a) = (b - a) h'(\theta)$$

для некоторого θ из интервала (a, b). По предположению индукции имеем

$$(b - a)|h'(\theta)| \leqslant (b - a)|B_{n-1}| \sup_{z=(z_1,\ldots,z_{n-1})\in B_{n-1}} \left| \frac{\partial^{n-1}}{\partial z_1 \ldots \partial z_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \theta} g(z_1, \ldots, z_{n-1}, \theta) \right|$$

$$\leqslant |B| \sup_{x=(x_1,\ldots,x_n)\in B} \left| \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} g(x_1, \ldots, x_n) \right|.$$

Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.2.1. Вначале установим сходимость конечномерных распределений случайных полей $Z_T[f]$, $T \to \infty$. Воспользуемся приемом Крамера-Уолда. Возьмем произвольные $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$ и $x^{(1)}, \ldots, x^{(p)} \in \mathbb{R}^n$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{p} c_i Z_T[f](x^{(i)}) = T^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \left[\sum_{i=1}^{p} c_i f(x^{(i)}, y/T) \right] M(dy)$$

$$-T^{-m/2} E \int_{\mathbb{R}^m} \left[\sum_{i=1}^{p} c_i f(x^{(i)}, y/T) \right] M(dy)$$

$$= T^{-m/2} \left(\int_{\mathbb{R}^m} g(y/T) M(dy) - E \int_{\mathbb{R}^m} g(y/T) M(dy) \right),$$

где $g(y) = \sum_{i=1}^{p} c_i f(x^{(i)}, y)$, $y \in \mathbb{R}^m$. Легко видеть, что $g \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_\infty(\mathbb{R}^m)$, поэтому выполнены условия теоремы 3.1.1 (либо, соответственно, следствия 3.1.7). Таким образом, имеет место сходимость по распределению

$$\sum_{i=1}^{p} c_i Z_T[f](x^{(i)}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_M^2 \|g\|_2^2), \quad T \to \infty.$$

Кроме того,

$$\sigma_M^2 \|g\|_2^2 = \sigma_M^2 \int_{\mathbb{R}^m} g^2(y) dy$$

$$= \sigma_M^2 \sum_{i,j=1}^{p} c_i c_j \int_{\mathbb{R}^m} f(x^{(i)}, y) f(x^{(j)}, y) dy = \mathsf{Var} \sum_{i=1}^{p} c_i Z(x^{(i)}).$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, остается проверить плотность распределений $Z_T[f]$, $T > 0$, в пространстве $C([-a, a]^n)$ для произвольного $a > 0$ (см., напр., [10], лемма 8.2.6). Пусть $\psi_a(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, — некоторая гладкая функция, равная единице при $x \in [-a, a]^n$ и нулю при $x \in \mathbb{R}^n \setminus [-a-1, a+1]^n$. Введем

$$g(x, y) = f(x, y) \psi_a(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Легко видеть, что

$$Z_T[f](x) = Z_T[f](x) \psi_a(x) = Z_T[g](x), \quad x \in [-a, a]^n.$$

Поэтому достаточно установить плотность распределений $Z_T[g]$, $T > 0$, в пространстве $C(K)$, где $K = [-a-1, a+1]^n$. В силу гладкости ψ_a найдется такой множитель $D > 0$, что что при $y \in \mathbb{R}^m$ справедлива оценка $|g(x,y)| \leqslant D\phi_K(y)$, $x \in K$, и все частные производные $g(x,y)$ по переменным $x_1, \ldots, x_n$ вплоть до порядка n включительно также не превосходят по модулю $D\phi_K(y)$, когда $x \in K$. Возьмем произвольный блок $B \in \mathcal{B}_n$. В силу лемм 3.1.4 и 3.2.3

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(Z_T[g](B))^2 = T^{-m}\mathsf{Var}\int_{\mathbb{R}^m} g(B, y/T)M(dy)\\ \leqslant T^{-m}\Gamma_M \sup_{y\in\mathbb{R}^m}|g(B,y)|T^m\int_{\mathbb{R}^m}|g(B,y)|dy\\ \leqslant \Gamma_M \sup_{y\in\mathbb{R}^m}|B|D\phi_K(y)|B|D\int_{\mathbb{R}^m}\phi_K(y)dy \leqslant D_1|B|^2,\end{aligned}$$

где D_1 не зависит от T и B. Таким образом, плотность распределений $Z_T[g]$, $T > 0$, вытекает из леммы 2.2.4. Теорема доказана. □

Замечание 3.2.4. *Утверждение теоремы* 3.2.1 *остается верным, если вместо* $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $C(\mathbb{R}^n)$ *рассмотреть* $x \in U$ *и* $C(U)$, *где* $U = (0,\infty)\times\mathbb{R}^{n-1}$.

3.3. ФЦПТ для параболически преобразованных решений уравнения Бюргерса

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Бюргерса

$$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla_x)v = \nu\Delta_x v,\\ v(0,x) = v_0(x) = -2\nu\nabla\xi_x,\\ (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d, v\in\mathbb{R}^d;\ \nu > 0.\end{cases} \tag{3.8}$$

Это уравнение используется при описании ряда физических явлений, таких, например, как ударные волны и турбулентность [13]. С помощью подстановки Хопфа-Коула оно сводится к уравнению теплопроводности, поэтому решение задачи Коши для уравнения Бюргерса допускает явное представление в виде отношения двух интегралов с определенными ядрами. Мы будем рассматривать модель, в которой начальный потенциал задается некоторым стационарным случайным полем (см. [100]). Возникает она, например, при исследовании крупномасштабного строения Вселенной (см. [93]).

ЦПТ для параболически преобразованных решений уравнения Бюргерса впервые была получена в работе [8]. Параболическое преобразование интенсивно исследовалось в дальнейшем ([47], [46], [67], [73] и др.). Асимптотические свойства гиперболически преобразованных решений изучались, например, в [79]. Ряд работ также посвящен исследованию предельных свойств решений уравнения Бюргерса с внешней силой: как случайной (напр., [96]), так и неслучайной ([42], [74] и др.). В [1] и [2] были впервые доказаны варианты ФЦПТ для параболически преобразованных решений уравнения Бюргерса. Отметим, что обзор некоторых задач, связанных с изучением решений уравнения Бюргерса со случайными начальными данными, можно найти в [98].

Мы обобщим результат [2]. Для упрощения выкладок без потери общности считаем $\nu = 1/2$. С помощью подстановки Хопфа-Коула (см., напр., [54]) решение (3.8) можно представить в виде

$$v(t,x) = \frac{\int_{\mathbb{R}^d}(x-y)e^{\xi_y - |x-y|^2/2t}dy}{t\int_{\mathbb{R}^d} e^{\xi_y - |x-y|^2/2t}dy}, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^d.$$

Полагая формально $M(dy) = e^{\xi_y}dy$, для $t>0$ и $x\in\mathbb{R}^d$ имеем

$$v(t,x) = v[\xi](t,x) = \frac{\int_{\mathbb{R}^d}(x-y)e^{-|x-y|^2/2t}M(dy)}{t\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x-y|^2/2t}M(dy)} = \frac{A(t,x)}{tB(t,x)}. \tag{3.9}$$

Функции A и B мы далее будем также обозначать как $A[\xi]$ и $B[\xi]$. Следуя [8] для $T\geqslant 1$ введем параболическое преобразование решения уравнения Бюргерса формулой

$$V_T(t,x) = T^{d/2+1}v(T^2t, Tx) = \frac{A_T(t,x)}{tB_T(t,x)},$$

где

$$A_T(t,x) = T^{-d/2-1}A(T^2t, Tx),$$
$$B_T(t,x) = T^{-d}B(T^2t,Tx), \;\; t>0, \; x\in\mathbb{R}^d.$$

Нас будут интересовать предельные свойства случайных полей V_T в случае, когда M — стационарная квадратично интегрируемая случайная мера.

Доказательства следующих трех утверждений следуют схемам доказательств лемм 4 и 5, а также теоремы 2 из [2] (эти доказательства можно найти в [10]: леммы 8.2.1 и 8.2.2, теорема 8.2.3), установленных для ассоциированной случайной меры M. Отличие состоит в том, что нами используются лемма 3.1.4 и теорема 3.1.1 (либо следствие 3.1.7) вместо аналогичных результатов из статьи [66]. Поэтому здесь мы приведем лишь формулировки требуемых нам утверждений.

Лемма 3.3.1 ([2]). *Предположим, что M удовлетворяет условиям* (C1) *и* (C2)*, или случайное поле $\xi = \{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}^d\}$ удовлетворяет условиям следствия* 3.1.7*. Тогда конечномерные распределения случайных полей A_T сходятся при $T \to \infty$ к конечномерным распределениям центрированного гауссовского случайного поля $A_\infty = (A_{\infty,i})_{i=1,\dots,d}$ с ковариационной функцией*

$$\mathsf{E}A_{\infty,i}(s,a)A_{\infty,j}(t,b) = (2\pi)^{d/2}\sigma_M^2 e^{-|a-b|^2/(2s+2t)}G_{ij}(s,a,t,b),$$

где $s,t > 0$, $i,j = 1,\dots,d$, $a,b \in \mathbb{R}^d$, и

$$G_{ij}(s,a,t,b) = \begin{cases} (st/(s+t))^{d/2+1}(1-(a_i-b_i)^2/(s+t)), & i = j, \\ -(st/(s+t))^{d/2+1}(a_i-b_i)(a_j-b_j)/(s+t), & i \neq j. \end{cases}$$

Лемма 3.3.2 ([2]). *В условиях леммы* 3.3.1 *для любых $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}^d$ имеет место сходимость по вероятности $B_T(t,x) \xrightarrow{P} a_M(2\pi t)^{d/2}$, когда $T \to \infty$.*

Лемма 3.3.3 ([2]). *Пусть выполнены условия леммы* 3.3.1*. Тогда конечномерные распределения случайных полей V_T сходятся при $T \to \infty$ к конечномерным распределениям центрированного гауссовского случайного поля $V_\infty = (V_{\infty,i})_{i=1,\dots,d}$ с ковариационной функцией*

$$\mathsf{E}V_{\infty,i}(s,a)V_{\infty,j}(t,b)$$
$$= (2\pi)^{-d/2}\sigma_M^2 a_M^{-2}(st)^{-d/2-1}e^{-|a-b|^2/(2s+2t)}G_{ij}(s,a,t,b), \qquad (3.10)$$

где $s,t > 0$, $i,j = 1,\dots,d$, $a,b \in \mathbb{R}^d$.

