

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Пелевина Дарья Андреевна

**Изучение деформаций поверхности
магнитной жидкости в магнитном поле,
вызывающих направленное движение**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Налетова Вера Арсеньевна

Научный консультант

к. ф.-м. н., в.н.с.

Турков Владимир Андреевич

Содержание

Список основных обозначений	4
Введение	6
Обзор литературы	11
Глава 1. Деформация поверхности магнитной жидкости, содержащей цилиндр из намагничивающегося материала, в однородном магнитном поле	21
1.1. Описание экспериментальной установки и результатов экспериментального исследования поведения магнитной жидкости, содержащей цилиндр из намагничивающегося материала, в однородном магнитном поле	21
1.2. Постановка задачи о форме поверхности магнитной жидкости, содержащей цилиндр из намагничивающегося материала, в однородном магнитном поле	35
1.3. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов	39
1.4. Сравнение теоретических результатов с экспериментами, проведенными в ТУ Ильменау, Германия	43
1.5. Влияние полимерной пленки на форму поверхности магнитной жидкости .	47
1.5.1. Постоянный объем магнитной жидкости	47
1.5.2. Переменный объем магнитной жидкости	49
Глава 2. Деформация поверхности магнитной жидкости, содержащей шар из намагничивающегося материала, в однородном магнитном поле . . .	53
2.1. Постановка задачи о форме поверхности магнитной жидкости, содержащей шар из намагничивающегося материала, в однородном вертикальном магнитном поле	53
2.2. Сравнение численных расчетов формы поверхности магнитной жидкости с экспериментами, проведенными в Белорусском национальном техническом университете	57
Глава 3. Течение и деформация поверхности тонкого слоя магнитной жидкости в бегущем магнитном поле	63
3.1. Постановка задачи. Предположения и упрощения.	63

3.2. Решение задачи. Влияние параметров задачи на средний расход жидкости.	68
Глава 4. Двухслойное течение и деформация поверхности раздела жидкостей с разной намагниченностью в бегущем магнитном поле	75
4.1. Постановка задачи. Вывод уравнения для формы поверхности раздела двух жидкостей.	75
4.2. Решение задачи. Влияние параметров задачи на средние расходы жидкостей.	80
Заключение	88
Литература	90
Приложение 1: Программа для управления магнитными полями в эксперименте .	102
Приложение 2: Программа для расчета форм поверхности вокруг цилиндрического концентратора	103
Приложение 3: Программа для расчета форм поверхности вокруг сферического концентратора	118

Список основных обозначений

$i = f, s, b$	– индекс для параметров магнитной жидкости, немагнитной жидкости и тела, соответственно
ρ	– плотность
η	– коэффициент динамической вязкости
ν	– коэффициент кинематической вязкости
p	– давление
χ	– магнитная восприимчивость
χ_0	– начальная магнитная восприимчивость
M	– намагниченность
M	– модуль намагниченности
M_{fs}	– намагниченность насыщения магнитной жидкости
H	– напряженность магнитного поля
H	– модуль напряженности магнитного поля
H_∞	– приложенное магнитное поле
m	– модуль магнитного момента ферромагнитных частиц
n	– концентрация ферромагнитных частиц
V	– объем
R	– радиус
k_b	– константа Больцмана
T	– температура
t	– время
σ	– коэффициент поверхностного натяжения
θ	– угол смачивания
h	– высота
g	– ускорение свободного падения
L	– длина
x, y, z	– декартова система координат
l, θ	– натуральная параметризация
a	– скорость изменения магнитного поля
α	– угол наклона магнитного поля
$\zeta = \frac{mH}{kT}$	– параметр Ланжевена

$\Lambda(\zeta) = \text{cth}(\zeta) - \frac{1}{\zeta}$	– функция Ланжевена
K	– кривизна поверхности
\mathbf{v}	– скорость жидкости
u, w	– проекции скорости на оси координат
\mathbf{n}	– вектор нормали
k	– волновое число приложенного поля
ω	– частота приложенного поля
τ_{ij}	– компоненты тензора вязких напряжений
e_{ij}	– компоненты тензора скоростей деформации
Q_i	– объемный расход жидкости, в расчете на единицу толщины канала

Введение

Исследование возможности дистанционного бесконтактного управления и создания движения с помощью магнитного взаимодействия представляет большой интерес. Однако изучение долгое время область магнитоуправляемых объектов была ограничена телами из намагничивающихся металлов. Сравнительно недавно, около 50 лет назад, были созданы магнитные жидкости - коллоидные растворы мелких (диаметром порядка 10^{-6} см) магнитных однодоменных частиц, покрытых слоем поверхностно-активного вещества (ПАВ) в жидкости-носителе. Частицы в магнитной жидкости находятся в броуновском движении. Адсорбированный на поверхности слой молекул ПАВ препятствует взаимной агломерации частиц благодаря кулоновским силам отталкивания. Это все приводит к устойчивости этой коллоидной системы к расслаиванию. В качестве жидкости-носителя используются различного типа углеводороды, вода, парамагнитные растворы солей и другие жидкости. Современные магнитные жидкости стабильны по своим свойствам, устойчивы по отношению к расслоению и соединяют в себе текучесть жидкости и способность к намагничиванию. Намагниченность насыщения магнитных жидкостей достигает 100 Гс. Благодаря уникальным свойствам магнитные жидкости быстро нашли широкое применение в технике, биологии, медицине и при разработке новых технологий.

Для описания таких сред была разработана феррогидродинамика - гидродинамика жидких намагничивающихся сред в присутствии магнитного поля. Сила, действующая на намагничивающиеся среды в магнитном поле, связана с неоднородностью магнитного поля и неоднородностью или разрывами магнитных характеристик среды. Как правило, феррогидродинамика рассматривает неполяризующиеся (в электрическом поле), непроводящие и незаряженные среды, так что силы, связанные с электрической поляризацией, сила Лоренца и кулоновская сила отсутствуют. Диссипация энергии в таких средах, в отличие от магнитной гидродинамики или электрогидродинамики проводящих сред, не связана с джоулевым нагревом и определяется необратимыми процессами релаксации намагниченности. Предметом исследования феррогидродинамики являются также растворы парамагнитных солей редкоземельных элементов; суспензии и эмульсии намагничивающихся материалов с существенно большим чем 3–15 нм размером диспергированных частиц и капель (например, ферролаки в жидком состоянии, суспензии железных частиц микронных размеров в масле (магнитореологические суспензии), которые применяются в зажимных устройствах

и тормозах, и т.д.); магнитные композиционные жидкости – суспензии микронных частиц из магнитомягких материалов в магнитной жидкости и т.д.

Актуальность работы. Моделирование и математическое описание движения и деформации намагничивающихся сред в магнитных полях является необходимым этапом в разработке новых способов создания направленного движения. В данной работе исследуется деформация поверхности объемов магнитной жидкости в неоднородных магнитных полях и возможность использования этой деформации для создания направленного движения, например, для создания движителей, насосов, дозаторов и их составных частей. Особенность таких устройств заключается в том, что они управляются магнитным полем, созданным внешними по отношению к насосу источниками. Такие устройства не содержат внутри себя моторов и твердых движущихся деталей, поэтому они могут найти свое применение в медицине и биологии, где безопасность таких объектов для структуры биологических жидкостей и для живых организмов очень важна.

Цель диссертационной работы Основной целью работы является исследование возможности создания направленного движения различных жидкостей с помощью деформации свободной поверхности магнитной жидкости в переменных во времени магнитных полях. Для этого были поставлены следующие задачи:

1. Экспериментально исследовать деформацию формы свободной поверхности магнитной жидкости, содержащей в себе тело из хорошо намагничивающегося материала (концентратор поля), в однородном приложенном магнитном поле.

2. Теоретически рассчитать возможные равновесные формы объема магнитной жидкости, содержащей концентратор поля, с учетом поверхностного натяжения, гравитации и нелинейной зависимости намагниченности магнитной жидкости от магнитного поля в присутствии и в отсутствии полимерной пленки над поверхностью магнитной жидкости в приложенном однородном магнитном поле.

3. Теоретически исследовать плоское течение слоя тяжелой вязкой несжимаемой магнитной жидкости, а также течение двух тонких слоев жидкости, нижняя из которых магнитная жидкость, а верхняя не намагничивается, в бегущем неоднородном магнитном поле. Исследовать влияние параметров задачи на средние расходы течения жидкостей.

Научная новизна.

1. Выполнен численный расчет различных равновесных форм поверхности магнитной жидкости, содержащей тела различной формы (цилиндр или сфера) из хорошо на-

магничивающихся материалов (концентраторы магнитного поля), в однородном приложенном магнитном поле с учетом силы тяжести, поверхностного натяжения и зависимости намагниченности магнитной жидкости от напряженности магнитного поля. Показана возможность скачкообразного изменения формы поверхности при постепенном изменении приложенного магнитного поля, связанная с наличием множества решений при фиксированном значении приложенного поля. Предсказан гистерезис формы поверхности при циклическом увеличении и уменьшении приложенного поля.

2. Проведены экспериментальные исследования поведения магнитной жидкости, окружающей цилиндрическое тело из намагничивающегося материала в однородном приложенном магнитном поле. Экспериментально обнаружены скачкообразные изменения формы магнитной жидкости и гистерезис этой формы в циклически увеличивающемся и уменьшающемся магнитном поле. Показано хорошее совпадение экспериментальных и теоретических результатов.

3. Теоретически исследовано влияние упругой пленки, разделяющей магнитную жидкость и окружающую среду, на форму поверхности постоянного и переменного объема магнитной жидкости, содержащей цилиндр из намагничивающегося материала, в однородном приложенном поле. В случае переменного объема магнитной жидкости показано, что реализуется только односвязная форма магнитной жидкости как с пленкой, так и без пленки. При этом не возникают скачкообразные и гистерезисные явления, связанные с неоднозначностью решения. Показано, что при увеличении приложенного магнитного поля наступает момент, когда пленка прилипает к стенке сосуда.

4. Аналитически решены задачи о течении тонкого слоя магнитной жидкости со свободной поверхностью и о течении двух тонких слоев жидкости, нижняя из которых — магнитная жидкость, а верхняя, более легкая, не намагничивается, в бегущем периодическом неоднородном магнитном поле. При решении учтена сила тяжести, поверхностное натяжение и влияние магнитного поля на намагниченность магнитной жидкости. Аналитически вычислены форма поверхности магнитной жидкости, скорости, давления и средние расходы жидкостей.

5. Получены немонотонные зависимости средних расходов от частоты и волнового числа бегущего магнитного поля, а также от толщины слоя магнитной жидкости. Показано, что существуют оптимальные значения этих параметров, при которых средний расход достигает своего максимума.

Достоверность результатов. Достоверность результатов обеспечена использованием строгих аналитических методов исследования: проведено упрощение известных математических моделей и использован метод разложения по малому параметру; трудоемкие аналитические расчеты, например, суммирование рядов Фурье, проводятся с использованием пакета программ Maple. Численные расчеты проведены с использованием надежных и точных методов (метод Рунге-Кутты второго порядка). При проведении экспериментов используются проверенные методы измерения (тарировка приборов, видео и фоторегистрация). Теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментами автора и известными экспериментальными результатами других авторов.

Научная и практическая ценность работы. Теоретическое и экспериментальное исследование деформации поверхности магнитной жидкости, приведенные в данной работе, являются новыми, перспективными и полезными при конструировании новых двигателей, насосов и дозаторов на основе магнитной жидкости. Аналитические формулы для средних расходов в двухслойном течении могут быть использованы при конструировании и оптимизации работы перистальтического насоса на основе волнообразного изменения поверхности магнитной жидкости в бегущих магнитных полях. Научная ценность работы заключается в теоретическом исследовании и экспериментальном обнаружении возможности скачкообразных изменений формы поверхности магнитной жидкости в переменных магнитных полях, связанной с существованием нескольких устойчивых положений равновесия магнитной жидкости в одном и том же магнитном поле.

Личный вклад автора. Автором в программном пакете LabView разработан виртуальный прибор для управления токами в экспериментальной установке, спроектирована гидродинамическая ячейка, проведены экспериментальные исследования и обработка результатов измерений. Автором разработаны теоретические методики исследования, написаны программы на языке C++ для определения формы поверхности, проведены численные и аналитические расчеты, сформулированы результаты исследования. Основные выводы и положения диссертационной работы сформулированы лично автором.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В соответствии с областью исследования специальности 01.02.05 - "Механика жидкости, газа и плазмы" диссертация включает в себя теоретическое и экспериментальное изучение поведения магнитной жидкости в неоднородных магнитных полях. Полученные результаты соответствуют пунктам 16 и 17 паспорта специальности.

Апробация работы. Результаты работы были представлены автором на 5 международных конференциях: 11–ая и 13–ая Международная конференция по магнитным жидкостям (Кошице, 2007 и Нью Дели, 2013), Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2009” и “Ломоносов-2012” (Москва, 2009 и 2012), Humboldt Colloquium “The Role of Fundamental Sciences in Society” (Moscow, 2012); и на 6 российских конференциях: XIV школа-семинар “Современные проблемы аэрогидродинамики” (Сочи, 2006), Научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция механики (Москва, 2007, 2008 и 2010), Конференция-конкурс молодых ученых НИИ Механики МГУ (Москва, 2008, 2010 и 2013), IV Всероссийская научная конференция “Физико-химические и прикладные проблемы магнитных дисперсных наносистем” (Ставрополь, 2013).

Результаты диссертации обсуждались и были одобрены на семинаре “Механика сплошной среды” под руководством академика РАН А.Г. Куликовского, профессора В.П. Карликова и члена-корреспондента РАН О.Э. Мельника.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 36 печатных работ, из них 8 статей опубликованы в рецензируемых журналах из списка ВАК, 10 статей в сборниках трудов международных и российских конференций и конференции-конкурса молодых ученых НИИ Механики МГУ и 18 в сборниках тезисов докладов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 4 глав, заключения, библиографии и трех приложений. Общий объем диссертации 131 страница, 49 рисунков, 9 таблиц и список литературы из 114 наименований.

Обзор литературы

Модели магнитной жидкости. Моделирование и математическое описание движения и деформации намагничивающихся сред в магнитных полях является необходимым этапом в разработке новых принципов создания направленного движения. В [1, 2] построена общая модель среды, взаимодействующей с электромагнитным полем с учетом ее намагничивания и поляризации. Работы [3, 4] посвящены исследованиям в области электрогидродинамики - раздел механики сплошной среды, в котором изучаются течения сплошной среды, содержащей объемный заряд в электромагнитных полях. В [3] дается обзор основных положений электрогидродинамики (ЭГД). Обсуждается основная система ЭГД-уравнений и граничных условий. Рассматриваются условия, при которых справедливы различные ЭГД-модели. Работа [4] посвящена изучению газодинамических течений с одноименно заряженными частицами. Исследованы общие закономерности пространственных ЭГД течений. Проанализированы новые направления в электрогазодинамике: ЭГД турбулентность, нестационарные эффекты, новые методы диагностики ЭГД течений.

В [5] впервые предложена система уравнений феррогидродинамики для однофазной равновесно намагничивающейся магнитной жидкости. В [6] рассмотрена модель магнитной жидкости с учетом вращения магнитных частиц и релаксации намагниченности. В [7] изложен обзор различных математических моделей магнитной жидкости: описаны модели гомогенной сжимаемой и несжимаемой магнитной жидкости с равновесной намагниченностью, приведены модели многофазной магнитной жидкости с учетом обмена импульсом между фазами, а также модель магнитной жидкости с учетом вращения частиц. В [8] исследовано влияние магнитного поля на поверхностное натяжение магнитной жидкости. Построена модель, в которой тензор поверхностного натяжения зависит от магнитного поля.

Конечные объемы жидкости в однородных магнитных полях. Конечные объемы магнитной жидкости могут менять свою форму в однородных магнитных полях. Наличие свободной поверхности в свою очередь искажает приложенное однородное магнитное поле. Поле около свободной поверхности становится неоднородным. Равновесие конечных объемов магнитной жидкости в постоянном однородном магнитном поле рассмотрены в работах [9–16].

Равновесные конфигурации невесомой капли магнитной жидкости, намагничиваю-

щейся по линейному закону, в однородном поле рассчитывались численно в [9]. Показано, что капля вытягивается вдоль поля и при достаточно больших полях в середине капли образуется перешеек. Удлинение капли магнитной жидкости, окруженной немагнитной средой, исследовано экспериментально и даны теоретические оценки скачка давления на поверхности капли для жидкости намагничивающейся по линейному закону [10]. В [10] приведены зависимости длины капли от напряженности магнитного поля при различных начальных размерах. Также исследовано вытягивание капли немагнитной жидкости в магнитной жидкости вдоль однородного приложенного поля. В [11, 12] теоретически и экспериментально рассмотрено поведение формы капли магнитной жидкости в однородном магнитном поле в случае гидроневесомости. Теоретически получено, что при некоторых магнитных полях существуют две локально устойчивых формы эллипсоидальной капли. Экспериментально показано, что при квазистатическом возрастании поля, при некотором критическом значении поля удлинение капли скачком увеличивается. При уменьшении магнитного поля удлинение капли скачком уменьшается при меньшем значении поля. Таким образом, впервые экспериментально обнаружен гистерезис формы капли в циклически меняющемся магнитном поле и существование двух устойчивых форм капли в некотором диапазоне полей. В [13] экспериментально исследовано поведение капли магнитной жидкости, находящейся на твердой горизонтальной поверхности, в вертикальном однородном магнитном поле. Показано, что для любого значения магнитного поля существует предельный объем, при котором капля делится на две. Также экспериментально рассмотрена неустойчивость горизонтального плоского слоя магнитной жидкости. В [14], как и в [13], экспериментально исследовано поведение капель различных магнитных жидкостей на горизонтальной подложке в переменном вертикальном однородном магнитном поле. Исследованы высоты пиков тяжелых капель магнитных жидкостей в циклически возрастающем и убывающем магнитном поле. Получен гистерезис высоты и формы капли. Рассмотрено поведение невесомой капли магнитной жидкости на подложке в переменном во времени однородном магнитном поле, которое, вызывает периодические растяжения капли и приводит к ее резонансному возбуждению и распаду. В [15] найдены аналитические решения уравнений, описывающих статическую поверхность невесомой магнитной жидкости на горизонтальной плоскости и между двумя взаимно перпендикулярными плоскостями в однородном вертикальном внешнем магнитном поле, в предположении однородности магнитного поля внутри жидкости.

Различные задачи гидродинамики магнитной жидкости со свободной поверхностью рассматриваются в монографии [16]. В частности, описаны равновесные формы и устойчивость малых объемов (капель) магнитной жидкости в однородных и неоднородных магнитных полях.

Магнитная жидкость в неоднородных магнитных полях. Неоднородное приложенное магнитное поле не только меняет форму конечного объема магнитной жидкости, но и может перемешать его как целое. Форма объема магнитной жидкости в неоднородных магнитных полях рассмотрена, например, в [17–21]. В [17] решена задача о равновесии капли магнитной жидкости, окруженной обычной жидкостью, в слабо неоднородном магнитном поле катушки с током. Вычислена магнитная сила, действующая на каплю. Разработана методика экспериментального определения начальной магнитной восприимчивости и поверхностного натяжения магнитной жидкости по форме и положению капли такой жидкости в таком неоднородном поле. В [18] теоретически и экспериментально исследованы колебания капли идеальной магнитной жидкости в немагнитной жидкости в переменном слабо неоднородном магнитном поле катушки с током. Обнаружен резонанс формы капли.

В [19] рассчитаны формы свободной поверхности магнитной жидкости в неоднородных магнитных полях квадрупольной магнитной линзы, в поле полосы с током, в поле витка с током, а также свободная поверхность вращающейся магнитной жидкости в поле прямолинейного проводника. В [20] численно определяется положение равновесия капли магнитной жидкости, находящейся в состоянии насыщения, между горизонтальными плоскостями, под действием силы прямоугольного магнита, расположенного у одной из плоскостей, и немагнитной объемной силы, направленной вдоль плоскости. В [21] теоретически исследуется сила, действующая со стороны магнитной жидкости на горизонтальный проводник с током или постоянный магнит, расположенный над ее бесконечной свободной поверхностью. Экспериментально получены значения величины силы, действующей на магнит, подвешенный на пружине около поверхности жидкости. Найдена критическая высота при которой магнит срывается в жидкость. Эксперименты хорошо согласуются с теоретическими результатами.

