МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.217

Родионов Игорь Владимирович

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭКСТРЕМУМОВ ВРЕМЕННОГО РЯДА

Специальность 01.01.05 – теория вероятностей
и математическая статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В. И. Питербарг

Москва 2013

Содержание

Введение

Настоящая работа состоит из двух глав. В первой главе диссертации рассматриваются статистические оценки характеристик экстремумов в модели выборок с загрязнениями. Классическая теория экстремумов — асимптотическая теория распределения максимума

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n),$$

где $X_1, \dots, X_n$ - независимые одинаково распределённые случайные величины, — начала активно развиваться около полувека назад, хотя её корни уходят глубоко в историю математики. В основе теории лежит фундаментальный результат, полученный Фишером и Типпетом ([1]) и позднее обобщённый Б.В. Гнеденко ([2]) — теорема экстремальных типов, также известная как теорема Фишера-Типпета-Гнеденко, которая описывает все возможные формы распределения M_n при линейной нормировке. Строго говоря, Гнеденко доказал, что если для некоторых числовых последовательностей $a_n > 0$, b_n случайная последовательность $a_n(M_n - b_n)$ имеет невырожденное предельное распределение, т.е. существует такая невырожденная функция распределения $G(x)$, что

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(x), \tag{0.1}$$

то G принадлежит одному из трёх экстремальных типов (т.е. существуют такие константы $a > 0$ и b, что функция распределения $H(x) := G(ax + b)$ в точности равна одной из указанных ниже функций распределения):

$$\text{Тип I:}\ \ G_0(x) = \exp(-e^{-x}),\ x \in \mathbf{R}.$$

$$\text{Тип II:}\ \ G_\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-1/\gamma}),\ x > 0, \gamma > 0, \\ 0,\ x \le 0. \end{cases}$$

$$\text{Тип III:}\ \ G_{-\gamma}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{1/\gamma}),\ x < 0, \gamma > 0, \\ 1,\ x \ge 0, \end{cases}$$

где $G_0(x)$ - так называемое распределения Гумбеля, $G_\gamma(x)$ - класс распределений Фреше, а $G_{-\gamma}(x)$ - класс распределений Вейбулла.

Параметр γ, возникающий в теореме Фишера-Типпета-Гнеденко, называется индексом экстремального значения (extreme value index). Пусть $F(x)$ - маргинальная функция распределения случайной последовательности $\{X_i\}_{i=1}^{+\infty}$. Тогда в случае независимых наблюдений верно

$$P(M_n \leq x) = F^n(x),$$

т.е. (0.1) можно переписать в следующем виде:

$$F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(x). \tag{0.2}$$

Если для некоторых числовых последовательностей $a_n > 0$ и b_n выполнено (0.2), то говорят, что F принадлежит области притяжения распределения G, и пишут $F \in D(G)$. Известны критерии, дающие необходимые и достаточные условия принадлежности F области притяжения того или иного экстремального типа (см. например [3] или [4]). Однако есть распределения, которые не принадлежат ни одной из трёх областей максимального притяжения, например, пуассоновское распределение.

К сегодняшнему дню классическая теория экстремумов сформировалась полностью и имеет большое количество различных приложений (см. например книгу Гумбеля [5]). Позднее, начиная с работ Крамера, Лойнса, Бермана, Лидбеттера и Уотсона, возник интерес к расширению классической теории на последовательности зависимых случайных величин и на стационарные процессы с непрерывным временем. Развитие шло в следующих направлениях: создание теории для гауссовских процессов с непрерывным временем (Крамер) и стационарных последовательностей (Берман, Лидбеттер), а также доказательство результатов классической теории для некоторых типов зависимостей случайных величин (Уотсон, Лойнс).

Впоследствии Лидбеттер, Лингрен и Ротцен[3], объединив эти направления, создали достаточно общую теорию, которая включала и полученные к тому моменту результаты для гауссовских стационарных последовательностей и процессов. Так, Лидбеттер ([6], [7]) показал, что результаты классической теории, при некоторых ограничениях на зависимость далеко отстоящих членов последовательности, остаются в силе для стационарных последовательностей и некоторых важных нестационарных случаев. При этом предложенное Лидбеттером условие перемешивания оказалось слабее, чем такая существовавшая на тот момент форма ограничения зависимости, как предложенное Розенблаттом [8] в 1956г. условие сильного перемешивания, использованное им при доказательстве центральной предельной теоремы для так называемых "слабо зависящих" случайных величин. Итак, приведем то условия перемешивания, о котором идет речь. Пусть

$$F_{i_1,\ldots,i_n}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_{i_1} \leq x_1,\ldots,X_{i_n} \leq x_n),$$

где $\{X_i\}_{i\geq 1}$ - стационарная в узком смысле случайная последовательность. Обозначим $F_{i_1,\ldots,i_n}(u) = F_{i_1,\ldots,i_n}(u,\ldots,u)$ для любого набора индексов $i_1,\ldots,i_n$. Пусть u_n - некая числовая последовательность. По определению, случайная последовательность удовлетворяет условию $D(u_n)$, если найдётся такая последовательность чисел $\{\alpha_{n,l}\}$, $n,l = 1,2,...$, и последовательность натуральных чисел l_n, где $l_n = o(n)$ при $n \to \infty$, что для любого набора индексов $i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q$ такого, что

$$1 \leq ß_1 < \ldots < i_p < j_1 < \ldots < j_q \leq n \ \text{ и } \ j_1 - i_p \geq l_n,$$

выполнено неравенство

$$\left|F_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q}(u_n) - F_{i_1,\ldots,i_p}(u_n)F_{j_1,\ldots,j_q}(u_n)\right| \leq \alpha_{n,l_n},$$

где $\alpha_{n,l_n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Для исследования областей притяжения в теореме об экстремальных типах в случае зависимых последовательностей (см., например, работу Лойнса [9]), а также в задаче нахождения вероятности превышения заданного уровня максимумом по зависимой последовательности (см. работу Уотсона [10]) используется условие $D'(u_n)$, гарантирующее отсутствие предельной кластеризации высоких экстремумов:

$$\limsup_{n\to\infty} n \sum_{i=2}^{[n/k]} P(X_1 > u_n, X_i > u_n) \to 0 \ \text{ при } k \to \infty,$$

где [.] обозначает целую часть числа. Точечные процессы превышения заданного уровня в применении к стохастической теории экстремумов впервые были рассмотрены Лидбеттером [11]. Он показал, что моменты превышения очень высоких уровней носят стохастический характер и что для таких уровней этот точечный процесс при выполнении условий $D(u_n)$ и $D'(u_n)$ сходится по распределению к пуассоновскому процессу.

В настоящей работе доказана пуассоновская предельная теорема для высоких экстремумов стационарного в узком смысле временного ряда с монотонным трендом и почти периодической составляющей. Доказательство основано на методе, впервые использованном в работе [11] и позднее в таких работах, как [12] и [13].

Задача оценки индекса экстремального значения с использованием выборки как независимых, так и зависимых случайных величин, была предметом исследования большого количества авторов (см. [14], [15], [16], [17], [18]). Одной из наиболее известных оценок индекса экстремального значения является оценка Хилла [14]. Пусть последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин имеет функцию распределения F, которая принадлежит области максимального притяжения Фреше. Определим

$$\widehat{\gamma}_H := \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \ln X_{(n-i)} - \ln X_{(n-k)},$$

где $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ - вариационный ряд выборки $\{X_i\}_{i=1}^n$. Тогда при $n \to \infty$, $k = k(n) \to \infty$ и $k/n \to 0$ оценка Хилла $\widehat{\gamma}_H$ сходится по вероятности к .

Другой, не менее известной оценкой индекса экстремального значения является оценка Пикандса [19]:

$$\widehat{\gamma}_P := (\ln 2)^{-1}\frac{X_{(n-k)} - X_{(n-2k)}}{X_{(n-2k)} - X_{(n-4k)}}.$$

Если $F \in D(G_\gamma)$, где $\gamma \in \mathbf{R}$, то при тех же условиях на n и k, что и для оценки Хилла, оценка Пикандса $\widehat{\gamma}_P$ сходится по вероятности к индексу экстремального значения. Известно также [20], что оценка максимального правдоподобия, построенная по первым (максимальным) k членам вариационного ряда, при тех же условиях на n и k сходится по вероятности к индексу экстремального значения, при условии, что

$\gamma > -1/2$.

В работе [16] показано, что при выполнении условия второго порядка на функцию распределения F

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} - x^{-1/\gamma}}{A\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)} = x^{-1/\gamma}\frac{x^{\rho/\gamma}-1}{\gamma\rho},$$

где параметры $\gamma > 0$, $\rho \leq 0$, а функция $A(t)$ - знакопостоянная, причём $\lim\limits_{t\to\infty} A(t) = 0$, при $n \to \infty$, $k = k(n) \to \infty$ и $k/n \to 0$ оценка Хилла $\widehat{\gamma}_H$ является асимптотически нормальной

$$\sqrt{k}(\widehat{\gamma}_H - \gamma) \xrightarrow{d} N\left(\frac{\lambda}{1-\rho}, \gamma^2\right),$$

где $N(0,1)$ - стандартная нормальная случайная величина, λ - конечный параметр и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{k} A\left(\frac{n}{k}\right) = \lambda$. Известно, что при похожих условиях оценки Пикандса и максимального правдоподобия также являются асимптотически нормальными оценками индекса экстремального значения(см. [4]).

В первой главе настоящей диссертации показано, что при некоторых условиях на аддитивное загрязнение оценка Хилла индекса экстремального значения остаётся состоятельной, а при выполнении условия второго порядка - и асимптотически нормальной.

Вторая глава диссертации посвящена задаче различения близких гипотез о распределениях из области максимального притяжения Гумбеля по первым членам вариационного ряда.

Задача различения распределений - одна из важнейших задач математической статистики, которая являлась предметом изучения множества авторов (см. [21], [22], [23], [24]). Одним из ключевых инструментов при решении данной задачи является лемма Неймана-Пирсона, которая позволяет найти равномерно наиболее мощный критерий для различения двух произвольных распределений при использовании отношения правдоподобий. Довольно часто используется также метод отношения максимальных правдоподобий (RML-test), впервые использованный в работе [21] (см. [25], [26]). Решение задачи различения распределений, принадлежащих области максимального притяжения Гумбеля, можно найти в работах [27], [28].

Метод Лапласа асимптотических оценок интегралов, содержащих большой параметр, широко известен и применяется для решения многочисленных задач математики, физики, механики и техники (см. монографию [29]). В отличие от классического метода Лапласа, когда изучается асимптотическое разложение интеграла $L(\lambda) = \int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx$ при $\lambda \to +\infty$, в диссертации исследовано асимптотическое разложение интеграла $\widetilde{L}(\lambda) = \int\limits_\lambda^{+\infty} e^{-S(x)}dx$ при $\lambda \to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{\ln x} = +\infty$, что позволяет оценивать стохастические интегралы, возникающие в задаче различения близких гипотез.

Задача различения близких гипотез о распределениях является ключевой для теории контигуальных мер (см. монографию [30], а также [31]). Пусть $\{f(x,\theta),\ \theta \in \Theta\}$ - некое семейство плотностей распределений. При выполнении некоторых условий регулярности, наложенных на это семейство плотностей (подробнее см. [32]), распределение логарифма отношения правдоподобий при условии, что выборка взята из распределения с плотностью $f(x,\theta)$, слабо сходится к нормальному закону при $n \to \infty$

$$\mathcal{L}\left(\ln \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} f(X_i, \theta + t(n)h)}{\prod\limits_{i=1}^{n} f(X_i, \theta)}\right) \Rightarrow N\left(-\frac{1}{2}h^2, h^2\right),$$

где $t(n) = n^{-1/2}$, а h - произвольная константа.

Во второй главе диссертации нами рассмотрена задача различения близких гипотез о распределениях по первым k_n членам вариационного ряда, где $n \to \infty$, $k_n \to \infty$ и $k_n/n \to 0$. Стоит заметить, что слабая сходимость логарифма отношения правдоподобий к невырожденному закону наблюдается при $t(k_n)$, отличном от $(k_n)^{-1/2}$ и зависящем от распределения, из которого сделана выборка, а сам вид предельного закона зависит от скорости стремления последовательности k_n к бесконечности.

Опишем более подробно структуру диссертации.

В первой главе диссертации вводится модель случайного временного ряда с асимптотически растущим загрязнением. В первом параграфе главы на временной ряд накладывается условие строгой стационарности, а загрязнение представляется в виде суммы почти периодической числовой последовательности и монотонной функции. На случайный точечный процесс высоких экстремумов ограниченных борелевских множеств действительной прямой, построенный по рассматриваемому временному ряду, наложены классические для теории экстремумов условия D (в форме, аналогичной предложенной Лидбеттером) и D'. Основным результатом параграфа является теорема **1.4**, в которой доказывается, что рассматриваемый точечный процесс слабо сходится к пуассоновскому точечному процессу с известной функцией интенсивности. Существенным элементом доказательства является лемма **1.5**, являющаяся модификацией известной леммы Лидбеттера, которая позволяет разбить случайную последовательность на блоки, максимумы по которым оказываются независимыми.

Во втором параграфе первой главы временной ряд предполагается состоящим из независимых и одинаково распределённых случайных величин, функция распределения которых F принадлежит области максимального притяжения Фреше, а на аддитивное загрязнение накладывается условие на рост модуля его максимума. Для этой модели рассматривается оценка Хилла индекса экстремального значения. Основным результатом параграфа является теорема **1.6**, в которой доказывается, что при определённом условии на рост максимума модуля загрязнения рассматриваемая оценка является состоятельной, а при дополнительном условии второго порядка на функцию распределения F и более сильных условиях на рост загрязнения - и асимптотически нормальной.

Во второй главе диссертации рассматриваются семейства распределений вейбулловского и лог-вейбулловского типов, которые принадлежат области максимального притяжения Гумбеля. В первом параграфе главы вводится отношение правдоподобий для близких гипотез о рассматриваемых распределениях, построенное по первым k_n членам вариационного ряда, а также описываются два типа условий регулярности, накладываемые на соответствующие семейства распределений. Во втором параграфе доказан вспомогательный результат, касающийся асимптотического разложения Лапласа вероятностей редких событий для рассматриваемых типов распределений, а также показано, что наложенные в первом параграфе условия регулярности действительно определяют распределения, принадлежащие области максимального притяжения Гумбеля. Основными результатами главы является теорема **2.1**, в которой доказано, что асимптотическое распределение логарифма отношения правдоподобий для распределений из области максимального притяжения Гумбеля при специальных условиях регулярности, наложенных на последовательность k_n и распределение, слабо сходится к нормальному закону с известными параметрами, а также теорема **2.2**, в которой доказывается, что асимптотическое распределение разности логарифма отношения правдоподобий для распределений из области максимального притяжения Гумбеля и определённой функции от $n - k_n$-ой порядковой статистики выборки при более слабых условиях, наложенных на последовательность k_n и распределение, слабо сходится к нормальному закону с теми же параметрами. В третьем и четвёртом параграфах приведены доказательства теорем **2.1** и **2.2** соответственно.

Результаты диссертации опубликованы в статьях автора [36], [39] и [37]. Основные результаты докладывались на конференциях:

1. "Ломоносов-2011" (МГУ, Москва, 2011)
2. "Теория вероятностей и её приложения", посвящённая столетию Б.В.Гнеденко (МГУ, Москва, июнь 2012)
3. "Ломоносов-2013" (МГУ, Москва, 2013)
4. Workshop "Stochastic, Analysis and Geometry" (Ульм, сентябрь 2013);

а также на семинарах:

1. Большой семинар кафедры теории вероятностей (механико–математический факультет МГУ, руководитель — академик РАН, проф. А.Н. Ширяев);
2. Семинар "Гауссовские случайные процессы"(механико-математический факультет МГУ, руководитель — д.ф.-.м.н., проф. В.И. Питербарг);

3. Семинар "Статистика экстремальных значений"(Институт проблем управления РАН, руководитель — д.ф.-м.н., гл.н.с. Н.М. Маркович)

Автор выражает огромную благодарность своему научному руководителю — Владимиру Ильичу Питербаргу за постановку задач, постоянную поддержку и многочисленные обсуждения.

1 Статистические оценки характеристик экстремумов в загрязненных выборках

1.1 Пуассоновская предельная теорема для высоких экстремумов

1.1.1 Условия. Формулировка теоремы

В этом параграфе мы введём точечный процесс высоких экстремумов для выборок с неслучайными загрязнениями, а также сформулируем пуассоновскую предельную теорему для этого процесса. Итак, рассмотрим модель

$$Y_i = X_i + cm_i + ch(si),\ i = 1, 2, ..., \tag{1.1}$$

где $\{X_i,\quad i\quad =\quad 1, 2, ...\}$ — строго стационарная случайная последовательность, $\{m_i,\ i = 1, 2, ...\}$ — неслучайный тренд, ведущий себя стационарным образом в определенном ниже смысле (например, сезонная составляющая), h — неслучайная монотонная функция, c и s — малые параметры. Предполагается, что функция распределения $F(x)$ случайной величины X_1 является максимально устойчивой.

Определим случайный точечный процесс высоких экстремумов ограниченных борелевских подмножествах B действительной прямой:

$$\xi_z^n(B) = \#\{k : Y_k > a_n z + b_n, k \in nB\},\quad n = 1, 2, ..., \tag{1.2}$$

где символом # обозначается число точек конечного множества; a_n, b_n — последовательности нормировочных констант из теоремы Фишера—Типпета—Гнеденко, соответствующих функции распределения F(см. [4]); z — действительное число. В дальнейшем $c = c(n) \equiv a_n$ и $s = s(n) \equiv 1/n$. Свойство максимальной устойчивости сохраняется и в случае слабой зависимости больших значений далеко отстоящих друг от друга случайных величин X_i ([3], см. также [6]). Соответствующие условия перемешивания называются условиями Лидбеттера.

Важной задачей в случае зависимых наблюдений для модели (1.1) является изучение предельного поведения распределения максимума по подпоследовательности, т. е. по частичной выборке, поскольку пропущенные наблюдения являются статистической реальностью. Для стационарного ряда такая задача рассмотрена в [33, 34], модель с трендом m_i в случае независимых одинаково распределенных X_i, $i = 1, 2, ...,$ — в [12], а для случая строго стационарной случайной последовательности — в [13]. Введем необходимые ограничения.

Условие 1.1. *Последовательность* $\{m_i,\ i = 1, 2, ...\}$ *ограничена сверху:*

$$m := \sup_{i=1,2,...} m_i < \infty.$$

Обозначим

$$w_i = a_n z + b_n - a_n m_i - a_n h(\frac{i}{n}),$$
$$w^n = a_n z + b_n - a_n m - a_n h^*,$$

где $h^* = \sup_{x \in B} h(x)$. Обозначим также $\xi_z(I) = \#\{k : Y_k > a_n z + b_n, k \in I\}$. Введем условие типа Лидбеттера слабой зависимости далеко отстоящих больших значений в модели (1.1).

Условие 1.2. *Найдутся семейство чисел* $\{\alpha_{n,l}\}$, $n, l = 1, 2, ...,$ *и последовательность натуральных чисел* $\{l_n\}$, *такие, что* $l_n = o(n)$, $\alpha_{n,l_n} \to 0$, *для любых* z, *для любых неотрицательных целых* r *и* s *и произвольных множеств натуральных чисел* $I = \{i_1, ..., i_p\}, J = \{j_1, ..., j_q\}$, *таких, что*

$$1 \le i_1 < i_2 < ... < i_p < j_1 < ... < j_q \le n, \quad j_1 - i_p \ge l_n,$$

выполняется неравенство

$$|P(\xi_z(I) = r, \xi_z(J) = s) - P(\xi_z(I) = r)P(\xi_z(J) = s)| \le \alpha_{n,l_n}.$$

Следующее условие, как и предыдущее, являющееся стандартным для вероятностной теории экстремумов, гарантирует отсутствие кластеров, состоящих более чем из одного превышения уровня (см. [3]).

Условие 1.3. *Выполняется равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} n \sum_{2 \le j \le n/k} P\{X_1 > w^n; X_j > w^n\} = 0.$$

Введем "выборочную функцию распределения" значений сезонной составляющей, а также аналогичную функцию для монотонного тренда

$$\Phi_n(x) = \frac{\#\{i : m_i \le x,\ 1 \le i \le n\}}{n}, \quad H_n^B(x) = \frac{\#\{i : h(\frac{i}{n}) \le x,\ i \in nB\}}{n}.$$

Обозначим

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x);\ H^B(x) = \lim_{n\to\infty} H_n^B(x).$$

Обозначим также

$$f_\gamma(z) = \begin{cases} e^{-z},\ z \in R \text{ если } \gamma = 0; \\ z^{-1/\gamma} I\{z \ge 0\},\ \text{если } \gamma > 0; \\ (-z)^{-1/\gamma} I\{z \le 0\},\ \text{если } \gamma < 0. \end{cases}$$

Основной результат параграфа касается предельного распределения случайного точечного процесса $\xi_z^n(B)$.