Отметим, что ковариационная функция вида (3.10) была впервые получена в работах [46] и [47], в которых изучались решения задачи Коши для уравнения Бюргерса с начальным потенциалом, задаваемым некоторым полем дробового шума.

Рассмотрим $C((0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ — пространство непрерывных на $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ функций со значениями в $\mathbb{R}^d$, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах.

Следующая теорема обобщает аналогичное утверждение для ассоциированных случайных мер, доказанное в [2]. А именно, применение теоремы 3.2.1

позволило избавиться (при размерности $d \geqslant 3$) от ограничений на скорость убывания к нулю коэффициента Кокса-Гримметта рассматриваемой случайной меры, а также от требования существования у нее моментов достаточно высоких порядков.

Теорема 3.3.4. *При выполнении условий леммы* 3.3.1 *случайные поля* V_T *сходятся при* $T \to \infty$ *по распределению в пространстве* $C((0,\infty)\times\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ *к центрированному гауссовскому полю с ковариационной функцией, задаваемой формулой* (3.10).

Доказательство. Сходимость конечномерных распределений следует из леммы 3.3.3, поэтому остается проверить плотность распределений V_T, $T \geqslant 1$. Легко видеть, что достаточно доказать плотность распределений полей $V_{T,i} = A_{T,i}/(tB_T)$, $T \geqslant 1$, в $C((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ для каждого $i = 1,\dots,d$, где $A_T = (A_{T,1},\dots,A_{T,d})$. Проведем рассуждение для $i = 1$. Отметим, что достаточно установить плотность распределений $A_{T,1}$ и B_T, $T \geqslant 1$ (см. доказательство теоремы 8.2.7 из [10]). Имеем

$$A_{T,1}(t,x) = T^{-d/2}\left(M_T[f_1](t,x) - \mathsf{E}M_T[f_1](t,x)\right),$$
$$B_T(t,x) = T^{-d}M_T[f_2](t,x), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad T\geqslant 1,$$

где

$$f_2(t,x,y) = e^{-|x-y|^2/2t},\ f_1(t,x,y) = (x_1-y_1)f_2(t,x,y),\ t>0,\ x,y\in\mathbb{R}^d. \quad (3.11)$$

Таким образом, плотность распределений $A_{T,1}$, $T \geqslant 1$, вытекает из замечания 3.2.4. Поскольку математическое ожидание

$$\mathsf{E}T^{-d}M_T[f_2](t,x) = a_M\int_{\mathbb{R}^d} f_2(y)dy = a_M(2\pi t)^{d/2}$$

является непрерывной функцией от t и x и не зависит от T, плотность распределений B_T, $T \geqslant 1$, также является следствием замечания 3.2.4. Теорема доказана. □

3.4. ФПТ для решений уравнения Бюргерса, соответствующих начальным потенциалам, задаваемым полями дробового шума

Нам понадобятся некоторые свойства пространств гладких функций. Пусть U — открытое подмножество $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $C^k(U,\mathbb{R}^m)$,

$k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$, — пространство k раз непрерывно-дифференцируемых функций на U, принимающих значения в $\mathbb{R}^m$, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах всех частных производных вплоть до порядка k включительно (производной нулевого порядка считаем саму функцию). Пусть $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность компактов из U таких, что $K_n \subset K_{n+1}$, $K_n \cap \partial K_{n+1} = \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$, и $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = U$ (такая последовательность существует согласно лемме 10.1 из [99]). Здесь ∂K — множество граничных точек компакта K. Легко видеть, что топология на $C^k(U, \mathbb{R}^m)$ задается метрикой

$$\rho_{k,m}(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sum_{l=0}^{k} 2^{-l} (d_{n,l,m}(f-g) \wedge 1), \tag{3.12}$$

где полунормы $d_{n,l,m}$ определяются формулой

$$d_{n,l,m}(f) = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d : \|\alpha\|_1 \leqslant l} \|(\mathsf{D}^{\alpha}(f)) \mathbb{I}\{K_n\}\|_{\infty}, \quad f \in C^l(U, \mathbb{R}^m).$$

Здесь

$$\mathsf{D}^{\alpha} = \mathsf{D}^{\alpha}_{x_1,\ldots,x_d} = \frac{\partial^{\|\alpha\|_1}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_d} x_d}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Отметим, что справедливо представление $C^k(U, \mathbb{R}^m) = C^k(U, \mathbb{R})^m$.

Введем также $C^k(U, \mathbb{C}) = C^k(U, \mathbb{R}^2)$, $n \in \mathbb{N}$. Пространство $C^k(U, \mathbb{R})$ можно рассматривать как замкнутое подмножество $C^k(U, \mathbb{C})$. Известно (см. [99], с. 87), что $C^k(U, \mathbb{C})$ является полным, а значит, $C^k(U, \mathbb{R})$ тоже полное как замкнутое подмножество полного пространства. Кроме того, полиномы с комплексными коэффициентами образуют всюду плотное подмножество $C^k(U, \mathbb{C})$ ([99], с. 160, следствие 4). Следовательно, семейство полиномов с действительными коэффициентами плотно в $C^k(U, \mathbb{R})$. Поскольку любой такой полином можно приблизить в $C^k(U, \mathbb{R})$ полиномом с рациональными коэффициентами, пространство $C^k(U, \mathbb{R})$ является сепарабельным. Таким образом, пространства $C^k(U, \mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{N}$, являются полными и сепарабельными как конечные топологические произведения полных сепарабельных пространств.

Борелевская σ-алгебра в сепарабельном метрическом пространстве порождается открытыми шарами. Любой открытый относительно метрики (3.12) шар порождается системой конечных пересечений множеств вида

$$\{g \in C^k(U, \mathbb{R}^m) : \; d_{n,l,m}(f,g) < r\},$$

$$f \in C^k(U, \mathbb{R}^m),\ r > 0,\ n \in \mathbb{N},\ l \in \{0, \dots, k\}.$$

В то же время любое такое множество в силу непрерывности всех производных вплоть до порядка k функций из пространства $C^k(U, \mathbb{R}^m)$ является не более чем счетным пересечением множеств вида

$$\{g = (g_1, \dots, g_m) \in C^k(U, \mathbb{R}^m) :\ \mathsf{D}^\alpha g_i(x) \in (a, b)\}, \tag{3.13}$$

$$\alpha \in \mathbb{Z}_+^d,\ \|\alpha\|_1 \leqslant k,\ i \in \{1, \dots, m\},\ x \in U,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, конечные пересечения множеств (3.13) образуют π-систему $\mathcal{A}_{U,k,m}$, которая порождает борелевскую σ-алгебру на $C^k(U, \mathbb{R}^m)$. А значит, класс $\mathcal{A}_{U,k,m}$ является определяющим меру классом (см. [11], гл. V, с. 169, определение 8) измеримого пространства $(C^k(U, \mathbb{R}^m), \mathcal{B}(C^k(U, \mathbb{R}^m)))$. Кроме того, любое случайное поле на U со значениями в $\mathbb{R}^m$ и п.н. k-раз непрерывно дифференцируемыми траекториями является случайным элементом со значениями в $(C^k(U, \mathbb{R}^m), \mathcal{B}(C^k(U, \mathbb{R}^m)))$.

Рассмотрим задачу Коши (3.8) для уравнения Бюргерса при $\nu = 1/2$. Интерес представляет изучение предельного поведения решений, если начальный потенциал задается некоторым случайным полей дробового шума (см., напр., [45], [8], [97]). Мы будем исследовать модель, в которой $\xi_t = S_n[h](t)$, $t \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, где $S_n[h]$ имеет вид

$$S_n[h](t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} h(t + x_{ni}), \quad t \in \mathbb{R}^d. \tag{3.14}$$

Здесь $h(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $\{x_{n,i}\}_{i=1}^\infty$ — пуассоновский точечный случайный процесс интенсивности n (в силу леммы 9.1.13 из [56] можно считать, что $x_{n,i}$, $n, i \in \mathbb{N}$, — случайные векторы) с независимыми одинаково распределенными (н.о.р.) марками $\{a_{n,i}\}_{i=1}^\infty$, $\mathsf{E} a_{n,i} = \mu$, $\mathsf{Var}(a_{n,i}) = \sigma^2$, $\sigma > 0$, семейства $\{a_{n,i}\}_{i=1}^\infty$ и $\{x_{n,i}\}_{i=1}^\infty$ независимы при всех натуральных n. Известно, что при этих условиях ряд в правой части (3.14) абсолютно сходится с вероятностью единица, и случайные поля $S_n[h]$, $n \in \mathbb{N}$, интегрируемы (см. [10], доказательство леммы 1.3.6).