Магнитная жидкость в поле линейного проводника с током. Особое место занимают задачи о нахождении осесимметричных форм магнитной жидкости в поле проводника с током (сила тяжести параллельна оси проводника или скомпенсирована). В таких

задачах магнитное поле является касательным к осесимметричной поверхности магнитной жидкости. Поверхность жидкости не искажает приложенного поля. Поведение объема магнитной жидкости в поле вертикального проводника с током исследовано в [14, 22–32]. В [14] теоретически и экспериментально рассмотрен вопрос о форме невесомой капли вокруг цилиндрического проводника с током. Получено, что при увеличении тока радиус капли уменьшается, а ее длина увеличивается. В [22] проведено сравнение теоретически и экспериментально полученных осесимметричных форм ограниченного объема магнитной жидкости, расположенного у основания вертикального цилиндрического проводника с током в месте пересечения его с горизонтальной плоской поверхностью. В [23] показано, что экспериментальная поверхность магнитной жидкости около вертикального проводника с током хорошо описывается теоретически при использовании классической теории Ланжевена для зависимости намагниченности магнитной жидкости от приложенного поля. Задача решена теоретически с учетом силы тяжести и без учета поверхностного натяжения. В [24] приведена вариационная формулировка задачи равновесия тяжелой магнитной жидкости, обладающей поверхностным натяжением. Исследуются осесимметричные формы равновесия в азимутальном магнитном поле. Численно найдена форма свободной поверхности магнитной жидкости около вертикального проводника с током в поле сил тяжести с учетом поверхностного натяжения. В [25] теоретически рассмотрена свободная осесимметричная поверхность магнитной жидкости, находящейся в ограниченном цилиндрическом сосуде в поле коаксиально расположенного вертикального проводника с током, с учетом поверхностного натяжения и силы тяжести в случае малых полей. В [26] исследуется поведение свободной поверхности безграничной магнитной жидкости около вертикального проводника с током с учетом силы тяжести и поверхностного натяжения. Теоретически предсказано и получено экспериментально скачкообразное изменение формы жидкости на проводнике. В [27] экспериментально и теоретически изучено поведение капли магнитной жидкости вокруг вертикального проводника с током в случае гидроневесомости. Теоретически показано и экспериментально обнаружено скачкообразное изменение формы капли на проводнике при квазистатическом достижении некоторого тока. В [28] теоретически исследовано поведение конечного объема магнитной жидкости между двумя соосными цилиндрами в магнитном поле проводника с током, находящегося на оси цилиндров в случае гидроневесомости. Показано, что существуют разрывы объема магнитной жидкости и возможен гистерезис формы. Рассмотрен случай малых магнитных полей. В [29] та-

кая задача рассмотрена для случая больших магнитных полей. В [30] получено решение этой задачи, пригодное для произвольных полей. Изучена форма капель на внутреннем и внешнем цилиндрах при уменьшении и увеличении тока в проводнике. В [31] теоретически исследована статика магнитной жидкости между двумя соосными цилиндрами в магнитном поле проводника с током, находящегося на оси цилиндров, и исследовано влияние углов смачивания на форму жидкости. Рассмотрены условия разрыва и восстановления магнитножидкостной перемычки. В [32] решена задача о статической форме поверхности капли магнитной жидкости около линейного проводника с током, расположенного на оси осесимметричной поверхности переменного сечения в случае гидроневесомости.

О возможности скачкообразных изменений формы магнитной жидкости и о гистерезисе ее формы. Как указано выше в некоторых конфигурациях магнитных полей могут существовать несколько статических форм поверхности магнитной жидкости при фиксированном значении тока, создающего это магнитное поле. Если такая ситуация реализуется, то это позволяет сделать вывод о возможных скачкообразных изменениях и гистерезисе формы поверхности магнитной жидкости при циклически меняющихся токах, создающих эти магнитные поля.

Скачкообразное и гистерезисное поведение объема магнитной жидкости в магнитных полях исследовано в [11, 14, 26, 27, 30–34].

В [32, 33] теоретически рассмотрена статика конечного объема магнитной жидкости между горизонтальными плоскостями в поле горизонтального линейного проводника, находящегося над верхней плоскостью. Показано, что в некотором диапазоне токов существуют несколько положений равновесия магнитной жидкости. Рассмотрены условия разрыва и восстановления магнитножидкостной перемычки. В [34] теоретически исследована форма свободной поверхности однородной, тяжелой магнитной жидкости в поле проводников с током и в поле постоянного магнита, и получено, что при постепенном увеличении и уменьшении тока в проводниках (постепенном приближении и удалении магнита), могут наблюдаться скачкообразные изменения формы поверхности.

Конечные объемы магнитной жидкости в однородном магнитном поле, в присутствии концентраторов магнитного поля. Статика поверхности магнитной жидкости около тел из хорошо намагничивающихся материалов, в однородном приложенном магнитном поле была исследована в небольшом числе работ. В [35] рассматривается плоская задача о форме свободной поверхности магнитной жидкости, находящейся в

состоянии насыщения, вблизи намагничивающегося металлического клина в поле внешнего однородного магнитного поля и сил тяжести. Проведен численный расчет формы свободной поверхности капли, удерживаемой магнитным полем на наклонной плоскости. Исследовано поведение свободной поверхности бесконечного объема магнитной жидкости около острия клина в возрастающем магнитном поле. Показано, что при некоторой критической величине поля происходит отрыв части магнитной жидкости с прилипанием его к острию клина. Представлены экспериментальные результаты по определению максимальной площади сечения капли, удерживаемой магнитным полем клина, и критической высоты подъема магнитной жидкости относительно уровня вне поля. Экспериментальные и теоретические результаты согласуются между собой.

В работе [36] получено аналитическое решение для формы поверхности магнитной жидкости, содержащей сферический концентратор магнитного поля, для малых значений параметра Ланжевена и в длинноволновом приближении.

В [37–40] экспериментально и теоретически исследована форма свободной поверхности магнитной жидкости вокруг намагничивающегося тела (сфера, цилиндр или пластина) в горизонтальном однородном магнитном поле. Рассмотрены различные объемы магнитной жидкости. При экспериментальном исследовании получено, что малое количество магнитной жидкости собирается в объемы у полюсов тела, затем, при увеличении магнитной жидкости два этих объема смыкаются на удалении от тела (на границе кюветы) и образуется один сплошной объем с двумя воздушными полостями, имеющими форму конических воронок, сужающихся ко дну кюветы. Теоретическое исследование проведено в безындукционном приближении, без учета поверхностного натяжения для случая, когда магнитная жидкость находится в состоянии насыщения. Также при аналитическом решении не учитывалось наличие стенок кюветы. В данных работах, в отличие от исследований, проведенных в диссертации, не обнаружено нескольких теоретических решений, соответствующих заданному объему и фиксированному значению магнитного поля, а также скачкообразных изменений формы в эксперименте.

Возможно управлять процессом закалки и проводить локально неоднородное охлаждение тел в магнитной жидкости, используя переменные магнитные поля. Возможно таким образом получать различную структуру и различную твердость на разных участках поверхности. Поэтому в [41–45] экспериментально исследовано охлаждение стальных тел различной формы в магнитной жидкости под действием постоянного однородного

магнитного поля.

В первых двух главах диссертации экспериментально и теоретически исследуется форма свободной поверхности тяжелой магнитной жидкости, содержащей в себе тело из хорошо намагничивающегося материала (цилиндр или сферу), в однородном приложенном магнитном поле, в более общем случае, чем в [36]: с учетом поверхностного натяжения, гравитации и нелинейной зависимости намагниченности магнитной жидкости от приложенного магнитного поля в присутствии и в отсутствии полимерной пленки над поверхностью магнитной жидкости. Найдены диапазоны значений внешнего магнитного поля, при которых существуют различные типы решений. Исследуется возможность скачкообразного и гистерезисного поведения форм магнитной жидкости в переменном магнитном поле. Результаты теоретических расчетов сравниваются со своими и с известными из литературы экспериментами. Результаты автора по этой теме изложены в работах [79–105]

Поведение слоя магнитной жидкости. Исследование поведения слоев магнитной жидкости на различных подложках во внешних магнитных полях представляет теоретический интерес и может найти применение во многих технических устройствах (насосах, клапанах, транспортировочных устройствах).

Устойчивость бесконечной плоской свободной поверхности магнитной жидкости в однородном поле. Под воздействием магнитного поля, направленного ортогонально к поверхности жидкости, поверхность жидкости становится неустойчивой и появляются упорядоченные пики ("цветок Розенцвейга"). Многие работы посвящены исследованию устойчивости магнитной жидкости со свободной поверхностью в постоянных однородных и неоднородных магнитных полях [5, 46–51, 53, 54]. В [5, 46] исследуется устойчивость свободной горизонтальной поверхности покоящейся магнитной жидкости в однородном постоянном магнитном поле. В [47] теоретически исследована устойчивость свободной поверхности покоящейся магнитной жидкости в перпендикулярном свободной поверхности магнитном поле относительно малых возмущений, являющихся суперпозицией трех плоских волн. В [48] с помощью принципа минимума энергии исследуются формы равновесия свободной поверхности магнитной жидкости в перпендикулярных магнитных полях больших критического. В [49] исследуется развитие длинных волн на поверхности раздела двух идеальных несжимаемых жидкостей с разными магнитными свойствами с учетом поверхностного натяжения, силы тяжести и влияния формы поверхности раздела на магнитное поле. Жидкости имеют постоянную магнитную проницаемость и находятся

между двумя неподвижными горизонтальными стенками с большой магнитной проницаемостью. К системе приложено горизонтальное постоянное и однородное магнитное поле. В линейном приближении получено дисперсионное соотношение и исследована устойчивость поверхности раздела. В нелинейном приближении исследовано влияние приложенного магнитного поля на поведение солитонов. В [50] исследована устойчивость волн на поверхности раздела, покрытой тонкой невесомой немагнитной упругой пленкой, между двумя намагничивающимися жидкостями в однородном магнитном поле, с учетом силы тяжести.

Поведение слоя магнитной жидкости в неоднородных магнитных полях.

Неоднородное поле существенно влияет на движение магнитной жидкости, созданное не магнитным полем. В [51] рассмотрено поведение тонкой осесимметричной пленки на вертикальном цилиндрическом проводнике с током с учетом силы тяжести и поверхностного натяжения. Исследовано развитие малых возмущений стационарного течения с цилиндрической свободной поверхностью. Показано, что при достаточно большой силе тока такое течение устойчиво. В [52] теоретически и экспериментально рассмотрена стационарная задача о объеме магнитной жидкости, удерживаемом постоянным магнитном между двумя плоскостями, нижняя из которых движется с постоянной скоростью. В приближении Стокса получен расход течения тонкой пленки магнитной жидкости, увлекаемой движущейся нижней плоскостью плоскостью. Экспериментальные значения расхода хорошо согласуются с теоретическим результатом. В [53, 54] исследуется возможность стабилизации поверхности пленки магнитной жидкости, стекающей по твердой вертикальной стенке с помощью переменного неоднородного магнитного поля. В работах [55–58] исследуется поведение тонкого слоя вязкой несжимаемой магнитной жидкости на вращающемся диске в осесимметричном приложенном магнитном поле. Жидкость поступает через узкую щель в центре диска с постоянным расходом. Задача решается в безындукционном приближении с учетом поверхностного натяжения и силы тяжести, магнитная проницаемость считается постоянной. Проведено исследование возможности создания ровного тонкого слоя жидкости на вращающейся поверхности с помощью приложенного неоднородного магнитного поля. Найдено магнитное поле, при котором в стационарном случае поверхность магнитной жидкости будет горизонтальна. Исследовано возникновение скачков на поверхности слоя при резком включении магнитного поля. Вычислена скорость распространения скачков. В работах [55–58] используется метод разложения по малому параметру, предложен-

ный в [59], где теоретически описана гидродинамика тонкого слоя ненамагничивающейся жидкости на вращающемся горизонтальном диске. В [60] исследуется расстекание тонкого осесимметричного кольцевого слоя вязкой несжимаемой магнитной жидкости, заданной начальной формы, на медленно вращающейся горизонтальной подложке в безындукционном приближении, без учета сил тяжести и поверхностного натяжения, при включении магнитного поля бесконечного вертикального проводника с током, расположенного в центре кольца. Найдено решение для формы поверхности магнитной жидкости, обнаружено существование разрывов толщины слоя.

Следует отметить, что постоянное неоднородное поле не может вызвать направленного движения жидкости. Для создания движения необходимо прикладывать переменное магнитное поле.

Слой магнитной жидкости в переменных неоднородных магнитных полях. Возможность создания расходного течения жидкостей при деформации поверхности магнитной жидкости в переменном неоднородном периодическом магнитном поле исследовалась во многих работах. Экспериментально течение слоя магнитной жидкости в переменном неоднородном магнитном поле изучалось в работах [61–63]. В этих работах экспериментально получена немонотонная зависимость поверхностной скорости и среднего расхода жидкости от частоты изменения приложенного магнитного поля. Предложены различные типы перекачивающих устройств, описанные, например, в работах [64–71], работающие на основе явления волнообразного изменения поверхности магнитной жидкости в переменных периодических полях.

В [72] аналитически рассчитано возбуждение гравитационных волн малой амплитуды на поверхности несжимаемой магнитной жидкости в бегущем магнитном поле при линейной зависимости намагниченности от магнитного поля, без учета поверхностного натяжения и влияния искажения поверхности магнитной жидкости на приложенное поле. Исследуются волны на поверхности бесконечно глубокой идеальной вязкой магнитной жидкости, а также слой идеальной магнитной жидкости конечной глубины и с двумя свободными границами. Вычислены резонансные частоты приложенного магнитного поля.

В работах [73, 74] с использованием пакета STAR-CD численно рассчитано двумерное течение вязкой несжимаемой магнитной жидкости в прямоугольном канале в бегущем магнитном поле при постоянной магнитной проницаемости и в безындукционном приближении. Найдена форма свободной поверхности, массовый расход и скорости жидкости.

В случае тонких слоев жидкости (длинноволновое приближение) возможно существенное упрощение уравнений и сведение задачи к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (число уравнений зависит от числа слоев) для определения толщины слоя. Это позволило получить аналитические решения в работах [75–78]. В [75, 76] аналитически исследуются волны малой и конечной амплитуды на поверхности тонкого слоя вязкой несжимаемой магнитной жидкости, вызываемые бегущим магнитным полем, при постоянной магнитной проницаемости и в безындукционном приближении с учетом поверхностного натяжения. Для волны синусоидальной формы вычислен средний расход жидкости и найдено приложенное магнитное поле, вызывающее это движение. В [77] аналитически решается задача о течении слоя вязкой несжимаемой магнитной жидкости на цилиндре под действием неоднородного осесимметричного бегущего магнитного поля. Вычислено поле, создающее синусоидальную поверхностную волну, скорости жидкости в слое и средний расход жидкости. В [78] аналитически решены задачи о нахождении приложенного магнитного поля создающего заданную синусоидальную форму границы раздела между двумя тонкими слоями вязких несжимаемых жидкостей с разными магнитными свойствами. Таким образом в работах [75–78] решены различные обратные задачи определения магнитного поля, вызывающего заданную синусоидальную деформацию поверхности жидкости.

В 3, 4 главах диссертации решены прямые задачи нахождения формы поверхности тонкого слоя магнитной жидкости на горизонтальной подложке и поверхности раздела между двумя жидкостями в бегущем периодическом приложенном магнитном поле. Бегущее поле может быть создано движущимися телами из хорошо намагничивающегося материала. Задачи решены аналитически в длинноволновом приближении с учетом поверхностного натяжения, силы тяжести и нелинейной зависимости намагниченности магнитной жидкости от напряженности магнитного поля. Основной целью здесь является исследование возможности создания перекачивающих устройств на основе магнитной жидкости, вычисление среднего расхода перекачиваемой немагнитной жидкости в таком устройстве и исследование влияния параметров на величину расхода. Результаты автора по данной теме изложены в работах [106–114]

Деформация поверхности магнитной жидкости, содержащей цилиндр из намагничивающегося материала, в однородном магнитном поле

1.1. Описание экспериментальной установки и результатов экспериментального исследования поведения магнитной жидкости, содержащей цилиндр из намагничивающегося материала, в однородном магнитном поле

Проведено экспериментальное исследование деформации поверхности раздела немагнитной жидкости и магнитной жидкости, содержащей цилиндрическое тело из намагничивающегося материала в однородном приложенном магнитном поле.

Исследуемые жидкости. Для проведения эксперимента была выбрана водорастворимая магнитная жидкость (MF DEPO 6) плотности $\rho_f = 1.41$ г/см³. Экспериментально определена начальная восприимчивость магнитной жидкости $\chi_0 = 0.011$. Начальная восприимчивость определялась по форме, положению и величине приложенного неоднородного магнитного поля, в котором капля магнитной жидкости, погруженная в другую жидкость, занимала положение равновесия, методом, описанном в [17]. Проведены эксперименты по подвешиванию капли магнитной жидкости в различных маслах. Далее из формулы $\chi_0 \approx (M_{fs}m)/(3k_bT)$ получено приближенное значение намагниченности насыщения M_{fs} . При этом магнитный момент ферромагнитной частицы оценивается следующим образом: $m \approx M_{Fe_3O_4}V_p$, $V_p = 4/3\pi(R_p)^3$ см³ - объем ферромагнитной частицы, $R_p = 10^{-6}/2$ см - радиус частицы, $M_{Fe_3O_4} = 500$ Гс - намагниченность магнетита, $k_b = 1.38 \cdot 10^{-16}$ г·см²/(с²К) - константа Больцмана, $T = 300$ К - температура. При этом намагниченность насыщения магнитной жидкости $M_{fs} \approx 3\chi_0k_bT/m = 5.218$ Гс, а величина магнитного поля, при котором наступает насыщение $H_s \approx k_bT/m = 158.1$ Э.

Над магнитной жидкостью помещается несмешивающаяся с ней жидкость близкой плотности. В качестве такой жидкости было выбрано трансформаторное масло с плотностью $\rho_s = 0.96$ г/см³ и вязкостью $\eta_s = 25$ мПа·с = 0.25 дин·с/см². Плотность жидкостей

измерялась взвешиванием, вязкость была известна. В эксперименте использовались фиксированные объемы жидкостей: объем магнитной жидкости $V_f = 1 \text{ см}^3$, объем трансформаторного масла $V_s = 1.2 \text{ см}^3$.

Таблица 1.1. Свойства магнитной жидкости DEPO 6

Начальная восприимчивость	$\chi_0 = 0.011$
Намагниченность насыщения	$M_{fs} = 5.218 \text{ Гс}$
Концентрация ферромагнитных частиц	$n = 1.9 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$
Коэффициент поверхностного натяжения магнитная жидкость - масло	$\sigma = 20.7 \text{ дин/см}$
Плотность	$\rho_f = 1.41 \text{ г/см}^3$
Угол смачивания магнитной жидкости и стенки	$\theta_s = 132.5^\circ$
Угол смачивания магнитной жидкости и поверхности тела	$\theta_b = 142.2^\circ$

Для измерения краевых углов смачивания на границе магнитная жидкость - оргстекло - трансформаторное масло θ_s и на границе магнитная жидкость - феррит - трансформаторное масло θ_b использовалась емкость из оптического стекла, заполненная трансформаторным маслом. На горизонтальной подложке из оргстекла или феррита при помощи шприца формировалась малая капля магнитной жидкости радиуса около $R_d = 0.5 \text{ мм}$ и высоты h_d . Затем по фотографии цифрового микроскопа измерялась ширина и высота капли. Так как при $R_d \rightarrow 0$ и $h_d \rightarrow 0$ выполнено условие $\sigma/R_d \gg (\rho_f - \rho_s)gh_d$, то форму капли можно аппроксимировать усеченной сферой. Далее вычислялся угол между поверхностью сферы и плоскостью подложки. Получены значения: угол магнитная жидкость - масло - оргстекло, $\theta_s = 2.312$ ($\approx 132.5^\circ$); угол магнитная жидкость - масло - феррит $\theta_b = 2.482$ ($\approx 142, 2^\circ$).

Экспериментально, методом подвешивания капли, по диаметру основания капли и краевому углу смачивания, получены коэффициент поверхностного натяжения на поверхности раздела трансформаторное масло - воздух $\sigma_s = 29.5 \text{ дин/см}$, коэффициент поверхностного натяжения на поверхности раздела магнитная жидкость - воздух $\sigma_f = 50.2 \text{ дин/см}$ и вычислен коэффициент $\sigma = \sigma_f - \sigma_s = 20.7 \text{ дин/см}$. Свойства магнитной жидкости DEPO 6 приведены в таб. 1.1.