Теорема 1.4. *Пусть в модели (1.1) $F \in D(G_\gamma)$, где $\gamma \in R$. Предположим, что выполнены условия 1—3. Тогда если $\gamma \ge 0$, то для всех z, а если $\gamma < 0$, то для всех $z > m$ случайный точечный процесс экстремумов $\xi_z^n(B)$ слабо сходится при $n \to \infty$ к пуассоновскому точечному процессу с функцией интенсивности*

$$\lambda_z(B) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\gamma(z-t) d(\mu(B)\cdot\Phi(t) + H^B(t)),$$

где μ — мера Лебега на действительной прямой.

Замечание 1.5. Заметим, что при отсутствии загрязнений результат теоремы 1.4 эквивалентен классическому результату Лидбеттера о сходимости процесса превышений высокого уровня к пуассоновскому процессу [3]. Действительно, данный процесс превышений при выполнении условий $D(u_n)$ и $D'(u_n)$, где последовательность u_n такова, что $n\overline{F}(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau$, сходится к пуассоновскому процессу с интенсивностью τ. С другой стороны, если в модели (1.1) неслучайные загрязнения равны нулю тождественно, то $\lambda_z(B) = f_\gamma(z)\mu(B)$, т.е. интенсивность пуассоновского процесса, полученного в теореме 1.4, равна $f_\gamma(z)$. Но из доказательства теоремы 1.4 следует, что $n\overline{F}(a_n z + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_\gamma(z)$, что и приводит к результату Лидбеттера.

1.1.2 Доказательство теоремы 1.4

Докажем сперва теорему для случая $B = [a, b]$. Для этого нам потребуется следующая лемма. Обозначим $\tilde{n} = [(b-a)n]$, где $[x]$ — целая часть x. Пусть $k_{\tilde{n}}$ - некая последовательность, удовлетворяющая условию 1.3, $k_{\tilde{n}} = o(\tilde{n})$ при $n \to \infty$, обозначим $d_{\tilde{n}} = [\tilde{n}/k_{\tilde{n}}]$. Далее увидим, что можно взять $l_{\tilde{n}} \leq 2d_{\tilde{n}}$ (l_n определяется в условии 1.2), что и сделаем. Рассмотрим множества

$$\begin{gathered}
J_1 = \{[an]+1, [an]+2, ..., [an]+d_{\tilde{n}}-l_{\tilde{n}}\}, \\
J_1^* = \{[an]+d_{\tilde{n}}-l_{\tilde{n}}+1, ..., [an]+d_{\tilde{n}}\}, \\
J_2 = \{[an]+d_{\tilde{n}}+1, ..., [an]+2d_{\tilde{n}}-l_{\tilde{n}}\}, \\
J_2^* = \{[an]+2d_{\tilde{n}}-l_{\tilde{n}}+1, ..., [an]+2d_{\tilde{n}}\}, ... \\
J_{k_{\tilde{n}}} = \{[an]+(k_{\tilde{n}}-1)d_{\tilde{n}}+1, ..., [an]+(k_{\tilde{n}}-1)d_{\tilde{n}}+d_{\tilde{n}}-l_{\tilde{n}}\}, \\
J_{k_{\tilde{n}}}^* = \{[an]+k_{\tilde{n}}d_{\tilde{n}}-l_{\tilde{n}}+1, ..., [bn]\}.
\end{gathered}$$

Заметим, что $J_1, J_1^*, ..., J_{k_{\tilde{n}}}, J_{k_{\tilde{n}}}^*$ попарно не пересекаются и

$$J_1 \cup J_1^* \cup .. \cup J_{k_{\tilde{n}}} \cup J_{k_{\tilde{n}}}^* = \{[an]+1, ..., [bn]\}.$$

Лемма 1.6. *Для любого неотрицательного целого l существует последовательность натуральных чисел $\{k_{\tilde{n}}\}$, $1 \leq k_{\tilde{n}} \leq \tilde{n}$, такая, что при $n \to \infty$*

$$(k_{\tilde{n}})^{l+1} l_{\tilde{n}} = o(n), (k_{\tilde{n}})^{l+1} \alpha_{\tilde{n}, l_{\tilde{n}}} = o(1),$$

и выполнено следующее равенство при $n \to \infty$:

$$P(\xi_z^n([a, b]) = l) - \sum_{R_l} \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i \cup J_i^*) = r_i) = o(1),$$

где R_l — все наборы из l единиц и $k_{\tilde{n}} - l$ нулей.

Доказательство. Основная идея доказательства леммы была ранее реализована Лидбеттером (см. [6]). Она заключается в следующем: максимумы по "большим" блокам оказываются независимыми, одновременно с этим, число наблюдений в "малых" блоках растет много медленнее, чем число наблюдений в "больших", с увеличением n. Имеем

$$\left|P(\xi_z^n([a,b])=l)-\sum_{R_l}\prod_{i=1}^{k_{\tilde n}}P(\xi_z(J_i\cup J_i^*)=r_i)\right|\leq |P(\xi_z^n([a,b])=l)-$$

$$-P(\xi_z(\bigcup_{i=1}^{k_{\tilde n}}J_i)=l)\right|+\left|P(\xi_z(\bigcup_{i=1}^{k_{\tilde n}}J_i)=l)-\sum_{S}\prod_{i=1}^{k_{\tilde n}}P(\xi_z(J_i)=s_i)\right|+$$

$$+\left|\sum_{S}\prod_{i=1}^{k_{\tilde n}}P(\xi_z(J_i)=s_i)-\sum_{R_l}\prod_{i=1}^{k_{\tilde n}}P(\xi_z(J_i)=r_i)\right|+$$

$$+\left|\sum_{R_l}\prod_{i=1}^{k_{\tilde n}}P(\xi_z(J_i)=r_i)-\sum_{R_l}\prod_{i=1}^{k_{\tilde n}}P(\xi_z(J_i\cup J_i^*)=r_i)\right|=p_1+p_2+p_3+p_4,$$

где S — все такие целочисленные наборы $\{s_1,\ldots,s_{k_{\tilde n}}\}$, что $s_i\geq 0$ для любого i и $\sum\limits_{i=1}^{k_{\tilde n}}s_i=l$, а R_l — все наборы из l единиц и $k_{\tilde n}-l$ нулей.
Оценим каждое из слагаемых p_1,p_2,p_3,p_4. Поскольку все наборы из S делятся на те, в которых есть элемент больше единицы, и на R_l, то

$$\left|P(\xi_z^n([a,b])=l)-P\left(\xi_z\left(\bigcup_{i=1}^{k_{\tilde n}}J_i\right)=l\right)\right|=$$

$$=\sum_{t=1}^{l}P\left(\xi_z\left(\bigcup_{i=1}^{k_{\tilde n}}J_i^*\right)=t;\ \xi_z\left(\bigcup_{i=1}^{k_{\tilde n}}J_i\right)=l-t\right)\leq$$

$$\leq\sum_{t=1}^{l}P(\xi_z(\bigcup_{i=1}^{k_{\tilde n}}J_i^*)=t)\leq\sum_{t=2}^{l}\sum_{i=1}^{k_{\tilde n}}P(\xi_z(J_i^*)\geq 2)+\sum_{t=1}^{l}\sum_{R_t}P(\xi_z(J_i^*)=r_i). \tag{1.3}$$

Оценим первое слагаемое в правой части последнего неравенства. В силу условия 1.3 и стационарности временного ряда

$$\sum_{t=1}^{l}\sum_{i=1}^{k_{\tilde n}}P(\xi_z(J_i^*)\geq 2)\leq l\cdot k_{\tilde n}\cdot P(\xi_z(J_1^*)\geq 2)\leq$$

$$\leq l\cdot k_{\tilde n}\cdot l_{\tilde n}\cdot\sum_{j=2}^{\tilde n/k_{\tilde n}}P\{X_1>w^n;\ X_j>w^n\}\leq$$

$$\leq l \cdot \tilde{n} \cdot \sum_{j=2}^{\tilde{n}/k_{\tilde{n}}} P\{X_1 > w^n;\ X_j > w^n\} = o(1)$$

при $n \to \infty$, так как $l_{\tilde{n}} \leq d_{\tilde{n}}$ и $d_{\tilde{n}} k_{\tilde{n}} \leq \tilde{n}$.

Для оценки второго слагаемого из того же неравенства воспользуемся следующим очевидным неравенством

$$\left| P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) - \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \right| \leq \sum_{k=2}^{n} \left| P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) - P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) P(A_k) \right|. \quad (1.4)$$

Итак, с учетом условия слабой зависимости 1.2, получаем для каждого элемента суммы $\sum\limits_{R_t}$ в отдельности

$$\left| P(\xi_z(J_i^*) = r_i, i = 1 \dots k_{\tilde{n}}) - \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i^*) = r_i) \right| \leq k_{\tilde{n}} \cdot \alpha_{\tilde{n}, l_{\tilde{n}}},$$

отсюда, поскольку элементов в сумме $\sum\limits_{R_t}$ не больше, чем $C_{k_{\tilde{n}}}^{l}$, вытекает

$$\left| \sum_{t=1}^{l} \sum_{R_t} \left(P(\xi_z(J_i^*) = r_i, i = 1 \dots k_{\tilde{n}}) - \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i^*) = r_i) \right) \right| \leq$$

$$\leq \alpha_{\tilde{n}, l_{\tilde{n}}} \cdot k_{\tilde{n}} \cdot C_{k_{\tilde{n}}}^{l} \cdot l = o(1),$$

ведь по условию леммы $(k_{\tilde{n}})^{l+1} \alpha_{\tilde{n}, l_{\tilde{n}}} = o(1)$.

В свою очередь $P(\xi_z(J_i^*) = 1) \leq l_{\tilde{n}} P(X_1 > w^n)$, а для $i = k_{\tilde{n}}$ верно неравенство $P(\xi_z(J_{k_{\tilde{n}}}^*) = 1) \leq (\tilde{n} - d_{\tilde{n}} k_{\tilde{n}} + l_{\tilde{n}}) P(X_1 > w^n)$.

Легко показать([6, 13]), что для любого γ и для любого i, $i \in nB$, $\overline{F}(w_i) = \frac{f_\gamma(z - m_i - h(\frac{i}{n}))}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, если $F \in D(G_\gamma)$. В дальнейшем индекс у f будет опускаться ввиду аналогичности случаев. Следовательно,

$$\prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i^*) = r_i, i = 1, \dots, k_{\tilde{n}}) \leq l \cdot C_{k_{\tilde{n}}}^{l} \cdot \left[l_{\tilde{n}} \frac{f(z - m - h)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^l = o(1)$$

в силу того, что $l_{\tilde{n}} k_{\tilde{n}}^{l} = o(n)$ по условию теоремы.

Таким образом, получили, что $p_1 = o(1)$ при $n \to \infty$.

Оценим теперь p_2. Как и при доказательстве похожей оценки для слагаемых p_1 пользуясь неравенством (1.4) и условием 1.2, имеем

$$p_2 = \left| P\left(\xi_z\left(\bigcup_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} J_i\right) = l\right) - \sum_S \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i) = s_i) \right| \leq$$

$$\leq \sum_S \left| P(\xi_z(J_i) = s_i, i = 1, \ldots, k_{\tilde{n}}) - \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i) = s_i) \right| \leq k_{\tilde{n}} \sum_S \alpha_{\tilde{n}, l_{\tilde{n}}}.$$

Легко видеть, что количество слагаемых в сумме $\sum\limits_S$ равно $C^l_{k_{\tilde{n}}+l-1} = O((k_{\tilde{n}})^l)$ (количество размещений l объектов по $k_{\tilde{n}}$ ящикам с повторением), значит, $p_2 = O((k_{\tilde{n}})^{l+1} \alpha_{\tilde{n}, l_{\tilde{n}}}) = o(1)$ по условиям теоремы.
Оценим p_3 :

$$p_3 = \left| \sum_S \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i) = s_i) - \sum_{R_l} \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i) = r_i) \right| =$$

$$= \sum_{S \setminus R_l} \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i \cup J_i^*) = s_i) \leq k_{\tilde{n}} d_{\tilde{n}} \sum_{j=2}^{d_{\tilde{n}}} P(X_1 > w^n; X_j > w^n) = o(1),$$

где $k_{\tilde{n}}$ — число вариантов выбора множества $J_i \bigcup J_i^*$, для которого $s_i \geq 2$, а $d_{\tilde{n}}$ — число вариантов выбора первого превышения в соответствующем множестве $J_i \bigcup J_i^*$.
Для доказательства соотношения $p_4 = o(1)$ можно воспользоваться другим элементарным неравенством

$$\left| \prod_{i=1}^n f_i - \prod_{i=1}^n g_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |f_i - g_i|,$$

верным для любых чисел, не превосходящих по модулю единицы, а также разложением (1.3) и оценкой количества членов в сумме $\sum\limits_S$. Итак,

$$p_4 = \left| \sum_{R_l} \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i) = r_i) - \sum_{R_l} \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i \cup J_i^*) = r_i) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{R_l} \left| \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i) = r_i) - \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i \cup J_i^*) = r_i) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{R_l} \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i \cup J_i^*) = r_i) I\{\exists i, 1 \leq i \leq k_{\tilde{n}} : \xi_z(J_i^*) = 1\} \leq$$

$$\leq C_{k_{\tilde{n}}+l-1}^{l} \left[d_{\tilde{n}} \frac{f(z-m-h)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{l-1} \cdot \left[l_{\tilde{n}} \frac{f(z-m-h)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] = o(1),$$

поскольку, по условиям леммы $(k_{\tilde{n}})^{l+1} l_{\tilde{n}} = o(n)$ и $d_{\tilde{n}} = o(n)$.
Таким образом, лемма 1.6 доказана. □
Заметим, что последовательность $\{k_{\tilde{n}}\}$ в лемме можно выбрать стремящейся к бесконечности при $n \to \infty$. Возьмем

$$k_{\tilde{n}} = \min\{[(\tilde{n}/l_{\tilde{n}})^{1/(l+2)}], [(\alpha_{\tilde{n}, l_{\tilde{n}}})^{-1/(l+2)}]\}.$$

Тогда для любого l, в силу леммы,

$$P(\xi_z^n([a,b]) = l) = \sum_{R_l} \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i \cup J_i^*) = r_i) + o(1)$$

при $n \to \infty$.
Оценим теперь множители в $C = \sum\limits_{R_l} \prod\limits_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i \cup J_i^*) = r_i)$. Из формулы включений-исключений и свойств X_i для любого i, $1 \leq i \leq k_{\tilde{n}}$, имеем:

$$P(\xi_z(J_i \cup J_i^*) = 0) = 1 - \sum_{j \in J_i \cup J_i^*} P(X_j > w_j) + o(1/k_{\tilde{n}}),$$

$$P(\xi_z(J_i \cup J_i^*) = 1) =$$

$$= \left[\sum_{j \in J_i \cup J_i^*} P(X_j > w_j)(1 - \sum_{k \in J_i \cup J_i^* \setminus j} P(X_k > w_k)) \right] + o(1/k_{\tilde{n}}).$$

Тогда

$$C = \sum_{R_l} \left[\sum_{I_+} \left(\prod_{i \in I_+} P(X_i > w_i) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \prod_{j=1}^{k_{\tilde{n}}} \left(1 - \sum_{k \in J_j \cup J_j^* \setminus I_+} P(X_k > w_k) \right) \right) + o\left(\frac{1}{(k_{\tilde{n}})^l} \right) \right].$$

Здесь каждый элемент I_+ — это l упорядоченных по возрастанию номеров $i_1, \ldots, i_l$, где случились превышения, т.е. $i_k \in J_s \cup J_s^*$, где $s = \min\{t : \sum\limits_{j=1}^{t} r_j = k\}$.

Рассмотрим $\prod\limits_{j=1}^{k_{\tilde{n}}} \left(1 - \sum\limits_{k \in J_j \cup J_j^* \setminus I_+} P(X_k > w_k) \right)$ для произвольного элемента I_+.

Так как $\sum\limits_{k \in J_j \cup J_j^* \setminus I_+} P(X_k > w_k) = O(1/k_{\tilde{n}})$ и

$$\sum_{k \in \{[an]+1, \ldots, [bn]\} \setminus I_+} P(X_k > w_k) = \sum_{k \in \{[an]+1, \ldots, [bn]\} \setminus I_+} \frac{f(z - m_i - h(\frac{i}{n}))}{n} + o\left(\frac{1}{n} \right)$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - t) d((b - a)\Phi(t) + H^{[a,b]}(t)),$$

то

$$\prod_{j=1}^{k_{\tilde{n}}} \left(1 - \sum_{k \in J_j \cup J_j^* \setminus I_+} P(X_k > w_k) \right) \xrightarrow[n \to \infty]{}$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \exp\left[- \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - t) d((b - a)\Phi(t) + H^{[a,b]}(t)) \right].$$

Обозначим $A(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z - t) d((b - a)\Phi(t) + H^{[a,b]}(t))$, тогда

$$\sum_{R_l} \prod_{i=1}^{k_{\tilde{n}}} P(\xi_z(J_i \cup J_i^*) = r_i) =$$

$$= \left(\sum_{R_l} \sum_{I_+} \prod_{i \in I_+} P(X_i > w_i) \right) \cdot \exp[-A(z)] + o(1).$$

Рассмотрим $\sum\limits_{R_l} \sum\limits_{I_+} \prod\limits_{i \in I_+} P(X_i > w_i)$. При использовании условия отсутствия кластеризации высоких экстремумов 1.3 элементарно доказывается, что

$$\sum_{R_l} \sum_{I_+} \prod_{i \in I_+} P(X_i > w_i) = \sum_{[an]+1 \le i_1 < \ldots < i_l \le [bn]} \prod_{k=1}^{l} P(X_{i_k} > w_{i_k}) + o(1).$$

Используя формулу разложения суммы в степени l, получаем

$$\sum_{[an]+1 \le i_1 < \ldots < i_l \le [bn]} \prod_{k=1}^{l} P(X_{i_k} > w_{i_k}) =$$

$$= \frac{1}{l!} \left(\sum_{i=[an]+1}^{[bn]} \frac{f(z - m_i - h(i/n))}{n} \right)^l + o(1) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{l!} \left(A(z)\right)^l,$$

что и доказывает теорему для случая $B = [a, b]$.
В силу выполнений условий теоремы Калленберга [35] для полукольца полуинтервалов $(a, b]$ на действительной прямой получаем слабую сходимость случайного точечного процесса экстремумов $\xi^n(B)$ к пуассоновскому точечному процессу для любого ограниченного борелевского подмножества действительной прямой.
Таким образом, теорема 1.4 доказана.

1.2 Оценка Хилла для выборок с загрязнениями

В данном параграфе исследуется состоятельность и асимптотическая нормальность оценки Хилла индекса экстремального значения([4, 14]) в модели

$$Y_{i,n} = X_i + m_{i,n},\ n = 1, 2, \ldots, \tag{1.5}$$

где X_i — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, функция распределения которых F принадлежит области максимального притяжения Фреше с индексом γ; $m_{i,n}$,

$1 \le i \le n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — неслучайное аддитивное загрязнение, максимальная величина которого может расти вместе с n. Обозначим $c_n := \max\{|m_{i,n}|, 1 \le i \le n\}$, будем считать, что асимптотика последовательности c_n нам известна. Оценкой Хилла индекса экстремального значения γ для модели (1.5) назовём статистику

$$\hat{\gamma}_H^{(y)} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln(Y_{(n-i)}) - \ln(Y_{(n-k)}), \tag{1.6}$$

где $(Y_{(1)} \le Y_{(2)} \le \ldots \le Y_{(n)})$ — вариационный ряд выборки $\{Y_{i,n}\}_{i=1}^n$. Предположим, что функция распределения F имеет плотность, обозначим ее F'. В случае отсутствия загрязнения ($c_n \equiv 0$) теорема Фишера—Типпета—Гнеденко гласит, что для $a_n = \overline{F}^{\leftarrow}(1/n)$ при $x > 0$ имеет место соотношение

$$P\left(\frac{\max\limits_{i=1,\ldots,n} Y_{i,n}}{a_n} \le x\right) = \exp(-x^{-1/\gamma}).$$

В настоящей работе показано, что в случае, если загрязнение $m_{i,n}$ существенно меньше a_n, оценка Хилла (1.6) сохраняет свойства состоятельности и асимптотической нормальности.