Для $f \in C^d(\mathbb{R}^d)$ положим

$$P_k[f](x) = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d : \|\alpha\|_1 \leqslant k} |\mathsf{D}^\alpha f(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad k = 0, \dots, d,$$

и введем для $\delta > 0$

$$R(\delta, f) = \int_{\mathbb{R}^d} \max_{|u|\leqslant\delta} |f(u+x)|dx,$$

$$Q_k(\delta, f) = \int_{\mathbb{R}^d} \max_{|u|\leqslant\delta} P_k^2[f](u+x)dx, \quad k = 0, \ldots, d.$$

Следующий результат устанавливает ФПТ для решений уравнения Бюргерса с начальными потенциалами, задаваемыми полями $S_n[h]$, при $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.4.1. *Если $d \leqslant 3$, $h \in C^d(\mathbb{R}^d)$, и $R(\delta, h) + Q_d(\delta, h) < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, то имеет место сходимость по распределению в пространстве $C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ случайных полей $v_n = v[S_n[h]]$ ($v[\cdot]$ определено в (3.9)) к $v[Z]$, где Z — центрированное гауссовское поле на $\mathbb{R}^d$ с ковариационной функцией*

$$cov(Z(s), Z(t)) = (\sigma^2 + \mu^2)\langle h(s+\cdot), h(t+\cdot)\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad s, t \in \mathbb{R}^d.$$

Перед тем, как приступить непосредственно к доказательству теоремы 3.4.1, мы установим ряд вспомогательных результатов, касающихся полей дробового шума. Положим

$$U_n[h](t) = S_n[h](t) - \sqrt{n}\mu \int_{\mathbb{R}^d} h(x)dx, \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Лемма 3.4.2. *При выполнении условий теоремы 3.4.1 траектории $S_n[h]$ п.н. непрерывны и конечномерные распределения $U_n[h]$ сходятся к конечномерным распределениям Z при $n \to \infty$.*

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что согласно рассуждениям из [8] (лемма 1; см. также [10], Приложение, теорема 3.1) можно считать, что

$$S_n[h](t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \sum_{j=1}^{\tau_{n,m}} b_{m,j} h(t + y_{m,j}), \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Здесь $\tau_{n,m} \sim Pois(n)$, $y_{m,j}$, $j \in \mathbb{N}$, равномерно распределены на $m \oplus (0,1]^d$, а $b_{m,j} \sim a_{1,0}$. При этом предполагается, что с.в. $\tau_{n,m}$, $y_{m,j}$ и $b_{m,j}$, $m \in \mathbb{Z}^d$, $j \in \mathbb{N}$, являются независимыми в совокупности. Для $t \in \mathbb{R}^d$ имеем

$$\mathsf{E} \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \sum_{j=1}^{\tau_{n,m}} |b_{m,j} h(t + y_{m,j})|$$

$$= \mathsf{E} \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \sum_{M=0}^{\infty} \mathbb{I}\{\tau_{n,m} = M\} \sum_{j=1}^{M} |b_{m,j} h(t + y_{m,j})|$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{n^M}{M!} e^{-n} M \mathsf{E}|b_{0,1}| \int_{m\oplus(0,1]^d} |h(t+x)| dx$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} n\mathsf{E}|b_{0,1}| \int_{m\oplus(0,1]^d} |h(t+x)| dx = n\mathsf{E}|b_{0,1}| \|h\|_1.$$

Используя аналогичные рассуждения и применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем равенство

$$\mathsf{E} S_n[h](t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \sum_{M=0}^{\infty} \mathsf{E}\mathbb{I}\{\tau_{n,m} = M\} \sum_{j=1}^{M} b_{m,j} h(t + y_{m,j}) = \sqrt{n}\mu \int_{\mathbb{R}^d} h(x) dx.$$

При любых $s, t \in \mathbb{R}^d$ и $l, m \in \mathbb{Z}^d$, $l \neq m$, схожим образом выводится соотношение

$$\mathsf{E} \sum_{i=1}^{\tau_{n,l}} b_{l,i} h(s + y_{l,i}) \sum_{j=1}^{\tau_{n,m}} b_{m,j} h(t + y_{m,j})$$

$$= \mathsf{E} \sum_{L=0}^{\infty} \mathbb{I}\{\tau_{n,l} = L\} \sum_{M=0}^{\infty} \mathbb{I}\{\tau_{n,m} = M\} \sum_{i=1}^{L} b_{l,i} h(s + y_{l,i}) \sum_{j=1}^{M} b_{m,j} h(t + y_{m,j})$$

$$= n^2 \mu^2 \int_{l\oplus(0,1]^d} h(s+x) dx \int_{m\oplus(0,1]^d} h(t+x) dx.$$

Тогда как при $l = m$

$$\mathsf{E} \sum_{i=1}^{\tau_{n,m}} b_{m,i} h(s + y_{m,i}) \sum_{j=1}^{\tau_{n,m}} b_{m,j} h(t + y_{m,j})$$

$$= \mathsf{E} \sum_{M=0}^{\infty} \mathbb{I}\{\tau_{n,m} = M\} \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} b_{m,i} h(s + y_{m,i}) b_{m,j} h(t + y_{m,j})$$

$$= \sum_{M=0}^{\infty} \frac{n^M}{M!} e^{-n} \sum_{i=1}^{M} \mathsf{E} b_{m,i} h(s + y_{m,i}) b_{m,i} h(t + y_{m,i})$$

$$+ \sum_{M=0}^{\infty} \frac{n^M}{M!} e^{-n} \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \mathbb{I}\{i \neq j\} \mathsf{E} b_{m,i} h(s + y_{m,i}) b_{m,j} h(t + y_{m,j})$$

$$= \sum_{M=0}^{\infty} \frac{n^M}{M!} e^{-n} M(\sigma^2 + \mu^2) \int_{m\oplus(0,1]^d} h(s+x) h(t+x) dx$$

$$+\sum_{M=0}^{\infty}\frac{n^M}{M!}e^{-n}M(M-1)\mu^2\int_{m\oplus(0,1]^d}h(s+x)dx\int_{m\oplus(0,1]^d}h(t+x)dx$$

$$=n(\sigma^2+\mu^2)\int_{m\oplus(0,1]^d}h(s+x)h(t+x)dx$$

$$+n^2\mu^2\int_{m\oplus(0,1]^d}h(s+x)dx\int_{m\oplus(0,1]^d}h(t+x)dx.$$

Имеем

$$\mathsf{E}S_n[h](s)S_n[h](t)$$

$$=\frac{1}{n}\lim_{N\to\infty}\sum_{\|l\|_\infty\leqslant N}\sum_{\|m\|_\infty\leqslant N, m\neq l}n^2\mu^2\int_{l\oplus(0,1]^d}h(s+x)dx\int_{m\oplus(0,1]^d}h(t+x)dx$$

$$+\frac{1}{n}\lim_{N\to\infty}\sum_{\|m\|_\infty\leqslant N}n(\sigma^2+\mu^2)\int_{m\oplus(0,1]^d}h(s+x)h(t+x)dx$$

$$+\frac{1}{n}\lim_{N\to\infty}\sum_{\|m\|_\infty\leqslant N}n^2\mu^2\int_{m\oplus(0,1]^d}h(s+x)dx\int_{m\oplus(0,1]^d}h(t+x)dx$$

$$=\mathsf{E}S_n[h](s)\mathsf{E}S_n[h](t)+(\sigma^2+\mu^2)\int_{\mathbb{R}^d}h(s+x)h(t+x)dx.$$

Таким образом,

$$cov(U_n[h](s),U_n[h](t))=cov(S_n[h](s),S_n[h](t))=cov(Z(s),Z(t)). \tag{3.15}$$

Рассмотрим функцию $g(x)=\sup_{|u|\leqslant\delta}|h(u+x)|$, $x\in\mathbb{R}^d$. Из конечности $R(\delta,h)$ следует, что $\mathsf{E}|S_n[g]|<\infty$, а значит, для всех $t_0\in\mathbb{R}^d$ ряд (3.14) с вероятностью единица сходится равномерно на множестве $\{t:|t-t_0|\leqslant\delta\}$, откуда и вытекает непрерывность траекторий $S_n[h]$ п.н. Пусть теперь $\tilde{S}^{(k)}[h]$, $k\in\mathbb{N}$, — независимые копии $S_1[h]$. Тогда

$$S_n[h]\stackrel{d}{=}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\tilde{S}^{(k)}[h].$$

Поэтому утверждение о сходимости конечномерных распределений следует из центральной предельной теоремы для н.о.р. случайных векторов. Лемма доказана. □

Лемма 3.4.3. *При выполнении условий теоремы* 3.4.1 *для произвольного* $a>0$ *найдется такой множитель* $C=C(a,\delta)>0$, *что для всех* $M>0$

справедливо неравенство

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[-a,a]^d}|U_n[h](t)|>M\right)\leqslant\frac{C}{M^2}(\sigma^2+\mu^2)Q_d(\delta,h),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $\psi(t)=\psi_a(t)$, $t\in\mathbb{R}^n$, — некоторая гладкая функция, равная единице при $t\in[-a,a]^d$ и нулю при $t\in\mathbb{R}^n\backslash[-a-1,a+1]^d$. Рассмотрим семейство функций $g_x(t)=h(t+x)\psi(t)$, $t,x\in\mathbb{R}^d$. Существует $C_1=C_1(a)$ такое, что $P_d[g_x](t)\leqslant C_1P_d[h](t+x)$, $t,x\in\mathbb{R}^d$. Пользуясь (3.15), для $B\in\mathcal{B}_d$, $B\subset[-a-1,a+1]^d$, имеем

$$\mathsf{E}[(U_n[h]\psi)(B)]^2=(\sigma^2+\mu^2)\int_{\mathbb{R}^d}(g_x(B))^2\,dx,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Поэтому найдется такое $C_2=C_2(a,\delta)$, что для всех блоков $B\in\mathcal{B}_d$, $B\subset[-a-1,a+1]^d$, справедлива оценка

$$\mathsf{E}[(U_n[h]\psi)(B)]^2$$

$$\leqslant(\sigma^2+\mu^2)|B|^2\int_{\mathbb{R}^d}\sup_{u\in B}P_d^2[g_x](u)dx\leqslant C_2(\sigma^2+\mu^2)|B|^2Q_d(\delta,h),\quad n\in\mathbb{N}.\quad(3.16)$$