Экспериментальная установка. Магнитная жидкость и трансформаторное масло помещались в кювету прямоугольной формы из оргстекла. Внутренняя область контейнера имеет длину $L = 2R_V = 4.5 \text{ см}$ и глубину $\delta_V = 0.3 \text{ см}$. Высота кюветы 2 см (см.

рис. 1.1). В центре кюветы, на дне, клеена центральная часть концентратора магнитного поля цилиндрической формы. Концы цилиндра удалены на достаточное расстояние от контейнера, чтобы избежать краевых эффектов. Стержень выполнен из феррита и имеет радиус $R_b = 0.4$ см (см. рис. 1.1). Стержень клеен герметично, также герметично заклеен стык между поверхностью стержня и дном контейнера, чтобы предотвратить перетекание магнитной жидкости под цилиндром. Таким образом, создается возможность для образования несимметричных форм поверхности магнитной жидкости около тела. Магнитная жидкость имеет черный цвет, непрозрачна и сильно пачкает стенки сосуда и ферромагнитное тело, поэтому перед проведением эксперимента внутренние стенки контейнера и поверхность стержня покрываются тонким слоем трансформаторного масла. При этом магнитная жидкость не смачивает стенки.

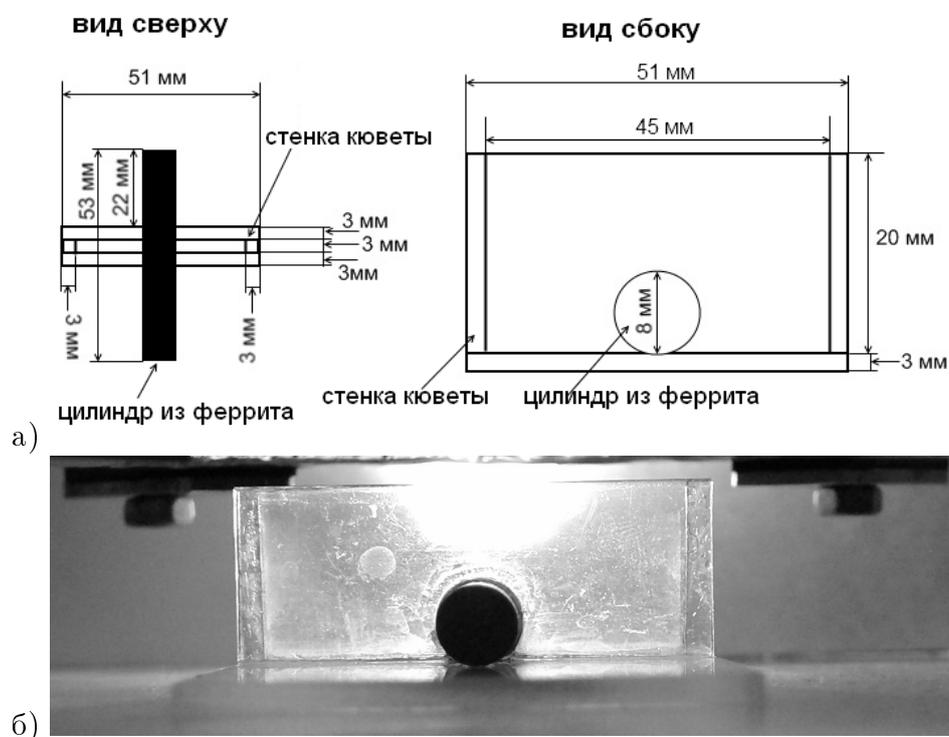


Рис. 1.1. Кювета из оргстекла с клееным ферритовым концентратором а) схема (вид сверху и вид сбоку); б) фотография (вид сбоку).

Однородное приложенное магнитное поле H_∞ создается двумя парами электромагнитных катушек Гельмгольца (пара катушек с общей осью; расстояние между катушками равно радиусу катушек; на оси создается однородное поле), см. рис. 1.2. Одна пара катушек создает вертикальное поле, а другая — горизонтальное поле. Ток в катушках управляется при помощи пакета программ LabView (см. Приложение 1). С помощью датчика

Холла была произведена тарировка и установлено соотношение между током в катушках и магнитным полем. Измерено максимальное значение поля, которое может создаваться парами катушек. Максимальное вертикальное поле — 468 Э, максимальное горизонтально поле — 373 Э.

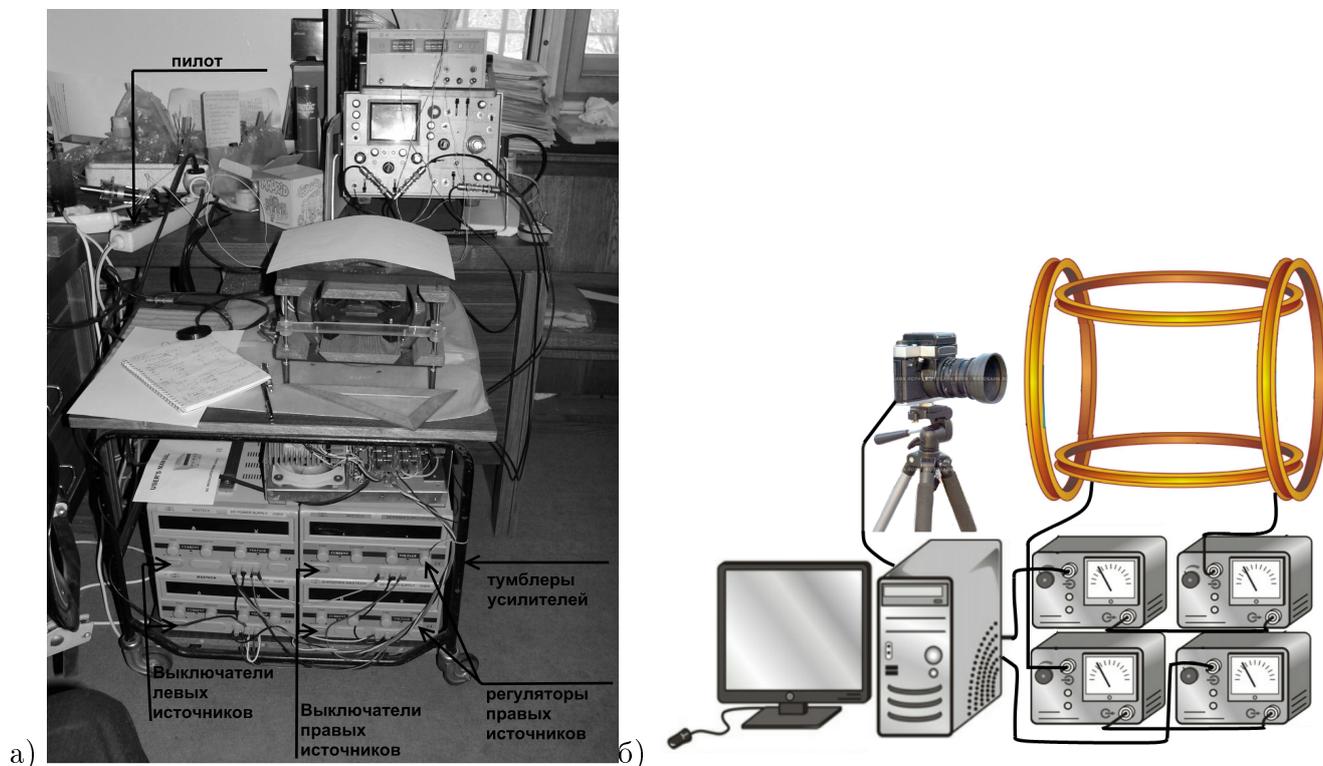


Рис. 1.2. а) Фотография экспериментальной установки, создающей однородное приложенное магнитное поле; б) Схема экспериментальной установки.

Результаты экспериментов в постоянном вертикальном приложенном магнитном поле. Проведен эксперимент, в котором во включенном постоянном вертикальном магнитном поле в кювету, заполненную трансформаторным маслом, различными способами, при помощи шприца, подавалась магнитная жидкость. Таким способом в постоянном магнитном поле экспериментально получены различные формы поверхности магнитной жидкости фиксированного объема $V_f = 1 \text{ см}^3$.

К примеру, при фиксированном значении $H_\infty = 400 \text{ Э}$ (при различных способах введения магнитной жидкости) получены различные формы постоянного объема магнитной жидкости (см. рис. 1.3). Получены следующие конфигурации магнитной жидкости:

- один симметричный объем без каверн (рис. 1.3 а);
- два независимых объема симметричных относительно оси z без каверн (рис. 1.3 б), два не симметричных относительно оси z , как с каверной, так и без нее (рис. 1.3 в, г);

- три объема (с каплей на теле), симметричные и не симметричные (рис. 1.3 д);

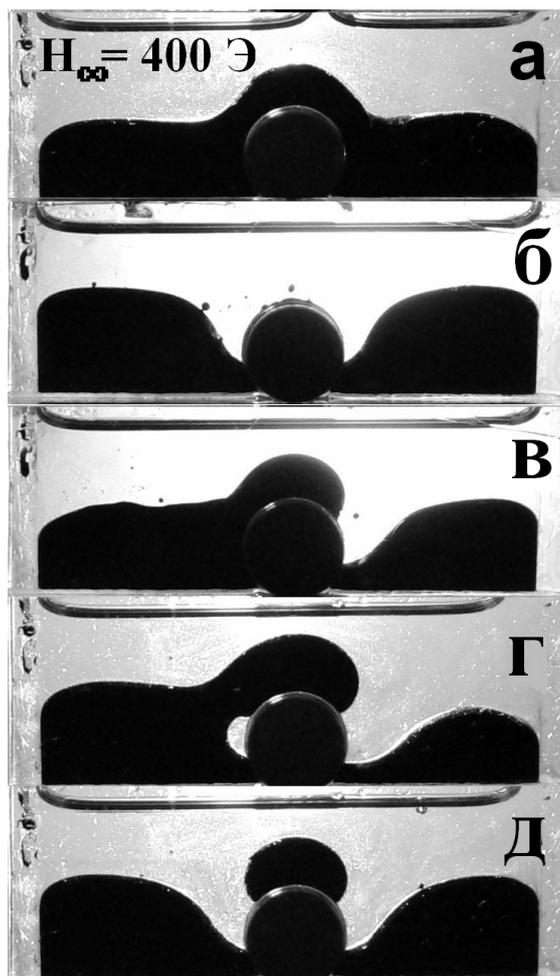


Рис. 1.3. Фотографии различных устойчивых равновесных форм магнитной жидкости в вертикальном приложенном магнитном поле $H_{\infty} = 400 \text{ Э}$.

Рассмотрены статические формы магнитной жидкости при различных постоянных значениях приложенного поля. Во всем экспериментальном диапазоне приложенных вертикальных магнитных полей ($H_{\infty} \leq 468 \text{ Э}$) были получены перечисленные выше устойчивые равновесные формы поверхности магнитной жидкости (один, два и три независимых объема).

По фотографиям фиксированного объема магнитной жидкости, при различных постоянных значениях приложенного магнитного поля, измерена высота подъема поверхности одного симметричного объема магнитной жидкости в центре сосуда над цилиндром $\Delta h = h(x = 0) - R_b$ и построен график зависимости Δh от H_{∞} , см. рис. 1.4.

Таким образом экспериментально показано существование множества различных устойчивых положений, которые занимает магнитная жидкость постоянного объема, при

одном и том же значении магнитного поля. Какая из форм (односвязная, двусвязная или трехсвязная) реализуется в эксперименте зависит от начальных и граничных условий, от способа введения магнитной жидкости и от характера изменения магнитного поля.

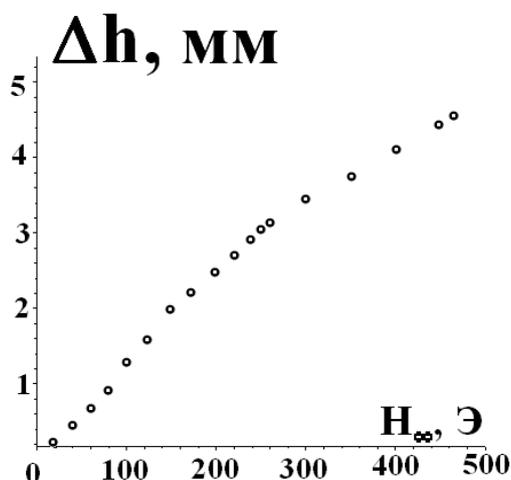


Рис. 1.4. Высота подъема односвязного объема магнитной жидкости над цилиндром при различных постоянных значениях приложенного магнитного поля H_∞ .

Результаты экспериментов в переменном вертикальном приложенном магнитном поле. Исследовалось поведение объема магнитной жидкости ($V_f = 1 \text{ см}^3$) в переменных магнитных полях. В начальный момент без магнитного поля магнитная жидкость разделена на два равных независимых объема, симметричных относительно оси z с двух сторон от тела, аналогично рис. 1.3 б.

Квазистатическое (ступенчатое) изменение магнитного поля. Сначала реализован случай, когда вертикальное магнитное поле изменяется ступенчато, см. рис. 1.5. Включается постоянное магнитное поле в течение 20 с, а затем увеличивается на ΔH Э, и так далее от 0 до 450 – 460 Э, затем магнитное поле уменьшается таким же ступенчатым образом до 0. Величина ΔH варьировалась в эксперименте. При этом наблюдались резкие изменения формы поверхности и гистерезисные явления: форма поверхности при возрастающем поле не совпала с формой поверхности в убывающем поле.

Например, при $\Delta H = 50$ Э два первоначально независимых объема в возрастающем магнитном поле при $H_\infty = 250$ Э становятся единым объемом. Магнитная жидкость остается односвязной при увеличении поля до $H_\infty = 450$ Э. Далее в убывающем поле объем магнитной жидкости разрывается на два при $H_\infty = 100$ Э, см. рис. 1.6.

При $\Delta H = 20$ Э в возрастающем магнитном поле два первоначально независимых

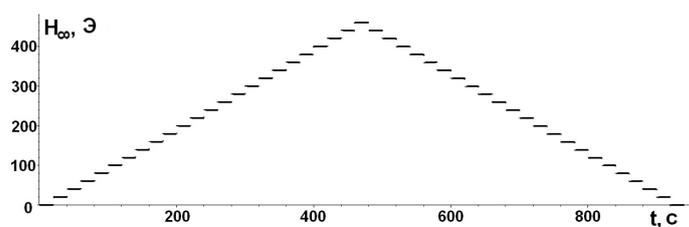


Рис. 1.5. "Ступенчатое" изменение приложенного магнитного поля H_∞ во времени в эксперименте.

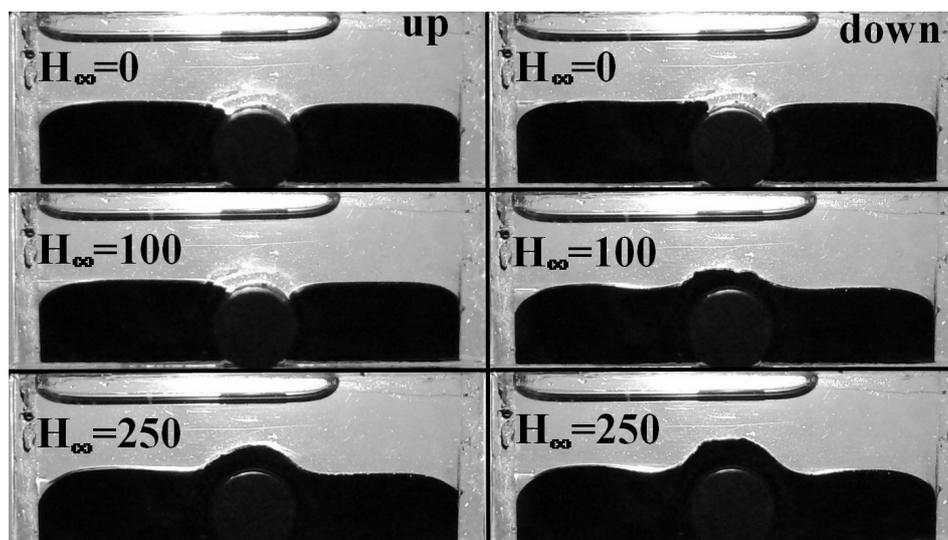


Рис. 1.6. Поведение магнитной жидкости при ступенчатом изменении поля ($\Delta H = 50$ Э) в возрастающем (слева) и убывающем (справа) поле

объема при $H_\infty = 200$ Э становятся единым объемом, затем при $H_\infty = 280$ Э вновь разрывается на два не симметричных относительно вертикальной оси объема, далее при $H_\infty = 380$ Э от левого объема отделяется капля жидкости, удерживаемая полем на теле. Магнитная жидкость остается трехсвязной при увеличении поля до $H_\infty = 460$ Э. В убывающем поле три объема жидкости переходят в два при $H_\infty = 240$ Э, два объема сливаются в один при $H_\infty = 100$ Э, см. рис. 1.7. Когда поле выключается магнитная жидкость вновь разделяется на два равных объема.

Таким образом, при ступенчатом изменении поля наблюдаются скачкообразное изменение формы магнитной жидкости и гистерезис этой формы.

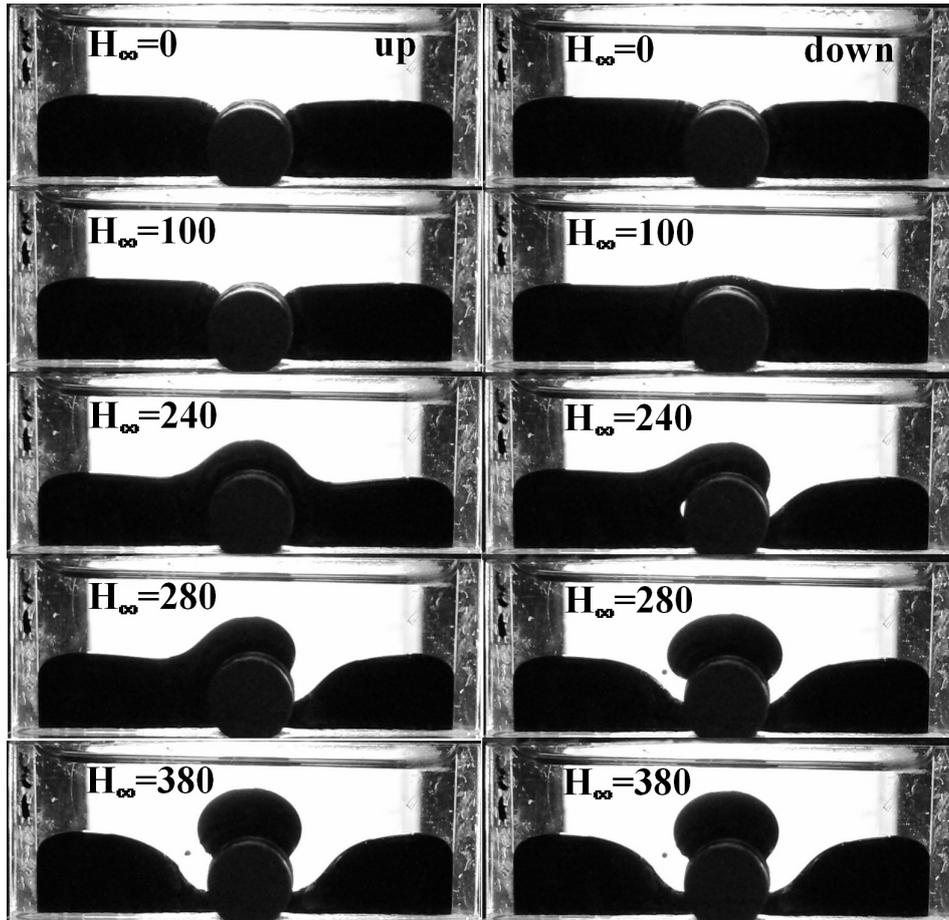


Рис. 1.7. Поведение магнитной жидкости при ступенчатом изменении поля ($\Delta H = 20 \text{ Э}$) в возрастающем (слева) и убывающем (справа) поле

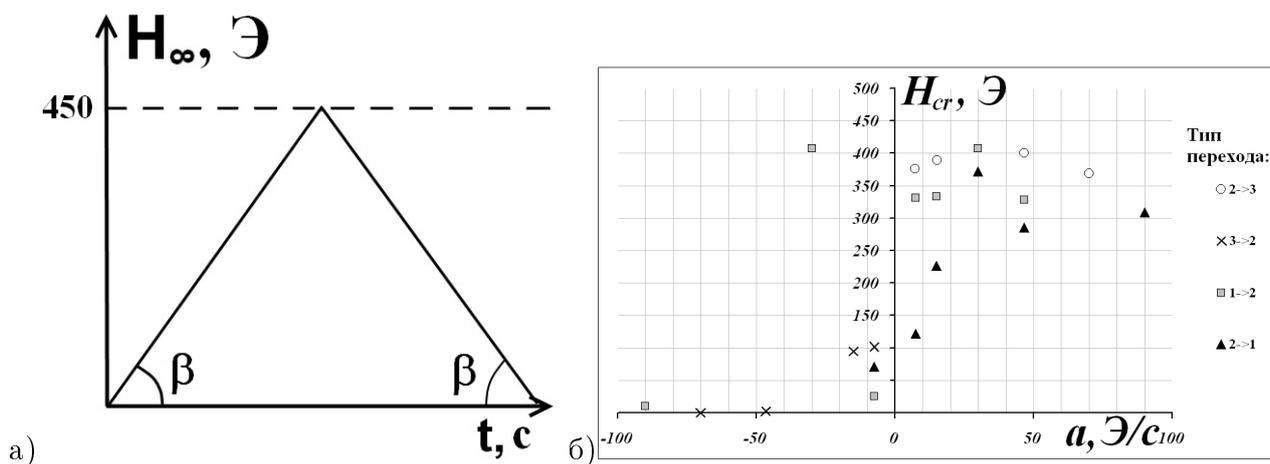


Рис. 1.8. а) Непрерывное изменение приложенного магнитного поля H_∞ во времени в эксперименте, $a = \operatorname{tg} \beta$ - скорость изменения магнитного поля H_∞ ; б) Значения поля, при которых происходят скачкообразные изменения формы поверхности магнитной жидкости при непрерывном изменении приложенного магнитного поля H_∞ со скоростью a .