В литературе достаточно подробно изучена модель с трендом $m_{i,n}$, сравнимым по величине с a_n, при этом доказан ряд предельных теорем типа теоремы Гнеденко. Так, модель (1.5) для почти периодического нормированного тренда m_i/a_n рассмотрена в [12], для случая строго стационарной случайной последовательности X_i — в работах [34] и [13], а в [36] — та же модель, но с добавлением монотонного тренда.

В дальнейшем индекс n у $Y_{i,n}$ и $m_{i,n}$ будет опускаться. Основным результатом работы является следующая

Теорема 1.7. *Пусть для некоторой последовательности k_n, такой, что $k_n/n \to 0$ при $n \to \infty$ и $k_n \to \infty$, выполняется соотношение $\frac{c_n}{Y_{(n-k_n)}} \xrightarrow{P} 0$. Тогда оценка Хилла (1.6) сходится по вероятности к γ при $n \to \infty$. Кроме того, если функция распределения F удовлетворяет условию*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} - x^{-1/\gamma}}{A(\frac{1}{1-F(t)})} = x^{-1/\gamma}\frac{x^{\rho/\gamma} - 1}{\gamma\rho}$$

для всех $x > 0$, где $\rho \le 0$ и $A(t)$ — положительная или отрицательная функция с $\lim_{t\to\infty} A(t) = 0$, то при всех k_n, таких, что $\frac{c_n k_n^{1/2}}{Y_{(n-k_n)}} \xrightarrow{P} 0$, верно соотношение

$$\sqrt{k_n}(\hat{\gamma}_H^{(y)} - \gamma) \xrightarrow{d} N\left(\frac{\lambda}{1-\rho}, \gamma^2\right),$$

где N — стандартное нормальное распределение, $k_n \to \infty, k_n/n \to 0, n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{k_n} A\left(\frac{n}{k_n}\right) = \lambda$$

с конечным λ.

Замечание 1.8. Условие $\frac{c_n}{Y_{(n-k_n)}} \xrightarrow{P} 0$ в теореме 1.6 эквивалентно тому, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $c_n/a_n = O(k_n^{-\gamma-\varepsilon})$.

Замечание 1.9. При использовании оценки Хилла, как и других оценок индекса экстремального значения, принципиальным моментом является выбор последовательности k_n. В теореме приводятся основные условия выбора для состоятельности и асимптотической нормальности оценки. Более подробно с проблемой выбора можно ознакомиться, например, в классической монографии [4].

Замечание 1.10. В теореме 1.6, по сути, утверждается, что при выборе нормировочной последовательности a_n и последовательности k_n (см. [4]) с использованием эмпирической функции распределения, построенной по выборке Y_k, её результат остаётся в силе. Условие $\frac{c_n}{Y_{(n-k_n)}} \xrightarrow{P} 0$ дает возможность уже по выборке оценить степень загрязнения относительно выбранной k_n.

1.2.1 Состоятельность оценки

Заметим прежде всего, что если $\frac{c_n}{Y_{(n-k_n)}} \xrightarrow{P} 0$, то верно и $\frac{c_n}{X_{(n-k_n)}} \xrightarrow{P} 0$. По теореме 2.2.1 из монографии [4], для независимых и одинаково распределённых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ при $n \to \infty$, $k_n \to \infty$, $k_n/n \to 0$

$$\sqrt{k_n}\frac{X_{(n-k_n)} - U(\frac{n}{k_n})}{\frac{n}{k_n}U'(\frac{n}{k_n})} \xrightarrow{d} N(0,1), \tag{1.7}$$

где $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$ — вариационный ряд выборки $\{X_i\}_{i=1}^n$, $U = (\frac{1}{1-F})^{\leftarrow}$. Рассмотрим $U(\frac{n}{k_n})$ и $U'(\frac{n}{k_n})$. Так как $\frac{1}{1-F(U(t))} = t$, то $U(\frac{n}{k_n}) = \overline{F}^{\leftarrow}(\frac{k_n}{n}) = a_{n/k_n}$. Далее, $U'(t) = \frac{[1-F(U(t))]^2}{F'(U(t))}$, поэтому $U'(\frac{n}{k_n}) = \frac{(k_n/n)^2}{F'(a_{n/k_n})}$. Из условия фон Мизеса для распределения Фреше $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{tF'(t)}{1-F(t)} = \frac{1}{\gamma}$, поэтому $F'(a_{n/k_n}) = \frac{k_n}{\gamma n a_{n/k_n}} + o(\frac{k_n}{n a_{n/k_n}})$. Таким образом, (1.7) преобразуется к виду

$$\sqrt{k_n}\frac{X_{(n-k_n)} - a_{n/k_n}}{\gamma a_{n/k_n}} \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{1.8}$$

Ясно, что условия $\frac{c_n}{Y_{(n-k_n)}} \xrightarrow{P} 0$ и $c_n/a_n = O(k_n^{-\gamma-\varepsilon})$ эквивалентны. Действительно, из (1.8) получаем $\frac{X_{(n-k_n)}}{a_{n/k_n}} \xrightarrow{P} 1$. Известно (см., например, [4]), что существует такая медленно меняющаяся функция $R(t)$, что $a_n = R(n)n^{\gamma}$, отсюда $a_{n/k_n} = \frac{R(n/k_n)}{R(n)} a_n k_n^{-\gamma}$. Таким образом,

$$\lim \frac{c_n}{X_{(n-k_n)}} = \lim \frac{a_{n/k_n}}{X_{(n-k_n)}} \frac{c_n}{a_{n/k_n}} = \lim 1 \cdot \frac{c_n k_n^{\gamma} R(n)}{a_n R(n/k_n)} = 0,$$

где все равенства понимаются в смысле равенства по вероятности. Отсюда следует, что если рассматривать загрязняющую последовательность, модуль максимума которой растёт быстрее при $n \to \infty$, то она может влиять на предельное поведение оценки Хилла, в частности на ее состоятельность. Заметим, что не для всех i, $0 \leq i \leq k_n$ верно, что $Y_{(n-i)} = X_{(n-i)} + m_l$, где $Y_{(n-i)} \equiv Y_l$. Для дальнейшего хода доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1.11. *Верно следующее утверждение:*

$$\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ \ |Y_{(i)} - X_{(i)}| \leq 3c_n.$$

Доказательство. Пусть $Y_{(d)} = X_{(i)} + m_l$, где $Y_{(d)} \equiv Y_l$. В дальнейшем будем говорить, что порядковая статистика $Y_{(d)}$ соответствует порядковой статистике $X_{(i)}$. Разберем случай $i < d$, другой случай разбирается аналогично. Пусть $Y_{(d)} - Y_{(i)} > 2c_n$. Среди $X_{(n)}, X_{(n-1)}, \dots, X_{(i+1)}$ по принципу Дирихле найдется такая порядковая статистика $X_{(l)}$, которой соответствует порядковая статистика $Y_{(m)}$, где $m < i$. Но $|Y_{(d)} - X_{(i)}| \leq c_n$ и $|Y_{(m)} - X_{(l)}| \leq c_n$. Так как $Y_{(m)} < Y_{(i)}$, то по предположению $Y_{(d)} - Y_{(m)} > 2c_n$. Но тогда $X_{(l)} \leq X_{(i)}$, что неверно. Получили противоречие. Отсюда, поскольку $|Y_{(d)} - X_{(i)}| \leq c_n$, имеем $|Y_{(i)} - X_{(i)}| \leq 3c_n$. Лемма доказана. □

Обозначим $\hat{\gamma}_H = \frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\ln(X_{(n-i)}) - \ln(X_{(n-k)})$. Как известно (см., например, [4]), $\hat{\gamma}_H \xrightarrow{P} \gamma$ при $n\to\infty, k_n\to\infty, k_n/n\to 0$. Согласно лемме, при выполнении условий теоремы 1.7

$$|\hat{\gamma}_H^{(y)} - \hat{\gamma}_H| \leq \frac{1}{k_n}\sum_{i=0}^{k_n-1}\frac{3c_n}{X_{(n-i)}} + \frac{3c_n}{X_{(n-k_n)}} + o\left(\frac{c_n}{X_{(n-k_n)}}\right) \leq$$

$$\leq 6\frac{c_n}{X_{(n-k_n)}} + o\left(\frac{c_n}{X_{(n-k_n)}}\right), \tag{1.9}$$

здесь мы воспользовались формулой $\ln(1+x) = x + o(x)$ при $x\to 0$.

Но $\frac{c_n}{X_{(n-k_n)}} \xrightarrow{P} 0$, поэтому $\lim|\hat{\gamma}_H^{(y)} - \hat{\gamma}_H| =^P 0$. Отсюда

$$\frac{1}{k_n}\sum_{i=0}^{k_n-1}\ln(Y_{(n-i)}) - \ln(Y_{(n-k_n)}) \xrightarrow{P} \gamma.$$

Таким образом, состоятельность оценки (1.6) доказана.

1.2.2 Асимптотическая нормальность оценки

Для оценки Хилла $\hat{\gamma}_H$ верна следующая теорема.

Теорема 1.12. *[4]. Пусть функция распределения F удовлетворяет следующему условию: для всех $x > 0$*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} - x^{-1/\gamma}}{A(\frac{1}{1-F(t)})} = x^{-1/\gamma}\frac{x^{\rho/\gamma}-1}{\gamma\rho},$$

где $\gamma > 0, \rho \leq 0$ и $A(t)$ — положительная или отрицательная функция с $\lim\limits_{t\to\infty} A(t) = 0$. Тогда

$$\sqrt{k_n}(\hat{\gamma}_H - \gamma) \xrightarrow{d} N\left(\frac{\lambda}{1-\rho}, \gamma^2\right),$$

где $k_n\to\infty, k_n/n\to 0, n\to\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{k_n}A\left(\frac{n}{k_n}\right) = \lambda$$

с конечным λ.

Покажем, что $\sqrt{k_n}(\hat{\gamma}_H^{(y)} - \hat{\gamma}_H) \xrightarrow{P} 0$, тогда (см. [4, 16]) $\sqrt{k_n}(\hat{\gamma}_H^{(y)} - \gamma) \xrightarrow{d} N\left(\frac{\lambda}{1-\rho}, \gamma^2\right)$. Фактически, нужно показать, что

$$\frac{1}{\sqrt{k_n}}\left[\sum_{i=0}^{k_n-1}\ln(Y_{(n-i)}) - \sum_{i=0}^{k_n-1}\ln(X_{(n-i)})\right] \xrightarrow{P} 0$$

и

$$\sqrt{k_n}(\ln(Y_{(n-k_n)}) - \ln(X_{(n-k_n)})) \xrightarrow{P} 0.$$

Из (1.2.1) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{k_n}}\left|\sum_{i=0}^{k_n-1}\ln(Y_{(n-i)}) - \sum_{i=0}^{k_n-1}\ln(X_{(n-i)})\right| + \sqrt{k_n}|\ln(Y_{(n-k_n)}) - \ln X_{(n-k_n)}| \leq$$

$$\leq \frac{6c_n\sqrt{k_n}}{X_{(n-k_n)}} + o\left(\frac{c_n\sqrt{k_n}}{X_{(n-k_n)}}\right).$$

Но $\frac{c_n\sqrt{k_n}}{X_{(n-k_n)}} \xrightarrow{P} 0$, поскольку по условию теоремы $\frac{c_n\sqrt{k_n}}{Y_{(n-k_n)}} \xrightarrow{P} 0$. Таким образом, асимптотическая нормальность оценки (1.6) доказана.

2 Различение близких гипотез о хвостах распределений

2.1 Условия регулярности. Формулировка основных результатов главы

Во многих приложениях статистики экстремумов, в частности, относящихся к задачам страхования больших рисков, возникает задача различения распределений с похожими хвостами (вероятностями редких событий), см. например [27, 28]. При этом зачастую распределения умеренных значений удобно моделировать стандартными распределениями, отличными от асимптотического распределения хвостов. Представляется, что важным инструментом различения семейств распределений с близкими хвостами и оценивания мощности различных критериев различения является теория контигуальных мер, [30]. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - независимые, одинаково распределенные случайные величины. В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение отношения правдоподобий

$$R_n(u) = \frac{L(X_{(n)}, \ldots, X_{(n-k_n+1)}; \gamma + t(k_n, u, \gamma))}{L(X_{(n)}, \ldots, X_{(n-k_n+1)}; \gamma)} \tag{2.1}$$

при $n \to \infty, k_n \to \infty, \frac{n}{k_n} \to \infty$ для семейства плотностей

$$f(x, \gamma) = C(x, \gamma) \exp(-V(x, \gamma)), \tag{2.2}$$

где функция $C(x, \gamma)$ стремится к константе при $x \to +\infty$, а на функцию $S(x, \gamma)$ наложены некоторые условия регулярности, которые приведены ниже. Пока же приведём несколько примеров семейств плотностей, которые удовлетворяют этим условиям. Прежде всего, стоит упомянуть семейство плотностей вейбулловского типа:

$$f_W(x, \gamma) = C(\gamma) \exp(-x^\gamma),\ x \geq 0,\ \gamma > 1.$$

Ещё одним примером может служить семейство нормальных плотностей, где в качестве параметра γ выбирается дисперсия:

$$f_N(x, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-\frac{x^2}{2\gamma}},\ \gamma > 0.$$

Также удовлетворяет условиям регулярности семейство плотностей распределений типа Гумбеля:

$$f_G(x, \gamma) = \gamma e^{\gamma x} e^{-e^{\gamma x}},\ x \geq 0,\ \gamma > 0.$$

Метод отношения правдоподобий, а также метод отношения максимальных правдоподобий (RML-test), широко известен и часто используется для различения близких типов распределения. В этой связи стоит упомянуть работы Антла и Дюмонсо ([43], [25], [26]). Метод отношения максимальных правдоподобий применялся для различения распределений вейбулловского типа в работах Кунду и Гупта ([27], [28], [44]). Во второй главе настоящей диссертации рассматривается метод отношения правдоподобий, применённый к наибольшим k_n элементам вариационного ряда, что позволяет не рассматривать весь объём выборки, как в случае традиционных метода отношения правдоподобий и RML-метода. Похожий метод использовался в недавней работе Кунду и Дея ([45]), однако они рассматривали последние (минимальные) члены вариационного ряда для распределений, ограниченных снизу, тогда как значимыми для теории экстремумов являются именно первые члены вариационного ряда. Для семейства распределений $f(x, \gamma)$ при некоторых условиях на рост k_n возможно найти точную асимптотику распределения отношения правдоподобий, чему и посвящена настоящая работа.

Вернёмся к обсуждению условий регулярности, налагаемых нами на функции $V(x, \gamma)$ и $C(x, \gamma)$. Обозначим

$$S(x, \gamma) = V(x, \gamma) - \ln C(x, \gamma).$$

Будем считать, что

$$C(x, \gamma) = C_1(\gamma) + C_2(\gamma)x^{-\beta} + R(x), \tag{2.3}$$

$\beta > 0$, при $x \to +\infty$, где остаточный член $R(x) = o(x^{-\beta})$ не зависит от γ и трижды непрерывно дифференцируем. Также будем считать, что функция $S(x, \gamma)$ строго монотонна при всех $x > x_0(\gamma)$ и четырежды непрерывно дифференцируема на том же промежутке. Поскольку мы рассматриваем близкие гипотезы по параметру γ, довольно естественно сделать предположения об общем виде функции $S(x, \gamma)$: например, мы можем рассматривать функции вида $\gamma S(x)$ или $(S(x))^\gamma$. Рассматривать же функции вида $f(x) + g(x, \gamma)$ довольно проблематично, поскольку слагаемое, не зависящее от γ, в отношении правдоподобий сократится. К сожалению, тем самым мы исключаем из рассмотрения распределения, хвост которых убывает медленнее, чем хвост распределений лог-вейбулловского типа. Т.е. о поведении частной производной функции $S(x, \gamma)$ по параметру γ при $x \to \infty$ разумно предположить, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left|\frac{\partial S(x,\gamma)}{\partial\gamma}\right|}{\ln S(x,\gamma)} = 1$. Итак, на функцию $S(x, \gamma)$ наложим следующие, верные для каждого γ из области определения функции условия регулярности:

1. Существует $\epsilon = \epsilon(\gamma) > 0$ такой, что $\frac{S(x,\gamma)}{x^{1+\epsilon}} \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

2. Любая из частных производных функции $S(x, \gamma)$ вплоть до четвёртого порядка $\neq 0$ или $\equiv 0$ при всех $x > x_0(\gamma)$. Кроме того, все

частные производные функции $S(x,\gamma)$ вплоть до третьего порядка имеют конечный или бесконечный предел при $x \to +\infty$.

3. Для $k = 1,2,3$ выполнено $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left|\frac{\partial^k S(x,\gamma)}{\partial\gamma^k}\right|}{\ln S(x,\gamma)} = 1$, если эти частные производные не равны 0 тождественно.

4. Существует конечный предел при $x \to +\infty$ выражений вида $\frac{\frac{\partial \ln|K(x,\gamma)|}{\partial x}}{\frac{\partial \ln S(x,\gamma)}{\partial x}}$, где $K(x,\gamma)$ — любая частная производная функции $S(x,\gamma)$ до третьего порядка включительно, если она не равна 0 тождественно.

Заметим, что из первого условия регулярности следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{\partial S(x,\gamma)}{\partial x}}{\ln S(x,\gamma)} > 0$. Обозначим

$$a_{n/k_n} = F^{\leftarrow}\left(\frac{n-k_n}{n}, \gamma\right),$$

где $F(x,\gamma)$ - функция распределения, имеющая плотность $f(x,\gamma)$, а $F^{\leftarrow}(x,\gamma) = \inf\{x : F(x,\gamma) \le t\}$. Заметим, что $\{a_{n/k_n}, n \in \mathcal{N}\}$ — последовательность нормировочных констант из теоремы Фишера-Типпета-Гнеденко для области максимального притяжения Гумбеля. Под записью $N(a,b)$ будем подразумевать нормальную случайную величину с математическим ожиданием a и дисперсией b. Запись $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$ будет означать, что последовательность случайных величин ξ_n сходится при $n \to +\infty$ к случайной величине η по распределению, а запись $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$ - по вероятности. Также будем писать $S_{x\gamma}(a_{n/k_n}, \gamma + t(k_n,u))$ вместо $\frac{\partial^2 S(x,\gamma)}{\partial x \partial\gamma}\Big|_{(x,\gamma)=(a_{n/k_n},\gamma+t(k_n,u))}$ и аналогично для других частных производных функции $S(x,\gamma)$. Сформулируем первую теорему данной главы, в которой найдено предельное распределение отношения правдоподобий $R_n(u)$ при медленно растущей последовательности k_n:

Теорема 2.1. *Пусть для семейства плотностей $f(x,\gamma)$ выполнены условия регулярности 1)-4), $n \to \infty$, $k_n \to \infty$, причём выполнено следующее условие: $\exists\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 2$, такой, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{(\ln\frac{n}{k_n})^{\varepsilon}} = 1. \tag{2.4}$$

Тогда при $t(k_n,u,\gamma)=\frac{u}{\sqrt{k_n}}\frac{S_x(a_{n/k_n},\gamma)}{S_{x\gamma}(a_{n/k_n},\gamma)}$ *и* $n\to\infty$ *выполнено*

$$\ln R_n(u)\xrightarrow{d} N\left(-\frac{u^2}{2},u^2\right).$$

В дальнейшем параметры u и γ в обозначении последовательности $t(k_n,u,\gamma)$ будет опускаться.

Стоит заметить, что предельное распределение отношения правдоподобий не зависит от γ, что представляется удобным при построении критерия, подробнее см. [31]. Поскольку доказательство представляется весьма сложным технически, укажем схему, по которой оно проводилось. **Лемма 2.2** требуется для нахождения явного вида правдоподобия $R_n(t)$ при условии $X_{(n-k_n)}=q$. Далее, в **лемме 2.4** доказаны асимптотические свойства $n-k_n$-ного члена вариационного ряда $X_{(n-k_n)}$, от распределения которого напрямую зависит правдоподобие, и квантили a_{n/k_n}. Для независимых при условии $X_{(n-k_n)}=q$ и одинаково распределённых случайных величин Y_i, которые возникают в выражении логарифма отношения правдоподобий, применяется центральная предельная теорема в схеме серий (2.10). С помощью **леммы 2.3** находятся математическое ожидание (2.14) и дисперсия (2.26) случайной величины Y_1. И, наконец, учитываются оставшиеся члены в выражении логарифма отношения правдоподобий (2.9), что приводит к окончательному ответу.