Поскольку случайные поля $U_n[h]\psi$ обращаются в нуль на границе множества $[-a-1,a+1]^d$, то в силу теоремы 1 из [43] существует такое $C=C(a,\delta)$, что для каждого $M>0$ выполнено неравенство

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[-a,a]^d}|U_n[h](t)|>M\right)$$

$$\leqslant\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[-a-1,a+1]^d}|U_n[h](t)\psi(t)|>M\right)\leqslant\frac{C}{M^2}(\sigma^2+\mu^2)Q_d(\delta,h),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.4.4. *При выполнении условий теоремы* 3.4.1 *случайные поля* $U_n[h]$ *сходятся по распределению в пространстве* $C(\mathbb{R}^d)$ *к полю* Z.

Доказательство. Сходимость конечномерных распределений является следствием леммы 3.4.2. Возьмем любое $a>0$ и рассмотрим функцию $\psi=\psi_a$, фигурирующую в доказательстве леммы 3.4.3. В силу оценки (3.16) и леммы 2.2.4 последовательность распределений случайных полей $U_n[h]\psi$, $n\in\mathbb{N}$, плотна в пространстве $C([-a-1, a+1]^d)$. А значит, последовательность распределений полей $U_n[h]$, $n \in \mathbb{N}$, плотна в пространстве $C([-a, a]^d)$. Поскольку $a > 0$ было выбрано произвольным, лемма доказана. $\square$

Лемма 3.4.5. *Предположим, что строго стационарные случайные поля $\xi_n = \{\xi_n(t),\ t \in \mathbb{R}^d\}$ сходятся п.н. при $n \to \infty$ к строго стационарному полю $\xi = \{\xi(t),\ t \in \mathbb{R}^d\}$ в пространстве $C(\mathbb{R}^d)$. Пусть также существует такое $C > 0$, что для любого $M > 0$ справедлива оценка*

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t \in (0,1]^d} |\xi_n(t)| > M\right) \vee \mathsf{P}\left(\sup_{t \in (0,1]^d} |\xi(t)| > M\right) \leqslant \frac{C}{M^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем некоторое $r \in (0, 1)$. Предположим, что действительная функция $p(t, x, y)$ непрерывна на $[r, 1/r] \times \mathbb{R}^{2d}$ и удовлетворяет при некоторых $A, \gamma > 0$ неравенству

$$|p(t, x, y)| \leqslant Ae^{-\gamma|x-y|^2}, \quad (t, x, y) \in [r, 1/r] \times \mathbb{R}^{2d}.$$

Тогда последовательность случайных полей

$$I[p, \xi_n](t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, y) e^{\xi_n(y)} dy, \quad (t, x) \in [r, 1/r] \times \mathbb{R}^d,$$

сходится по вероятности в пространстве $C([r, 1/r] \times \mathbb{R}^d)$ при $n \to \infty$ к полю

$$I[p, \xi](t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, y) e^{\xi(y)} dy, \quad (t, x) \in [r, 1/r] \times \mathbb{R}^d.$$

Доказательство. Вначале покажем, что $I[p, \xi_n]$, $n \in \mathbb{N}$, и $I[p, \xi]$ являются случайными полями с п.н. непрерывными траекториями. Установим это для поля $I[p, \xi]$. Введем случайные величины

$$\theta_k = \sup_{y \in k \oplus (0,1]^d} |\xi(y)|, \quad k \in \mathbb{Z}^d. \tag{3.17}$$

Зафиксируем некоторое $a > 0$. При $(t, x) \in [r, 1/r] \times [-a, a]^d$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^d} |p(t, x, y)| e^{\xi(y)} dy \leqslant A \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{\|k\|_\infty = K} e^{\theta_k - \gamma(K-a-1)_+^2}. \tag{3.18}$$

Достаточно проверить, что ряд (3.18) сходится с вероятностью единица. Обозначим

$$q = q(d) = \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{\|k\|_\infty = K} e^{-K}.$$

Выберем такое $K_0 = K_0(a,q,A,\gamma) \in \mathbb{N}$, $K_0 \geqslant 2$, что для всех $K > K_0$ выполнено неравенство

$$\gamma(K-a-1)_+^2 - K - \log(qA) \geqslant \gamma K^2/2.$$

Для любого $K_1 \in \mathbb{N}$, $K_1 > K_0$, и произвольного $M > 0$ верны оценки

$$\mathsf{P}\left(A\sum_{K=K_1}^{\infty}\sum_{\|k\|_\infty=K} e^{\theta_k-\gamma(K-a-1)_+^2} > M\right)$$

$$\leqslant \sum_{K=K_1}^{\infty}\sum_{\|k\|_\infty=K}\mathsf{P}\left(e^{\theta_k-\gamma(K-a-1)_+^2} > \frac{M}{e^K qA}\right)$$

$$\leqslant \sum_{K=K_1}^{\infty}\sum_{\|k\|_\infty=K}\mathsf{P}\left(\theta_k > \log\left(\frac{Me^{\gamma(K-a-1)_+^2}}{e^K qA}\right)\right)$$

$$\leqslant C\sum_{K=K_1}^{\infty}\sum_{\|k\|_\infty=K}\left(\log\left(\frac{Me^{\gamma(K-a-1)_+^2}}{e^K qA}\right)\right)_+^{-2}$$

$$= C\sum_{K=K_1}^{\infty}\sum_{\|k\|_\infty=K}\big(\gamma(K-a-1)_+^2 - K - \log(qA) + log(M)\big)_+^{-2}$$

$$\leqslant C\sum_{K=K_1}^{\infty}\sum_{\|k\|_\infty=K}\big(\gamma K^2/2 + log(M)\big)_+^{-2}. \tag{3.19}$$

При $M \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$C\sum_{K=K_1}^{\infty}\sum_{\|k\|_\infty=K}\big(\gamma K^2/2 + log(M)\big)_+^{-2} \leqslant 4\gamma^{-2}C\sum_{K=K_1}^{\infty}\sum_{\|k\|_\infty=K}K^{-4}.$$

Последнее выражение конечно, так как $d \leqslant 3$. Следовательно, правая часть (3.19) стремится к нулю при $M \to \infty$. Поэтому ряд (3.18) сходится с вероятностью единица.

Для $n \in \mathbb{N}$ и $K_1 \in \mathbb{N}$, $K_1 > K_0$, имеем

$$\sup_{(t,x)\in[r,1/r]\times[-a,a]^d}|I[p,\xi_n](t,x) - I[p,\xi](t,x)|$$

$$\leqslant \sup_{(t,x)\in[r,1/r]\times[-a,a]^d}\int_{[-K_1,K_1]^d}|p(t,x,y)||e^{\xi_n(y)} - e^{\xi(y)}|dy$$

$$+ \sup_{(t,x)\in[r,1/r]\times[-a,a]^d}\int_{\mathbb{R}^d\setminus[-K_1,K_1]^d}|p(t,x,y)||e^{\xi_n(y)} - e^{\xi(y)}|dy$$

$$\leqslant (2K_1)^d A \sup_{y\in[-K_1,K_1]^d} |e^{\xi_n(y)} - e^{\xi(y)}|$$

$$+ \sup_{(t,x)\in[r,1/r]\times[-a,a]^d} \int_{\mathbb{R}^d\setminus[-K_1,K_1]^d} |p(t,x,y)|(e^{\xi_n(y)} + e^{\xi(y)})dy$$

$$= \Delta_1 + \Delta_2.$$

Легко видеть, что

$$\sup_{y\in[-K_1,K_1]^d} |e^{\xi_n(y)} - e^{\xi(y)}| \leqslant e^{\sup_{y\in[-K_1,K_1]^d}(\xi_n(y)\vee\xi(y))} \sup_{y\in[-K_1,K_1]^d} |\xi_n(y) - \xi(y)|.$$

Поэтому Δ_1 стремится к нулю п.н., когда $n \to \infty$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Используя те же рассуждения, что и при выводе оценки (3.19), имеем

$$\mathsf{P}(\Delta_2 > \varepsilon/2) \leqslant 2C \sum_{K=K_1}^{\infty} \sum_{\|k\|_\infty = K} \big(\gamma K^2/2 + log(\varepsilon/4)\big)_+^{-2} \longrightarrow 0, \quad K_1 \to \infty.$$

Выберем K_1 так, что $\mathsf{P}(\Delta_2 > \varepsilon/2) < \varepsilon/2$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Возьмем $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\mathsf{P}(\Delta_1 > \varepsilon/2) < \varepsilon/2, \quad n \geqslant N.$$

Тогда при $n \geqslant N$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{(t,x)\in[r,1/r]\times[-a,a]^d} |I[p,\xi_n](t,x) - I[p,\xi](t,x)| > \varepsilon\right) < \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ и $a > 0$ лемма доказана. □