Непрерывно меняющееся магнитное поле. Исследовалось поведение объема магнитной жидкости ($V_f = 1 \text{ см}^3$) в непрерывно меняющемся магнитном поле. Движение начинается из состояния покоя. В начальный момент времени магнитное поле отсутствует, магнитная жидкость разделена на два равных независимых объема. Напряженность приложенного магнитного поля H_∞ сначала увеличивается с постоянной скоростью a Э/с до 450 Э, а затем уменьшается до нуля со скоростью $-a$, см. рис. 1.8. Параметр a варьировался в эксперименте. Для любых a наблюдались резкие изменения формы поверхности и гистерезисные явления. Количество и виды переходов зависят от скорости изменения поля a . На рис. 1.8 б показаны экспериментальные данные. По вертикальной оси отложены значения магнитных полей H_∞ , при которых происходят те или иные переходы. По горизонтальной оси отложены соответствующие значения скорости изменения поля a . Положительная скорость соответствует возрастающему полю, а отрицательная - убывающему. При меньших скоростях изменения поля a происходит большее количество переходов. Переход из одного объема в два происходит при некотором (достаточно большом) значении возрастающего поля, а обратный переход из двух объемов в один при меньшем значении убывающего поля. Переход из двух объемов в три происходит при достаточно большом значении возрастающего поля, а обратный переход из трех объемов в два при меньшем значении убывающего поля. Переходов из одного объема в три или обратных переходов из трех в один в этих экспериментах не обнаружено.

Во всех экспериментах в переменном магнитном поле циклически возрастающем и убывающем по любому закону наблюдались скачкообразные изменения формы магнитной жидкости и гистерезис этой формы. Число скачков и значения поля, при которых они происходят, зависит от закона изменения величины магнитного поля.

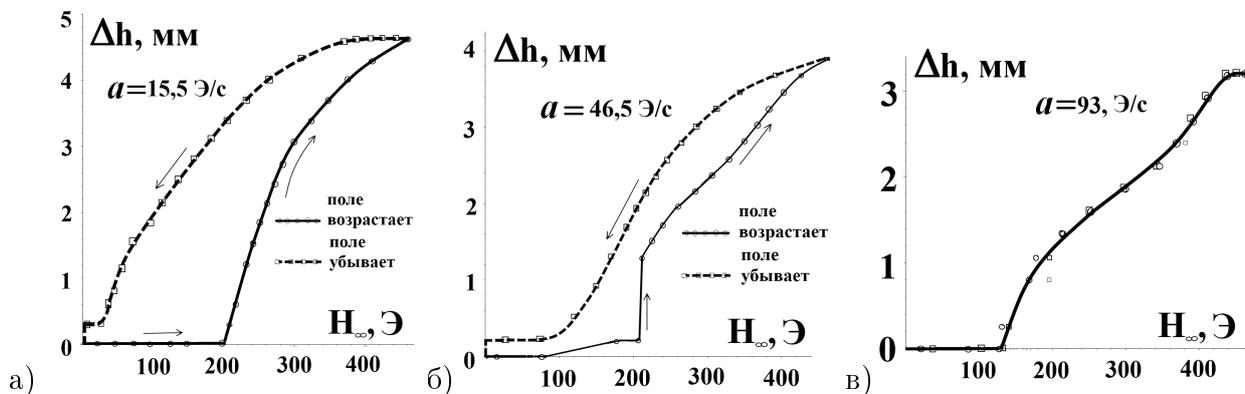


Рис. 1.9. Зависимость высоты подъема магнитной жидкости над центром цилиндра от величины приложенного поля H_{∞} для различных скоростей изменения поля а) 15,5 Э/с; б) 46,5 Э/с; в) 93 Э/с.

На рис. 1.9 представлена зависимость высоты подъема жидкости $\Delta h = h(x=0) - R_b$ над центром цилиндрического тела от величины приложенного поля H_{∞} для различных скоростей a изменения магнитного поля. При малых скоростях $a = 15,5$ Э/с (рис. 1.9 а) высота поверхности при возрастающем поле существенно отличается от высоты поверхности при убывающем поле, что демонстрирует гистерезис формы поверхности магнитной жидкости. При большей скорости изменения поля $a = 46,5$ Э/с (рис. 1.9 б) разность высоты поверхности при возрастающем поле и убывающем поле меньше аналогичной разности высоты поверхности при $a = 15,5$ Э/с. При достаточно высокой скорости изменения поля $a = 93$ Э/с (рис. 1.9 в) высота поверхности в возрастающем поле совпадает с высотой поверхности в убывающем поле. Таким образом гистерезис уменьшается при возрастании скорости a приложенного вертикального поля H_{∞} . Также с возрастанием a уменьшается максимальная высота поверхности, которой достигает магнитная жидкость при 465 Э.

Результаты экспериментов в постоянном наклонном магнитном поле. Рассмотрены постоянные магнитные поля, направленные под углами $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ к горизонтали. Максимальное значение магнитного поля в эксперименте - $H_{\infty} = 350$ Э. При фиксированном приложенном магнитном поле H_{∞} в кювету, заполненную трансформаторным маслом, различными способами, при помощи шприца, подавалась магнитная

жидкость. Таким способом в постоянном магнитном поле экспериментально получены различные формы поверхности магнитной жидкости фиксированного объема $V_f = 1 \text{ см}^3$.

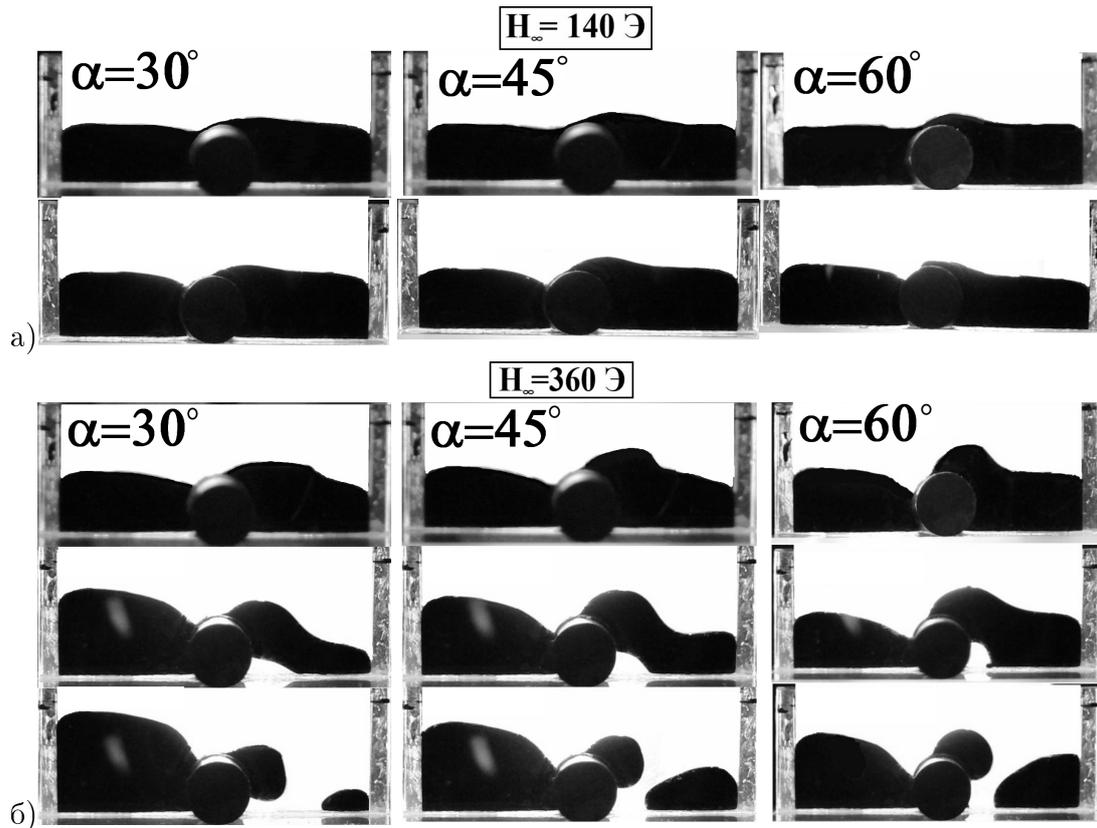


Рис. 1.10. Статические формы магнитной жидкости в однородном магнитном поле H_∞ , направленном под различными углами α к горизонту: а) $H_\infty = 140 \text{ Э}$; б) $H_\infty = 360 \text{ Э}$.

В наклонном поле при $30^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$ в эксперименте не удалось создать три объема магнитной жидкости при малых полях и односвязный объем при больших полях. Обнаружено, что существуют диапазоны H_∞ , при которых существует односвязное и множество двухсвязных объемов. Например, при $H_\infty = 140 \text{ Э}$ некоторые возможные формы поверхности магнитной жидкости приведены на рис. 1.10 а. Кроме того существуют диапазоны H_∞ , при которых получены только двухсвязные и трехсвязные объемы магнитной жидкости. Например, фото таких объемов при $H_\infty = 360 \text{ Э}$ приведены на рис. 1.10 б.

Результаты экспериментов в переменном наклонном магнитном поле.

Квазистатическое (ступенчатое) изменение магнитного поля. Проведены эксперименты, в которых магнитное поле ступенчато квазистатически увеличивается от 0 до 360 Э с шагом $\Delta H = 10 \text{ Э}$, а затем убывает с тем же шагом, аналогично тому, как это было сделано для вертикального поля, см. рис. 1.5. В начальный момент магнитная жидкость покрывает тело и занимает один объем $V_f = 1 \text{ см}^3$. Равновесные формы магнитной жид-

кости при разных H_∞ для $\alpha = 60^\circ$ показаны на рис. 1.11 а. При возрастании поля форма поверхности деформируется. Затем, в возрастающем поле при некотором критическом значении ($H_\infty = H_{cr1} = 250$ Э при $\alpha = 60^\circ$), объем разрывается на два независимых объема. При дальнейшем возрастании поле жидкость остается двухсвязной. Затем в убывающем поле жидкость снова становится односвязной при некотором другом критическом значении поля ($H_\infty = H_{cr2} = 150$ Э при $\alpha = 60^\circ$). Такие же эксперименты были проведены для $\alpha = 30^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$. Следует отметить, что при $\alpha = 30^\circ$ после выключения приложенного магнитного поля магнитная жидкость осталась двухсвязной, т.е. не возвращалась к исходному состоянию. Таким образом, наблюдаются скачки и гистерезис формы поверхности магнитной жидкости в переменном магнитном поле. Критические значения полей, полученные в эксперименте для различных углов наклона α , приведены в таб. 1.2, видно, что $H_{cr2} < H_{cr1}$. Формы поверхности магнитной жидкости в окрестности возрастающего критического магнитного поля, показаны на рис. 1.11 б. Трехсвязный объем в данных экспериментах не наблюдался.

Таблица 1.2. Критические значения магнитного поля, при ступенчатом возрастании поля.

Угол наклона, α	30°	45°	60°
Разрыв одного объема на два H_{cr1} , Э	140	190	250
Переход двух объемов в один H_{cr2} , Э	—	60	150

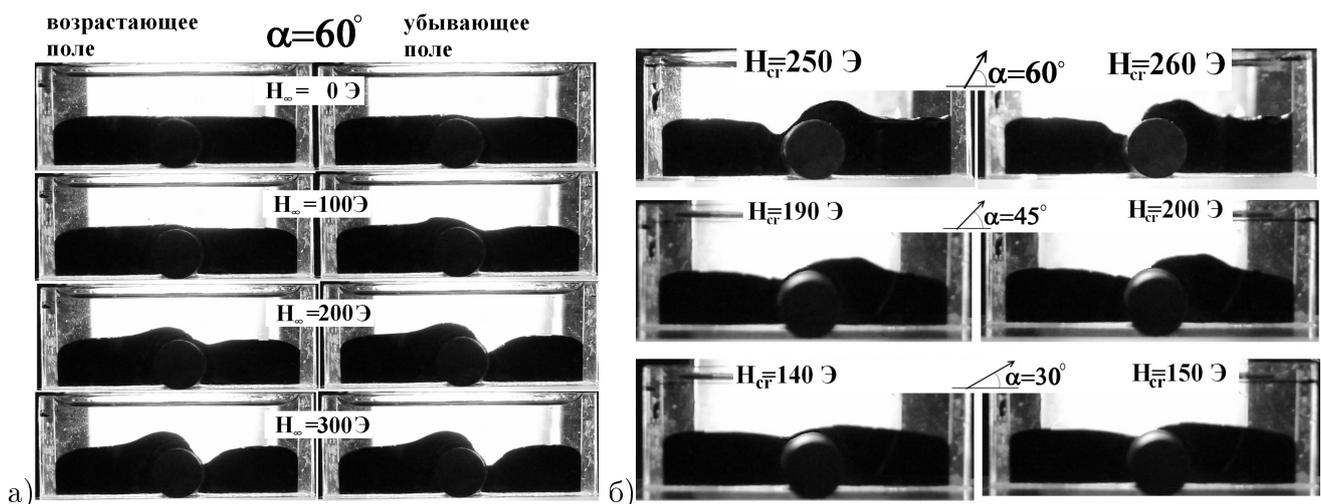


Рис. 1.11. а) Деформация формы поверхности магнитной жидкости при "ступенчатом" изменении магнитного поля при $\alpha = 60^\circ$; б) статические формы магнитной жидкости около критического магнитного поля H_{cr1} , при котором односвязный объем переходит в двухсвязный.

В экспериментах обнаружено, что максимальная высота магнитной жидкости h_{max} и положение этого максимума относительно центра цилиндра x_{max} существенно зависят от угла наклона поля. При фиксированном H_∞ и уменьшении угла наклона поля α максимальная высота h_{max} уменьшается, а расстояние $|x_{max}|$ увеличивается.

Непрерывно меняющееся магнитное поле. Исследовано поведение объема магнитной жидкости в непрерывно меняющемся магнитном поле, направленном под углом $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ к горизонту. Движение начинается из состояния покоя. В начальный момент времени магнитное поле отсутствует, магнитная жидкость занимает один объем ($V_f = 1 \text{ см}^3$). Напряженность приложенного магнитного поля H_∞ сначала увеличивается с постоянной скоростью a Э/с до 360 Э, а затем уменьшается до нуля со скоростью $-a$, аналогично случаю вертикального поля, см. рис. 1.8. Рассматривались различные скорости изменения приложенного магнитного поля a . В экспериментах, в возрастающем поле наблюдался разрыв одного объема магнитной жидкости на два при $H_\infty = H_{cr1}$, а в убывающем поле наблюдался переход двух объемов в один при $H_\infty = H_{cr2}$, $H_{cr2} < H_{cr1}$. В проведенных динамических экспериментах не наблюдалось трехсвязных форм поверхности. Во всех экспериментах для рассмотренных значений параметров a и α обнаружен гистерезис формы магнитной жидкости.

На рис. 1.12 и рис. 1.13 представлены зависимости максимальной высоты подъема магнитной жидкости около цилиндра h_{max} над начальным уровнем жидкости от величины приложенного поля H_∞ для различных углов наклона α и скоростей a изменения магнитного поля. Получено, что h_{max} уменьшается при уменьшении угла α и при увеличении скорости a . Из графиков видно, что во всех экспериментах наблюдается гистерезис формы поверхности магнитной жидкости, который уменьшается с ростом скорости изменения приложенного магнитного поля.

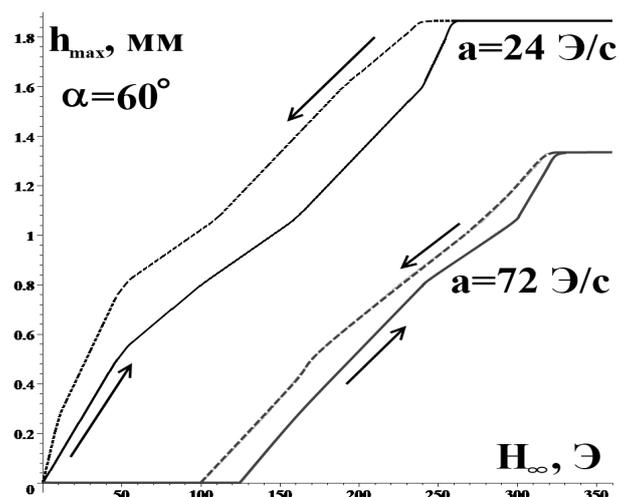


Рис. 1.12. Зависимость максимальной высоты подъема магнитной жидкости h_{max} над начальным уровнем от величины приложенного поля H_{∞} при $\alpha = 60^\circ$ для различных скоростей изменения поля $a = 24$ Э/с и $a = 72$ Э/с (сплошная линия — поле возрастает, пунктирная — убывает).

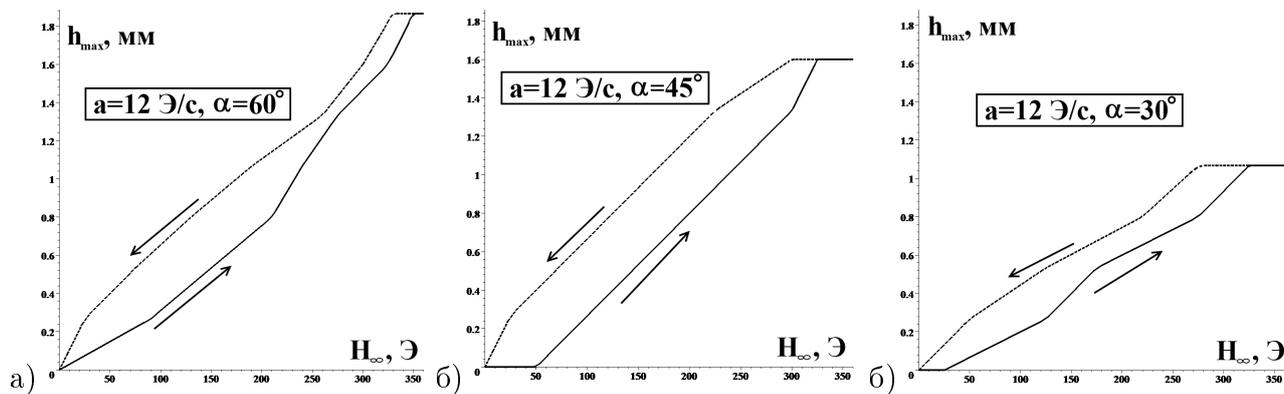


Рис. 1.13. Зависимость максимальной высота подъема магнитной жидкости h_{max} над начальным уровнем от величины приложенного поля H_{∞} при $a = 12$ Э/с (сплошная линия — поле возрастает, пунктирная — убывает) для углов наклона поля а) $\alpha = 60^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$; в) $\alpha = 30^\circ$.