Если же исследовать асимптотическое поведение отношения правдоподобий $R_n(t)$ (2.1) при $n\to\infty,k_n\to\infty$ и быстро растущей последовательности k_n ($k_n\sim n^\alpha$, где $\alpha\in(0,1)$) для семейства плотностей $f(x,\gamma)$ (2.2), то нам потребуются несколько другие условия регулярности, налагаемые нами на это семейство. Приведём несколько примеров семейств плотностей, которые удовлетворяют новым условиям регулярности. Важным примером является семейство плотностей лог-вейбулловского типа:

$$f_{LW}(x,\gamma)=C(\gamma)\exp(-(\ln x)^\gamma),\ x\geq 1,\ \gamma>1.$$

По-прежнему удовлетворяет условиям регулярности семейство плотностей вейбулловского типа:

$$f_W(x,\gamma)=C(\gamma)\exp(-x^\gamma),\ x\geq 0,\ \gamma>1.$$

В качестве ещё одного примера можно рассмотреть семейство логнормальных плотностей, где в качестве параметра γ выбирается параметр формы:

$$f_{LN}(x,\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}x} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2\gamma}},\ \gamma > 0, x \geq 0.$$

Вернёмся к обсуждению условий регулярности, налагаемых нами на функции $S(x,\gamma)$ и $C(x,\gamma)$. Будем, как и ранее, считать, что $C(x,\gamma) = C_1(\gamma) + C_2(\gamma)x^{-\beta} + R(x)$, $\beta > 0$, при $x \to \infty$, где остаточный член $R(x) = o(x^{-\beta})$ не зависит от γ и трижды непрерывно дифференцируем, а на функцию $S(x,\gamma)$ наложим следующие условия регулярности, которые выполняются при всех γ из области определения функции:

1. Существует $\epsilon = \epsilon(\gamma) > 0$ такой, что $\frac{S(x,\gamma)}{(\ln x)^{1+\epsilon}} \to +\infty$ при $x \to +\infty$.
2. Существует $\delta = \delta(\gamma)$, $0 \leq \delta < 1$, такой, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln \frac{\partial S(x,\gamma)}{\partial x}}{(S(x,\gamma))^{1-\delta}} = 0$.
3. Любая из частных производных функции $S(x,\gamma)$ вплоть до четвёртого порядка $\neq 0$ или $\equiv 0$ при всех $x > x_0(\gamma)$. Кроме того, все частные производные функции $S(x,\gamma)$ вплоть до третьего порядка имеют конечный или бесконечный предел при $x \to +\infty$.
4. Для $k = 1,2,3$ выполнено $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left|\frac{\partial^k S(x,\gamma)}{\partial\gamma^k}\right|}{\ln S(x,\gamma)} = 1$, если эти частные производные не равны 0 тождественно.
5. Для всех γ существует конечный предел при $x \to +\infty$ выражений вида $\frac{\frac{\partial \ln|K(x,\gamma)|}{\partial x}}{\frac{\partial \ln S(x,\gamma)}{\partial x}}$, где $K(x,\gamma)$ — любая частная производная функции $S(x,\gamma)$ до третьего порядка включительно, если она не равна 0 тождественно, или сама функция $S(x,\gamma)$.

Обозначим

$$H(x) = \sqrt{k_n}t(k_n)\left(\frac{\int\limits_x^\infty S_\gamma(y,\gamma)\exp(-S(y,\gamma))dx}{\int\limits_x^\infty \exp(-S(y,\gamma))dx} - S_\gamma(x,\gamma) - \right.$$

$$\left. -\frac{S_{x\gamma}(x,\gamma)}{S_x(x,\gamma)} - \frac{S_{xx\gamma}(x,\gamma)}{(S_x(x,\gamma))^2} + 2\frac{S_{xx}(x,\gamma)S_{x\gamma}(x,\gamma)}{(S_x(x,\gamma))^3}\right).$$

Из условия теоремы 2.2, а также из последующего доказательства теоремы будет вытекать, что функция $H(x) = -\frac{S_{xx}(x,\gamma)}{S_x^2(x,\gamma)}(1 + o(1))$ при $x \to +\infty$.

Теорема 2.2. *Пусть для семейства плотностей $f(x, \gamma)$ выполнены условия регулярности 1)-5), $n \to \infty$, $k_n \to \infty$, причём выполнено следующее условие: $\exists \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, такой, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n^\varepsilon} = 1. \tag{2.5}$$

Тогда при $t(k_n) = \frac{u}{\sqrt{k_n}} \frac{S_x(a_{n/k_n},\gamma)}{S_{x\gamma}(a_{n/k_n},\gamma)}$ выполнено

$$\ln R_n(u) - \sqrt{k_n} H(a_{n/k_n}) \xrightarrow{d} \exp\left(-N\left(\frac{u^2}{2}, u^2\right)\right)$$

при $n \to +\infty$.

Замечание 2.3. Стоит заметить, что как в теореме 2.1, так и в теореме 2.2 предельное распределение логарифма отношения правдоподобий $R_n(u)$ не зависит от γ, что весьма удобно для построения критерия.

2.2 Вспомогательные леммы

В этом параграфе мы сформулируем ряд вспомогательных лемм, которые понадобятся нам при доказательстве теорем 2.1 и 2.2. Первая лемма позволит нам выписать отношение правдоподобий в явной форме как функцию от $n - k_n$-го члена вариационного ряда.

Лемма 2.4. *([4])*

Пусть $X, X_1, \ldots, X_n$ - независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения $F(x)$, пусть $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ - вариационный ряд этой случайной последовательности. Тогда совместное распределение $\{X_{(i)}\}_{i=n-k+1}^n$ при данном $X_{(n-k)} = q$ для некоторого $k = 1 \ldots n-1$ совпадает с совместным распределением множества порядковых статистик $\{X^*_{(i)}\}_{i=1}^k$ независимых одинаково распределённых случайных величин $\{X^*_i\}_{i=1}^k$ с функцией распределения

$$F_q(x) = P(X \leq x | X > q) = \frac{F(x) - F(q)}{1 - F(q)}$$

при $x > q$.

Следующая лемма позволяет находить асимптотику стохастических интегралов, которые возникают в настоящей работе, и является развитием асимптотического метода Лапласа (см., например, [29]). Рассмотрим поведение интеграла $F(q) = \int\limits_{q}^{+\infty} \exp(-S(x))dx$.

Лемма 2.5. *([39])*

Пусть для функции $S(x)$ выполнены следующие условия регулярности:

1)$\frac{S(x)}{\ln x} \to +\infty$ при $x \to +\infty$.*

2)Начиная с некоторого $x_0 > 0$, $S(x)$ – строго монотонная функция.*

3)Начиная с некоторого $x_1 > x_0$, $S(x)$ четырежды непрерывно дифференцируема. Кроме того, первая, вторая и третья производные функции $S(x, \gamma)$ имеют конечный или бесконечный предел при $x \to +\infty$.*

4)Для $k = 1, 2, 3$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left|\frac{d^k S(x)}{dx^k}\right|}{S(x)} = 0$, а также существует конечный предел выражений $\frac{\frac{d^k S(x)}{dx^k}}{\frac{d^k S(x)}{dx^k} S'(x)}$ при $x \to +\infty$.*

Тогда при $q \to +\infty$ интеграл имеет представление

$$F(q) = \exp(-S(q)) \left(\sum_{k=0}^{2} c_k + o(c_2) \right),$$

где $c_k = M^k \left(\frac{1}{S'(x)} \right) |_{x=q}$, $M = \frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx}$.

Доказательство. Рассмотрим $q > x_1$. Из условия 1^* следует, что $\exists C > 1$ такое, что $\int\limits_{q}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{C}S(x))dx < \infty$. Из условий 1^* и 2^* следует, что $\exists!\ \varepsilon(q) > 0$ такое, что $\frac{S(q+\varepsilon(q))}{S(q)} = C\ \forall q > x_1$. В дальнейшем будем писать ε вместо $\varepsilon(q)$. Рассмотрим $F(q+\varepsilon) - F(q) = \int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \exp(-S(x))dx$. Интегрируя по частям, получаем:

$$\int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \exp(-S(x))dx = \int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \frac{1}{-S'(x)} d(\exp(-S(x))) = \frac{\exp(-S(x))}{-S'(x)} \Big|_{q}^{q+\varepsilon} +$$

$$+\int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\exp(-S(x))dx.$$

Интегрируя таким же образом по частям ещё 2 раза, получаем:

$$\int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \exp(-S(x))dx = \sum_{k=0}^{2} \exp(-S(x))M^k\left(\frac{1}{-S'(x)}\right)|_q^{q+\varepsilon} +$$

$$+\int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right)'\exp(-S(x))dx,$$

где M^0 - единичный оператор. Из условий 1* и 3*, а также учитывая выбор ε, получаем, что при $q \to \infty$ $\sum\limits_{k=0}^{2} \exp(-S(q+\varepsilon))M^k\left(\frac{1}{S'(x)}\right)|_{x=q+\varepsilon}$ экспоненциально мало по сравнению с $\sum\limits_{k=0}^{2} \exp(-S(q))M^k\left(\frac{1}{S'(x)}\right)|_{x=q}$. Рассмотрим теперь интеграл $\int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right)'\exp(-S(x))dx$. Оценка остаточного члена разбивается на 3 случая: 1) $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = +\infty$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = C$, где $C > 0$, и 3) $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = 0$, ведь, по условию 3*, у $S'(x)$ есть предел на бесконечности.

1 случай.

Докажем сначала, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\right) = 0$. По условию 4*, $\ln S'(x) = o(S(x))$ при $x \to +\infty$. Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln S'(x) = +\infty$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\right) = -\lim_{x\to\infty} \frac{S''(x)}{(S'(x))^2} = -\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln S'(x))'}{S'(x)} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\ln S'(x)}{S(x)} = 0.$$

Далее,

$$\frac{d}{dx}M\left(\frac{1}{S'(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right)^2 + \frac{1}{S'(x)} \cdot \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{S'(x)}\right) = 3\frac{(S''(x))^2}{(S'(x))^4} - \frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}.$$

Очевидно, первое слагаемое асимптотически меньше, чем $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\right) = -\frac{S''(x)}{(S'(x))^2}$, при $x \to +\infty$. Докажем, что аналогичное свойство верно и для второго слагаемого. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} S''(x) = +\infty$ или 0 (он существует по условию 3*). Тогда, используя условие 4*, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}}{\frac{S''(x)}{(S'(x))^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{S^{(3)}(x)}{S''(x)S'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d}{dx}(\ln S''(x))}{\frac{d}{dx}(S(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln S''(x)}{S(x)} = 0,$$

что и требовалось. Если же $\lim\limits_{x\to+\infty} S''(x) = C,\ C \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} S^{(3)}(x) = 0$ и $\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3} = o\left(\frac{S''(x)}{(S'(x))^2}\right)$ при $x \to \infty$. Для доказательства того факта, что $\frac{d}{dx}\left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right) = o\left(\frac{d}{dx}M\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right)$, достаточно проверить, что $\frac{d}{dx}\left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right) = o\left(\max\left(\left|\frac{(S''(x))^2}{(S'(x))^4}\right|, \left|\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}\right|\right)\right)$. Это может быть неверным лишь в том случае, когда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3\frac{(S''(x))^2}{(S'(x))^4}}{\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}} = 1.$$

Докажем, что при $\lim\limits_{x\to+\infty} S'(x) = +\infty$ это соотношение не выполняется. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} S''(x) = +\infty$ или 0, то по второму правилу Лопиталя получаем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3\frac{(S''(x))^2}{(S'(x))^4}}{\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3(S''(x))^2}{S'(x)S^{(3)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(3\ln S'(x))}{\frac{d}{dx}(\ln S''(x))} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln S'(x)}{\ln S''(x)} = 1,$$

т.е. $(S'(x))^3 = (S''(x))^{1+o(1)}$ при $x \to \infty$. Такое невозможно, поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S''(x)}{(S'(x))^2} = 0$. Пусть теперь $\lim\limits_{x\to+\infty} S''(x) = C,\ C \neq 0$. Тогда, очевидно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S'(x)}{x} = C$ и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3(S''(x))^2}{S'(x)S^{(3)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3C}{xS^{(3)}(x)} = 1.$$

Значит, $\exists y_0 > 0$ такое, что $\forall x > y_0\ S^{(3)} > \frac{C_1}{x}$, тогда для $x > y_0$

$$S''(x) - S''(y_0) = \int\limits_{y_0}^{x} S^{(3)}(x)dx > \int\limits_{y_0}^{x} \frac{C_1}{x}dx = C_1 \ln\frac{x}{y_0} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty,$$

что противоречит $\lim\limits_{x\to+\infty} S''(x) = C$. Итак, проверим, что $\frac{d}{dx}\left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right) = o\left(\max\left(\left|\frac{(S''(x))^2}{(S'(x))^4}\right|, \left|\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}\right|\right)\right)$.

$$\frac{d}{dx}\left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right) = 10\frac{S''(x)S^{(3)}(x)}{(S'(x))^5} - 15\left(\frac{S''(x)}{(S'(x))^2}\right)^3 - \frac{S^{(4)}(x)}{(S'(x))^4}.$$

Первое слагаемое из последнего выражения асимптотически меньше, чем $\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}$, второе – асимптотически меньше, чем $\frac{(S''(x))^2}{(S'(x))^4}$, доказательство того факта, что третье асимптотически меньше, чем $\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}$, с незначительными изменениями повторяет доказательство асимптотической малости $\frac{S^{(3)}(x)}{(S'(x))^3}$ по сравнению с $\frac{S''(x)}{(S'(x))^2}$, проведённое выше. Итак, случай $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = +\infty$, полностью разобран.

2 случай.

Теперь $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = 0$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{S''(x)}{(S'(x))^2} = 0$. По условию 1*, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{S(x)}{\ln x} = +\infty$, тогда,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{S(x)}{\ln x} = +\infty,$$

т.е. $\frac{1}{S'(x)x} \to 0$ при $x \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S''(x)}{(S'(x))^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{S''(x)}{(S'(x))^2}}{1} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{S'(x)}}{x} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{S'(x)x} = 0,$$

что и требовалось. Заметим, что т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} S''(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} S^{(3)}(x) = 0$, поскольку у $S''(x)$ и $S^{(3)}(x)$ есть предел при $x \to \infty$. Дальнейшее доказательство повторяет доказательство, проведённое для случая $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = +\infty$, с тем изменением, что теперь всегда $\lim\limits_{x\to\infty} S''(x) = \lim\limits_{x\to\infty} S^{(3)}(x) = 0$.

3 случай.

Осталось рассмотреть случай, когда $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = C,\ C > 0$. Очевидно, что в этом случае $\lim\limits_{x\to\infty} S''(x) = \lim\limits_{x\to\infty} S^{(3)}(x) = 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{S''(x)}{(S'(x))^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{S''(x)}{C^2} = 0$. Дальнейшее доказательство проводится так же, как и для первого случая, за исключением одного момента. Рассмотрим поведение отношения $\frac{3(S''(x))^2}{S'(x)S^{(3)}(x)}$ при $x \to +\infty$. Т.к. это отношение не зависит от C, то примем $C = 1$. Используя второе правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3(S''(x))^2}{S'(x)S^{(3)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3(S''(x))^2}{S^{(3)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\frac{S^{(3)}(x)}{(S''(x))^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{-\frac{1}{S''(x)}} = 1,$$

т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} 3xS''(x) = -1$. Значит, $\exists y_0 > 0$ такое, что $\forall x > y_0$ $S''(x) < -\frac{C_1}{x}$, где $C_1 > 0$, тогда для $x > y_0$

$$S'(x) - S'(y_0) = \int\limits_{y_0}^{x} S''(x)dx < -\int\limits_{y_0}^{x} \frac{C_1}{x}dx = -C_1 \ln\frac{x}{y_0} \xrightarrow[x\to\infty]{} -\infty,$$

что противоречит $\lim\limits_{x\to+\infty} S'(x) = C$. Итак, для всех трёх случаев поведения $S'(x)$ на бесконечности доказано $\frac{d}{dx}\left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right) = o\left(\frac{d}{dx}M\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right)$. Таким образом,

$$\int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right)' e^{-S(x)}dx = \int\limits_{q}^{q+\varepsilon} o\left(\frac{d}{dx}M\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right) e^{-S(x)}dx.$$

Но

$$\int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \frac{d}{dx}M\left(\frac{1}{S'(x)}\right) e^{-S(x)}dx = -\left. M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right) e^{-S(x)}\right|_{q}^{q+\varepsilon} +$$

$$+\int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \left(M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\right)' e^{-S(x)}dx,$$

где последнее слагаемое, как мы уже установили, асимптотически меньше левой части, поэтому

$$\int\limits_{q}^{q+\varepsilon} \frac{d}{dx}M\left(\frac{1}{S'(x)}\right) e^{-S(x)}dx = -\left. M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right) e^{-S(x)}\right|_{q}^{q+\varepsilon} (1 + o(1)) =$$

$$= e^{-S(q)}\, M^2 \left(\frac{1}{S'(x)}\right)\Bigg|_{x=q} (1+o(1)),$$

т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-S(q+\varepsilon)}\, M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\Big|_{x=q+\varepsilon}}{e^{-S(q)}\, M^2\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\Big|_{x=q}} = 0$ по условию 4* и из-за того, что $S(q+\varepsilon) = CS(q)$. Таким образом, доказано, что $F(q) - F(q+\varepsilon) = \exp(-S(q))\left(\sum\limits_{k=0}^{2} c_k + o(c_2)\right)$. Докажем теперь, что интеграл $F(q+\varepsilon)$ экспоненциально мал по сравнению с $F(q)$.

$$F(q+\varepsilon) = \int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp(-S(x))dx =$$

$$= \exp(S(q) - S(q+\varepsilon)) \int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp(S(q+\varepsilon) - S(q) - S(x))dx = \exp(S(q) - S(q+\varepsilon)) \times$$

$$\times \int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp\left(-\frac{S(q)}{S(q+\varepsilon)} S(x)\right) \exp\left(\frac{S(q+\varepsilon) - S(q)}{S(q+\varepsilon)}(S(q+\varepsilon) - S(x))\right) dx \le$$

$$\le \exp(S(q) - S(q+\varepsilon)) \int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp\left(-\frac{S(q)}{S(q+\varepsilon)} S(x)\right) dx =$$

$$= \exp(-(C-1)S(q)) \int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{C} S(x)\right) dx < \infty,$$

т.к. $\frac{S(q+\varepsilon) - S(q)}{S(q+\varepsilon)}(S(q+\varepsilon) - S(x)) < 0 \ \forall x \ge q+\varepsilon$. Оценим теперь $\int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{C} S(x))dx$ сверху.

$$\int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{C} S(x)\right) dx = \exp(-S(q)) \int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp\left(S(q) - \frac{S(q)}{S(q+\varepsilon)} S(x)\right) dx.$$

По условию 1*, $\forall C > 0$ найдётся такой $x_2(C)$, что $\forall x > x_2 \ S(x) > 2C \ln x$. Рассмотрим функцию $h(x,q) = S(q) - \frac{S(q)}{S(q+\varepsilon)} S(x)$. Легко заметить, что

$h(x,q) \leq 0$ при $x \geq q+\varepsilon$, монотонно убывает при $x \to +\infty$ по условию 2* и $h(q+\varepsilon,q)=0$. Кроме того, по условиям 1* и 3*, найдётся такой $x_3 > x_2$, что $h_x^{'}(x,q) = -\frac{1}{C}S'(x) < -\frac{2}{x-q-\varepsilon+1} < 0$ для всех $x > \max(x_3, q+\varepsilon)$. Таким образом,

$$\int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp\left(S(q) - \frac{S(q)}{S(q+\varepsilon)}S(x)\right)dx <$$

$$< \int\limits_{q+\varepsilon}^{+\infty} \exp(-2\ln(x-q-\varepsilon+1))dx = \int\limits_{1}^{+\infty} \exp(-2\ln x)dx < +\infty.$$

$\square$

С помощью этой леммы несложно показать, что рассматриваемый нами класс распределений, который лежит в классе функций, подчиняющихся условиям регулярности 1*)-4*), действительно принадлежит области максимального притяжения Гумбеля. Такие распределения могут быть представлены в форме фон Мизеса (см. например [42]):

$$1 - F(x) = d(x)\exp\left(-\int\limits_{x'}^{x} \frac{g(t)}{a(t)}dt\right),$$

где $x' \geq 0$, $a(x)$ - положительная и абсолютно непрерывная функция на $[x';\infty)$, $a'(x) \to 0$; $d(x) \to c > 0$, $g(x) \to 1$ при $x \to x_F$, где x_F - правая крайняя точка распределения. С другой стороны, для рассматриваемого семейства плотностей $f(x,\gamma) = C(x,\gamma)\exp(-V(x,\gamma))$ получаем (т.к. дифференцирование идёт только по x, то параметр γ опускаем):

$$1 - F(x) = C(x)\exp(-V(x))\frac{1}{V'(x) - \frac{C'(x)}{C(x)}}\left(1 - \frac{V''(x)}{(V'(x))^2} + o\left(\frac{V''(x)}{(V'(x))^2}\right)\right),$$

здесь мы также воспользовались (2.3). В лемме 2.5 показано, что в условиях теоремы 2.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{V''(x)}{(V'(x))^2} = 0$, кроме того, $C(x) \to C$ по условию. Далее, $\frac{C'(x)}{C(x)} = O(x^{-1-\beta})$, тогда как из правила Лопиталя следует, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S'(x)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x)}{\ln x} = +\infty,$$

т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{C'(x)/C(x)}{S'(x)} = 0$, поэтому в качестве $d(x)$ возьмём следующую функцию

$$d(x) = C(x)\frac{V'(x)}{V'(x)-\frac{C'(x)}{C(x)}}\left(1-\frac{V''(x)}{(V'(x))^2}+o\left(\frac{V''(x)}{(V'(x))^2}\right)\right).$$

Осталось показать, что всегда найдутся такие x', $a(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие приведённым выше условиям, что $V(x)+\ln V'(x) = \int\limits_{x'}^{x}\frac{g(t)}{a(t)}dt$. Продифференцируем это равенство по x :

$$V'(x)+\frac{V''(x)}{V'(x)} = V'(x)\left(1+\frac{V''(x)}{(V'(x))^2}\right) = \frac{g(x)}{a(x)}.$$

Уже упоминалось, что в условиях теоремы $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{V''(x)}{(V'(x))^2} = 0$, поэтому примем $g(x) = 1+\frac{V''(x)}{(V'(x))^2}$. Т.к. $\left(\frac{1}{V'(x)}\right)' = -\frac{V''(x)}{(V'(x))^2}$, то в качестве $a(x)$ возьмём $\frac{1}{V'(x)}$, эта функция положительная, начиная с некоторого x_0, поскольку $V(x)$ возрастает на данном промежутке по условию. Итак, мы установили, что найдутся $a(x)$ и $g(x)$ такие, что $V(x)+\ln V'(x) = \int\limits_{x'}^{x}\frac{g(t)}{a(t)}dt+C$, где C - некая константа. Примем $x' = x_0$, константу e^{-C} перенесём в $d(x)$, тем самым установив, что семейство распределений, рассматриваемое в работе, действительно принадлежит области максимального притяжения Гумбеля.