Доказательство теоремы 3.4.1. Прежде всего покажем, что траектории случайных полей v_n, $n \in \mathbb{N}$, принадлежат пространству $C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Отметим, что $v_n = v[S_n[h]] = v[U_n[h]]$. Рассмотрим поля $A_n = A[U_n[h]] = (A_{n,1}, \ldots, A_{n,d})$ и $B_n = B[U_n[h]]$. Поскольку случайные поля B_n, $n \in \mathbb{N}$, являются п.н. строго положительными на $(0,\infty) \times \mathbb{R}^d$, достаточно проверить, что с вероятностью единица траектории $A_{n,i}$, $i = 1, \ldots, d$, и B_n, $n \in \mathbb{N}$, бесконечно дифференцируемы. Проведем доказательство для поля $A_{n,1}$ при некотором натуральном n (для B_n рассуждения полностью аналогичны). Покажем, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{d+1}$ производная $\mathsf{D}^\alpha_{t,x_1,\ldots,x_d} A_{n,1}$ существует и непрерывна с вероятностью единица. Положим

$$p_\alpha(t,x,y) = \mathsf{D}^\alpha_{t,x_1,\ldots,x_d} f_1(t,x,y), \quad (t,x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^{2d},$$

где f_1 определена в (3.11). Выберем произвольное $r \in (0,1)$. Функция p_α, очевидно, удовлетворяет условиям леммы 3.4.5 при некоторых $A = A(\alpha, r)$ и $\gamma = \gamma(\alpha, r)$. Из доказательства леммы 3.4.5 следует, что интеграл

$$I[p_\alpha, U_n[h]](t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} p_\alpha(t,x,y) e^{U_n[h](y)} dy$$

сходится равномерно по $(t,x) \in [r, 1/r] \times [-a,a]^d$ п.н. при любом $a > 0$. Применяя индукцию по $\|\alpha\|_1$ и правило Лейбница дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, получаем, что с вероятностью единица на $[r, 1/r] \times \mathbb{R}^d$ существует непрерывная производная

$$\mathsf{D}^\alpha_{t,x_1,\dots,x_d} A_{n,1}(t,x) = I[p_\alpha, U_n[h]](t,x). \tag{3.20}$$

По лемме 3.4.4 случайные поля $U_n[h]$ сходятся к Z по распределению в пространстве $C(\mathbb{R}^d)$ при $n \to \infty$. Воспользуемся теоремой Скорохода о переходе к одному вероятностному пространству (см., напр., [11], теорема 5.11). Найдется последовательность случайных полей ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, сходящаяся к полю ξ в $C(\mathbb{R}^d)$ при $n \to \infty$ п.н., такая, что $\xi_n \overset{d}{=} U_n[h]$, $n \in \mathbb{N}$, $\xi \overset{d}{=} Z$. В силу лемм 3.4.3 и 3.4.4 к случайным полям ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, и ξ применима лемма 3.4.5. А значит, для произвольной функции $p : (0,\infty) \times \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям леммы 3.4.5 при любом $r \in (0,1)$, имеет место сходимость по вероятности в пространстве $C((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$

$$I[p, \xi_n] \xrightarrow{P} I[p, \xi], \quad n \to \infty. \tag{3.21}$$

Пусть $p^{(1)}, \dots, p^{(m)}$, — действительные функции на $(0,\infty) \times \mathbb{R}^{2d}$, для которых выполнены условия леммы 3.4.5 при любом $r \in (0,1)$. Рассмотрим $(s_1, z_1), \dots, (s_l, z_l) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$, $c_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, l$, и функцию $f(y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l c_{i,j} p^{(i)}(s_j, z_j, y)$, $y \in \mathbb{R}^d$. Найдутся $A, \gamma > 0$ такие, что $|f(y)| \leqslant A e^{-\gamma |y|^2}$, $y \in \mathbb{R}^d$. Поэтому справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| e^{\xi(y)} dy \leqslant A \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{\|k\|_\infty = K} e^{\theta_k - \gamma (K-1)_+^2}, \tag{3.22}$$

где θ_k, $k \in \mathbb{Z}^d$, фигурируют в (3.17). Так же, как и сумма в правой части (3.18), ряд (3.22) сходится с вероятностью единица. Соответственно, п.н. верно равенство

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} c_{i,j}\int_{\mathbb{R}^d} p^{(i)}(s_j,z_j,y)e^{\xi(y)}dy = \lim_{a\to\infty}\int_{[-a,a]^d} f(y)e^{\xi(y)}dy.$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\int_{[-a,a]^d} f(y)e^{\xi(y)}dy \overset{d}{=} \int_{[-a,a]^d} f(y)e^{Z(y)}dy.$$

Следовательно, имеет место совпадение распределений в пространстве $C((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)^m$

$$\Big(I[p^{(i)},\xi]\Big)_{i=1}^{m} \overset{d}{=} \Big(I[p^{(i)},Z]\Big)_{i=1}^{m}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Отметим, что для производных полей $A[\xi]$, $A[Z]$ и $B[\xi]$, $B[Z]$ справедливы формулы, аналогичные (3.20). Поэтому совпадают распределения в пространстве $C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ случайных полей $v[\xi]$ и $v[Z]$ (поскольку определяющим меру классом данного пространства является система цилиндрических множеств $\mathcal{A}_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^d,\infty,d}$). Аналогичным образом получаем совпадение распределений $v[\xi_n]$ и $v[U_n[h]]$, $n\in\mathbb{N}$.

Соотношение (3.21) влечет сходимость по вероятности в пространстве $C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$

$$A[\xi_n]\xrightarrow{P} A[\xi], \quad B[\xi_n]\xrightarrow{P} B[\xi], \quad n\to\infty.$$

Поскольку случайное поле $B[\xi]$ строго положительно с вероятностью единица, отсюда, как и при доказательстве теоремы 3.3.4, вытекает сходимость

$$v[\xi_n]\xrightarrow{P} v[\xi], \quad n\to\infty.$$

Теорема доказана. □

3.5. Предельная теорема для макс-обобщенных процессов Кокса

Рассмотрим систему, на которую в случайные моменты времени действует некоторый фактор случайной интенсивности. Важной задачей является оценка вероятности того, что за определенный промежуток времени величина воздействия этого фактора превысит заданный уровень. О практических приложениях, где возникает эта проблема, можно прочесть в монографии [24] (см. также

[22] и [21]). Нас будет интересовать оценка упомянутой вероятности в том случае, когда моменты действия фактора описываются так называемым процессом Кокса.

Пусть $\{N(t),\ t \geqslant 0\}$ — пуассоновский процесс единичной интенсивности, а $\{\Lambda(t),\ t \geqslant 0\}$ — некоторый независящий от него процесс. Будем предполагать, что $\{N(t),\ t \geqslant 0\}$ и $\{\Lambda(t),\ t \geqslant 0\}$ имеют п.н. неубывающие и непрерывные справа траектории, выходящие из нуля. Тогда *процесс Кокса* вводится формулой

$$Z(t) = N(\Lambda(t)), \quad t \geqslant 0.$$

Подобные дважды стохастические пуассоновские процессы активно используются при исследовании ряда задач теории риска. Отметим также, что имеются работы (см., напр., [71], [34]) посвященные рассмотрению многомерных обобщений процесса Кокса.

Предположим, что существуют неограниченно возрастающая функция $d(t) > 0$, $t \in [0, \infty)$, и случайная величина Λ такие, что

(E1) $(\Lambda(t)/d(t)) \xrightarrow{d} \Lambda, \quad t \to \infty.$

Пусть X_n, $n \in \mathbb{N}$, — некоторая последовательность случайных величин, характеризующих воздействие фактора на систему. Будем считать, что

(E2) процессы $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $\{N(t),\ t \geqslant 0\}$ и $\{\Lambda(t),\ t \geqslant 0\}$ независимы в совокупности.

Для $n \in \mathbb{Z}_+$ обозначим

$$M_n = \begin{cases} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k, & n \geqslant 1, \\ -\infty, & n = 0, \end{cases}$$

и рассмотрим случайный процесс $M(t) = M_{Z(t)}$, $t \geqslant 0$, называемый *макс-обобщенным процессом Кокса*. Отметим, что $M(t)$ является случайной величиной при каждом $t \geqslant 0$, поскольку любой случайный процесс с дискретным временем (в частности, M_n, $n \in \mathbb{N}$) измерим.

Положим $F(x) = \mathsf{P}(X_1 < x)$, $x \in \mathbb{R}$. Допустим, что функция $1 - F(x)$ является правильно меняющейся (в смысле Карамата), т.е. для некоторого $\gamma > 0$ справедливо соотношение

$$\frac{1 - F(xy)}{1 - F(y)} \longrightarrow x^{-\gamma}, \quad y \to \infty, \quad x > 0. \tag{3.23}$$

Введем
$$b(t)=\inf\left\{x\in\mathbb{R}:1-F(x)\leqslant\frac{1}{d(t)}\right\}.$$
В статье [22] показано, что если случайные величины X_n, $n\in\mathbb{N}$ независимы и одинаково распределены, то
$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}(M(t)<b(t)x)=\int_0^\infty e^{-\lambda x^{-\gamma}}d\mathsf{P}(\Lambda<\lambda),\quad x>0. \tag{3.24}$$
Мы обобщим этот результат, рассмотрев зависимые и, вообще говоря, неодинаково распределенные случайные величины X_n, $n\in\mathbb{N}$.