1.2. Постановка задачи о форме поверхности магнитной жидкости, содержащей цилиндр из намагничивающегося материала, в однородном магнитном поле

Пусть твердое цилиндрическое тело круглого сечения радиуса R_b из намагничивающегося материала (концентратор магнитного поля) находится на дне сосуда прямоугольного сечения ширины L , наполненного тяжелой магнитной жидкостью (см. рис. 1.14). Сверху магнитная жидкость контактирует с окружающей средой (газом или обычной жидкостью). Центр декартовой системы координат x, y, z совпадает с центром тела, ось тела совпадает с осью y , ось z направлена вертикально вверх.

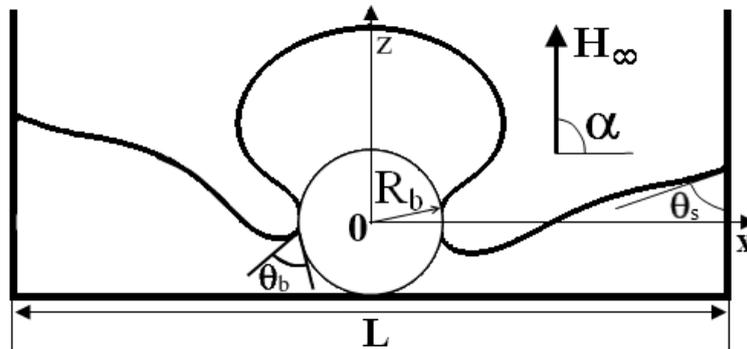


Рис. 1.14. Объем магнитной жидкости около цилиндра в вертикальном магнитном поле.

Приложенное магнитное поле \mathbf{H}_∞ однородно, $\mathbf{H}_\infty = (H_\infty \cos \alpha, 0, H_\infty \sin \alpha) = \text{const}$, α — угол наклона однородного приложенного магнитного поля к горизонтали. Параметры, относящиеся к телу, магнитной жидкости и окружающей среде, далее везде обозначены индексами b, f , и s , соответственно. Давление в окружающей среде p_s постоянно, $p_s = \text{const}$, т.е. движением окружающей среды пренебрегается. Пусть намагниченность окружающей среды $M_s = 0$, намагниченность тела велика и линейно зависит от напряженности магнитного поля $\mathbf{M}_b = \chi_b \mathbf{H}$, $\chi_b = \text{const} \gg 1$. Предположим, что намагниченность тела много больше намагниченности жидкости, ($M_b \gg M_f$), и верно безындукционное приближение ($H \gg 4\pi M_f$), т.е. поверхность магнитной жидкости практически не искажает магнитное поле H . При этом величина неоднородного магнитного поля H вокруг цилиндра вычисляется по формуле:

$$H = |H_\infty| \sqrt{\left(1 + \frac{A}{(x^2 + z^2)}\right)^2 - \frac{4A(x \cos \alpha + z \sin \alpha)^2}{(x^2 + z^2)^2}}, \quad A = -R_b^2. \quad (1.1)$$

В вертикальном приложенном магнитном поле H_∞ ($\alpha = 90^\circ$) магнитном поле вокруг цилиндра имеет вид:

$$\mathbf{H} = \nabla\varphi, \quad \varphi = H_\infty z + A \frac{H_\infty z}{x^2 + z^2}. \quad (1.2)$$

Пусть намагниченность магнитной жидкости зависит от магнитного поля по Ланжевеновскому закону:

$$\mathbf{M}_f = \chi_f \mathbf{H}, \quad |\mathbf{M}_f(\zeta)| = M_{fs} \Lambda(\zeta), \quad \Lambda(\zeta) = \text{cth}(\zeta) - \frac{1}{\zeta}, \quad \zeta = \frac{mH}{k_b T}, \quad m = \frac{M_{fs}}{n} \quad (1.3)$$

Здесь T — температура жидкости, k_b — константа Больцмана, M_{fs} — намагниченность насыщения магнитной жидкости, m — магнитный момент одной ферромагнитной частицы, n — количество ферромагнитных частиц в единице объема.

Уравнения и граничные условия на поверхности магнитной жидкости $z = h(x)$, описывающие статику тяжелой магнитной жидкости имеют вид ($[A]_f^s = A_s - A_f$):

$$-\nabla p_j + M_j \nabla H_j + \rho_j \mathbf{g} = 0, \quad j = f, s \quad (1.4)$$

$$z = h(x) : [-p - 2\pi M_n^2]_f^s = \pm 2\sigma K \quad (1.5)$$

Здесь p_f и p_s — давление в средах, ρ_f и ρ_s — плотности магнитной жидкости и окружающей среды ($\rho_s < \rho_f$), σ — поверхностное натяжение, K — средняя кривизна поверхности раздела двух сред. С учетом интеграла уравнения равновесия (1.4) из динамического граничного условия (1.5) в безындукционном приближении ($H \gg 4\pi M_f$) получим условие на статической поверхности магнитной жидкости ($z = h(x)$):

$$z = h : \quad C + (\rho_s - \rho_f)gh + P(H) = \pm 2\sigma K, \quad (1.6)$$

$$P = \int_0^H M_f(H) dH, \quad H = H(x, z = h)$$

Здесь $C = p_{0f} - p_{0s} = \text{const}$. Средняя кривизна поверхности K определяется для плоских задач ($z = h(x)$, $' = d/dx$) следующим образом:

$$K = \frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} \quad (1.7)$$

Уравнение (1.6) с учетом (1.7) является нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно h . При этом на стенках сосуда и на теле (в случае, когда свободная поверхность жидкости касается поверхности тела) заданы углы смачивания θ_s и θ_b , соответственно. Объем магнитной жидкости V_f считается постоянным. Далее будут получены различные численные решения этого уравнения.

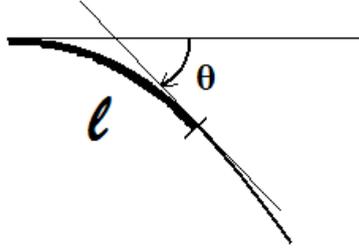


Рис. 1.15. Введение натуральной параметризации l, θ .

В безразмерном виде уравнение (1.6) запишется следующим образом:

$$z^* = h^* : \quad C^* - Gh^* + P_1 P^* = \pm 2K^* \quad (1.8)$$

Здесь $C^* = (p_{0f} - p_{0s})R_V/\sigma = const$, $z^* = z/R_V$, $h^* = h/R_V$, $P^* = P/P_0 = \int_0^{H^*} L(\zeta_\infty H^*) dH^*$, $H^* = H/H_\infty$, $P_0 = nk_b T$, $P_1 = nk_b T L/\sigma$, $G = g(\rho_s - \rho_f)R_V^2/\sigma$, $\zeta_\infty = M_{fs} H_\infty/nk_b T$, $V_f^* = V_f/R_V^2$, $R_b^* = R_b/R_V$. Форма поверхности зависит от следующих безразмерных параметров: $P_1, G, \zeta_\infty, V_f^*, R_b^*, \theta_s, \theta_b$.

Задача решалась в системе координат l, θ (см. рис. 1.15). Угол θ - это угол между касательной к кривой и горизонтальной осью, отсчитываемый по часовой стрелке; l - длина дуги кривой от стенки сосуда до рассматриваемой точки. При этом выражения для средней кривизны (1.7) будет иметь вид $2K = -sign(\cos \theta) d\theta/dl$. Система уравнений, эквивалентная (1.8) для определения формы поверхности в этих координатах будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dh^*}{dl} &= -\sin \theta, & \frac{dx^*}{dl} &= \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dl} &= C^* - Gh^* + P_1 P^* \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для численных расчетов были написаны программы на языке C++ (см. Приложение 2). Исходная граничная задача была сведена к задаче Коши, которая решается методом Рунге-Кутты второго порядка. Начальные условия для задачи Коши при $l = 0$ и константа C^* для каждого значения H_∞ подбирались так, чтобы выполнялись различные граничные условия (на стенках сосуда или цилиндре) исходной задачи и сохранялся объем жидкости. Программа позволяет определить различные формы поверхности, которые могут реализовываться в заданном магнитном поле. Обнаружено, что может существовать три типа решений односвязные, двусвязные и трехсвязные (с каплей магнитной жидкости на цилиндре). Программа позволяет вычислить критические значения магнитных полей, т.е.

величины приложенного магнитного поля, при которых решение некоторого типа перестает существовать. Также для каждого фиксированного значения приложенного магнитного поля H_∞ программа позволяет вычислить максимальный и минимальный объем капли на цилиндре в случае трехсвязного решения, максимальный и минимальный объем жидкости слева и справа от цилиндра в случае двухсвязного решения, при фиксированном суммарном объеме жидкости. Односвязное решение определяется единственным образом.

Уравнения (1.9) могут решаться при условии постоянства константы C для любого приложенного магнитного поля H_∞ . При этом объем магнитной жидкости V_f будет изменяться при изменении H_∞ . Такая ситуация может быть реализована, например, если сосуд с магнитной жидкостью сообщается с другим сосудом, в котором поддерживается постоянный уровень магнитной жидкости. Проведенные для таких условий расчеты показали, если вначале при нулевом магнитном поле жидкость занимает односвязный объем, то при любом приложенном магнитном поле H_∞ существуют только односвязные решения, и не существует двухсвязных и трехсвязных равновесных решений. Форма поверхности однозначно определяется значениями H_∞ , θ_s и C . Это означает, что в случае переменного объема V_f форма поверхности и величина $\Delta V_f = V_f(H_\infty) - V_f(H_\infty = 0)$ меняются без скачков при квазистатическом изменении приложенного поля и однозначно определяются величиной и направлением приложенного поля.

1.3. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов

В §1.1 описаны результаты экспериментов, проведенных автором в НИИ Механики МГУ. Для сравнения теоретических и экспериментальных результатов проведены численные расчеты статики фиксированного объема магнитной жидкости, содержащей цилиндр из намагничивающегося материала, для различных значение вертикального приложенного поля. Вычисления были проведены при параметрах, совпадающих с экспериментальными: $n = 1.9 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $k_b = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}^2\text{К}$, $T = 300 \text{ К}$, $M_s = 5.22 \text{ Гс}$, $\sigma = 40 \text{ дин/см}$, $g = 980 \text{ см/сек}^2$, $\rho_s = 0.8999 \text{ г/см}^3$, $\rho_f = 1.41 \text{ г/см}^3$, $m = 2.6 \cdot 10^{-16} \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$, $R_V = 2.25 \text{ см}$, $R_b = 0.4 \text{ см}$, $\chi_0 = 0.011$, $\theta_s = 133^\circ$, $\theta_b = 142^\circ$, $\eta_f = 3 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$, $\eta_s = 25 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$. Объем магнитной жидкости 1 см^3 . В расчете на единицу длины вдоль оси y объем $V_f = 3.33 \text{ см}^2$. Численно решена система уравнений (1.9). Для каждого фиксированного значения магнитного поля найдены различные типы решений, удовлетворяющие граничным условиям и условию сохранения объема.

Вертикальное приложенное магнитное поле. Численно показано, что в некотором диапазоне приложенного вертикального магнитного поля существует несколько различных типов решения, что соответствует экспериментальным результатам, см. рис. 1.16. Вычислены диапазоны приложенных полей, при которых существуют различные типы решений (см. табл. 1.3).

Таблица 1.3. Диапазоны полей, в которых существует различные типы решений

Тип решения	Теория Диапазон полей, Э	Эксперимент Диапазон полей, Э
Один объем	$0 < H_\infty < 465$	$0 < H_\infty < 460$
Два объема (различные решения)	$0 < H_\infty < 1080$	$0 < H_\infty < 460$
Три объема (различные решения)	$0 < H_\infty > 0$	$0 < H_\infty < 460$

Теоретически получено, что при значениях приложенного магнитного поля в диапазоне $0 < H_\infty < 465 \text{ Э}$ фиксированный объем V_f магнитной жидкости может занимать либо один объем, либо два объема (как симметричной, так и не симметричной формы), либо три объема. Также магнитная жидкость может содержать включения не намагничивающейся жидкости см. рис. 1.16, правая колонка. Эти численные результаты соответствуют экспериментальным. Во всем диапазоне полей, которые создавались в эксперименте, т.е. при $0 < H_\infty < 460 \text{ Э}$ наблюдались равновесные формы поверхности, состоящие либо из одного, либо двух, либо трех объемов, а также формы, содержащие включения немагнит-

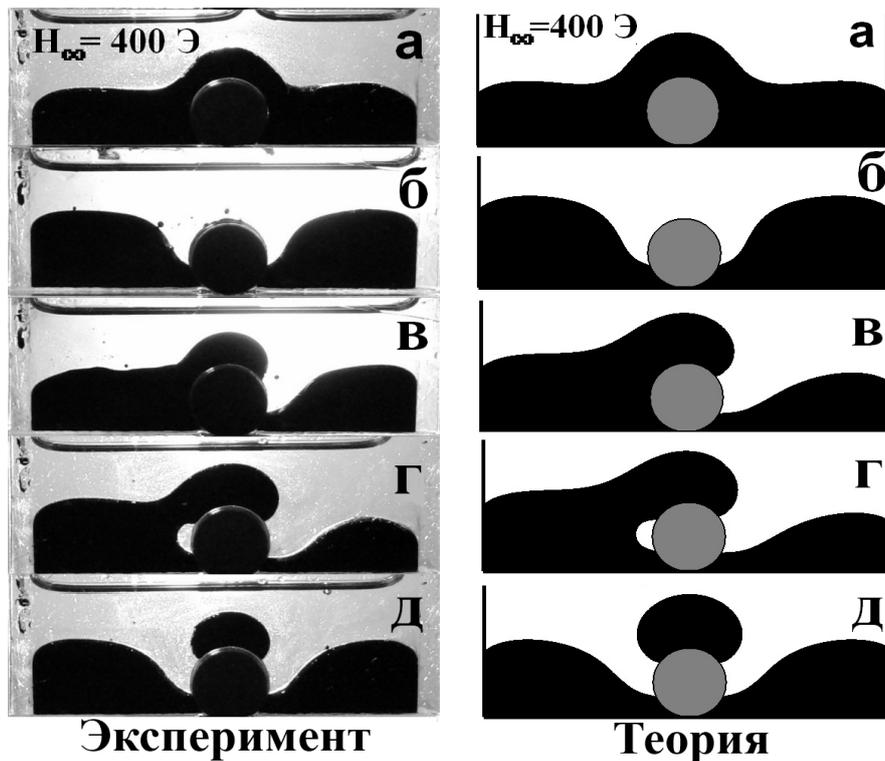


Рис. 1.16. Различные формы магнитной жидкости при $H_\infty = 400$ Э, наблюдаемые в эксперименте и полученные при расчете.

ной жидкости в магнитной, см. рис. 1.16, левая колонка. При полях больших $H_\infty > 465$ Э численно не найдено односвязного решения. При $H_\infty < 1080$ Э существуют решения в виде различных двух объемов магнитной жидкости. При $H_\infty > 1080$ Э существуют решения только в виде трех объемов (с каплей на цилиндре), см. табл. 1.3. Полученные теоретически формы поверхности магнитной жидкости близки к экспериментальным. На рис. 1.17 для примера представлена экспериментальная фотография объема магнитной жидкости при $H_\infty = 250$ Э и наложенная сверху теоретическая кривая (серая линия).



Рис. 1.17. Односвязный объем магнитной жидкости при $H_\infty = 250$ Э, линия - теоретический расчет.

Проведено сравнение высоты подъема поверхности односвязного объема магнитной жидкости в центре сосуда над цилиндром $\Delta h = h(x = 0) - R_b$, полученной в эксперименте и

при теоретических расчетах статики для различных значений постоянного приложенного магнитного поля H_∞ (см. рис. 1.18).

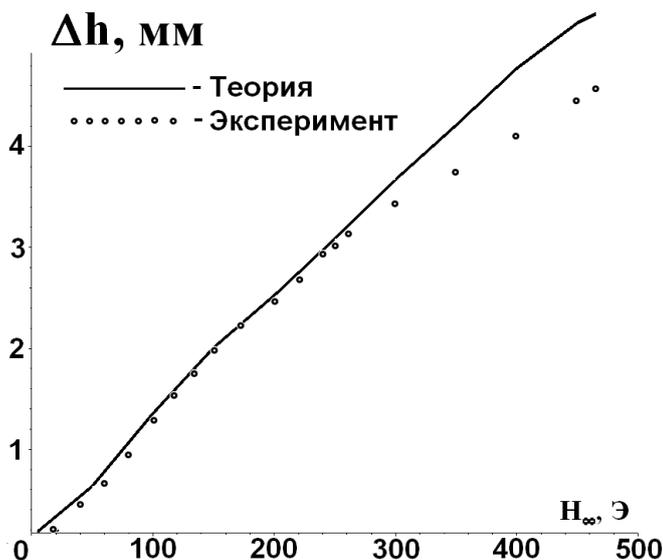


Рис. 1.18. Высота односвязного объема магнитной жидкости над цилиндром Δh для различных значений приложенного вертикального магнитного поля H_∞ .

Наклонное приложенное магнитное поле. Проведены численные расчеты статики фиксированного объема магнитной жидкости, содержащей цилиндр из намагничивающегося материала, для магнитных полей H_∞ , направленных под различными углами α к горизонтальной плоскости ($\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$). На рис. 1.19 изображены некоторые возможные формы поверхности магнитной жидкости полученные численно при $H_\infty = 250$ Э, $\alpha = 60^\circ$

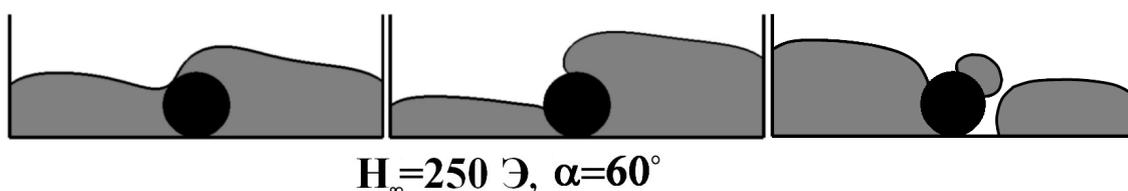


Рис. 1.19. Различные формы поверхности магнитной жидкости в однородном приложенном поле H_∞ , направленном под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонтали.

Вычисления были проведены при параметрах, указанных выше в этом пункте и совпадающих с экспериментальными. Численно получены различные формы поверхности магнитной жидкости, которые состоят из одного, двух или трех объемов. Теоретически вычислены диапазоны магнитных полей, в которых существуют различные типы решений

(см. таб. 1.4). Вычисления показали, что существуют критические значения приложенного поля H_{cr1} и H_{cr2} . Для наклонных полей теоретически показано, что односвязное решение существует при полях H_∞ меньших некоторого значения магнитного поля H_{cr1} , $H_\infty < H_{cr1}$, а трехсвязное решение реализуется начиная с некоторого другого критического значения поля H_{cr2} , $H_\infty > H_{cr2}$. Величины H_{cr1} и H_{cr2} существенно зависят от угла наклона поля α . Значения полей, для различных α , при которых в эксперименте односвязный объем распадается на два, при квазистатическом увеличении поля H_∞ , близки к верхней границе диапазонов существования односвязных решений H_{cr1} , полученных теоретически (см. таб. 1.4). Здесь в отличие от случая вертикального приложенного магнитного поля односвязный объем реализуется при достаточно малых полях, а три объема возникают при достаточно больших значениях приложенного магнитного поля.