В следующей лемме находится асимптотическое распределение $X_{(n-k_n)}$ — $(n-k_n)$-ого члена вариационного ряда выборки.

Лемма 2.6. *При выполнении условий* ***теоремы 2.1*** *верно:*

$$X_{(n-k_n)} - a_{n/k_n} \xrightarrow{P} 0.$$

Доказательство. Согласно теореме 2.2.1 из [4],

$$\sqrt{k_n}\frac{X_{(n-k_n)}-U\left(\frac{n}{k_n}\right)}{\frac{n}{k_n}U'\left(\frac{n}{k_n}\right)} \xrightarrow{d} N(0,1), \tag{2.6}$$

где $U = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}$. Далее, согласно лемме 2.5,

$$a_{n/k_n} = \arg\left\{t : \int\limits_{t}^{\infty} C(x,\gamma)\exp(-S(x,\gamma))dx = \frac{k_n}{n}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \arg\left\{t:\ \frac{C(t,\gamma)\exp(-S(t,\gamma))}{S_x(t,\gamma)}=\frac{k_n}{n}\right\}, \tag{2.7}$$

тогда, очевидно, $U(\frac{n}{k_n})=a_{n/k_n}$. Далее, $U'(t)=\frac{[1-F(U(t))]^2}{F'(U(t))}$, поэтому $U'(\frac{n}{k_n})=\frac{(k_n/n)^2}{F'(a_{n/k_n})}$. Но $F'(a_{n/k_n})=C(t,\gamma)\exp(-S(x,\gamma))$, где $t=a_{n/k_n}$ таково, что $\frac{C(t,\gamma)\exp(-S(t,\gamma))}{S_x(t,\gamma)}=\frac{k_n}{n}$, т.е. $F'(a_{n/k_n})=\frac{k_n}{n}S_x(a_{n/k_n},\gamma)$. В итоге, получаем:

$$\frac{\sqrt{k_n}(X_{(n-k_n)}-a_{n/k_n})}{\frac{1}{S_x(a_{n/k_n},\gamma)}}\xrightarrow{d} N(0,1). \tag{2.8}$$

Из условий теоремы 2.1 следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty}S_x(a_{n/k_n},\gamma)=+\infty$, поэтому из (2.8) получаем, что

$$X_{(n-k_n)}-a_{n/k_n}\xrightarrow{P}0.$$

□

2.3 Доказательство теоремы 2.1

Итак, пользуясь леммой 2.4, выпишем правдоподобие $L(X_{(n)},\ldots,X_{(n-k_n+1)};\gamma)$:

$$L(X_{(n)},\ldots,X_{(n-k_n+1)};\gamma)=\frac{\prod\limits_{i=0}^{k_n-1}\exp(-V(X_{(n-i)},\gamma))C(X_{(n-i)},\gamma)}{\left(\int\limits_{X_{(n-k_n)}}^{+\infty}C(x,\gamma)\exp(-V(x,\gamma))dx\right)^{k_n}}.$$

Как и ранее, $S(x,\gamma)=V(x,\gamma)-\ln C(x,\gamma)$. С помощью этой функции запишем отношение правдоподобий:

$$R_n(u)=\frac{\prod\limits_{i=0}^{k_n-1}\exp[-S(X_{(n-i)},\gamma+t(k_n))+S(X_{(n-i)},\gamma)]}{\left(\int\limits_{X_{(n-k_n)}}^{+\infty}\exp[-S(x,\gamma)]dx\right)^{-k_n}\cdot\left(\int\limits_{X_{(n-k_n)}}^{+\infty}\exp[-S(x,\gamma+t(k_n))]dx\right)^{k_n}}.$$

Из леммы 2.5,

$$\int\limits_{X_{(n-k_n)}}^{+\infty} \exp[-S(x,\gamma)]dx =$$

$$= \frac{\exp(-S(X_{(n-k_n)},\gamma))}{S_x(X_{(n-k_n)},\gamma)} \left(1 - \frac{S_{xx}(X_{(n-k_n)},\gamma)}{(S_x(X_{(n-k_n)},\gamma))^2} + o\left(\frac{S_{xx}(X_{(n-k_n)},\gamma)}{(S_x(X_{(n-k_n)},\gamma))^2}\right)\right),$$

следовательно, отношение правдоподобий принимает вид:

$$R_n(u) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3, \tag{2.9}$$

где

$$A_1 = \frac{\exp\left(-\sum\limits_{i=0}^{k_n-1} S(X_{(n-i)},\gamma+t(k_n)) + \sum\limits_{i=0}^{k_n-1} S(X_{(n-i)},\gamma)\right)}{\exp\left(-k_n S(X_{(n-k_n)},\gamma+t(k_n)) + k_n S(X_{(n-k_n)},\gamma)\right)},$$

$$A_2 = \left(\frac{S_x(X_{(n-k_n)},\gamma+t(k_n))}{S_x(X_{(n-k_n)},\gamma)}\right)^{k_n} \text{ и}$$

$$A_3 = \frac{\left(1 - \frac{S_{xx}(X_{(n-k_n)},\gamma)}{(S_x(X_{(n-k_n)},\gamma))^2} + o\left(\frac{S_{xx}(X_{(n-k_n)},\gamma)}{S_x(X_{(n-k_n)},\gamma))^2}\right)\right)^{k_n}}{\left(1 - \frac{S_{xx}(X_{(n-k_n)},\gamma+t(k_n))}{(S_x(X_{(n-k_n)},\gamma+t(k_n)))^2} + o\left(\frac{S_{xx}(X_{(n-k_n)},\gamma+t(k_n))}{(S_x(X_{(n-k_n)},\gamma+t(k_n)))^2}\right)\right)^{k_n}}.$$

Начнём с нахождения асимптотического распределения множителя A_1. Рассмотрим случайные величины $\{Y_i\}_{i=1}^{k_n}$, вариационный ряд которых следующий: $Y_{(k_n-i)} = [S(X_{(n-i)},\gamma+t(k_n)) - S(X_{(n-i)},\gamma)] - [S(X_{(n-k_n)},\gamma+t(k_n)) - S(X_{(n-k_n)},\gamma)],\ i = 0,\dots,k_n-1$. Из представления Реньи ([4]), они являются независимыми при условии $X_{(n-k_n)} = q$. Также они являются одинаково распределенными. Далее, рассмотрим второй член разложения (2.9) A_2. Легко видеть, что

$$A_2 = \exp(k_n \ln S_x(q,\gamma+t(k_n)) - k_n \ln S_x(q,\gamma)).$$

Вычтем из всех Y_i выражение $\ln S_x(q,\gamma+t(k_n)) - \ln S_x(q,\gamma)$, т.е. фактически мы перешли к нахождению асимптотического распределения $A_1 \cdot A_2$, при таком преобразовании Y_i, очевидно, остаются независимыми и одинаково распределенными при условии $X_{(n-k_n)} = q$. Тогда, по центральной предельной теореме для схемы серий, имеем

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n} Y_j - k_n EY_1}{\sqrt{k_n DY_1}} \xrightarrow[k_n \to \infty]{d} N(0,1), \tag{2.10}$$

при условии, что $X_{(n-k_n)} = q$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n DY_1 = C_2 > 0$, а также выполнении условия Линдеберга:

$$M_2(\tau) = k_n E(Y_1^2, |Y_1| > \tau) \to 0$$

при любом $\tau > 0$ и $n \to \infty$. Вместо него мы проверим условие Ляпунова, которое принимает следующий вид:

$$\frac{1}{k_n (DY_1)^2} E(Y_1 - EY_1)^4 \to 0 \tag{2.11}$$

при $n \to \infty$.

Найдём EY_1 и DY_1. Для этого разложим для всех $i = 0, \dots k_n - 1$ разности $S(X_{(n-i)}, \gamma + t(k_n)) - S(X_{(n-i)}, \gamma)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$S(X_{(n-i)}, \gamma + t(k_n)) - S(X_{(n-i)}, \gamma) = t(k_n) S_\gamma (X_{(n-i)}, \gamma) +$$
$$+ \frac{1}{2}(t(k_n))^2 S_{\gamma\gamma}(X_{(n-i)}, \gamma) + \frac{1}{6}(t(k_n))^3 S_{\gamma\gamma\gamma}(X_{(n-i)}, \gamma + \widetilde{t}(k_n, X_{(n-i)})), \tag{2.12}$$

где $|\widetilde{t}(k_n, X_{(n-i)})| \leq |t(k_n)|$ и знаки их совпадают. Разложим таким же образом выражение $\ln S_x(q, \gamma + t(k_n)) - \ln S_x(q, \gamma)$:

$$\ln S_x(q, \gamma + t(k_n)) - \ln S_x(q, \gamma) = t(k_n) \frac{S_{x\gamma}(q, \gamma)}{S_x(q, \gamma)} +$$

$$+ \frac{1}{2}(t(k_n))^2 \left(\frac{S_{x\gamma\gamma}(q, \gamma)}{S_x(q, \gamma)} - \left(\frac{S_{x\gamma}(q, \gamma)}{S_x(q, \gamma)} \right)^2 \right) + \frac{1}{6}(t(k_n))^3 \left(\frac{S_{x\gamma}(q, \gamma)}{S_x(q, \gamma)} \right)''_{\gamma\gamma} \Bigg|_{q, \gamma + \bar{t}(k_n)}, \tag{2.13}$$

где, как и ранее, $|\bar{t}(k_n)| \leq |t(k_n)|$ и знаки их совпадают. Итак, условное математическое ожидание

$$EY_1 = \frac{\int\limits_q^\infty [S(x, \gamma + t(k_n)) - S(x, \gamma)] \exp(-S(x, \gamma)) dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x, \gamma)) dx} -$$

$$-[S(q,\gamma+t(k_n))-S(q,\gamma)]-[\ln S_x(q,\gamma+t(k_n))-\ln S_x(q,\gamma)]=$$

$$=t(k_n)\left(\frac{\int\limits_q^\infty S_\gamma(x,\gamma)\exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx}-S_\gamma(q,\gamma)-\frac{S_{x\gamma}(q,\gamma)}{S_x(q,\gamma)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}(t(k_n))^2\left(\frac{\int\limits_q^\infty S_{\gamma\gamma}(x,\gamma)\exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx}-S_{\gamma\gamma}(q,\gamma)-\frac{S_{x\gamma\gamma}(q,\gamma)}{S'_x(q,\gamma)}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{S_{x\gamma}(q,\gamma)}{S_x(q,\gamma)}\right)^2\right)++\frac{1}{6}(t(k_n))^3\left(\frac{\int\limits_q^\infty S_{\gamma\gamma\gamma}(x,\gamma+\widetilde{t}(k_n,x))\exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx}-\right.$$

$$\left.-S_{\gamma\gamma\gamma}(q,\gamma+\widehat{t}(k_n))-\left(\frac{S_{x\gamma}(x,\gamma)}{S_x(x,\gamma)}\right)''_{\gamma\gamma}\Bigg|_{q,\gamma+\bar{t}(k_n)}\right), \qquad (2.14)$$

где $\widehat{t}(k_n)=\widetilde{t}(k_n,q)$ из единственности разложения Тейлора. В дальнейшем функция $S(x,\theta)$ и все её производные будут рассматриваться только при $x=q$ и $\theta=\gamma$, поэтому, к примеру, вторую смешанную производную $S_{x\gamma}(q,\gamma)$ будем обозначать так: $S_{x\gamma}$, а вместо $S(q,\gamma)$ будем писать просто S. Из леммы 3.2.1 [4], $X_{(n-k_n)}=q\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$. Оценим $I_1=\int\limits_q^\infty \exp(-S)dx$. Из леммы 2.5,

$$I_1=e^{-S}\left(\frac{1}{S_x}-\frac{S_{xx}}{S_x^3}+\frac{3S_{xx}^2}{S_x^5}-\frac{S_{xxx}}{S_x^4}+o\left(\max\left(\frac{S_{xx}^2}{S_x^5},\frac{S_{xxx}}{S_x^4}\right)\right)\right). \qquad (2.15)$$

Теперь оценим $I_2=\int\limits_q^\infty S_\gamma\exp(-S)dx$. Он существует по пятому условию регулярности. Используя лемму 2.5 для функции $S-\ln S_\gamma$ (она, очевидно, удовлетворяет условиям регулярности 1*)-4*)), получаем:

$$I_2 = \frac{S_\gamma e^{-S}}{S_x - \frac{S_{x\gamma}}{S_\gamma}} \left(1 - \frac{S_{xx} - \frac{S_{xx\gamma}}{S_\gamma} + \frac{S_{x\gamma}^2}{S_\gamma^2}}{\left(S_x - \frac{S_{x\gamma}}{S_\gamma}\right)^2} + \frac{3\left(S_{xx} - \frac{S_{xx\gamma}}{S_\gamma} + \frac{S_{x\gamma}^2}{S_\gamma^2}\right)^2}{\left(S_x - \frac{S_{x\gamma}}{S_\gamma}\right)^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{S_{xxx} - \frac{S_{xxx\gamma}}{S_\gamma} + \frac{3S_{x\gamma}S_{xx\gamma}}{S_\gamma^2} - \frac{2S_{x\gamma}^3}{S_\gamma^3}}{\left(S_x - \frac{S_{x\gamma}}{S_\gamma}\right)^3} + o\left(\max\left(\frac{S_{xx}^2}{S_x^4}, \frac{S_{xxx}}{S_x^3}\right)\right)\right). \tag{2.16}$$

Из условий регулярности и правила Лопиталя,

$$\lim_{q\to\infty} \frac{S_{x\gamma}}{S_x S_\gamma} = \lim_{q\to\infty} \frac{S_{x\gamma}/S_\gamma}{S_x} = \lim_{q\to\infty} \frac{\ln S_\gamma}{S} = 0, \tag{2.17}$$

поэтому

$$\frac{1}{1 - \frac{S_{x\gamma}}{S_x S_\gamma}} = 1 + \frac{S_{x\gamma}}{S_x S_\gamma} + \frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2 S_\gamma^2} + o\left(\frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2 S_\gamma^2}\right). \tag{2.18}$$

Здесь, как и в дальнейшем, модульные скобки в выражениях типа $\ln S_\gamma$ будут опускаться, поскольку если, к примеру, $S_\gamma < 0$, то $(\ln(-S_\gamma))_x = \frac{-S_{x\gamma}}{-S_\gamma} = \frac{S_{x\gamma}}{S_\gamma}$, следовательно, предел в (2.17) не изменяется. Докажем теперь, что $(\ln S_\gamma)_{xx} = \frac{S_{xx\gamma}}{S_\gamma} - \frac{S_{x\gamma}^2}{S_\gamma^2} = o(S_{xx})$ и $(\ln S_\gamma)_{xxx} = \frac{S_{xxx\gamma}}{S_\gamma} - \frac{3S_{x\gamma}S_{xx\gamma}}{S_\gamma^2} + \frac{2S_{x\gamma}^3}{S_\gamma^3} = o(S_{xxx})$ при $q \to \infty$. Из условий регулярности и правила Лопиталя,

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\ln S_\gamma}{\ln S} = \lim_{q\to\infty} \frac{S_{x\gamma}/S_\gamma}{S_x/S} = \lim_{q\to\infty} \frac{S_{x\gamma}S}{S_x S_\gamma} = const,$$

далее,

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\ln S_x}{\ln S} = \lim_{q\to\infty} \frac{S_{xx}/S_x}{S_x/S} = \lim_{q\to\infty} \frac{S_{xx}S}{S_x^2} = const. \tag{2.19}$$

Комбинируя два последних результата, получаем:

$$\lim_{q\to\infty} \frac{S_{x\gamma}^2 S^2}{S_\gamma^2 S_x^2} \frac{S_x^2}{S_{xx}S} = \lim_{q\to\infty} \frac{S_{x\gamma}^2}{S_\gamma^2} \frac{S}{S_{xx}} = const,$$

т.е. $\frac{S_{x\gamma}^2}{S_\gamma^2} = o(S_{xx})$. Далее, из первого и третьего условий регулярности, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln S_{x\gamma}}{\ln S} = const > 0$, значит, $\lim\limits_{x\to\infty} \ln S_{x\gamma} = +\infty$ и $\frac{\ln S_{x\gamma}}{\ln S_\gamma}$ стремится к некой положительной константе при $q \to \infty$. Используя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{q\to\infty}\frac{S_{xx\gamma}}{S_\gamma}\frac{S_\gamma^2}{S_{x\gamma}^2}=\lim_{q\to\infty}\frac{S_{xx\gamma}S_\gamma}{S_{x\gamma}^2}=\lim_{q\to\infty}\frac{\ln S_\gamma}{\ln S_{x\gamma}}=const,$$

т.е. $\frac{S_{xx\gamma}}{S_\gamma}=O\left(\frac{S_\gamma^2}{S_{x\gamma}^2}\right)$ и $(\ln S_\gamma)_{xx}=\frac{S_{xx\gamma}}{S_\gamma}-\frac{S_{x\gamma}^2}{S_\gamma^2}=o(S_{xx})$ при $q\to\infty$, что и требовалось. Доказательство того факта, что $(\ln S_\gamma)_{xxx}=\frac{S_{xxx\gamma}}{S_\gamma}-\frac{3S_{x\gamma}S_{xx\gamma}}{S_\gamma^2}+\frac{2S_{x\gamma}^3}{S_\gamma^3}=o(S_{xxx})$ при $q\to\infty$, проводится аналогично. Также заметим, что $\frac{S_{xx}}{S_x^2}=O\left(\frac{S_{x\gamma}}{S_xS_\gamma}\right)$. Действительно,

$$\lim_{q\to\infty}\frac{S_{xx}}{S_x^2}\frac{S_xS_\gamma}{S_{x\gamma}}=\lim_{q\to\infty}\frac{S_{xx}/S_x}{S_{x\gamma}/S_\gamma}=\lim_{q\to\infty}\frac{\ln S_x}{\ln S_\gamma}=const. \tag{2.20}$$

Кроме того, верно $\frac{S_{xxx}}{S_x^3}=O\left(\frac{S_{xx}^2}{S_x^4}\right)=O\left(\frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2S_\gamma^2}\right)$. Аналогично предыдущим рассуждениям, получаем

$$\lim_{q\to\infty}\frac{S_{xxx}}{S_x^3}\frac{S_x^4}{S_{xx}^2}=\lim_{q\to\infty}\frac{S_{xxx}/S_{xx}}{S_{xx}/S_x}=\lim_{q\to\infty}\frac{\ln S_{xx}}{\ln S_x}=const.$$