Определим
$$\Delta h(y,n)=\left|\mathsf{P}\left(M_n<h\left(\frac{y}{n}\right)\right)-e^{-y}\right|,\quad y\geqslant 0,$$
где $h(y):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$ — некоторая невозрастающая функция, удовлетворяющая условию
$$\lim_{y\to 0+}h(y)=\infty.$$
Нам понадобится простая

Лемма 3.5.1. *Если $\Delta h(y,n)\to 0$, $n\to\infty$, для $y\geqslant 0$, то эта сходимость равномерна по y на любом промежутке $[0,C]$, $C>0$.*

Доказательство. Предположим, что сходимость неравномерная, т.е. существуют $\delta>0$ и последовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, $y_{n_k}\in[0,C]$, где $n_k\in\mathbb{N}$, $n_k\to\infty$, $k\to\infty$, для которых $\Delta h(y_{n_k},n_k)>\delta$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $y_{n_k}\to y_0$ при $k\to\infty$. Найдется $k_0\in\mathbb{N}$ такое, что если $k>k_0$, то справедлива оценка $|y_{n_k}-y_0|<\delta/4$. Поэтому при всех достаточно больших k имеем
$$\Delta h(y_{n_k},n_k)\leqslant\left|\mathsf{P}\left(M_{n_k}<h\left(\frac{y_{n_k}}{n_k}\right)\right)-\mathsf{P}\left(M_{n_k}<h\left(\frac{y_0}{n_k}\right)\right)\right|$$
$$+\Delta h(y_0,n_k)+\delta/4\leqslant\Delta h(\max\{y_0-\delta/4,0\},n_k)+\delta/2$$
$$+\Delta h(\min\{y_0+\delta/4,C\},n_k)+\Delta h(y_0,n_k)+\delta/4.$$
Значит,
$$\limsup_{k\to\infty}\Delta h(y_{n_k},n_k)\leqslant 3\delta/4.$$
Пришли к противоречию. Лемма доказана. □

Теорема 3.5.2. *Пусть выполнены условия* (E1) *и* (E2). *Тогда если для всех* $y \geqslant 0$ *имеет место сходимость*

$$\Delta h(y,n) \longrightarrow 0,\ n \to \infty, \tag{3.25}$$

то для каждого $a > 0$

$$\mathsf{P}\left(M(t) < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) \longrightarrow L(a),\ t \to \infty, \tag{3.26}$$

где $L(a) = \mathsf{E}e^{-a\Lambda}$.

Доказательство. Возьмем произвольное $A > 0$. Для $t \geqslant 0$ определим случайные величины $\Lambda_A(t) = d(t)[\Lambda(t)/d(t)]_A$ и $M_A(t) = M_{N(\Lambda_A(t))}$, где $[x]_A = (|x| \wedge A)sgn(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что

$$\limsup_{t\to\infty}\left|\mathsf{P}\left(M(t) < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) - \mathsf{P}\left(M_A(t) < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right)\right|$$

$$\leqslant \limsup_{t\to\infty}\mathsf{P}\left(\frac{\Lambda(t)}{d(t)} > A\right) \leqslant \mathsf{P}(\Lambda \geqslant A),$$

$$\left|\mathsf{E}e^{-a\Lambda} - \mathsf{E}e^{-a[\Lambda]_A}\right| \leqslant \mathsf{P}(\Lambda \geqslant A).$$

Поэтому достаточно установить соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\left(M_A(t) < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) = \mathsf{E}e^{-a[\Lambda]_A}$$

при каждом $A > 0$. Имеем

$$\mathsf{P}\left(M_A(t) < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{E}\frac{\Lambda_A(t)^n}{n!}e^{-\Lambda_A(t)}\mathsf{P}\left(M_n < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{[2eAd(t)]}\mathsf{E}\frac{\Lambda_A(t)^n}{n!}e^{-\Lambda_A(t)}\mathsf{P}\left(M_n < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right)$$

$$+ \sum_{n=[2eAd(t)]+1}^{\infty}\mathsf{E}\frac{\Lambda_A(t)^n}{n!}e^{-\Lambda_A(t)}\mathsf{P}\left(M_n < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) = S_1 + S_2.$$

По формуле Стирлинга для любого натурального n верно неравенство $n! \geqslant \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$. Следовательно, при $n \geqslant 2eAd(t)$ справедлива оценка

$$\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi eAd(t)}}\frac{e^n}{(2eAd(t))^n}.$$

Поэтому

$$S_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi eAd(t)}} \sum_{n=[2eAd(t)]+1}^{\infty} \mathsf{E}\left(\frac{\Lambda_A(t)e}{2eAd(t)}\right)^n e^{-\Lambda_A(t)}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi eAd(t)}} \sum_{n=[2eAd(t)]+1}^{\infty} \mathsf{E}2^{-n}e^{-\Lambda_A(t)} \longrightarrow 0,\ t \to \infty.$$

Для $n \leqslant 2eAd(t)$ имеем $\frac{an}{d(t)} \leqslant 2eAa$. По лемме 3.5.1 для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ и $y \in [0, 2eAa]$ верна оценка $\Delta h(y,n) < \varepsilon$. Таким образом,

$$\left| S_1 - \sum_{n=0}^{[2eAd(t)]} \mathsf{E}\frac{\Lambda_A(t)^n}{n!} e^{-\Lambda_A(t)} e^{-\frac{an}{d(t)}} \right|$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{N} \mathsf{E}\frac{\Lambda_A(t)^n}{n!} e^{-\Lambda_A(t)} \left| \mathsf{P}\left(M_n < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) - e^{-\frac{an}{d(t)}} \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathsf{E}\frac{\Lambda_A(t)^n}{n!} e^{-\Lambda_A(t)} \varepsilon$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant n \leqslant N} \left| \mathsf{P}\left(M_n < h\left(\frac{a}{d(t)}\right)\right) - e^{-\frac{an}{d(t)}} \right| + \varepsilon \to \varepsilon,\ t \to \infty.$$

Так же, как и при оценке S_2, получаем, что

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{n=[2eAd(t)]+1}^{\infty} \mathsf{E}\frac{\Lambda_A(t)^n}{n!} e^{-\Lambda_A(t)} e^{-\frac{an}{d(t)}} = 0.$$

А значит,

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{[2eAd(t)]} \mathsf{E}\frac{\Lambda_A(t)^n}{n!} e^{-\Lambda_A(t)} e^{-\frac{an}{d(t)}} = \lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{E}\frac{\Lambda_A(t)^n}{n!} e^{-\Lambda_A(t)} e^{-\frac{an}{d(t)}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{E}\frac{(\Lambda_A(t)e^{-\frac{a}{d(t)}})^n}{n!} e^{-\Lambda_A(t)e^{-\frac{a}{d(t)}}} e^{-\Lambda_A(t)(1-e^{-\frac{a}{d(t)}})} = \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}e^{-\Lambda_A(t)(1-e^{-\frac{a}{d(t)}})}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}e^{-\left[\frac{\Lambda(t)}{d(t)}\right]_A d(t)(1-e^{-\frac{a}{d(t)}})} = \mathsf{E}e^{-a[\Lambda]_A}.$$

Теорема доказана. $\square$

Покажем, что теорема 3.5.2 обобщает (3.24). Действительно, допустим, что $X_n, n \in \mathbb{N}$, — независимые одинаково распределенные случайные величины. Если справедливо соотношение (3.23), то

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1-F(x)}{1-F(x+0)} \leqslant \limsup_{x\to\infty} \frac{1-F(x)}{1-F(xy)} \leqslant y^\gamma, \quad y > 1.$$

Поэтому

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{1-F(x)}{1-F(x+0)}=1. \tag{3.27}$$

Введем

$$\delta(x)=\sup_{y\geqslant x}\frac{1-F(y)}{1-F(y+0)}-1,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Определим функцию h на $\mathbb{R}_+$ формулой

$$h(y)=\begin{cases}\inf\{x\in\mathbb{R}:\ 1-F(x)\leqslant y\}, & y>0,\\ \infty, & y=0.\end{cases}$$

При $y>0$ имеем

$$\mathsf{P}\left(M_n<h\left(\frac{y}{n}\right)\right)=F^n\left(h\left(\frac{y}{n}\right)\right)\leqslant\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\longrightarrow e^{-y},\quad n\to\infty.$$

В то же время

$$F^n\left(h\left(\frac{y}{n}\right)\right)\geqslant\left(1-\left(1+\delta\left(h\left(\frac{y}{n}\right)\right)\right)\frac{y}{n}\right)^n\longrightarrow e^{-y},\quad n\to\infty.$$

Таким образом, справедливо (3.25). Зафиксируем некоторое $x>0$. Подставляя $a=x^{-\gamma}$ в (3.26), получаем сходимость

$$\mathsf{P}\left(M(t)<h\left(\frac{x^{-\gamma}}{d(t)}\right)\right)\longrightarrow\int_0^\infty e^{-\lambda x^{-\gamma}}d\mathsf{P}(\Lambda<\lambda),\quad t\to\infty. \tag{3.28}$$

Заметим, что если $a_n,b_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, — две неограниченно возрастающие последовательности, то в силу (3.23)

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1-F(a_n)}{1-F(b_n)}\leqslant\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\right)^{-\gamma}.$$

Поэтому если $\frac{1-F(a_n)}{1-F(b_n)}\to1$, $n\to\infty$, то и $\frac{a_n}{b_n}\to1$, $n\to\infty$. В силу (3.27) приходим к формуле

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F\left(h\left(\frac{y^{-\gamma}}{d(t)}\right)\right)}{\frac{y^{-\gamma}}{d(t)}}=1,\quad y>0. \tag{3.29}$$

Кроме того, используя (3.23), получаем соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F\left(yh\left(\frac{1}{d(t)}\right)\right)}{\frac{y^{-\gamma}}{d(t)}}=1,\quad y>0. \tag{3.30}$$

Выберем произвольное $\varepsilon \in (0,1)$. Применяя (3.29) и (3.30) при $y = x(1-\varepsilon)$ и $y = x(1+\varepsilon)$, имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h\left(\frac{x^{-\gamma}(1-\varepsilon)^{-\gamma}}{d(t)}\right)}{x(1-\varepsilon)h\left(\frac{1}{d(t)}\right)} = 1; \quad \lim_{t\to\infty} \frac{h\left(\frac{x^{-\gamma}(1+\varepsilon)^{-\gamma}}{d(t)}\right)}{x(1+\varepsilon)h\left(\frac{1}{d(t)}\right)} = 1.$$

Поэтому найдется t_0 такое, что при $t > t_0$

$$h\left(\frac{x^{-\gamma}(1-\varepsilon)^{-\gamma}}{d(t)}\right) \leqslant xh\left(\frac{1}{d(t)}\right) = xb(t) \leqslant h\left(\frac{x^{-\gamma}(1+\varepsilon)^{-\gamma}}{d(t)}\right).$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon \in (0,1)$ соотношение (3.24) вытекает из (3.28).