Таблица 1.4. Диапазоны полей H_∞ Э, в которых существуют различные решения

Угол наклона приложенного поля	Один объем Расчет	Два объема Расчет	Три объема Расчет	Эксперимент Распад одного объема на два
$\alpha = 30^\circ$	$H_\infty < H_{cr1} = 250$	$H_\infty < 2700$	$H_\infty > H_{cr2} = 230$	$H_\infty = 250$
$\alpha = 45^\circ$	$H_\infty < H_{cr1} = 205$	$H_\infty < 4000$	$H_\infty > H_{cr2} = 310$	$H_\infty = 190$
$\alpha = 60^\circ$	$H_\infty < H_{cr1} = 160$	$H_\infty < 9500$	$H_\infty > H_{cr2} = 330$	$H_\infty = 140$

1.4. Сравнение теоретических результатов с экспериментами, проведенными в ТУ Ильменау, Германия

В экспериментах в Техническом Университете Ильменау, описанных в работе [99], использовалась магнитная жидкость производства ferrotec EMG905 (свойства жидкости приведены в таблице 1.5), которая помещалась в кювету из оргстекла. Кювета имеет квадратное сечение со стороной $L = 2R_V = 10$ см и толщину $\delta_V = 0.3$ см. В центре на дне кюветы помещен цилиндрический стальной стержень радиуса $R_b = 1$ см, см. рис. 1.20 а. Длина стержня $s_c = 30$ см. В начальный момент, когда магнитное поле отсутствует, поверхность магнитной жидкости находится на высоте $h = 2$ мм выше концентратора. Объем магнитной жидкости $V_f = 5.63$ см³. Поверхность магнитной жидкости контактирует с окружающим воздухом. Однородное приложенное вертикальное магнитное поле создается электромагнитом. Рассмотрены два различных способа изменения магнитного поля (1 - ступенчатый; 2 - непрерывный). Графики зависимости магнитного поля от времени приведены на рис. 1.20 б.

Таблица 1.5. Свойства магнитной жидкости EMG905

Parameter name	Parameter value
Несущая жидкость	Isoparaffin
Начальная восприимчивость	$\chi_0 = 0.151$
Намагниченность насыщения	$M_{fs} = 31.8$ Гс
Концентрация ферромагнитных частиц	$n = 5.4 \cdot 10^{16}$ см ⁻³
Коэффициент поверхностного натяжения магнитная жидкость-воздух	$\sigma = 47$ г/с ²
Плотность	$\rho_f = 1.24$ г/см ³
Коэффициент кинематической вязкости	$\nu_f = 7.258 \cdot 10^{-2}$ см ² /с
Угол смачивания стенки магнитной жидкостью	$\theta_s = 43^\circ$
Угол смачивания тела магнитной жидкостью	$\theta_b = 90^\circ$

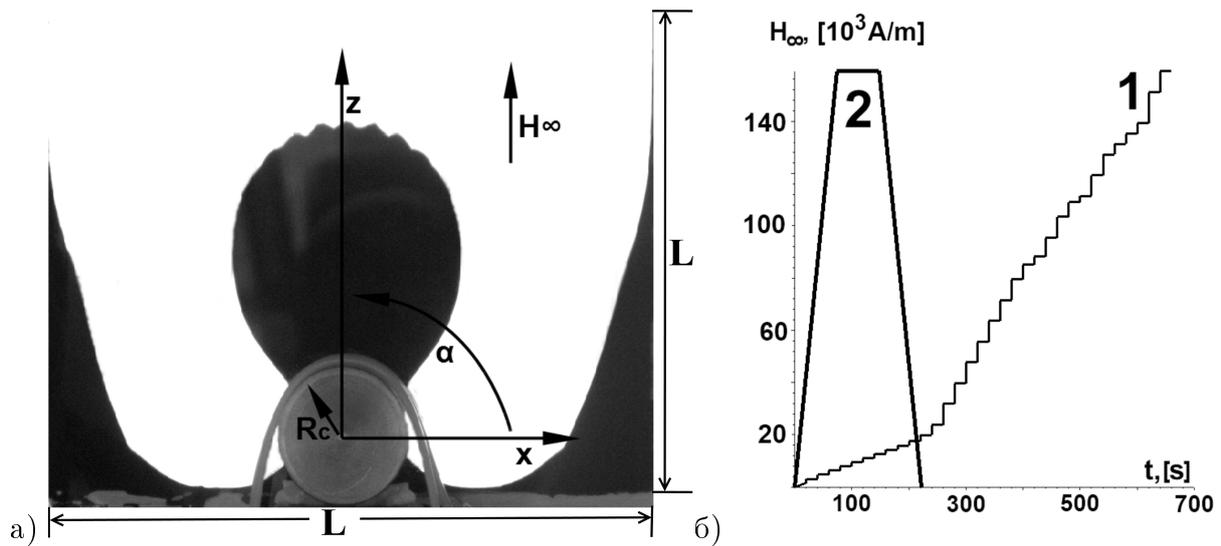


Рис. 1.20. а) Магнитная жидкость вокруг стального цилиндра в однородном вертикальном магнитном поле. б) Различные способы изменения приложенного магнитного поля в эксперименте: 1 - ступенчатое (квазистатическое) увеличение поля, 2 - непрерывное изменение поля.

Результаты эксперимента.

Эксперимент N 1. Вертикальное магнитное поле H_∞ в эксперименте возрастает ступенчато от 20 Э до 2000 Э (см. рис. 1.20 б, линия 1). Величина ступеньки $\Delta H_\infty \sim 20$ Э. Время, в течение которого поле остается постоянным $H_\infty = \text{const}$, равно 20 с. Изменение формы поверхности магнитной жидкости при таком поле показано на рис. 1.21.



Рис. 1.21. Фотографии магнитной жидкости в эксперименте в возрастающем магнитном поле H_∞ различной величины.

В возрастающем поле односвязный объем разделяется на три независимых объема при $H_\infty = 180$ Э. При дальнейшем увеличении поля объем остается трехсвязным и симметричным (см. рис. 1.20 а).

Эксперимент N 2. Для исследования динамики магнитной жидкости приложенное магнитное поле $H_\infty(t)$ непрерывно линейно увеличивается в течение 74 с от 0 до 2000 Э: $H_\infty = at$, $a = 27$ Э/с. Затем магнитное поле $H_\infty = 2000$ Э держится постоянным в

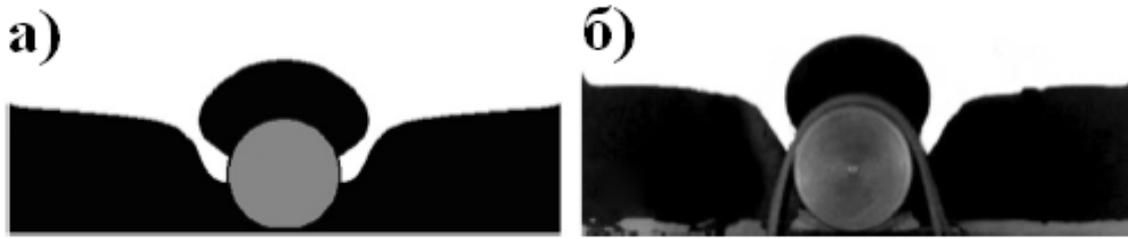


Рис. 1.22. Статические формы магнитной жидкости в вертикальном магнитном поле $H_\infty = 180$ Э: а) расчет, б) эксперимент.

течении 74 с, затем магнитное поле непрерывно линейно убывает с той же скоростью $H_\infty = 2000 - at$, (см. рис. 1.20 б, линия 2). В этом эксперименте в возрастающем вертикальном поле магнитная жидкость скачкообразно разделяется на три независимых объема при $H_\infty = 180$ Э. В убывающем поле капля магнитной жидкости на концентраторе уменьшается и меняет форму, затем при $H_\infty = 207$ Э магнитная жидкость скачкообразно разделяется на два независимых объема не симметричных относительно вертикальной оси. При дальнейшем убывании поля при $H_\infty = 149$ Э магнитная жидкость скачкообразно становится односвязной и симметричной. Видно, что в убывающем поле форма жидкости отличается от формы магнитной жидкости в возрастающем поле. Таким образом экспериментально обнаружены скачкообразные изменения формы поверхности магнитной жидкости (при $H_\infty = 180$ Э в возрастающем поле, при $H_\infty = 149$ Э и $H_\infty = 207$ Э при в убывающем) и гистерезис формы в циклически возрастающем и убывающем магнитном поле.

Численные расчеты статической формы магнитной жидкости проведены при параметрах, соответствующих экспериментальным: $T = 300$ К, $g = 980$ см/с², $\rho^{(s)} = 1.172 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $\eta^{(s)} = 14.67 \cdot 10^{-2}$ см²/с, $V_0 = 5.63$ см³, и параметрах магнитной жидкости, представленных в таблице 1.5. Для этих параметров расчет формы магнитной жидкости, проведенный при $H_\infty = 180$ Э, представлен на рис. 1.22 а. Видно, что расчетная форма поверхности хорошо совпадает с экспериментом, см. рис. 1.22 б.

Расчеты показывают, что при магнитных полях больших $H_\infty > 160$ Э могут реализоваться односвязный объем (в случае, когда $H_\infty < 210$ Э) и различные решения в виде трех независимых объемов. Это означает, что в диапазоне полей $160 < H_\infty < 210$ Э может произойти разрыв односвязного объема на три независимых объема. В обоих экспериментах такой переход произошел при $H_\infty = 180$ Э. То есть такой скачок в эксперименте происходит при значении поля, попадающем в предсказанный теоретически диапазон.

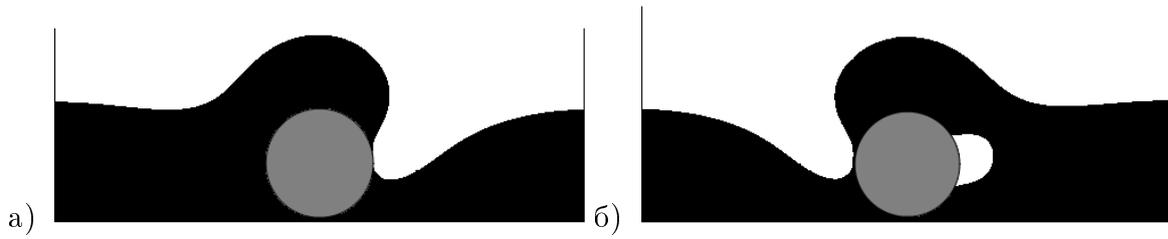


Рис. 1.23. Возможные статические несимметричные формы объема магнитной жидкости при $H_\infty = 400$ Э, полученные теоретически.

Теоретически получены двусвязные несимметричные относительно вертикальной оси решения см. рис. 1.23 а, и показано, что такие решения существуют при полях $149 \text{ Э} < H_\infty < 570 \text{ Э}$. В непрерывно меняющемся убывающем поле (эксперимент № 2) двусвязный объем реализуется в диапазоне $149 \text{ Э} < H_\infty < 207 \text{ Э}$. Видно, что этот диапазон находится внутри рассчитанного теоретически диапазона.

Диапазоны приложенных полей в которых могут происходить различные скачкообразные изменения формы поверхности приведены в табл. 1.6. Экспериментально полученные значения приложенного магнитного поля, при которых происходят скачкообразные изменения, попадают в теоретически предсказанные диапазоны.

Таблица 1.6. Диапазоны полей, в которых происходят различные изменения формы поверхности

Тип скачка	Теория $H_\infty, \text{ Э}$	Эксперимент (непрерывное $H_\infty \uparrow, \text{ Э}$	изменение поля) $H_\infty \downarrow, \text{ Э}$
Один объем \longleftrightarrow два объема	$149 < H_\infty < 210$	—	149
Один объем \longleftrightarrow три объема	$160 < H_\infty < 210$	180	—
Два объема \longleftrightarrow три объема	$160 < H_\infty < 570$	—	207

1.5. Влияние полимерной пленки на форму поверхности магнитной жидкости

В различных устройствах на основе магнитной жидкости (насосах, клапанах, дозаторах) наличие поверхностной полимерной пленки необходимо для предотвращения перемешивания жидкостей и уноса магнитной жидкости потоком соседней среды. В связи с этим рассмотрим статику постоянных и переменных объемов магнитной жидкости, содержащей цилиндрический концентратор, при наличии полимерной пленки на поверхности магнитной жидкости в однородном вертикальном магнитном поле. Рассматривается случай, когда пленка вначале при нулевом магнитном поле $H_\infty = 0$ натянута горизонтально и закреплена на высоте $h_0 > R_b$ (цилиндр покрыт магнитной жидкостью). Полимерная пленка невесома и бесконечно растяжима. Теоретически наличие растяжимой полимерной пленки описывается эффективным поверхностным натяжением (считается, что поверхностное натяжение жидкости и полимерной пленки совпадают) и различными граничными условиями на стенке сосуда. Рассматриваются следующие граничные условия: фиксированная высота подъема жидкости около вертикальных стенок сосуда (когда пленка не прилипает к стенкам) или угол между пленкой и стенкой равен 0 или 180° (когда пленка прилипает к стенке). Таким образом будет исследовано влияние двух разных вариантов граничных условий на форму поверхности магнитной жидкости.

1.5.1. Постоянный объем магнитной жидкости

Вариант 1. Рассматриваются решения следующих уравнений и граничные условия моделирующие наличие полимерной пленки на поверхности магнитной жидкости, когда она не прилипает к стенке сосуда:

$$\begin{aligned}\frac{dh^*}{dl} &= -\sin \theta, & \frac{dx^*}{dl} &= \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dl} &= C^* - Gh^* + P_1 P^*, \\ h^*(\pm 1) &= h_0^*.\end{aligned}\tag{1.10}$$

В этом варианте расчета, считается, что полимерная пленка не прилипает к вертикальной поверхности стенки и высота подъема магнитной жидкости на стенках $h(x^* = \pm 1) = h_0 = const$ считаются постоянными. Объем магнитной жидкости V_f считается постоянным. Численные расчеты здесь и далее в этом подпункте проводились при параметрах

экспериментов, описанных в п. 1.4.: $h_0 = 1.2$ см $T = 300$ К, $g = 980$ г/с², $\chi_0 = 0.151$, $M_{fs} = 31.8$ Гс, $n = 5.4 \cdot 10^{16}$ см⁻³, $\sigma = 47$ дин/с², $\rho_f = 1.24$ г/см³, $\rho_s = 1.172 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $R_b = 1$ см, $R_V = 5$ см, $V_f = 18.75$ см².

Численное решение задачи показало, что при магнитных полях $H_\infty < 165$ Э существует единственное решение в виде односвязного объема. При значениях магнитного поля $H_\infty > 165$ Э существует множество решений различных типов, состоящих из одного симметричного объема, двух при $H_\infty < 280$ Э или трех объемов при $H_\infty > 170$ Э, которые могут быть как симметричными, так и не симметричными, см. таблицу 1.7, вариант 1.

Таблица 1.7. Диапазоны значений H_∞ Э, при которых могут реализоваться различные решения

	Один объем	Два объема	Три объема
Теоретический расчет без пленки	$H_\infty < 210$	$150 < H_\infty < 570$	$H_\infty > 160$
Теоретический расчет с пленкой, вариант 1: $h(x = \pm 1) = h_0$	$H_\infty < 210$	$165 < H_\infty < 280$	$H_\infty > 170$
Теоретический расчет с пленкой, вариант 2: $\theta_s = 0^\circ \vee 180^\circ$	—	$185 < H_\infty < 595$	$H_\infty > 275$

Согласно расчету (вариант 1) должен произойти переход односвязного решения в решение, описывающее два объема при полях $165 \text{ Э} < H_\infty < 210 \text{ Э}$ или в решение, описывающее три объема с каплей жидкости на цилиндре при полях $170 \text{ Э} < H_\infty < 210 \text{ Э}$.

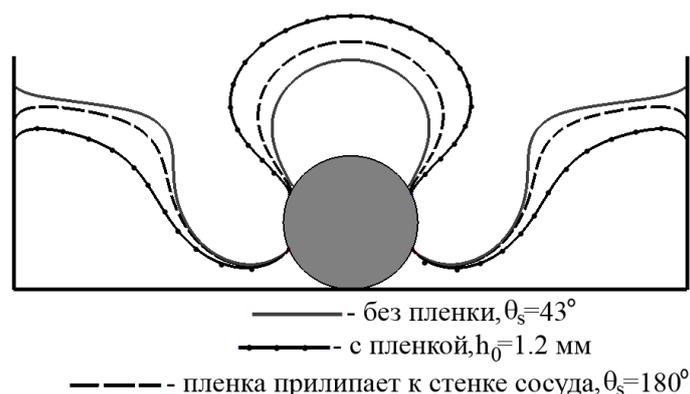


Рис. 1.24. Трехсвязный объем магнитной жидкости V_f при $H_\infty = 600$ Э в случае минимального объема капли: сплошная линия - с пленкой при $h(x = \pm 1) = h_0$; пунктирная линия - с пленкой, прилипающей к стенке сосуда; серая линия - без пленки, $\theta_s = 43^\circ$.

Сравнение расчетов с фиксированной высотой жидкости у стенки (с пленкой) и фик-

сированным углом смачивания на стенке $\theta_s = 43^\circ$ (без пленки п. 1.4.) показало, что при малых полях нет существенного отличия. При больших полях, при которых существует только трехсвязные решения, показано, что при наличии пленки объем магнитной жидкости в капле на теле больше, чем соответствующий объем при отсутствии пленки, см. рис. 1.24. Диапазоны магнитных полей, при которых может реализоваться двусвязное решение различаются существенно (с пленкой, вариант 1, $165 \text{ Э} < H_\infty < 280 \text{ Э}$, без пленки $150 \text{ Э} < H_\infty < 570 \text{ Э}$).

Вариант 2. В некоторых случаях пленка может соприкоснуться с вертикальной стенкой сосуда и высота подъема магнитной жидкости у стенки $h(x^* = \pm 1)$ становится переменной (вариант 2). При этом угол между касательной к поверхности магнитной жидкостью и вертикалью $\theta_s = 0^\circ$ (при $h(x^* = \pm 1) < h_0$) или 180° (при $h(x = \pm 1) > h_0$) считается фиксированным. При этом рассматриваются решения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dh^*}{dl} &= -\sin \theta, & \frac{dx^*}{dl} &= \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dl} &= C^* - Gh^* + P_1 P^*, & & (1.11) \\ \text{при } h(x^* = \pm 1) < h_0 : \theta_s &= 0^\circ \text{ или при } h(x = \pm 1) > h_0 : \theta_s &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Расчеты проведены при указанных выше в этом пункте параметрах. Показано, что для такого типа граничных условий на стенке сосуда, двусвязные симметричные и несимметричное решение существует при $185 \text{ Э} < H_\infty < 595 \text{ Э}$, а три объема существуют при $H_\infty > 275 \text{ Э}$, см. таб. 1.7, вариант 2. Решения, описывающего односвязный объем $V_f = 18.75 \text{ см}^2$, не существует. Поля, в которых реализуются двусвязные и трехсвязные решения, больше, чем соответствующие поля при расчете варианта 1. Это связано, по видимому, с тем, что для того чтобы пленка прилипла к поверхности сосуда, необходимы достаточно большие магнитные поля. Таким образом, при выбранном $h_0 > R_b$ сначала при малых магнитных полях, реализуется вариант 1, а затем, при больших магнитных полях $H_\infty > 185 \text{ Э}$ может реализоваться как вариант 1, так и вариант 2.

1.5.2. Переменный объем магнитной жидкости

Рассмотрим случай, когда объем магнитной жидкости V_f может изменяться, но константа $C = p_{0f} - p_{0s}$ фиксирована для всех значений приложенного магнитного поля. Такой вариант реализуется, например, если сосуд с магнитной жидкостью сообщается с достаточно большим резервуаром, в котором поддерживается постоянный уровень магнитной

жидкости, см. рис. 1.25 а. При этом C не зависит от величины приложенного поля и считается постоянной. Константа C выбирается таким образом, чтобы в отсутствии магнитного поля поверхность жидкости под пленкой над концентратором была горизонтальной. При численных расчетах в этом подпункте использовались следующие значения параметров: $M_{fs} = 2.5$ Гс, $\sigma = 35$ г/с², $R_V = 5$ см, $R_b = 1$ см, $g = 980$ г/с², $\rho_s = 1$ г/см³, $\rho_f = 1.1$ г/см³.