Здесь, как и в других аналогичных случаях, случай $\lim_{q\to\infty}\ln S_{xx}=const$ разбирается элементарно. Перепишем интеграл I_2 с учётом этих замечаний:

$$I_2=\frac{S_\gamma e^{-S}}{S_x}\left[1+\frac{S_{x\gamma}}{S_\gamma S_x}+\left(\frac{S_{x\gamma}}{S_\gamma S_x}\right)^2-\frac{S_{xx}-\frac{S_{xx\gamma}}{S_\gamma}+\frac{S_{x\gamma}^2}{S_\gamma^2}}{S_x^2}-\frac{3S_{xx}S_{x\gamma}}{S_x^3S_\gamma}+\right.$$

$$\left.+\frac{3S_{xx}^2-S_{xxx}S_x}{S_x^4}+o\left(\frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2S_\gamma^2}\right)\right].$$

Теперь найдём I_2/I_1. Легко видеть, что

$$\frac{I_2}{I_1}=S_\gamma\left[1+\frac{S_{x\gamma}}{S_\gamma S_x}+\frac{S_{xx\gamma}}{S_\gamma S_x^2}-\frac{3S_{xx}S_{x\gamma}}{S_x^3S_\gamma}+o\left(\frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2S_\gamma^2}\right)\right]. \tag{2.21}$$

Таким образом, первый член (2.14) равен

$$B_1=t(k_n)\left(\frac{I_2}{I_1}-S_\gamma-\frac{S_{x\gamma}}{S_x}\right)=t(k_n)\left(\frac{S_{xx\gamma}}{S_x^2}-\frac{3S_{xx}S_{x\gamma}}{S_x^3}+o\left(\frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2S_\gamma}\right)\right).$$

Перейдём к вычислению второго члена разложения (2.14). Из доказательства леммы 2.5 следует, что при $q \to +\infty$ для интеграла $F(q) = \int\limits_q^{+\infty} \exp(-S(x))dx$ верно асимптотическое разложение $F(q) = \exp(-S(q))\left(c_0 + c_1 + o(c_1)\right)$, где $c_0 = \frac{1}{S'(x)}\big|_{x=q}$, а $c_1 = \frac{1}{S'(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\right)\big|_{x=q}$. Аналогично (2.17) и (2.20) получаем, что $\lim\limits_{q\to\infty}\frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_x S_{\gamma\gamma}} = 0$ и что $\frac{S_{xx}}{S_x^2} = O\left(\frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_x S_{\gamma\gamma}}\right)$ при $q \to \infty$. Заметим ещё, что $\frac{S_{xx\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}S_x^2} = o\left(\frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}S_x}\right)$ при $q \to \infty$, поскольку

$$\lim_{q\to\infty}\frac{\frac{S_{xx\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}S_x^2}}{\frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}S_x}} = \lim_{q\to\infty}\frac{S_{xx\gamma\gamma}}{S_{x\gamma\gamma}S_x} = \lim_{q\to\infty}\frac{S_{xx\gamma\gamma}/S_{x\gamma\gamma}}{S_x} = \lim_{q\to\infty}\frac{\ln S_{x\gamma\gamma}}{S} = 0.$$

Тогда асимптотическое разложение интеграла $I_3 = \int\limits_q^{\infty} S_{\gamma\gamma}\exp(-S)dx$ выглядит следующим образом:

$$I_3 = \frac{S_{\gamma\gamma}e^{-S}}{S_x}\left[1 + \frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}S_x} - \frac{S_{xx}}{S_x^2} + O\left(\frac{S_{x\gamma\gamma}^2}{S_x^2 S_{\gamma\gamma}^2}\right)\right],$$

Отсюда легко получить второй член разложения (2.14). Он равен

$$B_2 = \frac{1}{2}t^2(k_n)\left(\frac{I_3}{I_1} - S_{\gamma\gamma} - \frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_x} + \frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2}\right) = \frac{1}{2}t^2(k_n)\left(\frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2} + O\left(\frac{S_{x\gamma\gamma}^2}{S_x^2 S_{\gamma\gamma}}\right)\right).$$

Третий член разложения (2.14), опираясь на вычисление второго члена, можно оценить следующим образом (следует также напомнить, что $\widetilde{t}(k_n, q) = \widehat{t}(k_n))$:

$$B_3 = \frac{1}{6}(t(k_n))^3\left(\frac{\int\limits_q^{\infty} S_{\gamma\gamma\gamma}(x, \gamma + \widetilde{t}(k_n, x))\exp(-S)dx}{\int\limits_q^{\infty}\exp(-S)dx} - S_{\gamma\gamma\gamma}(q, \gamma + \widehat{t}(k_n)) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{S''_{x\gamma}(x,\gamma)}{S'_x(x,\gamma)}\right)_{\gamma\gamma}\Bigg|_{q,\gamma+\bar{t}(k_n)}\right) = \frac{1}{6}(t(k_n))^3\left(\left(\frac{S_{x\gamma\gamma\gamma}}{S_x}\right)\Bigg|_{q,\gamma+\widehat{t}(k_n)} -\right.$$

$$
- \left(\left(\frac{S_{x\gamma\gamma\gamma}}{S_x} - 3\frac{S_{x\gamma\gamma}S_{x\gamma}}{S_x^2} + 2\frac{S_{x\gamma}^3}{S_x^3} \right) \Bigg|_{q,\gamma+\bar{t}(k_n)} \right) (1+o(1)). \tag{2.22}
$$

Выберем пока что

$$
t(k_n) = \frac{u}{\sqrt{k_n}} \frac{S_x}{S_{x\gamma}},
$$

где u — некая константа. Заметим, что по теореме о наследовании сходимости и лемме 2.6,

$$
\frac{S_x(q,\gamma)}{S_{x\gamma}(q,\gamma)} - \frac{S_x(a_{n/k_n},\gamma)}{S_{x\gamma}(a_{n/k_n},\gamma)} \xrightarrow{P} 0.
$$

Вернёмся к первому члену разложения (2.14) и рассмотрим его асимптотику при $q \to \infty$ и выбранном $t(k_n)$:

$$
B_1 = t(k_n) \left(\frac{S_{xx\gamma}}{S_x^2} - \frac{3S_{xx}S_{x\gamma}}{S_x^3} \right) (1+o(1)) = \frac{u}{\sqrt{k_n}} \left(\frac{S_{xx\gamma}}{S_x S_{x\gamma}} - \frac{3S_{xx}}{S_x^2} \right) (1+o(1)).
$$

Из (2.19) следует, что $\frac{S_{xx}}{S_x^2} = O(S^{-1})$ при $q \to \infty$. Докажем, что $\frac{S_{xx\gamma}}{S_x S_{x\gamma}} = O(S^{-1})$ при $q \to \infty$. По правилу Лопиталя и условиям регулярности,

$$
\lim_{q\to\infty} \frac{S_{xx\gamma}S}{S_x S_{x\gamma}} = \lim_{q\to\infty} \frac{S_{xx\gamma}/S_{x\gamma}}{S_x/S} = \lim_{q\to\infty} \frac{\ln S_{x\gamma}}{\ln S} = const, \tag{2.23}
$$

откуда следует требуемое. Таким образом, $k_n B_1 = \sqrt{k_n} O(S^{-1})$ при $q \to \infty$. По теореме о наследовании сходимости и лемме 2.6, $S(X_{(n-k_n)},\gamma) - S(a_{n/k_n},\gamma) \xrightarrow{P} 0$, а по четвертому условию регулярности, $\lim\limits_{a_{n/k_n}\to\infty} \frac{\ln S_x(a_{n/k_n},\gamma)}{S(a_{n/k_n})} = 0$. Как упоминалось в доказательстве леммы 2.6, $\frac{\exp(-S(a_{n/k_n},\gamma))}{S_x(a_{n/k_n},\gamma)} = \frac{k_n}{n}$, возьмём логарифм от обеих частей равенства. С учётом предыдущих замечаний, получаем, что

$$
\frac{S(X_{(n-k_n)},\gamma)}{\ln \frac{n}{k_n}} \xrightarrow{P} 1. \tag{2.24}
$$

Поскольку, по условию (2.4), $\sqrt{k_n} = o(\ln \frac{n}{k_n})$, то $k_n B_1 \xrightarrow{P} 0$. Далее, легко видеть, что $k_n B_2 \xrightarrow{P} \frac{u^2}{2}$. Рассмотрим третий член разложения (2.14) - докажем, что $k_n B_3 \xrightarrow{P} 0$. Прежде всего, заметим, что $\frac{S_{x\gamma\gamma\gamma}}{S_x} = R_1(S)$,

$\frac{S_{x\gamma\gamma}S_{x\gamma}}{S_x^2} = R_2(S)$ и $\frac{S_{x\gamma}}{S_x} = R_3(S)$, где $R_1(S)$, $R_2(S)$ и $R_3(S)$ - некие медленно меняющиеся функции (см., например, [4]). Действительно, из правила Лопиталя и условий регулярности следует, что для всех $\gamma > 0$

$$\lim_{q\to\infty} \frac{S_{x\gamma\gamma\gamma}/S_{\gamma\gamma\gamma}}{S_x/S} = \lim_{q\to\infty} \frac{\ln S_{\gamma\gamma\gamma}}{\ln S} = 1,$$

а также

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\frac{S_{x\gamma\gamma}S_{x\gamma}}{S_{\gamma\gamma}S_\gamma}}{S_x^2/S^2} \lim_{q\to\infty} = \lim_{q\to\infty} \frac{\ln S_{\gamma\gamma} \ln S_\gamma}{(\ln S)^2} = 1$$

и

$$\lim_{q\to\infty} \frac{S_{x\gamma}/S_\gamma}{S_x/S} = \lim_{q\to\infty} \frac{\ln S_\gamma}{\ln S} = 1,$$

т.е. $\frac{S_{x\gamma\gamma\gamma}}{S_x} = O\left(\frac{S_{\gamma\gamma\gamma}}{S}\right)$, $\frac{S_{x\gamma\gamma}S_{x\gamma}}{S_x^2} = O\left(\frac{S_{\gamma\gamma}S_\gamma}{S^2}\right)$ и $\frac{S_{x\gamma}}{S_x} = O\left(\frac{S_\gamma}{S}\right)$ соответственно. Но по четвертому условию регулярности, $\frac{S_{\gamma\gamma\gamma}}{S}$, $\frac{S_{\gamma\gamma}S_\gamma}{S^2}$ и $\frac{S_\gamma}{S}$ являются медленно меняющимися функциями от S, что и требовалось. Далее, по теореме Лагранжа, θ, $\forall 0 < \theta \le t(k_n)$, найдутся такие $\widetilde{\theta}$, $0 < \widetilde{\theta} \le \theta$, и медленно меняющаяся функция $R(x)$, что

$$\left|\frac{S(q,\gamma)}{S(q,\gamma+\theta)}\right| = \left|\frac{S(q,\gamma+\theta) - \theta S_\gamma(q,\gamma+\widetilde{\theta})}{S(q,\gamma+\theta)}\right| \le$$

$$\le 1 + \theta \left|\frac{S_\gamma(q,\gamma+\widetilde{\theta})}{S(q,\gamma+\widetilde{\theta})}\right| \le 1 + \frac{1}{\sqrt{k_n}} R(S),$$

т.к. S - строго монотонная функция. Поскольку, из условия (2.4), $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{(\ln \frac{n}{k_n})^\varepsilon} = 1$ для некоторого ε, $0 < \varepsilon < 2$, а также, как замечалось ранее, $\frac{S(X_{(n-k_n)},\gamma)}{\ln \frac{n}{k_n}} \xrightarrow{P} 1$, то $\frac{S(q,\gamma)}{S(q,\gamma+\theta)} \xrightarrow{P} 1$, значит, для любой медленно меняющейся функции $R(x)$ и любой последовательности $\theta(k_n)$ такой, что $0 \le \theta(k_n) \le t(k_n)$, $\frac{R(S(q,\gamma+\theta(k_n)))}{R(S(q,\gamma))} \xrightarrow{P} 1$. Отсюда, $k_n B_3 = \frac{1}{\sqrt{k_n}} R(S(q,\gamma)) \xrightarrow{P} 0$, что и требовалось. Таким образом,

$$k_n EY_1 \xrightarrow{P} \frac{u^2}{2}. \tag{2.25}$$

Далее, условная дисперсия $DY_1 = EY_1^2 - (EY_1)^2$. Заметим, что поскольку $k_n EY_1 \xrightarrow{P} u^2/2$ при $n \to \infty$, то $k_n (EY_1)^2 \xrightarrow{P} 0$ при $n \to \infty$. Вычислим EY_1^2 :

$$EY_1^2 = \frac{\int\limits_q^\infty ([S(x,\gamma+t(k_n)) - S(x,\gamma)] - [S(q,\gamma+t(k_n)) - S(q,\gamma)] -}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx}$$

$$\frac{-[\ln S_x^{'}(q,\gamma+t(k_n)) - \ln S_x^{'}(q,\gamma)])^2 \exp(-S(x,\gamma))dx}{} =$$

$$= \frac{\int\limits_q^\infty [S(x,\gamma+t(k_n)) - S(x,\gamma)]^2 \exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx} -$$

$$-2\frac{\int\limits_q^\infty [S(x,\gamma+t(k_n)) - S(x,\gamma)] \exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx} \cdot$$

$$\cdot \Big([S(q,\gamma+t(k_n)) - S(q,\gamma)] - [\ln S_x^{'}(q,\gamma+t(k_n)) - \ln S_x^{'}(q,\gamma)]\Big) +$$

$$+ \Big([S(q,\gamma+t(k_n)) - S(q,\gamma)] - [\ln S_x^{'}(q,\gamma+t(k_n)) - \ln S_x^{'}(q,\gamma)]\Big)^2. \quad (2.26)$$

Пользуясь разложением (2.12), представим последнее выражение в виде многочлена по степеням $t(k_n)$. Коэффициенты при нулевой и первой степенях $t(k_n)$, очевидно, равны нулю, рассмотрим коэффициент при $(t(k_n))^2$, из вида которого можно будет судить о поведении всего выражения. Аналогично (2.21),

$$\frac{\int\limits_q^\infty S_\gamma^2 \exp(-S)dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S)dx} =$$

$$= S_\gamma^2 \left[1 + 2\frac{S_{x\gamma}}{S_\gamma S_x} + 2\frac{S_{xx\gamma}}{S_\gamma S_x^2} + 2\frac{S_{x\gamma}^2}{S_\gamma^2 S_x^2} - \frac{6 S_{xx} S_{x\gamma}}{S_x^3 S_\gamma} + o\left(\frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2 S_\gamma^2}\right)\right].$$

Пользуясь (2.19) и (2.23), получаем, что коэффициент при $(t(k_n))^2$ равен:

$$a_2 = \frac{\int\limits_q^\infty S_\gamma^2 \exp(-S)dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S)dx} - 2\frac{\int\limits_q^\infty S_\gamma \exp(-S)dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S)dx}\left(S_\gamma + \frac{S_{x\gamma}}{S_x}\right) + \left(S_\gamma + \frac{S_{x\gamma}}{S_x}\right)^2 =$$

$$= \frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2}\left(1 - 2\frac{S_{xx\gamma}}{S_{x\gamma}S_x} + 6\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right) + o\left(\frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2}\right) = \frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2}(1 + o(1)).$$

Аналогично, коэффициент при $(t(k_n))^3$ равняется $a_3 = \frac{S_{x\gamma}S_{x\gamma\gamma}}{S_x^2}(1+o(1))$. Но $a_3 = R(S)a_2$, поскольку, по правилу Лопиталя и условиям регулярности,

$$\lim_{q\to\infty}\frac{S_{x\gamma}/S_\gamma}{S_{x\gamma\gamma}/S_{\gamma\gamma}} = \lim_{q\to\infty}\frac{\ln S_\gamma}{\ln S_{\gamma\gamma}} = 1, \tag{2.27}$$

поэтому $\frac{a_3(t(k_n))^3}{a_2(t(k_n))^2} \xrightarrow{P} 0$. Аналогичные рассуждения верны и для остальных членов разложения (2.26). Таким образом, $EY_1^2 = (t(k_n))^2\frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2}(1 + o(1))$ и

$$k_n DY_1 \xrightarrow{P} u^2. \tag{2.28}$$

Проверим теперь условие Ляпунова (2.11). Легко видеть, что $E(Y_1 - EY_1)^4 = EY_1^4 - 4EY_1EY_1^3 + 6EY_1^2(EY_1)^2 - 3(EY_1)^4$. Вычисление EY_1^3 и EY_1^4 проводится аналогично вычислению EY_1^2, откуда находим, что $EY_1^3 = (t(k_n))^3\frac{S_{x\gamma}^3}{S_x^3}(1 + o(1))$ и $EY_1^4 = (t(k_n))^4\frac{S_{x\gamma}^4}{S_x^4}(1 + o(1))$. Пользуясь полученными выше значениями первого и второго моментов, получаем $E(Y_1 - EY_1)^4 = (t(k_n))^4\frac{S_{x\gamma}^4}{S_x^4}(1 + o(1))$. Таким образом,

$$\frac{1}{k_n(DY_1)^2}E(Y_1 - EY_1)^4 = \frac{(t(k_n))^4\frac{S_{x\gamma}^4}{S_x^4}}{k_n(t(k_n))^4\frac{S_{x\gamma}^4}{S_x^4}}(1 + o(1)) = \frac{1}{k_n}(1 + o(1)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

т.е. условие Ляпунова (2.11) выполнено, значит, верно (2.10). Поскольку, из леммы 2.6, $X_{(n-k_n)} - a_{n/k_n} \xrightarrow{P} 0$, то из (2.25), (2.28) и теоремы о наследовании сходимости следует

$$A_1A_2 \xrightarrow{d} \exp\left(-N\left(\frac{u^2}{2}, u^2\right)\right).$$

Рассмотрим третий член разложения (2.9) A_3. Легко видеть, что

$$\ln A_3 = k_n \left(\frac{S_{xx}(q,\gamma+t(k_n))}{S_x^2(q,\gamma+t(k_n))} - \frac{S_{xx}(q,\gamma)}{S_x^2(q,\gamma)} \right) (1+o(1)),$$

где для некоторого $\theta(k_n)$, $0 \le \theta(k_n) \le t(k_n)$ выполнено

$$\frac{S_{xx}(q,\gamma+t(k_n))}{S_x^2(q,\gamma+t(k_n))} - \frac{S_{xx}(q,\gamma)}{S_x^2(q,\gamma)} =$$

$$= t(k_n) \left(\frac{S_{xx\gamma}(q,\gamma+\theta(k_n))}{S_x^2(q,\gamma+\theta(k_n))} - 2\frac{S_{xx}(q,\gamma+\theta(k_n))S_{x\gamma}(q,\gamma+\theta(k_n))}{S_x^3(q,\gamma+\theta(k_n))} \right).$$

Рассмотрим поведение выражений $\frac{S_{xx\gamma}}{S_x^2}$ и $\frac{S_{xx}S_{x\gamma}}{S_x^3}$ при $q \to \infty$. По правилу Лопиталя и условиям регулярности,

$$\lim_{q\to\infty} \frac{S_{xx}S_{x\gamma}S^2}{S_x^3 S_\gamma} = \lim_{q\to\infty} \frac{\frac{S_{xx}S_{x\gamma}}{S_x S_\gamma}}{S_x^2/S^2} = \lim_{q\to\infty} \frac{\ln S_x \ln S_\gamma}{(\ln S)^2} = const,$$

т.е. $\frac{S_{xx}S_{x\gamma}}{S_x^3} = O\left(\frac{S_\gamma}{S^2}\right) = \frac{R(S)}{S}$, где $R(x)$ - некая медленно меняющаяся функция, а также (поскольку выше было установлено, что $\lim\limits_{q\to\infty} \frac{\ln S_{x\gamma}}{\ln S} = const > 0$)

$$\lim_{q\to\infty} \frac{S_{xx\gamma}}{S_x^2} \frac{S_x^3}{S_{xx}S_{x\gamma}} = \lim_{q\to\infty} \frac{S_{xx}/S_x}{S_{xx\gamma}/S_{x\gamma}} = \lim_{q\to\infty} \frac{\ln S_x}{\ln S_{x\gamma}} = const,$$

т.е. $\frac{S_{xx\gamma}}{S_x^2} = O\left(\frac{S_{xx}S_{x\gamma}}{S_x^3}\right) = \frac{R'(S)}{S}$, где $R'(x)$ - медленно меняющаяся функция. С учётом предыдущих замечаний и условия теоремы (2.4), отсюда следует, что $\ln A_3 = \sqrt{k_n}\frac{\overline{R}(S)}{S} \xrightarrow{P} 0$, где $\overline{R}(x)$ - медленно меняющаяся, и

$$A_3 \xrightarrow{P} 1,$$

значит, по лемме Слуцкого,

$$R_n(u) \xrightarrow{d} \exp\left(-N\left(\frac{u^2}{2}, u^2\right)\right).$$

Теорема 2.1 доказана.