Отметим, что если случайные величины X_n, $n \in \mathbb{N}$, одинаково распределены, но, вообще говоря, зависимы, достаточные для выполнения (3.25) условия можно найти, например, в [27].

Заключение

В диссертации рассмотрены взаимосвязанные задачи, относящиеся к исследованию асимптотических свойств нелинейных функций от слабо зависимых случайных полей. Получена оптимальная оценка ковариации индикаторных функций от положительно или отрицательно ассоциированных случайных величин. Кроме того, установлена новая оценка моментов сумм зависимых случайных величин. С ее помощью ослаблены условия, обеспечивающие выполнение функциональной центральной предельной теоремы типа Донскера-Прохорова для случайных полей. Новые оценки применены и к выводу предельных теорем для объемов экскурсионных множеств. В диссертации также изучено предельное поведение ряда функций от случайных мер. В частности, получено обобщение теоремы Эванса.

Список литературы

1. Бахтин Ю. Ю., Функциональная центральная предельная теорема для решения многомерного уравнения Бюргерса с начальными данными, заданными ассоциированной случайной мерой // *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика*, 2000, 6, 8-15.

2. Бахтин Ю. Ю., Функциональная центральная предельная теорема для преобразованных решений многомерного уравнения Бюргерса со случайными начальными данными // *Теория вероятностей и ее применения*, 2001, 46, **3**, 427-448.

3. Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер.* Москва: Наука, 1977.

4. Булинский А. В., *Предельные теоремы в условиях слабой зависимости.* Москва: Изд-во МГУ, 1989.

5. Булинский А. В., Неравенства для моментов сумм ассоциированных мультииндексированных величин // *Теория вероятностей и ее применения*, 1993, 38, **2**, 417-425.

6. Булинский А. В., Статистический вариант центральной предельной теоремы для векторных случайных полей // *Математические заметки*, 2004, 76, **4**, 490-501.

7. Булинский А. В., Центральная предельная теорема для положительно ассоциированных стационарных случайных полей // *Вестник Санкт-Петербургского университета.* Сер. 1, 2011, 2, 5-13.

8. Булинский А. В., Молчанов С. А., Асимптотическая гауссовость решения уравнения Бюргерса со случайными начальными данными // *Теория вероятностей и ее применения*, 1991, 36, **2**, 217-235.

9. Булинский А. В., Шабанович Э., Асимптотическое поведение некоторых

функционалов от положительно и отрицательно зависимых случайных полей // *Фундаментальная и прикладная математика*, 1998, 4, **2**, 479-492.

10. Булинский А. В., Шашкин А. П., *Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем.* Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

11. Булинский А. В., Ширяев А. Н., *Теория случайных процессов.* Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

12. Вронский М. А., Скорость сходимости в УЗБЧ для ассоциированных последовательностей и полей // *Теория вероятностей и ее применения*, 1998, 43, **3**, 439–455.

13. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И., *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии.* Москва: Наука, 1990.

14. Демичев В. П., Предельные теоремы для экстремальных потоков событий // *Математические заметки*, 2009, 86, **2**, 184-189.

15. Демичев В. П., Центральная предельная теорема для интегралов по стационарным случайным мерам // *XVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов", секция "Математика и механика"*, Тезисы докладов, Москва: МАКС Пресс, 2011, 1.

16. Демичев В. П., Функциональная центральная предельная теорема для интегралов по случайным мерам // *XIX Международная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов", секция "Математика и механика"*, Тезисы докладов, Москва: МАКС Пресс, 2012, 1.

17. Демичев В. П., Принцип инвариантности для слабо зависимых случайных полей // *XX Международная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов", секция "Математика и механика"*, Тезисы докладов, Москва: МАКС Пресс, 2013, 1.

18. Демичев В. П., Функциональная центральная предельная теорема для объемов экскурсионных множеств квази-ассоциированных случайных полей // *Записки научных семинаров ПОМИ*, 2013, 412, 109-120.

19. Демичев В. П., Функциональная предельная теорема для решений уравнения Бюргерса со случайными начальными данными // *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика*, 2013, 2, 42-46.

20. Запорожец Д. Н., Ибрагимов И. А., О площади случайной поверхности // *Записки научных семинаров ПОМИ*, 2010, 384, 154-175.

21. Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я., *Математические основы теории риска.* Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

22. Королев В. Ю., Соколов И. А., Некоторые вопросы анализа катастрофических рисков, связанных с неоднородными потоками экстремальных событий // *Системы и средства информатики, Специальный выпуск: "Математические модели и методы информатики, стохастические технологии и системы"*, Москва: ИПИ РАН, 2005, 108-124.

23. Королев В. Ю., Соколов И. А., Гордеев А. С., Григорьева М. Е., Попов С. В., Чебоненко Н. А, Некоторые методы анализа временных характеристик катастроф в неоднородных потоках экстремальных событий // *Системы и средства информатики, Специальный выпуск: "Математические модели в информационных технологиях"*, Москва: ИПИ РАН, 2006, 5-23.

24. Королев В. Ю., Соколов И. А., *Математические модели неоднородных потоков экстремальных событий.* Москва: ТОРУС-ПРЕСС, 2008.

25. Крыжановская Н. Ю., Моментное неравенство для сумм мультииндексированных зависимых случайных величин // *Математические заметки*, 2008, 83, **6**, 843-856.

26. Леоненко Н. Н., Иванов А. В., *Статистический анализ случайных полей.* Киев: Вища школа. Изд-во при Киев. ун-те, 1986.

27. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х., *Экстремумы случайных последовательностей и процессов.* Москва: Мир, 1989.

28. Лифшиц М. А., О секционировании многомерных множеств // *Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей*, т.1, Изв-во ЛГУ, 1986, 175-178.

29. Лифшиц М. А., *Гауссовские случайные функции.* Киев: ТВіМС, 1995.

30. Мешенмозер Д., Шашкин А. П., Функциональная центральная предельная теорема для меры поверхностей уровня гауссовского случайного поля // *Теория вероятностей и ее применения*, 2012, 57, **1**, 168-178.

31. Никитин Я. Ю., *Асимптотическая эффективность непараметрических критериев.* Москва: Наука, 1995.

32. Прохоров Ю. В., Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // *Теория вероятностей и ее применения*, 1956, 1, **2**, 177-238.

33. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т.2, Москва: Мир, 1967.

34. Хохлов Ю. С., Румянцева О. И., Оценка вклада компоненты в общий риск по портфелю, заданному многомерным дважды стохастическим процессом // *Международная конференция "Теория вероятностей и ее приложения"*, Тезисы докладов, Москва, 2012, 297.

35. Шашкин А. П., Квазиассоциированность гауссовской системы случайных векторов // *Успехи математических наук*, 2002, 57, **6**, 199-200.

36. Шашкин А. П., Принцип инвариантности для одного класса слабозависимых случайных полей // *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика*, 2004, 4, 24-30.

37. Шашкин А. П., Максимальное неравенство для слабо зависимого случайного поля // *Математические заметки*, 2004, 75, **5**, 773-782.

38. Шашкин А. П., К центральной предельной теореме Ньюмена // *Теория вероятностей и ее применения*, 2005, 50, **2**, 382-390.

39. Adler R. J., Taylor J. E., *Random Fields and Geometry.* New York: Springer, 2007.

40. Azais J.-M., Wschebor M., *Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields.* New Jersey: Wiley, 2009.

41. Bagai I., Prakasa Rao B. L. S., Estimation of the survival function for stationary associated processes // *Statistics and Probability Letters*, 1991, 12, **5**, 385-391.

42. Barndorff-Nielsen O. E., Leonenko N. N., Burgers' turbulence problem with linear or quadratic external potential // *Journal of Applied Probability*, 2005, 42, **2**, 550-565.

43. Bickel P. J., Wichura M. J., Convergence criteria for multiparameter Stochastic processes and some applications // *The Annals of Mathematical Statistics*, 1971, 42, **5**, 1656-1670.

44. Birkel T., Moment bounds for associated sequences // *Annals of Probability*, 1988, 16, **3**, 1184-1193.

45. Bulinski A. V., CLT for Families of Integral Functionals Arising in Solving Multidimensional Burgers' Equation // *Proc. 5th Vilnius Conf. Probab. Theory and Math. Statist.*, 1990, 1, VSP-Mokslas, 207-216.

46. Bulinski A. V., Central limit theorem for the solution of the multidimensional Burgers equation with random data // *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, 1992, 17, **1**, 11-22.