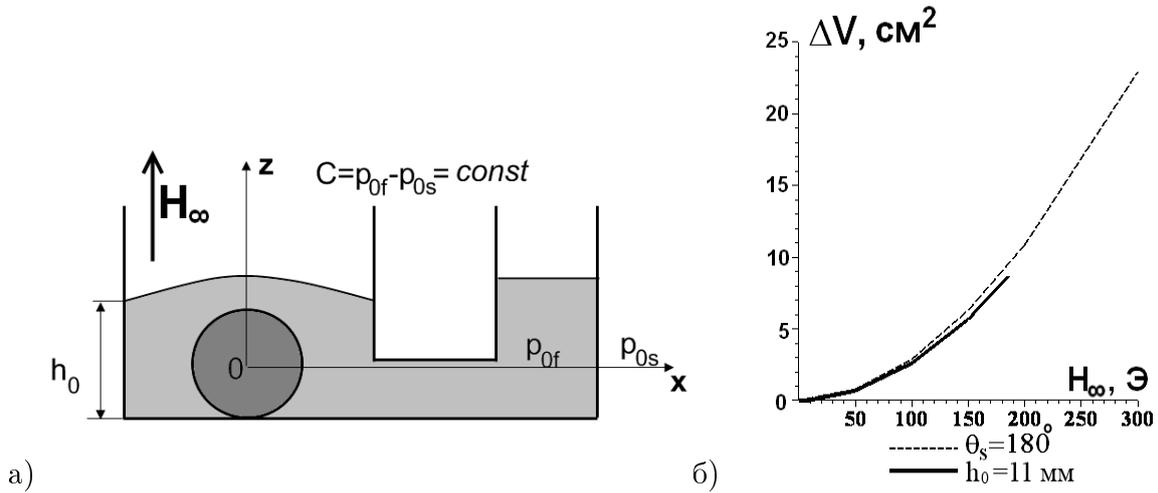


Рис. 1.25. а) Форма поверхности магнитной жидкости над намагничивающимся цилиндром при постоянном давлении в однородном вертикальном поле, пленка закреплена на высоте h_0 ; б) Зависимость объема вытесняемой жидкости от магнитного поля с пленкой на поверхности магнитной жидкости: сплошная линия - вариант 1 ($h_0 = const$), пунктирная линия - вариант 2 ($\theta_s = 180^\circ$).

Вариант 1. Рассматривается случай, когда пленка при нулевом поле $H_\infty = 0$ натянута горизонтально и зафиксирована на вертикальных стенках сосуда на высоте $h_0 > R_b$ над цилиндром (вариант 1). Эта высота на стенках сохраняется при любом значении приложенного магнитного поля H_∞ . Расчеты показали, что при $h_0 = 1.1$ см, $C = 107.8$ дин/см². Из решения системы (1.10) получена зависимость объема вытесняемой не магнитной жидкости $\Delta V_f = V_f(H_\infty) - V_f(H_\infty = 0)$ от величины приложенного магнитного поля см. рис. 1.25 б, сплошная линия. В случае переменного объема магнитной жидкости при $C = const$ не обнаружено двусвязных или трехсвязных форм поверхностей, а существует только односвязные решения, определяемые однозначно. При $H_\infty > 186$ Э не найдено решений, удовлетворяющих граничным условиям $h(x^* = \pm 1) = h_0 = const$ (вариант 1). Это означает, что при $H_\infty > 186$ Э пленка заведомо прилипает к стенке сосуда и поверхность магнитной жидкости начинается из точки не равной h_0 .

Вариант 2. Если пленка на поверхности отсутствует или прилипает к стенке, то

высота подъема жидкости у стенки h_0 меняется, но остаются постоянными константа C и угол смачивания θ_s . Рассмотрены решения для $\theta_s = 180^\circ$ (вариант 2). При этом, как и в варианте 1, при $h_0 = const$ не обнаружены двусвязные и трехсвязные решения, и существует только односвязное однозначное решение. Зависимость вытесняемого объема в этом случае приведена на рис. 1.25 б (пунктирная линия). Видно, что вытесняемые объемы при одном и том же значении приложенного поля в диапазоне $H_\infty < 186$ Э отличаются незначительно. При $H_\infty < 186$ Э может реализоваться вариант 1, см. рис. 1.25 б (сплошная линия) или вариант 2 (пунктирная линия), при $H_\infty > 186$ Э существует только решения, соответствующие варианту 2, и зависимость $\Delta V(H_\infty)$ определяется пунктирной линией на рис. 1.25 б.

Можно сделать вывод о том, что в случае, когда при $H_\infty = 0$ поверхность горизонтальна $h = h_0 > R_b$, при квазистатическом увеличении поля H_∞ вначале реализуется решения с граничными условиями $h(x^* = \pm 1) = h_0 = const$ (вариант 1), а затем при некотором значении $H_\infty \leq 186$ Э форма поверхности начинает описываться решением уравнений с граничным условием $\theta_s = 180^\circ$ (вариант 2).

Выводы к главе 1. Проведено экспериментальное и теоретическое исследование деформации формы поверхности магнитной жидкости постоянного объема, содержащей цилиндрический концентратор, в различных однородных приложенных магнитных полях. Получены теоретически и наблюдались в эксперименте различные устойчивые равновесные формы поверхности магнитной жидкости, состоящие из одного, двух или трех объемов. Вычислены диапазоны полей, в которых существуют различные типы решений и показана возможность скачкообразных изменений формы магнитной жидкости. Предсказана возможность гистерезиса формы магнитной жидкости. Экспериментально в различных переменных магнитных полях обнаружены скачкообразные изменения и гистерезис формы объема магнитной жидкости. Обнаружено что теоретические и экспериментальные результаты хорошо согласуются. Теоретически получено, что в случае переменного объема магнитной жидкости, если без магнитного поля объем был односвязным, то при наличии приложенного магнитного поля существует единственное решение — односвязный объем, и поэтому отсутствуют скачкообразные изменения и гистерезис формы магнитной жидкости.

Теоретически исследовано влияние пленки на поверхности магнитной жидкости, содержащей цилиндрический концентратор, в однородном вертикальном приложенном поле.

Получено, что наличие пленки, натяжение которой такое же, как и поверхностное натяжение магнитной жидкости, приводит к более высокому подъему жидкости с фиксированным объемом над цилиндром в больших магнитных полях. В случае переменного объема жидкости двусвязных и трехсвязных решений не обнаружено как при наличии пленки, так и без нее. В этом случае пленка обязательно должна прилипать к вертикальной стенке сосуда при увеличении приложенного магнитного поля.

Деформация поверхности магнитной жидкости, содержащей шар из намагничивающегося материала, в однородном магнитном поле

2.1. Постановка задачи о форме поверхности магнитной жидкости, содержащей шар из намагничивающегося материала, в однородном вертикальном магнитном поле

Пусть твердый шар радиуса R_b из намагничивающегося материала (концентратор магнитного поля) находится на дне в центре цилиндрического сосуда радиуса R_V , наполненного тяжелой магнитной жидкостью (см. рис. 2.1). Сверху магнитная жидкость контактирует с окружающей средой (газом или обычной жидкостью). Центр цилиндрической системы координат ρ , ψ , z совпадает с центром шара, полярный угол ψ отсчитывается против часовой стрелки, ось z направлена вертикально вверх.

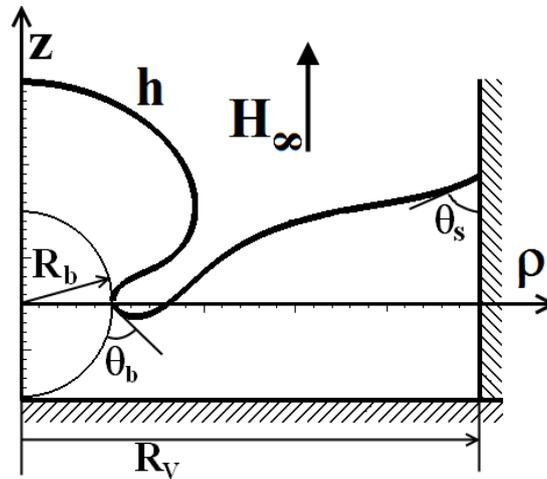


Рис. 2.1. Объем магнитной жидкости вокруг намагничивающегося шара в вертикальном приложенном поле H_∞ .

Приложенное вертикальное магнитное поле H_∞ однородно, $H_\infty = \text{const}$. Параметры, относящиеся к шару, магнитной жидкости и окружающей среде, обозначены индексами b , f , и s , соответственно. Давление в окружающей среде p_s постоянно, $p_s = \text{const}$,

т.е. движением окружающей среды пренебрегается. Окружающая среда не намагничивается $M_s = 0$. Намагниченность тела линейно зависит от напряженности магнитного поля $M_b = \chi_b H$, $\chi_b = \text{const} \gg 1$. В предположении, что намагниченность тела много больше намагниченности жидкости, ($M_b \gg M_f$), и в безындукционном приближении ($H \gg 4\pi M_f$) магнитная жидкость не искажает неоднородное магнитное поле H вокруг шара, величина которого вычисляется по формуле:

$$H = \sqrt{\frac{9A^2 z^2 H_\infty^2 \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^5} + \left(H_\infty + AH_\infty \left(\frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \right) \right)^2}. \quad (2.1)$$

Здесь константа $A = -R_b^3$.

Намагниченность магнитной жидкости зависит от магнитного поля по Ланжевеновскому закону (1.3). Уравнения и граничные условия на поверхности магнитной жидкости $z = h(\rho)$, описывающие статику магнитной жидкости, как и в плоском случае, имеют вид (1.4), (1.5).

С учетом интеграла уравнения равновесия (1.4) из динамического граничного условия (1.5) в безындукционном приближении ($H \gg 4\pi M_f$) получим условие на статической поверхности магнитной жидкости ($z = h(\rho)$):

$$\begin{aligned} z = h: \quad C + (\rho_s - \rho_f)gh + P(H) &= \pm 2\sigma K, \\ P &= \int_0^H M_f(H) dH, \quad H = H(x, z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $C = p_{0f} - p_{0s} = \text{const}$. В осесимметричном случае, когда $z = h(\rho)$, в цилиндрических координатах (ρ, ψ, z) средняя кривизна поверхности K может быть записана в виде:

$$K = \frac{h'' + \frac{1}{\rho}h'^3 + \frac{1}{\rho}h'}{2(1 + h'^2)^{3/2}}. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.2) с учетом (2.3) является нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно h . При этом на стенках сосуда и на теле (в случае, когда свободная поверхность жидкости касается поверхности тела) заданы углы смачивания θ_s и θ_b , соответственно. Объем магнитной жидкости V_f считается постоянным. Далее будут получены различные численные решения этого уравнения.

Введем безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \rho^* &= \rho/R_V, \quad h^* = h/R_V, \quad z^* = z/R_V, \quad H^* = H/H_\infty, \quad P_1 = P_0 R_V / \sigma, \\ G &= \frac{gR_V^2(\rho_f - \rho_s)}{\sigma}, \quad \xi = M_{fs} \frac{H_\infty}{nk_b T}, \quad P^* = P/P_0, \quad V_f^* = V_f/R_V^3, \quad R_b^* = R_b/R_V. \end{aligned}$$

В безразмерном виде уравнение (2.2) запишется следующим образом:

$$z^* = h^* : \quad C^* - Gh^* + P_1 P^* = \pm 2K^* \quad (2.4)$$

Здесь $C^* = (p_{0f} - p_{0s})L/\sigma = const$, $P_0 = nk_b T$. Форма поверхности зависит от следующих безразмерных параметров: P_1 , G , ξ_∞ , V_f^* , L_b^* , θ_s , θ_b .

Задача решалась в системе координат l, ψ, θ . Угол θ - это угол между касательной к кривой и горизонтальной осью, отсчитываемый по часовой стрелке; l - длина дуги кривой от стенки сосуда до рассматриваемой точки, ψ - полярный угол. При этом выражения для средней кривизны (2.3) будет иметь вид:

$$K = -sign(\cos \theta) \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dl} + \frac{\sin \theta}{\rho} \right). \quad (2.5)$$

Если перейти к координатам (l, ψ, θ) (см. рис. 1.15), то уравнение (2.4) в осесимметричном случае (параметры не зависят от угла ψ) перейдет в систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dl} &= -\sin \theta \\ \frac{d\rho}{dl} &= \cos \theta \\ \frac{d\theta}{dl} + \frac{\sin \theta}{\rho} &= C - Gh + P_1 P(\rho, h, \xi). \end{aligned} \quad (2.6)$$

В данной постановке рассматривается постоянный объем магнитной жидкости $V_f = const$. Будем искать осесимметричные формы поверхности магнитной жидкости. На стенке сосуда задан угол смачивания θ_s , в центре сосуда ($\rho = 0$) из условия симметрии угол между касательной к поверхности магнитной жидкости и горизонталью равен нулю:

$$h'(\rho = 1) = \text{tg } \theta_s, \quad h'(\rho = 0) = 0. \quad (2.7)$$

Для решения задачи были написаны программы на языке C++ (см. Приложение 3). Задача с граничными условиями сводится к задаче Коши, используя метод пристрелки. Задаче Коши решается методом Рунге-Кутты второго порядка. Начальные условия для задачи Коши при $l = 0$ и константа C подбирались так, чтобы выполнялись граничные условия исходной задачи (2.7) и сохранялся объем жидкости.

Программа позволяет определить разные типы решений: один и два объема, которые существует в заданном приложенном магнитном поле, вычислить диапазоны значений приложенных магнитных полей, в которых существуют разные типы решений, вычислить высоту подъема магнитной жидкости в различных точках над начальным уровнем.

Вычисления показали, что существуют критические значения приложенного поля H_{cr1} и H_{cr2} , такие что при $H_\infty < H_{cr1}$ существует только один объем магнитной жидкости (причем это решение единственное), при $H_{cr1} < H_\infty < H_{cr2}$ существует решение в виде одного объема и множество решений, состоящих из двух объемов, один из которых капля жидкости на шаре, при $H_\infty > H_{cr2}$ существует множество решений, состоящих из двух объемов (решений в виде одного объема не существует).

Далее будут проведены расчеты форм поверхности магнитной жидкости и критических значений приложенного однородного магнитного поля при параметрах экспериментов, проведенных в Белорусском национальном техническом университете. Будет проведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов.

2.2. Сравнение численных расчетов формы поверхности магнитной жидкости с экспериментами, проведенными в Белорусском национальном техническом университете

В эксперименте, проведенных в Белорусском Национальном Техническом Университете г. Минск, были использованы три различные магнитные жидкости ММТр-44 (сильно-намагничивающаяся жидкость), ММТр-10 и МВ-4 (слабонамагничивающиеся жидкости). Параметры жидкостей приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Свойства магнитных жидкостей, используемых в эксперименте

Property	ММТр-44	ММТр-10	МВ-4
Жидкость-носитель	Трансформаторное масло	Трансформаторное масло	Вода
Намагниченность насыщения M_{fs} , Гс	43.8	9.6	3.9
Начальная восприимчивость χ_0	0.215	0.008	0.016
Плотность ρ_f , г/см ³	1.4	1.115	1.037
Поверхностное натяжение σ , дин/см	28	30	36.9
Угол смачивания θ_s , °	46	31	52
Угол смачивания θ_b , °	46	31	55

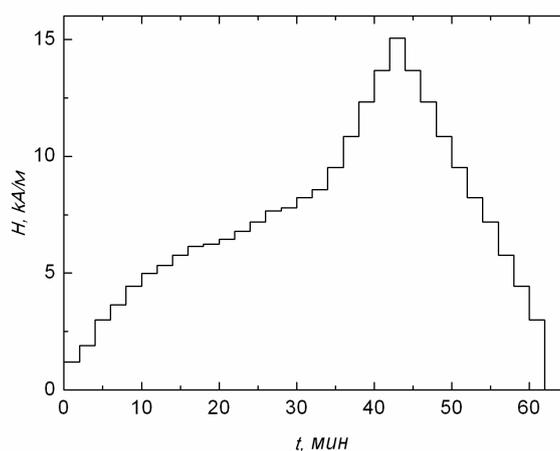


Рис. 2.2. Зависимость приложенного магнитного поля H_∞ в эксперименте от времени t .

Экспериментальная установка состояла из катушек Гельмгольца, создающих однородное поле, в которое помещалась прямоугольная кювета из оргстекла (ширина 81 мм,

длина 82 мм), наполненная магнитной жидкостью и помещенным в нее ферромагнитным шаром $R_b = 3$ мм. В эксперименте приложенное вертикальное магнитное поле изменялось квазистационарно "ступенчато", см. рис. 2.2.

В начальный момент времени, в отсутствии приложенного магнитного поля поверхность магнитной жидкости касается верхней точки шара $h(\rho = 0) = R_b$. Во время эксперимента производилась фоторегистрация, а также измерение высоты магнитной жидкости над шаром при помощи микрометрической тонкой немагнитной иглы.

Эксперимент с жидкостью ММТр-44. В эксперименте с сильно намагничивающейся магнитной жидкостью ММТр-44 (см. таб. 2.1) при увеличении приложенного магнитного поля на поверхности жидкости образуется небольшое гладкое возвышение. Величина этого возвышения растет с ростом поля. При некотором значении поля гладкое возвышение трансформируется в пик, имеющий конусообразную форму. Основание пика охватывает кольцевая воронка на поверхности жидкости. Незначительное дальнейшее увеличение поля ведет к резкому росту высоты пика. При достижении некоторого значения приложенного магнитного поля на поверхности жидкости возникает неустойчивость, проявляющаяся в скачкообразном появлении системы пиков на всей поверхности слоя жидкости. В эксперименте вплоть до полей $H_\infty < 176$ Э магнитная жидкость занимала один объем. При $H_\infty > 98$ Э наблюдалась поверхностная неустойчивость и образование пиков, которые не описывается теоретической моделью, приведенной выше. Гистерезис формы поверхности магнитной жидкости в циклически возрастающем и убывающем магнитном поле в эксперименте не наблюдался. Экспериментально исследована высота подъема жидкости над шаром Δh при различных значениях H_∞ , см. рис. 2.3.

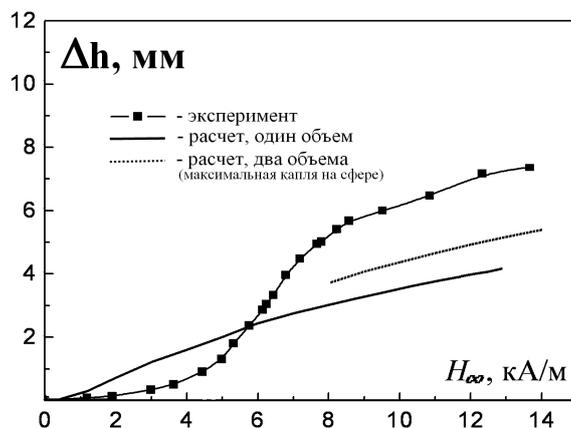


Рис. 2.3. Высота подъема магнитной жидкости в центре сосуда Δh от H_∞ для ММТр-44.

Проведены расчеты различных форм поверхностей сильно намагничивающейся магнитной жидкости ММТр-44. Теоретически получено, что решения в виде одного объема магнитной жидкости (см. рис. 2.4 а) реализуются при магнитных полях $H_\infty < H_{cr2} = 155$ Э. Решения, состоящие из двух объемов жидкости (см. рис. 2.4 б), один из которых капля магнитной жидкости, удерживаемая полем на шаре, существуют при $H_\infty > H_{cr1} = 101$ Э. Таким образом теоретически в циклически возрастающих и убывающих магнитных полях, величина которых $H_\infty < 155$ Э, может не наблюдаться скачкообразных изменений формы магнитной жидкости и гистерезисных явлений. Переход из решения в виде одного объема к двум объемам (или обратный переход) может произойти в диапазоне $H_{cr1} = 101 < H_\infty < H_{cr2} = 155$ Э (см. табл. 2.2). Например, при $H_\infty = 130$ Э существуют решения, состоящие из одного объема или из двух объемов (с каплей магнитной жидкости на шаре), см. рис. 2.4.

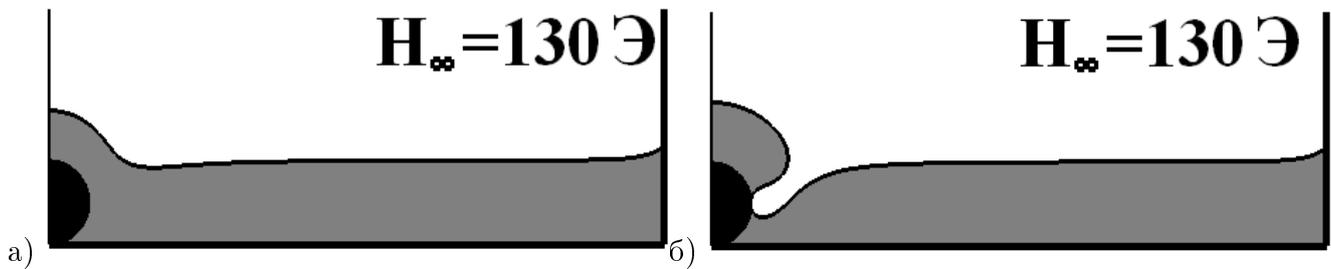


Рис. 2.4. Теоретически рассчитанные формы магнитной жидкости ММТр-44 над намагничивающимся шаром в вертикальном поле при $H_\infty = 130$ Э а) один объем б) два объема.