2.4 Доказательство теоремы 2.2

Доказательство теоремы 2.2 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.1. Выписываем с помощью леммы 2.4 отношение правдоподобий:

$$R_n(t) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{k_n-1} \exp[-S(X_{(n-i)}, \gamma + t(k_n)) + S(X_{(n-i)}, \gamma)]}{\left(\int\limits_{X_{(n-k_n)}}^{+\infty} \exp[-S(x,\gamma)]dx\right)^{-k_n} \cdot \left(\int\limits_{X_{(n-k_n)}}^{+\infty} \exp[-S(x,\gamma + t(k_n))]dx\right)^{k_n}}.$$

Так как рассматриваемое нами семейство плотностей удовлетворяет условиям леммы 2.5, то для отношения правдоподобий при $X_{(n-k_n)} = q$ верно разложение (2.9). Как и ранее, рассмотрим случайные величины $\{Y_i\}_{i=1}^{k_n}$, вариационный ряд которых следующий:

$$Y_{(k_n-i)} = [S(X_{(n-i)}, \gamma + t(k_n)) - S(X_{(n-i)}, \gamma)] -$$

$$-[S(X_{(n-k_n)}, \gamma + t(k_n)) - S(X_{(n-k_n)}, \gamma)],$$

где $i = 0, \ldots, k_n - 1$, которые являются независимыми при условии $X_{(n-k_n)} = q$ из представления Реньи, а также являются одинаково распределёнными. Легко видеть, что $\ln A_1 = -\sum\limits_{i=1}^{k_n} Y_i$. Далее,

$$\ln A_2 = k_n \ln S_x(q, \gamma + t(k_n)) - k_n \ln S_x(q, \gamma).$$

Из правила Лопиталя и условия регулярности 4), для всех γ, для которых $S(x,\gamma)$ удовлетворяет условиям регулярности 1)-5), верно

$$\lim_{q\to\infty} \frac{S_{xx}(q,\gamma)}{(S_x(q,\gamma))^2} = \lim_{q\to\infty} \frac{\frac{S_{xx}(q,\gamma)}{S_x(q,\gamma)}}{S_x(q,\gamma)} = \lim_{q\to\infty} \frac{\ln S_x(q,\gamma)}{S(q,\gamma)} = 0,$$

поэтому для $\ln A_3$ верно

$$\ln A_3 = k_n \left(\frac{S_{xx}(q, \gamma + t(k_n))}{(S_x(q, \gamma + t(k_n)))^2} - \frac{S_{xx}(q,\gamma)}{(S_x(q,\gamma))^2} \right) (1 + o(1)).$$

Обозначим

$$G(q) = (\ln S_x(q, \gamma + t(k_n)) - \ln S_x(q, \gamma)) +$$

$$+\left(\frac{S_{xx}(q,\gamma+t(k_n))}{(S_x(q,\gamma+t(k_n)))^2}-\frac{S_{xx}(q,\gamma)}{(S_x(q,\gamma))^2}\right),$$

$$H(q)=\sqrt{k_n}t(k_n)\left(\frac{\int\limits_q^\infty S_\gamma(x,\gamma)\exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx}-S_\gamma(q,\gamma)-\right.$$

$$\left.-\frac{S_{x\gamma}(q,\gamma)}{S_x(q,\gamma)}-\frac{S_{xx\gamma}(q,\gamma)}{(S_x(q,\gamma))^2}+2\frac{S_{xx}(q,\gamma)S_{x\gamma}(q,\gamma)}{(S_x(q,\gamma))^3}\right).$$

Рассмотрим случайные величины $\{Z_i\}_{i=1}^{k_n}$, где $Z_i = Y_i - G(q) - \frac{1}{\sqrt{k_n}}H(q)$. Легко видеть, что эти случайные величины являются одинаково распределёнными и независимыми при $X_{(n-k_n)} = q$. Заметим также, что

$$\sum_{i=1}^{k_n} Z_i = -\ln R_n(t)+\sqrt{k_n}H(q).$$

По центральной предельной теореме для схемы серий, имеем

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n} Z_j - k_n EZ_1}{\sqrt{k_n DZ_1}} \xrightarrow[k_n\to\infty]{d} N(0,1), \tag{2.29}$$

при условии, что $X_{(n-k_n)} = q$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n DZ_1 = const > 0$, а также выполнении условия Линдеберга, вместо которого мы, как и ранее, проверим условие Ляпунова, которое принимает следующий вид: при $k_n \to \infty$

$$\frac{1}{k_n(DZ_1)^2}E(Z_1-EZ_1)^4\to 0. \tag{2.30}$$

Найдём EZ_1 и DZ_1 при условии $X_{(n-k_n)} = q$. Прежде всего заметим, что

$$\frac{S_{xx}(q,\gamma+t(k_n))}{(S_x(q,\gamma+t(k_n)))^2}-\frac{S_{xx}(q,\gamma)}{(S_x(q,\gamma))^2}=t(k_n)\left(\frac{S_{xx\gamma}(q,\gamma)}{(S_x(q,\gamma))^2}-\right.$$

$$\left.-2\frac{S_{xx}(q,\gamma)S_{x\gamma}(q,\gamma)}{(S_x(q,\gamma))^3}\right)+\frac{(t(k_n))^2}{2}\left(\frac{S_{xx}(x,\gamma)}{(S_x(x,\gamma)^2}\right)''_{\gamma\gamma}\Bigg|_{(x,\gamma)=(q,\gamma+\theta(k_n))}, \tag{2.31}$$

где $|\theta(k_n)| \le |t(k_n)|$ и знаки их совпадают. Используя это разложение, а также разложения (2.12) и (2.13), получаем:

$$EZ_1 = \frac{\int\limits_q^\infty [S(x,\gamma+t(k_n)) - S(x,\gamma)]\exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx} -$$

$$-[S(q,\gamma+t(k_n)) - S(q,\gamma)] - G(q) - \frac{1}{\sqrt{k_n}}H(q) =$$

$$= t(k_n)\left(\frac{\int\limits_q^\infty S_\gamma(x,\gamma)\exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx} - S_\gamma(q,\gamma) - \frac{S_{x\gamma}(q,\gamma)}{S_x(q,\gamma)} -\right.$$

$$\left.-\frac{S_{xx\gamma}(q,\gamma)}{(S_x(q,\gamma))^2} + 2\frac{S_{xx}(q,\gamma)S_{x\gamma}(q,\gamma)}{(S_x(q,\gamma))^3} - \frac{H(q)}{\sqrt{k_n}t(k_n)}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}(t(k_n))^2\left(\frac{\int\limits_q^\infty S_{\gamma\gamma}(x,\gamma)\exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx} - S_{\gamma\gamma}(q,\gamma) - \frac{S_{x\gamma\gamma}(q,\gamma)}{S_x(q,\gamma)} +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{S_{x\gamma}(q,\gamma)}{S_x(q,\gamma)}\right)^2 - \left(\frac{S_{xx}(x,\gamma)}{S_x(x,\gamma)^2}\right)''_{\gamma\gamma}\Bigg|_{(q,\gamma+\theta(k_n))}\right) +$$

$$+\frac{1}{6}(t(k_n))^3\left(\frac{\int\limits_q^\infty S_{\gamma\gamma\gamma}(x,\gamma+\widetilde{t}(k_n,x))\exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx} -\right.$$

$$\left.-S_{\gamma\gamma\gamma}(q,\gamma+\widehat{t}(k_n)) - \left(\frac{S_{x\gamma}(x,\gamma)}{S_x(x,\gamma)}\right)''_{\gamma\gamma}\Bigg|_{q,\gamma+\bar{t}(k_n)}\right), \qquad (2.32)$$

где $\widehat{t}(k_n) = \widetilde{t}(k_n, q)$ из единственности разложения Тейлора. Как и ранее, у функции $S(x,\gamma)$ и всех её частных производных будем опускать аргументы в том случае, если они равняются q и γ соответственно. Из определения функции $\widetilde{H}(x)$ легко видеть, что член при $t(k_n)$ в разложении (2.32) равен

0 тождественно. Рассмотрим член при $(t(k_n))^2$ в разложении (2.32). Как и ранее, воспользуемся тем фактом, что при $q \to +\infty$ для интеграла $F(q) = \int\limits_q^\infty \exp(-S(x))dx$ верно асимптотическое разложение

$$F(q) = \exp(-S(q))\left(c_0 + c_1 + o(c_1)\right),$$

где $c_0 = \frac{1}{S'(x)}\,|_{x=q}$, а $c_1 = \frac{1}{S'(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S'(x)}\right)|_{x=q}$. С помощью этого факта получаем следующие разложения:

$$I_1 = \int\limits_q^\infty \exp(-S)dx = \frac{e^{-S}}{S_x}\left(1 - \frac{S_{xx}}{S_x^2} + o\left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)\right),$$

$$I_3 = \int\limits_q^\infty S_{\gamma\gamma}\exp(-S)dx =$$

$$= \frac{e^{-S}}{S_x - \frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}}}\left(1 - \frac{S_{xx} - \frac{S_{xx\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}} + \frac{S_{x\gamma\gamma}^2}{S_{\gamma\gamma}^2}}{\left(S_x - \frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}}\right)^2} + o\left(\frac{S_{xx} - \frac{S_{xx\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}} + \frac{S_{x\gamma\gamma}^2}{S_{\gamma\gamma}^2}}{\left(S_x - \frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}}\right)^2}\right)\right).$$

В условиях теоремы 2.2 $\frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_x S_{\gamma\gamma}} = O\left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)$ при $q \to +\infty$. Действительно, если S_{xx} не равно тождественно 0 в некой окрестности бесконечности, то по правилу Лопиталя и условиям регулярности 4') и 5') имеем:

$$\lim_{q\to\infty}\frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_x S_{\gamma\gamma}}\frac{S_x^2}{S_{xx}} = \lim_{q\to\infty}\frac{S_{x\gamma\gamma}/S_{\gamma\gamma}}{S_{xx}/S_x} = \lim_{q\to\infty}\frac{\ln S_{\gamma\gamma}}{\ln S_x} = const.$$

Далее, из доказательства леммы 2.5 в условиях теоремы 2.2 имеем $\lim\limits_{q\to\infty}\frac{S_{xx}}{S_x^2} = 0$, поэтому $\lim\limits_{q\to\infty}\frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_x S_{\gamma\gamma}} = 0$ и верно следующее разложение:

$$\frac{1}{1 - \frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_x S_{\gamma\gamma}}} = 1 + \frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_x S_{\gamma\gamma}} + o\left(\frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_x S_{\gamma\gamma}}\right).$$

Докажем теперь, что $\frac{S_{xx\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}S_x^2} = o\left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)$ при $q \to +\infty$. Действительно, по правилу Лопиталя и условиям теоремы 2.2,

$$\lim_{q\to\infty}\frac{\frac{S_{xx\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}S_x^2}}{\frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}S_x}} = \lim_{q\to\infty}\frac{S_{xx\gamma\gamma}}{S_{x\gamma\gamma}S_x} = \lim_{q\to\infty}\frac{S_{xx\gamma\gamma}/S_{x\gamma\gamma}}{S_x} = \lim_{q\to\infty}\frac{\ln S_{x\gamma\gamma}}{S} = 0,$$

отсюда $\frac{S_{xx\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}S_x^2} = o\left(\frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_x S_{\gamma\gamma}}\right) = o\left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)$, что и требовалось. Таким образом, $\frac{S_{xx\gamma\gamma}}{S_{\gamma\gamma}} - \frac{S_{x\gamma\gamma}^2}{S_{\gamma\gamma}^2} = o(S_{xx})$ при $q \to +\infty$. Учитывая приведённые замечания, а также лемму 2.5, можно заключить, что

$$\frac{I_3}{I_1} = S_{\gamma\gamma}\left(1 + \frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_x S_{\gamma\gamma}} + o\left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)\right).$$

Следовательно, член при $(t(k_n))^2$ в разложении (2.32) имеет вид:

$$\frac{(t(k_n))^2}{2}\left(\frac{I_3}{I_1} - S_{\gamma\gamma} - \frac{S_{x\gamma\gamma}}{S_x} + \frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2} - \left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)_{\gamma\gamma}\Bigg|_{(q,\gamma+\theta(k_n))}\right) =$$

$$= \frac{(t(k_n))^2}{2}\left(\frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2} - \left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)_{\gamma\gamma}\Bigg|_{(q,\gamma+\theta(k_n))} + o\left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)\right).$$

Далее, третий член разложения (2.32) (обозначим его B_3), оценим аналогично (2.22):

$$B_3 = \frac{1}{6}(t(k_n))^3\left(\left(\frac{S_{x\gamma\gamma\gamma}}{S_x}\right)\Bigg|_{q,\gamma+\widehat{t}(k_n)} -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{S_{x\gamma\gamma\gamma}}{S_x} - 3\frac{S_{x\gamma\gamma}S_{x\gamma}}{S_x^2} + 2\frac{S_{x\gamma}^3}{S_x^3}\right)\Bigg|_{q,\gamma+\bar{t}(k_n)}\right)(1+o(1)).$$

Выберем

$$t(k_n) = \frac{u}{\sqrt{k_n}}\frac{S_x}{S_{x\gamma}},$$

где u - некая константа. Заметим, что результат леммы 2.6 остаётся в силе, т.е. $X_{(n-k_n)} - a_{n/k_n} \xrightarrow{P} 0$ при $n \to +\infty$. Действительно, из условий регулярности, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln S_x(x,\gamma)}{S(x,\gamma)} = 0$, и т.к. из доказательства леммы 2.6 следует, что $S(a_{n/k_n},\gamma) + \ln S_x(a_{n/k_n},\gamma) = \ln\frac{n}{k_n}(1+o(1))$, то $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} S_x(a_{n/k_n},\gamma)\left(\frac{n}{k_n}\right)^{\varepsilon} = +\infty,$$

значит, из первого условия регулярности и условия (2.5) получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{k_n}S_x(a_{n/k_n},\gamma) = +\infty$, откуда и следует требуемое. Значит, по теореме о наследовании сходимости, остаётся верным следующее

$$\frac{S_x(q,\gamma)}{S_{x\gamma}(q,\gamma)} - \frac{S_x(a_{n/k_n},\gamma)}{S_{x\gamma}(a_{n/k_n},\gamma)} \xrightarrow{P} 0.$$

Найдём теперь асимптотику $k_n E Z_1$ при $q \to \infty$ и выбранном $t(k_n)$. Рассмотрим второй член разложения (2.32):

$$k_n B_2 = \frac{u^2}{2}\frac{S_x^2}{S_{x\gamma}^2}\left(\frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2} - \left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)_{\gamma\gamma}\Bigg|_{(q,\gamma+\theta(k_n))} + o\left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)\right).$$

Легко видеть, что

$$\left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)_{\gamma\gamma} = \frac{S_{xx\gamma\gamma}}{S_x^2} - 4\frac{S_{xx\gamma}S_{x\gamma}}{S_x^3} - 2\frac{S_{xx}S_{x\gamma\gamma}}{S_x^3} + 6\frac{S_{xx}S_{x\gamma}^2}{S_x^4}.$$

Заметим прежде всего, что для всех γ, для которых определена $S(x,\gamma)$ выполнено $\frac{S_{xx\gamma\gamma}}{S_x^2} = O\left(\frac{S_{xx}S_{x\gamma\gamma}}{S_x^3}\right)$ и $\frac{S_{xx\gamma}S_{x\gamma}}{S_x^3} = O\left(\frac{S_{xx}S_{x\gamma}^2}{S_x^4}\right)$ при $q \to \infty$. Действительно, из условий регулярности и правила Лопиталя,

$$\lim_{q\to\infty}\frac{S_{xx\gamma\gamma}}{S_x^2}\frac{S_x^3}{S_{xx}S_{x\gamma\gamma}} = \lim_{q\to\infty}\frac{S_{xx\gamma\gamma}/S_{x\gamma\gamma}}{S_{xx}/S_x} = \lim_{q\to\infty}\frac{\ln S_{x\gamma\gamma}}{\ln S_x} = const \text{ и}$$

$$\lim_{q\to\infty}\frac{S_{xx\gamma}S_{x\gamma}}{S_x^3}\frac{S_x^4}{S_{xx}S_{x\gamma}^2} = \lim_{q\to\infty}\frac{S_{xx\gamma}/S_{x\gamma}}{S_{xx}/S_x} = \lim_{q\to\infty}\frac{\ln S_{x\gamma}}{\ln S_x} = const,$$

откуда и следует требуемое. Далее,

$$\lim_{q\to\infty}\frac{S_{xx}S_{x\gamma\gamma}}{S_x^3}\frac{S_x^4}{S_{xx}S_{x\gamma}^2} = \lim_{q\to\infty}\frac{S_{x\gamma\gamma}S_x}{S_{x\gamma}^2} = \lim_{q\to\infty}\frac{S_{x\gamma\gamma}/S_{\gamma\gamma}}{S_{x\gamma}/S_\gamma}\lim_{q\to\infty}\frac{S_x/S}{S_{x\gamma}/S_\gamma}\lim_{q\to\infty}\frac{S_{\gamma\gamma}S}{S_\gamma^2} =$$

$$= \lim_{q\to\infty}\frac{\ln S_{\gamma\gamma}}{\ln S_\gamma}\lim_{q\to\infty}\frac{\ln S}{\ln S_\gamma}\lim_{q\to\infty}\frac{S_{\gamma\gamma}S}{S_\gamma^2} = \lim_{q\to\infty}\frac{S_{\gamma\gamma}S}{S_\gamma^2},$$

откуда и из условия регулярности 4 видим, что $\frac{S_{xx}S_{x\gamma\gamma}}{S_x^3} = \frac{S_{xx}S_{x\gamma}^2}{S_x^4}R(S)$, где $R(x)$ - некая медленно меняющаяся функция. Итак, мы установили, что

$$\left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)_{\gamma\gamma}\Bigg|_{(q,\gamma+\theta(k_n))} = \frac{S_{xx}S_{x\gamma}^2}{S_x^4}R(S)\Bigg|_{(q,\gamma+\theta(k_n))}.$$

Как уже упоминалось, $\frac{S_{x\gamma}}{S_x} = R(S)$, а $R(S(q,\gamma)) = R_1(S(q,\gamma+\theta(k_n)))$ из-за непрерывности функции $S(x,\gamma)$ по γ, где $R(x)$ и $R_1(x)$ - медленно меняющиеся. Поэтому

$$k_n(t(k_n))^2 \left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)_{\gamma\gamma}\Bigg|_{(q,\gamma+\theta(k_n))} = \frac{S_{xx}}{S_x^2}R_2(S)\Bigg|_{(q,\gamma+\theta(k_n))},$$

где $R_2(x)$ - медленно меняющаяся функция. Но, из условий регулярности, существует $\delta > 0$ такой, что $\lim\limits_{q\to+\infty} \frac{\ln S_x}{S^{1-\delta}} = 0$, откуда следует, что $\frac{S_{xx}}{S_x^2} = o(S^{-\delta})$, т.к.