47. Bulinski A. V., Some problems of asymptotical analysis of nonlinear diffusion // *Probability Theory and Mathematical Statistics, Proceedings of VI USSR-Japan Symposium, Eds. Shiryaev, A.N. et al*, Singapore: World Scientific, 1992, 32-46.

48. Bulinski A. V., Central limit theorem for random fields and applications // *Advances in Data Analysis, Skiadas C.H. (Ed.)*, Boston: Birkhauser, 2010, 141-150.

49. Bulinski A. V., Keane M. S., Invariance principle for associated random fields // *Journal of Mathematical Sciences*, 1996, 81, **5**, 2905-2911.

50. Bulinski A., Kryzhanovskaya N., Convergence rate in CLT for vector-valued random fields with self-normalization // *Probability and Mathematical Statistics*, 2006, 26, **2**, 261-281.

51. Bulinski A., Shashkin A., Strong invariance principle for dependent random fields // *IMS Lecture Notes — Monograph Series Dynamics and Stochastics*, 2006, 48, 128-143.

52. Bulinski A. V., Spodarev E., Timmermann F., Central limit theorems for the excursion sets volumes of weakly dependent random fields // *Bernoulli*, 2012, 18, **1**, 100-118.

53. Bulinski A. V., Suquet C., Normal approximation for quasi-associated random fields // *Statistics and Probability Letters*, 2001, 54, **2**, 215-226.

54. Burgers J. M., *The nonlinear diffusion equation: asymptotic solutions and statistical problems*. Boston: D. Reidel, 1974.

55. Christophides T. C., Vaggelatou E., A connection between suprmodular ordering and positive/negative association // *Journal of Multivariate Analysis*, 2004, 88, **1**, 138-151.

56. Daley D. J., Vere-Jones D., *An Introduction to the Theory of Point Processes. Volume II: General Theory and Structure*. New York: Springer, 2007.

57. Dedecker J., Doukhan P., Lang G., *Weak Dependence: With Examples and Applications*. New York: Springer, 2007.

58. Demichev V. P., CLT for associated systems // *XXIX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models and V International Workshop "Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics related to modeling of information systems"*, Book of Abstracts, Moscow: Institute of Informatics Problems, RAS, 2011, 15-16.

59. Demichev V. P., A moment inequality for a certain class of weakly dependent random fields // *XXXI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models and VII International Workshop "Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics Related to Modeling of Information Systems" and International Workshop "Applied Probability Theory and Theoretical Informatics"*, Moscow: Institute of Informatics Problems, RAS, 2013, 18.

60. Demichev V. P., Covariance estimate for indicator functions of associated random variables and applications // *Abstracts of the 29-th European Meeting of Statisticians*, Budapest, 2013, 86.

61. Dewan I., Prakasa Rao B. L. S., Mann-Whitney test for associated sequences // *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 2003, 55, **1**, 111-119.

62. Dewan I., Prakasa Rao B. L. S., Wilcoxon-signed rank test for associated sequences // *Statistics and Probability Letters*, 2005, 71, **2**, 131-142.

63. Donsker M., An invariance principle for certain probability limit theorems // *Memoirs of the AMS*, 1951, 6.

64. Erdos P., Kac M., On central limit theorems in the theory of probability // *Bulletin of the AMS*, 1946, 52, **4**, 292-302.

65. Esary J. D., Proschan F., Walkup D. W., Association of random variables, with applications // *Annals of Mathematical Statistics*, 1967, 38, **5**, 1466-1474.

66. Evans S. N., Association and random measures // *Probability Theory and Related Fields*, 1990, 86, **1**, 1-19.

67. Funaki T., Surgailis D., Woyczynski W. A., Gibbs-Cox random fields and Burgers turbulence // *Annals of Applied Probability*, 1995, 5, **2**, 461-492.

68. Guessoum Z., Said E. O., Sadki O., Tatachak A., A note on the Lynden-Bell estimator under association // *Statistics and Probability Letters*, 2012, 82, **11**, 1994-2000.

69. Herrndorf N., An example on the central limit theorem for associated sequences // *Annals of Probability*, 1984, 12, **3**, 912-917.

70. Joag-Dev K., Proschan F., Negative association of random variables, with applications // *Annals of Statistics*, 1983, 11, **1**, 286-295.

71. Khokhlov Yu., Rumyantseva O., Multivariate generalized Cox processes // *XXIX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models and V International Workshop "Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics related to modeling of information systems"*, Book of Abstracts, Moscow: Institute of Informatics Problems, RAS, 2011, 29.

72. Kim T.-S., Ko M.-H., Yoo Y.-S., Estimation of the distribution function for stationary random fields of associated processes // *Communications of the Korean Mathematical Society*, 2004, 19, **1**, 169-177.

73. Leonenko N. N., Orsingher E., Limit theorems for solutions of the Burgers equation with Gaussian and non-Gaussian initial conditions // *Теория вероятностей и ее применения*, 1995, 40, **2**, 387-403.

74. Leonenko N. N., Ruiz-Medina M. D., Scaling laws for the multidimensional Burgers equation with quadratic external potential // *Journal of Statistical Physics*, 2006, 124, **1**, 191-205.

75. Louhichi S., Weak convergence for empirical processes of associated sequences // *Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics*, 2000, 36, **5**, 547-567.

76. Matula P., A note on some inequalities for certain classes of positively dependent random variables // *Probability and Mathematical Statistics*, 2004, 24, **1**, 17-26.

77. Matula P., Ziemba M., General covariance inequalities // *Central European Journal of Mathematics*, 2011, 9, **2**, 281-293.

78. Meschenmoser D., Shashkin A., Functional central limit theorem for the volume of excursion sets generated by associated random fields // *Statistics and Probability Letters*, 2011, 81, **6**, 642-646.

79. Molchanov S. A., Surgailis D., Woyczynski W. A., Hyperbolic asymptotics in Burgers' turbulence and extremal processes // *Communications in Mathematical Physics*, 1995, 168, **1**, 209-226.

80. Morel B., Suquet Ch., Hilbertial inveriance principles for the empirical process under association // *Mathematical Methods of Statistics*, 2002, 11, **2**, 203-220.

81. Moricz F., A general moment inequality for the maximum of the rectangular partial sums of multiple series // *Acta Mathematica Hungarica*, 1983, 41, **3/4**, 337-346.

82. Newman C. M., Normal fluctations and the FKG inequalities // *Communications in Mathematical Physics*, 1980, 74, **2**, 119-128.

83. Newman C. M., Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables // *Tong I. L. (Ed.), Inequalities in Statistics and probability*, Hayward, 1984, 127-140.

84. Newman C. M., Wright A. L., An invariance principle for certain dependent sequences // *Annals of Probability*, 1981, 9, **4**, 671-675.

85. Oliveira P. E., Invariance principles in $L^2[0,1]$ // *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 1990, 31, 357-366.

86. Oliveira P. E., *Asymptotics for Associated Random Variables.* Springer, 2012.

87. Oliveira P. E., Suquet C., An invariance principle in $L^2[0,1]$ for non-stationary φ-mixing sequences // *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 1995, 36, 293-302.

88. Oliveira P. E., Suquet Ch., Weak convergence in $L^p(0,1)$ of the uniform empirical process under dependence // *Statistics and Probability Letters*, 1998, 39, 363-370.

89. Pitt L. D., Positevely correlated normal variables are associated // *Annals of Probability*, 1982, 10, **2**, 496-499.

90. Prakasa Rao B. L. S., *Associated Sequences, Demimartingales and Nonparametric Inference.* Birkhauser, 2012.

91. Rosenblatt M., Scale renormalization and random solutions of the Burgers equation // *Journal of Applied Probability*, 1987, 24, **2**, 328-338.

92. Roussas G. G., Asymptotic normality of a smooth estimate of a random field distribution function under association // *Statistics and Probability Letters*, 1995, 24, **1**, 77-90.

93. Shandarin S. F., Zeldovich Ya. B., The large scale structure of the universe: turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium // *Reviews of Modern Physics*, 1989, 61, **2**, 185-220.

94. Shao Q.-M., Yu H., Weak convergence for weighted empirical processes of dependent sequences // *Annals of Probability*, 1996, 24, **4**, 2098-2127.

95. Shashkin A., Integrals of random functions over level sets of Gaussian random fields // *Abstracts of the 29-th European Meeting of Statisticians*, Budapest, 2013, 273-274.

96. Sinai Ya. G., Two results concerning asymptotic behaviour of solutions of the Burgers equation with force // *Journal of Statistical Physics*, 1991, 64, **1/2**, 1-12.

97. Surgailis D., Woyczynski W. A., Burgers' equation with nonlocal shot noise data // *Journal of Applied Probability*, 1994, 31A, 351-362.

98. Surgailis D., Woyczynski W. A., Limit theorems for the Burgers equation initialized by data with long-range dependence // *P. Doukhan, G. Oppenheim, M. Taqqu (Eds.), Stochastic Processes with Long Range Dependence*, Boston: Birkhauser, 2003, 507-524.

99. Treves F., Topological Vector Spaces, *Distributions and Kernels*. New York: Academic Press, 1967.

100. Woyczynski W. A., *Burgers-KPZ Turbulence: Gottingen Lectures*. Springer, 1998.

101. Yu H., A Glivenko-Cantelli lemma and weak convergence for empirical processes of associated sequences // *Probability Theory and Related Fields*, 1993, 95, **3**, 357-370.

102. Zhang L.-X., Wen J., A weak convergence for negatively assocviated fields // *Statistics and Probability Letters*, 2001, 53, **3**, 259-267.