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\ln S_x}{S^{1-\delta}} = \lim_{q\to\infty} \frac{S_{xx}/S_x}{S_x S^{-\delta}} = \lim_{q\to\infty} \frac{S_{xx}}{S_x^2} S^{\delta} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$k_n(t(k_n))^2 \left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)_{\gamma\gamma}\Bigg|_{(q,\gamma+\theta(k_n))} \xrightarrow{P} 0$$

при $k_n \to \infty$ и, значит,

$$k_n B_2 \xrightarrow{P} \frac{u^2}{2}.$$

Доказательство того факта, что $k_n B_3 \xrightarrow{P} 0$, где B_3 - третий член в разложении (2.32), полностью совпадает с доказательством аналогичного утверждения в разделе 2.3. Отсюда делаем вывод, что

$$k_n E Z_1 \xrightarrow{P} \frac{u^2}{2}. \qquad (2.33)$$

Далее, условная дисперсия $DZ_1 = EZ_1^2 - (EZ_1)^2$. Как и ранее, заметим, что поскольку $k_n EZ_1 \xrightarrow{P} u^2/2$ при $n \to \infty$, то $k_n(EZ_1)^2 \xrightarrow{P} 0$ при $n \to \infty$. Обозначим

$$J(q) = G(q) + \frac{1}{\sqrt{k_n}} H(q) + [S(q,\gamma+t(k_n)) - S(q,\gamma)],$$

т.е. получаем, что $Z_{(k_n-i)} = [S(X_{(n-i)},\gamma+t(k_n)) - S(X_{(n-i)},\gamma)] - J(X_{(n-k_n)})$, где $i = 0,\dots,k_n-1$. Вычислим EZ_1^2 :

$$EZ_1^2=\frac{\int\limits_q^\infty \left([S(x,\gamma+t(k_n))-S(x,\gamma)]-J\right)^2\exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx}=$$

$$=\frac{\int\limits_q^\infty [S(x,\gamma+t(k_n))-S(x,\gamma)]^2\exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx}-$$

$$-2\frac{\int\limits_q^\infty [S(x,\gamma+t(k_n))-S(x,\gamma)]\exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx}\cdot J(q)+J^2(q). \qquad (2.34)$$

Прежде всего заметим, что

$$(t(k_n))^3\frac{\int\limits_q^\infty S_{\gamma\gamma\gamma}(x,\gamma+\widetilde{t}(k_n,x))\exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx}=$$

$$=(t(k_n))^3S_{\gamma\gamma\gamma}(q,\gamma+\widehat{t}(k_n))(1+o(1))=\frac{1}{(k_n)^{3/2}}S(q,\gamma+\widehat{t}(k_n))R(S),$$

где, напомним, $|\widehat{t}(k_n)|\leq|t(k_n)|$ и знаки их совпадают, а $R(x)$ - некая медленно меняющаяся функция. Из (2.24), $\frac{S(X_{(n-k_n)},\gamma)}{\ln\frac{n}{k_n}}\xrightarrow{P}1$. Отсюда, из условия (2.5) и из непрерывности функции $S(x,\gamma)$ по второму аргументу получаем, что $\frac{1}{\sqrt{k_n}}S(q,\gamma+\widehat{t}(k_n))R(S)\xrightarrow{P}0$, т.е.

$$(t(k_n))^3\frac{\int\limits_q^\infty S_{\gamma\gamma\gamma}(x,\gamma+\widetilde{t}(k_n,x))\exp(-S(x,\gamma))dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S(x,\gamma))dx}=o\left(\frac{1}{k_n}\right),$$

где $o\left(\frac{1}{k_n}\right)$ понимается в смысле стремления при $n\to\infty$ по вероятности. Отсюда, а также из разложений (2.12), (2.13) и (2.31) и предыдущих рассуждений, вытекает:

$$J(q) = t(k_n)\frac{\int\limits_q^\infty S_\gamma \exp(-S)dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S)dx} + \frac{t^2(k_n)}{2}\left(\frac{\int\limits_q^\infty S_{\gamma\gamma} \exp(-S)dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S)dx} + \frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2}\right) + o\left(\frac{1}{k_n}\right).$$

Пользуясь последним разложением и разложением (2.12), представим EZ_1^2 в виде многочлена по степеням $t(k_n)$. Легко видеть, что коэффициенты при нулевой и первой степенях $t(k_n)$ равны нулю, рассмотрим коэффициент при $(t(k_n))^2$, из вида которого можно будет судить о поведении всего выражения. Аналогично (2.21), учитывая, что в условиях теоремы 2.2 $\frac{S_{x\gamma}}{S_x S_\gamma} = O\left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)$, получаем

$$\frac{\int\limits_q^\infty S_\gamma^2 \exp(-S)dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S)dx} =$$

$$= S_\gamma^2\left[1 + 2\frac{S_{x\gamma}}{S_\gamma S_x} + 2\frac{S_{xx\gamma}}{S_\gamma S_x^2} + 2\frac{S_{x\gamma}^2}{S_\gamma^2 S_x^2} - \frac{6 S_{xx} S_{x\gamma}}{S_x^3 S_\gamma} + o\left(\frac{S_{xx}^2}{S_x^4}\right)\right].$$

Значит, коэффициент при $(t(k_n))^2$ (обозначим его a_2) равен:

$$a_2 = \frac{\int\limits_q^\infty S_\gamma^2 \exp(-S)dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S)dx} - \left(\frac{\int\limits_q^\infty S_\gamma \exp(-S)dx}{\int\limits_q^\infty \exp(-S)dx}\right)^2 = \frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2} - 2\frac{S_{x\gamma} S_{xx\gamma}}{S_x^3} - \frac{S_{xx\gamma}^2}{S_x^4}.$$

Покажем, что $\frac{S_{xx\gamma}}{S_x^2} = o\left(\frac{S_{x\gamma}}{S_x}\right)$ при $q \to \infty$. Действительно, из условий регулярности и правила Лопиталя следует, что

$$\lim_{q\to\infty} \frac{S_{xx\gamma}}{S_x^2}\frac{S_x}{S_{x\gamma}} = \lim_{q\to\infty} \frac{S_{xx\gamma}/S_{x\gamma}}{S_x} = \lim_{q\to\infty} \frac{\ln S_{x\gamma}}{S} = 0, \qquad (2.35)$$

что и требовалось. Таким образом, получаем, что

$$a_2 = \frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2}(1 + o(1)).$$

Аналогично, коэффициент при $(t(k_n))^3$ равняется $a_3 = \frac{S_{x\gamma}S_{x\gamma\gamma}}{S_x^2}(1+o(1))$. Но из (2.27) $a_3 = R(S)a_2$, поэтому $\frac{a_3(t(k_n))^3}{a_2(t(k_n))^2} = \frac{R_1(S)}{\sqrt{k_n}} \xrightarrow{P} 0$, где $R(S)$ и $R_1(S)$ - некие медленно меняющиеся функции. Аналогичные рассуждения верны и для остальных членов разложения (2.34). Таким образом, $EZ_1^2 = (t(k_n))^2\frac{S_{x\gamma}^2}{S_x^2}(1+o(1))$ и, следовательно,

$$k_n D Z_1 \xrightarrow{P} u^2. \tag{2.36}$$

Далее, проверка условия Ляпунова (2.30) проводится совершенно аналогично тому, как проверялось условие (2.11). Таким образом, верно (2.29). Поскольку, из леммы 2.6, $X_{(n-k_n)} - a_{n/k_n} \xrightarrow{P} 0$, то из (2.33), (2.36) и теоремы о наследовании сходимости следует

$$R_n(u)\exp(-\sqrt{k_n}H(q)) \xrightarrow{d} \exp\left(-N\left(\frac{u^2}{2}, u^2\right)\right).$$

Рассмотрим теперь поведение выражения $\exp(\sqrt{k_n}H(q))$ при $n \to \infty$. Как было установлено в лемме 2.6,

$$\sqrt{k_n}S_x(a_{n/k_n},\gamma)(X_{(n-k_n)} - a_{n/k_n}) \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Обозначим $\widetilde{H}(x) = \frac{H(x)}{S_x(x,\gamma)}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{k_n}S_x(a_{n/k_n},\gamma)}$, а также $\eta_n = \sqrt{k_n}S_x(a_{n/k_n},\gamma)(X_{(n-k_n)} - a_{n/k_n})$. Тогда, по теореме непрерывности (см., например, теорему 1.5.3 из [41]), если существует конечный предел производной функции $\widetilde{H}(x)$ при $x \to \infty$, то

$$\frac{\widetilde{H}(a_{n/k_n} + b_n\eta_n) - \widetilde{H}(a_{n/k_n})}{b_n} \xrightarrow{d} \lim_{x\to+\infty} \widetilde{H}'(x)\cdot\eta,$$

где $\eta \sim N(0,1)$, иначе говоря,

$$\sqrt{k_n}\left(H(X_{(n-k_n)})\frac{S_x(a_{n/k_n},\gamma)}{S_x(X_{(n-k_n)},\gamma)} - H(a_{n/k_n})\right) \xrightarrow{d} \lim_{x\to+\infty}\frac{\partial\left(\frac{H(x)}{S_x(x,\gamma)}\right)}{\partial x}\cdot N(0,1), \tag{2.37}$$

где, особо отмечаем, функция $\frac{H(x)}{S_x(x,\gamma)}$ не зависит от k_n по определению функции $H(x)$. Найдём $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\partial\left(\frac{H(x)}{S_x(x,\gamma)}\right)}{\partial x}$. Из определения функции $H(x)$,

$$\widetilde{H}(x) = \frac{H(x)}{S_x(x,\gamma)} = \frac{u}{S_{x\gamma}(x,\gamma)} \left(\frac{\int\limits_x^\infty S_\gamma(y,\gamma)\exp(-S(y,\gamma))dy}{\int\limits_x^\infty \exp(-S(y,\gamma))dy} - \right.$$

$$\left. -S_\gamma(x,\gamma) - \frac{S_{x\gamma}(x,\gamma)}{S_x(x,\gamma)} - \frac{S_{xx\gamma}(x,\gamma)}{(S_x(x,\gamma))^2} + 2\frac{S_{xx}(x,\gamma)S_{x\gamma}(x,\gamma)}{(S_x(x,\gamma))^3} \right).$$

Обозначим

$$W(x,\gamma) = \frac{\int\limits_x^\infty S_\gamma(y,\gamma)\exp(-S(y,\gamma))dy}{\int\limits_x^\infty \exp(-S(y,\gamma))dy} - S_\gamma(x,\gamma) -$$

$$-\frac{S_{x\gamma}(x,\gamma)}{S_x(x,\gamma)} - \frac{S_{xx\gamma}(x,\gamma)}{(S_x(x,\gamma))^2} + 2\frac{S_{xx}(x,\gamma)S_{x\gamma}(x,\gamma)}{(S_x(x,\gamma))^3}.$$

Далее будем опускать аргументы у функций $S(x,\gamma)$, $W(x,\gamma)$ и их производных, если они равны x и γ соответственно. Из (2.21) и того факта, что в условиях теоремы 2.2 $\frac{S_{x\gamma}}{S_xS_\gamma} = O\left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right)$, получаем, что

$$W = -\frac{S_{xx}S_{x\gamma}}{S_x^3} + o\left(\frac{S_{xx}^2}{S_x^4}\right).$$

Итак,

$$\widetilde{H}'(x) = \frac{uW_x}{S_{x\gamma}} - \frac{uWS_{xx\gamma}}{(S_{x\gamma})^2}.$$

Найдём сначала асимптотику второго слагаемого в последнем равенстве:

$$\frac{uWS_{xx\gamma}}{(S_{x\gamma})^2} = -\frac{uS_{xx}}{S_x^2}\frac{S_{xx\gamma}}{S_xS_{x\gamma}} + o\left(\frac{S_{xx}^2}{S_x^4}\frac{S_{xx\gamma}}{(S_{x\gamma})^2}\right).$$

Как упоминалось ранее, в условиях теоремы 2.2 имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{S_{xx}}{S_x^2} = 0$, далее, из (2.35), $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{S_{xx\gamma}}{S_{x\gamma}S_x} = 0$. Т.е. для доказательства того факта, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{uWS_{xx\gamma}}{(S_{x\gamma})^2} = 0$, осталось показать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{S_{xx\gamma}}{(S_{x\gamma})^2} = 0$. Действительно, из условий регулярности и правила Лопиталя,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{S_{xx\gamma}}{(S_{x\gamma})^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{S_{xx\gamma}/S_{x\gamma}}{S_{x\gamma}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln S_{x\gamma}}{S_\gamma}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln S_{x\gamma}}{S_\gamma}=0,$$

что и требовалось. Найдём теперь асимптотику функции $\frac{uW_x}{S_{x\gamma}}$ при $x\to+\infty$. Нахождение общего вида функции W_x требует длительных вычислений, поэтому опустим их и запишем сразу ответ:

$$\frac{uW_x}{S_{x\gamma}}=-\frac{uS_{xx}}{S_x^2}+o\left(\frac{S_{xx}}{S_x^2}\right),$$

т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{uW_x}{S_{x\gamma}}=0$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to\infty}\widetilde{H}'(x)=0$ и, из (2.37),

$$\sqrt{k_n}\left(H(X_{(n-k_n)})\frac{S_x(a_{n/k_n},\gamma)}{S_x(X_{(n-k_n)},\gamma)}-H(a_{n/k_n})\right)\xrightarrow{d}0. \tag{2.38}$$

Далее, по упомянутой выше теореме непрерывности для функции $\frac{1}{S_x}$ ($b_n=\frac{1}{\sqrt{k_n}S_x(a_{n/k_n},\gamma)}$ и $\eta_n=\sqrt{k_n}S_x(a_{n/k_n},\gamma)(X_{(n-k_n)}-a_{n/k_n})$, как и ранее)

$$\frac{\frac{1}{S_x(a_{n/k_n}+b_n\eta_n,\gamma)}-\frac{1}{S_x(a_{n/k_n},\gamma)}}{b_n}\xrightarrow{d}\lim_{x\to\infty}\frac{S_{xx}}{S_x^2}N(0,1),$$

иначе говоря,

$$\sqrt{k_n}\left(\frac{S_x(a_{n/k_n},\gamma)}{S_x(X_{(n-k_n)},\gamma)}-1\right)\xrightarrow{d}0, \tag{2.39}$$

т.к. в условиях теоремы 2.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{S_{xx}}{S_x^2}=0$. Из (2.21) легко видеть, что

$$H(x)=-\frac{S_{xx}}{S_x^2}+o\left(\frac{S_{xx}^2}{S_x^4}\frac{S_x}{S_{x\gamma}}\right).$$

Поскольку, как устанавливалось выше, $\frac{S_x}{S_{x\gamma}}=R(S)$ при $x\to+\infty$, где $R(S)$ - некая медленно меняющаяся функция, а $\frac{S_{xx}}{S_x^2}=O(S^{-\delta})$ для некоторого δ, $0<\delta\le 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty}H(x)=0$. Отсюда и из (2.39) получаем

$$\sqrt{k_n}H(X_{(n-k_n)})\left(\frac{S_x(a_{n/k_n},\gamma)}{S_x(X_{(n-k_n)},\gamma)}-1\right)\xrightarrow{d}0.$$

Комбинируя этот результат и (2.38), находим

$$\sqrt{k_n}\left(H(X_{(n-k_n)})-H(a_{n/k_n})\right)\xrightarrow{d}0,$$

значит, по лемме Слуцкого,

$$\ln R_n(u) - \sqrt{k_n} H(a_{n/k_n}) \xrightarrow{d} \exp\left(-N\left(\frac{u^2}{2}, u^2\right)\right),$$

что и завершает доказательство теоремы 2.2. Теорема 2.2 доказана.

Список литературы

[1] Fisher R.A., Tippet L.H.C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **24** (1928), 180-190.

[2] Gnedenko B.V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.*, **44** (1943), 423-453.

[3] Leadbetter M.R, Lindgren G., Rootźen H. Extremes and related properties of random sequences and processes. *Springer Statistics Series.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer, (1983).

[4] Ferreira A., Haan L. de. Extreme value theory. An introduction. *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. N. Y.: Springer*, (2006).

[5] Gumbel E.J. Statistics of Extremes. *New York, Columbia Univ. Press*, (1965).

[6] Leadbetter M.R. On extreme values in stationary sequences. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **28** (1974), 289-303.

[7] Leadbetter M.R. Extremes and local dependence in stationary sequences. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **65** (1983), 291-306.

[8] Rozenblatt M. A central limit theorem and strong mixing condition. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, **42** (1956), 43-47.

[9] Loynes R.M. Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes. *Ann. Math. Statist.*, **36** (1965), 993—999.

[10] Watson G.S. Extreme values in samples from m-dependent stationary stochastic processes. *Ann. Math. Statist.*, **25** (1954), 798-800.

[11] Leadbetter M.R. Point processes generated by level crossings. *In: Stochastic point processes, Ed. P. A. W. Lewis.* New York: Wiley, (1973).

[12] Кузнецов Д.С. Предельные теоремы для максимума случайных величин. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ.*. **3** (2005), 6-9.

[13] Kudrov A.V., Piterbarg V. I. On maxima of partial samples in Gaussian sequences with pseudo-stationary trends. *Liet. matem. rink.*, **47(1)** (2007), 1-10.

[14] Hill B.M. A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statist.*, **3** (1975), 1163-1174.

[15] Haal P. On some simple estimates of an exponent of regular variation. *Journal of the Royal Statistical Society*, **B44**(1982), 37-42.

[16] Hausler E., Teugels J.L. On the asymptotic normality of Hill's estimator for the exponent or regular variation. *Ann. Statist.*, **13** (1985), 743-756.

[17] Dekkers A.L.M., de Haan L. On the estimation of the extreme-value index and large quantile estimation. *Ann. Statist.*, **17** (1989), 1795-1832.

[18] Hsing T. On tail index estimation using dependent data. *Ann. Statist.*, **19** (1991), 1547-1569.

[19] Pickands J. III. Statistical inference using order statistics. *Ann. Statist.*, **3** (1975), 119-131.

[20] Drees H., Ferreyra A., de Haan L. On maximum likelihood estimation of the extreme value index. *Ann. Appl. Probab.*, **14** (2003), 1179-1201.

[21] Cox D.R. Tests of separate families of hypotheses. *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium in Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley, University of California Press, (1961), 105–123.

[22] Atkinson A. A method for discriminating between models (with discussions), *J. R. Statist. Soc.* Ser. B **32** (1970), 323–353.

[23] Dyer A.R. Discrimination procedure for separate families of hypotheses, *J. Am. Statist. Assoc.*, **68** (1973),970–974.

[24] Bain L.J., Engelhardt M. Probability of correct selection of Weibull versus gamma based on likelihood ratio. *Commun. Stat.* Ser. A **9** (1980), 375–381.

[25] Dumonceaux R., Antle C.E. Discrimination between the log-normal and the Weibull distributions. *Technometrics*, **15 (4)** (1973), 923–926.

[26] Dumonceaux R., Antle C.E., Haas G. Likelihood ratio test for discrimination between two models with unknown location and scale parameters. *Technometrics*, **15 (1)** (1975), 19–27.

[27] Gupta R.D., Kundu D. Discriminating between Weibull and generalized exponential distributions. *Computational Statistics and Data Analysis*, **43 (2)** (2003), 179 – 196.

[28] Kundu D., Raqab M.Z. Discriminating Between the Generalized Rayleigh and Log-Normal Distribution. *Statistics*, **41 (6)** (2007), 505-515.

[29] Федорюк М.В. Метод перевала. М., (1977).

[30] Русас Дж. Контигуальность вероятностных мер. М.: Мир, (1975).

[31] Чибисов Д.М. Лекции по асимптотической теории ранговых критериев. *МИАН, Лекц. курсы НОЦ,* **14** (2009), 3–174.

[32] Le Cam L. On the assumptions used to prove asymptotic normality of maximum likelihood estimates. *Ann. Math. Stat.*, **41** (1970), 802-828.

[33] Mladenovic P., Piterbarg V. On asymptotic distribution of maxima of complete and incomplete samples from stationary sequences. *Stochast. Proc. and Appl.,* 2006. **116**. 1977–1991.

[34] Ольшанский К.А. Об экстремальном индексе прореженного процесса авторегрессии. *Вестн. Моск. ун-та, Сер. Матем. Механ.* **3** (2004). 17 - 23.

[35] Kallenberg O. Random measures. *N.Y.: Academic Press*, (1983).

[36] Billingsley P. Convergence of probability measures. N.Y.: Wiley, (1968).

[37] Боровков А.А. Математическая статистика. М.: Наука, (1984).

[38] Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Berlin: Springer, (1997).

[39] Antle C. E., Bain L. J. A Property of Maximum Likelihood Estimators of Location and Scale Parameters. SIAM Review, (1969). 11 (2). 251-253.

[40] Gupta R.D., Kundu D., Manglick A. Probability of correct selection of Gamma versus GE or Weibull versus GE based on likelihood ratio test. Technical Report, The University of New Brunswick, Saint John, (2001).

[41] Dey A. K., Kundu D. Discriminating between the Weibull and log-normal distributions for Type-II censored data. Statistics (2012). 46 (4). 197-214.

[42] Fraga Alves I., Haan L. de, Neves C. A test procedure for detecting super-heavy tails. Journal of Statistical Planning and Inference (2009). **139**. 213 – 227.

[43] Родионов И.В. Пуассоновская предельная теорема для высоких экстремумов временного ряда с сезонной составляющей и строго монотонным трендом. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ.* **1** (2012). 12–17.

[44] Родионов И.В. О свойствах оценки Хилла экстремального индекса для выборок с загрязнениями. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ.* **1** (2014). 3–6.

[45] Родионов И.В. Асимптотическое разложение Лапласа вероятностей редких событий для одного класса распределений из области максимального притяжения Гумбеля. Современные проблемы математики и механики, Математика, (2013). **8(3)**, 108-115.

[46] Родионов И.В. О различении близких гипотез о распределениях вейбулловского и логнормального типов по первым членам вариационного ряда. Депонировано в ВИНИТИ РАН 03.12.2013, №349-В2013 (Указатель ВИНИТИ "Депонированные научные работы №2, 2014)