Таблица 2.2. Критические значения приложенного магнитного поля H_∞ , Э (теория)

	Один объем	Два объема
ММТр-44	$H_\infty < H_{cr2} = 155$	$H_\infty > H_{cr1} = 101$
ММТр-10	$H_\infty < H_{cr2} = 800$	$H_\infty > H_{cr1} = 285$
МВ-4	$H_\infty < H_{cr2} = 1070$	$H_\infty > H_{cr1} = 375$

Проведено сравнение экспериментальных данных и теоретических результатов. На рис. 2.3 показана высота подъема магнитной жидкости в центре сосуда (над шаром) $\Delta h = h(\rho = 0) - R_b$ при различных магнитных полях, измеренная в эксперименте и рассчитанная численно. Несовпадение теории и эксперимента может быть объяснено тем, что при данных параметрах (сильно намагничивающаяся жидкость) и малых магнитных

полях не выполняется безындукционное приближение ($H \gg 4\pi M_f$), использованное при расчетах.

Эксперименты с магнитножидкостями ММТр-10 и МВ-4. В эксперименте для слабомагнитных жидкостей ММТр-10 и МВ-4 отсутствовали эффекты, связанные с неустойчивостью плоского слоя. При увеличении приложенного магнитного до $H_\infty < 280$ Э поля изменение поверхности жидкости носило плавный характер. Жидкость поднималась над шаром, в тоже время уровень жидкости вокруг шара понижался, и в больших полях отчетливо просматривалась кольцевая воронка вокруг шара. Обе жидкости занимали односвязный объем. Скачкообразного разделения магнитной жидкости на два объема и гистерезиса формы не наблюдалось (согласно расчетам скачки должны быть при $H_\infty > 285$ Э для ММТр-10, и при $H_\infty > 375$ Э для МВ-4). Измерена зависимость высота подъема магнитных жидкостей над шаром Δh от величины H_∞ , см. рис. 2.5.

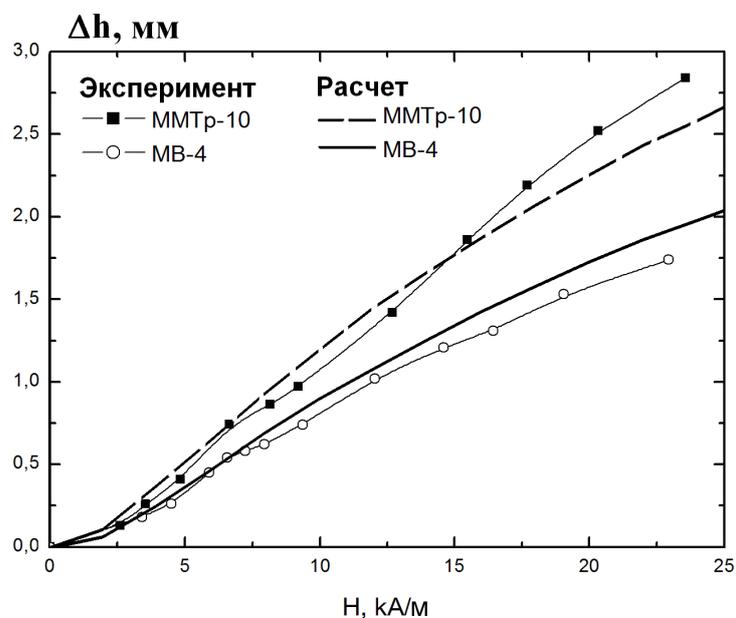


Рис. 2.5. Зависимость Δh от H_∞ для ММТр-10 и МВ-4, теория и эксперимент.

Проведены расчеты форм поверхности слабо намагничивающихся магнитных жидкостей ММТр-10 и МВ-4 для различных значений приложенного магнитного поля и получены решения в виде одного и двух объемов (с каплей жидкости на шаре), см. рис. 2.6. Расчеты показывают, что в исследуемом экспериментально диапазоне приложенных магнитных полей $H_\infty < 280$ Э, для обеих жидкостей ММТр-10 и МВ-4 реализуются только решения в виде односвязного объема, см. рис. 2.7 (при полях $H_\infty < H_{cr1} = 285$ Э для ММТр-10 и $H_\infty < H_{cr1} = 375$ Э для МВ-4, см. табл. 2.2). Это совпадает с результатами

экспериментов с жидкостями ММТр-10 и МВ-4. При достаточно больших полях $H_\infty > H_{cr1}$ существуют решения в виде двух независимых объемов. В диапазоне $H_{cr1} < H_\infty < H_{cr2}$ существуют решения для формы поверхности магнитной жидкости состоящий из одного и двух объемов, см. рис. 2.6. При $H_\infty > H_{cr2}$ реализуются только решения в виде двух независимых объемов. Значения H_{cr1} и H_{cr2} приведены в таблице табл. 2.2.

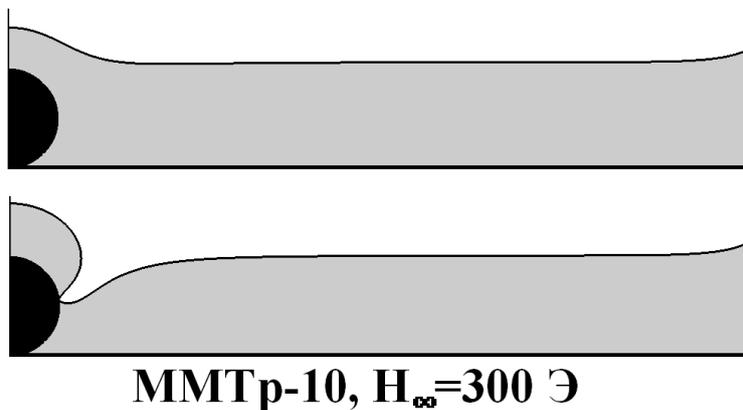


Рис. 2.6. Форма поверхности магнитной жидкости для одного и двух объемов ММТр-10 $H_\infty = 350$ Э.

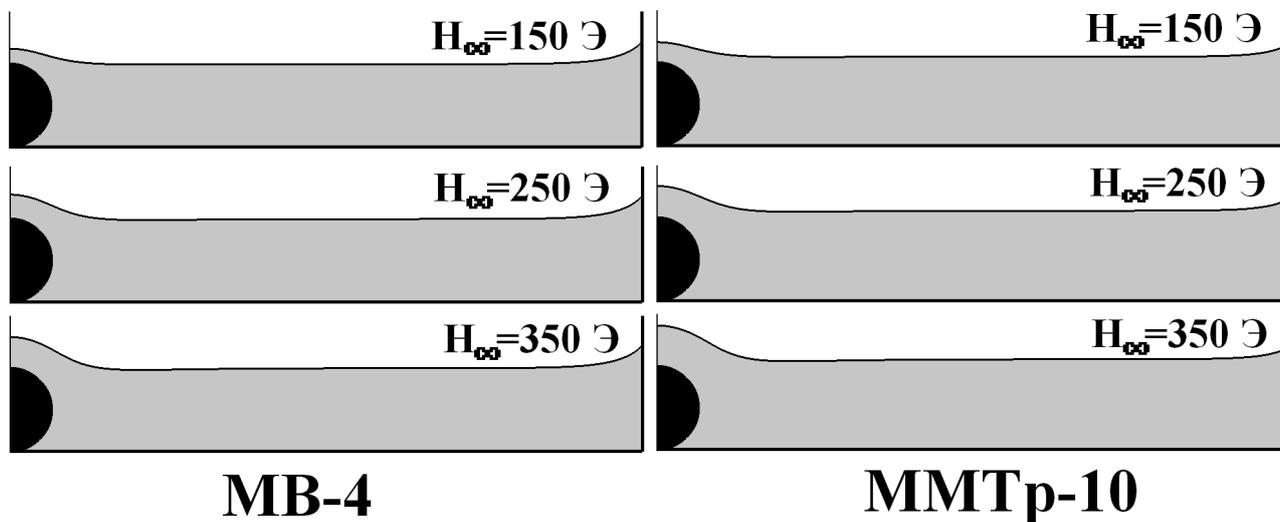


Рис. 2.7. Полученные численно формы поверхности односвязного объема магнитной жидкости для ММТр-10 МВ-4 над шаром при различных значениях приложенного поля H_∞ .

Проведено сравнение экспериментальных и теоретических результатов исследования высоты подъема магнитной жидкости над шаром. На рис. 2.5 показаны теоретические и экспериментальные зависимости высоты подъема магнитной жидкости над шаром

$\Delta h = h(\rho = 0) - R_b$ от приложенного магнитного поля H_∞ для слабо намагничивающихся жидкостей ММТр-10 и МВ-4. Теоретические и экспериментальные результаты хорошо согласуются.

Вывод к главе 2. В данной главе проведено теоретическое исследование свободной поверхности магнитной жидкости, содержащей шар из намагничивающегося материала, в однородном вертикальном магнитном поле. Численно получены статические формы поверхности магнитной жидкости. Теоретически показано, что при фиксированном значении магнитного поля (в некотором диапазоне), существует множество решений для форм поверхности, состоящих либо из одного, либо из двух объемов. Создана программа вычисления диапазонов существования различных типов решений. Проведено сравнение теоретических расчетов с экспериментами, проведенными в БТУ г. Минск. Показано, что теоретические и экспериментальные результаты хорошо согласуются для слабо намагничивающихся магнитных жидкостей. Это доказывает возможность использования предложенной методики расчета формы поверхности и диапазона значений приложенных магнитных полей, при которых происходят скачкообразные изменения формы поверхности магнитной жидкости.

Приведенные выше исследования могут быть использованы для создания насосов, в которых движение магнитной жидкости служат в качестве поршня. В возрастающем приложенном вертикальном поле уровень поверхности магнитной жидкости над концентратором повышается, при этом магнитная жидкость может вытеснять находящуюся сверху немагнитную жидкость. Т.о. направленное движение жидкости, возникающее при деформации поверхности магнитной жидкости, возможно создавать используя неподвижные концентраторы магнитного поля в переменных магнитных полях. Также возможно создать направленное движение используя движущиеся концентраторы магнитного поля в постоянном однородном приложенном магнитном поле. Таким образом, можно создавать, например, бегущее магнитное поле. Исследованию динамики слоя магнитной жидкости в бегущих магнитных полях посвящены следующие главы диссертации.

Течение и деформация поверхности тонкого слоя магнитной жидкости в бегущем магнитном поле

В данной главе исследуется течение тонкого слоя вязкой несжимаемой магнитной жидкости в бегущем магнитном поле с учетом силы тяжести и поверхностного натяжения. Неоднородное периодическое магнитное поле вызывает волнообразные изменения поверхности магнитной жидкости и течение магнитной жидкости с ненулевым средним расходом. При заданном бегущем магнитном поле вычисляются форма поверхности магнитной жидкости, поле скоростей и средний расход магнитной жидкости. Следует отметить, что в главах 3 и 4 поверхность магнитной жидкости считается устойчивой, т.е. рассматриваются магнитные поля, значения которых меньше критического магнитного поля, в котором наблюдается неустойчивость горизонтальной поверхности, а также рассматриваются магнитные силы, стабилизирующие поверхность магнитной жидкости ($-\rho_f g + M_f \nabla_z H < 0$, $|\rho_f g + M_f \nabla_z H| > |\rho_s g|$).

3.1. Постановка задачи. Предположения и упрощения.

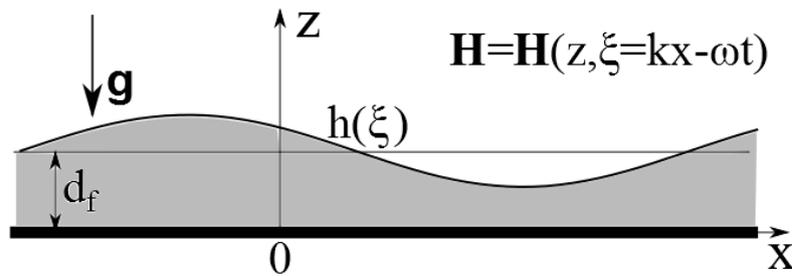


Рис. 3.1. Слой магнитной жидкости в бегущем магнитном поле.

Рассмотрим плоское изотермическое течение слоя тяжелой несжимаемой вязкой магнитной жидкости на твердой горизонтальной подложке (см. рис. 3.1) в магнитном поле $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z, x, t)$ (d — толщина невозмущенного магнитным полем слоя). Все параметры задачи зависят только от x , z и t , где (x, z) — декартова система координат. Ось x направлена горизонтально, ось z — вертикально. В плоскости $z = 0$ расположена твердая подложка. При достаточно малой концентрации магнитных частиц в магнитной жидкости

ее намагниченность \mathbf{M} магнитной жидкости зависит от напряженности магнитного поля по Ланжевеновскому закону:

$$\mathbf{M} = \chi(H)\mathbf{H}, \quad |\mathbf{M}| = M = M_{fs}\Lambda(\zeta), \quad \Lambda(\zeta) = \text{cth}(\zeta) - 1/\zeta, \quad \zeta = mH/k_bT. \quad (3.1)$$

Здесь M_{fs} — намагниченность насыщения магнитной жидкости, T — температура, k_b — константа Больцмана, $m = M_{fs}/n$ — магнитный момент ферромагнитной частицы, n — количество частиц в единице объема. Над магнитной жидкостью расположен ненамагничивающийся покоящийся газ с постоянным давлением, $T = \text{const}$. В данном случае движением газа пренебрегается.

Уравнения и граничные условия на свободной поверхности $z = h(x, t)$ с нормалью \mathbf{n} и на дне при $z = 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_f} \nabla p^H + \nu \Delta \mathbf{v}, \\ p^H(z, x, t) &= p_f + \rho_f g z - \int_0^{H(z, x, t)} M(H) dH. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \mathbf{v} &= 0, \\ z = h(x): \quad \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w, \quad (p_f - 2\pi M_n^2)\mathbf{n} - \tau_{in}\mathbf{e}^i = -2\sigma K\mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь $\mathbf{v} = (u, w)$ — вектор скорости жидкости, p_f — давление, ν_f — коэффициент кинематической вязкости и ρ_f — плотность магнитной жидкости, $\tau_{ij} = 2\rho_f\nu_f e_{ij}$ — тензор вязких напряжений, $e_{ij} = (\partial v_j/\partial x_i + \partial v_i/\partial x_j)/2$, σ — поверхностное натяжение, $K = (\partial^2 h/\partial x^2)/2(\sqrt{1 + (\partial h/\partial x)^2})^3$ — средняя кривизна свободной поверхности. Примем безындукционное приближение ($H \gg 4\pi M$), в котором пренебрегается влиянием искажением магнитной жидкостью приложенного магнитного поля. При этом в третьем граничном условии (3.3) можно пренебречь членом $2\pi M_n^2$ по сравнению со слагаемым $\int_0^H M(H) dH$.

Пусть приложено бегущее вдоль оси x магнитное поле ($H = H(\xi, z)$, $\xi = \omega t - kx$), вызывающее волны на поверхности магнитной жидкости. Будем считать, что параметр $\varepsilon = dk$ мал, $\varepsilon \ll 1$. Введем безразмерные параметры (звездочкой * отмечены безразмерные величины): $x^* = xk$, $z^* = z/d$, $h^* = h/d$, $u^* = u/U_c$, $w^* = w/\varepsilon U_c$, $U_c = \omega/k$, $dk = \varepsilon$, $t^* = t\omega$, $p^* = p_f/P$, $P = \eta_f\omega/\varepsilon^2$, $H^* = H/H_\infty$, $Re = \rho_f U_c d/\eta_f$, $W = \sigma dk^2/P$, $N = \rho_f g d/P$, $M^* = M/M_{fs}$, $S = M_{fs}H_\infty/P$. Здесь H_∞ характерное значение приложенного магнитного поля ($H_\infty k \sim dH/dx$), $\eta_f = \nu_f\rho_f$ — коэффициент динамической вязкости. В безразмерном виде система уравнений и граничных условий имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0, \\
& \varepsilon Re \left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^{*H}}{\partial x^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}, \\
& \varepsilon^3 Re \left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^{*H}}{\partial z^*} + \varepsilon^2 \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right), \\
& z^* = h^* : \quad \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} - w^* = 0, \\
& \tau_{nr}^* = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 (\partial h^* / \partial x^*)^2} \left[\varepsilon^2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right] = 0, \\
& p^{*H} - Nh^* + S \int_0^{H^*} M^*(H^*) dH^* - \varepsilon^2 \tau_{nn}^* = -W \frac{\partial^2 h^* / \partial x^{*2}}{(1 + \varepsilon^2 (\partial h^* / \partial x^*)^2)^{3/2}}, \\
& \tau_{nn}^* = \frac{2}{1 + \varepsilon^2 (\partial h^* / \partial x^*)^2} \left[\varepsilon^2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right], \\
& z^* = 0 : \quad u^* = w^* = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

При следующих предположениях: $\varepsilon \ll 1$, $W = O(1)$, $Re < 1$, в безындукционном приближении ($H \gg 4\pi M$), в нулевом приближении по параметру ε ($\varepsilon \rightarrow 0$) из (3.2) и (3.3) получим следующую безразмерную систему уравнений и граничных условий:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0, \quad -\frac{\partial p^{*H}}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} = 0, \quad \frac{\partial p^{*H}}{\partial z^*} = 0, \\
& z^* = h^* : \quad \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} - w^* = 0, \\
& \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0, \quad p^{*H} = p^{*H}(x^*, t^*) = -W \frac{\partial^2 h^*}{\partial x^{*2}} + Nh^* - S \int_0^{H^*(z^*=h^*, x^*, t^*)} M^*(H^*) dH^*, \\
& z^* = 0 : \quad u^* = w^* = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Для тонкого слоя приложенное магнитное поле на поверхности можно считать зависящим только от ξ : $H^*(z^* = h^*, \xi) \approx H^*(z^* = 1, \xi)$. Из уравнений и граничных условий (3.5) получим выражения для определения безразмерных компонент скорости (здесь и далее звездочки (*) опущены):

$$\begin{aligned}
& u(x, z, t) = F(x, t) \left(\frac{z^2}{2} - hz \right), \quad F(x, t) = \frac{\partial p^H}{\partial x}, \\
& w(x, z, t) = F(x, t) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{z^2}{2} + \frac{\partial F}{\partial x} \left(h \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right), \\
& p^H = -W \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + Nh - S \int_0^{H(z=1, \xi)} M(H) dH.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Используя кинематическое условие на свободной поверхности и (3.6) получим уравнение для определения формы поверхности магнитной жидкости h ($Q = \int_0^h u dz$):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad Q = -\frac{Fh^3}{3}, \quad F = \frac{\partial p^H}{\partial x}. \quad (3.7)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении: $\varepsilon \ll 1$, $H \gg 4\pi M$, $Re < 1$, задача сводится к решению одного дифференциального уравнения в частных производных для h (3.7). В приложенном бегущем магнитном поле ($H = H(z = d, \xi)$, $\xi = t - x$) форма поверхности может иметь вид бегущей волны $h = h(\xi)$, при этом, из уравнения (3.7), получим $Q(\xi) = h(\xi) + C$, $C = \text{const}$. При этом уравнение для формы поверхности $h = h(\xi)$ с учетом (3.7) и последнего равенства (3.6) принимает вид:

$$W \frac{d^3 h}{d\xi^3} - N \frac{dh}{d\xi} + F_m = -3 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{C}{h^3} \right), \quad F_m = SM \frac{dH(z = 1, \xi)}{d\xi}. \quad (3.8)$$

Это обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка. Константа C является искомой величиной.

Рассмотрим периодическое бегущее приложенное магнитное поле $H = H(z = 1, \xi)$ с периодом T_p . Рассмотрим случай, когда безразмерная магнитная сила F_m имеет вид ($\lambda = 2\pi/T_p$):

$$F_m = \sum_{j=1}^{j=N} (A'_j \cos(\lambda j \xi) + B'_j \sin(\lambda j \xi)). \quad (3.9)$$

$$A'_j = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} F_m \cos(\lambda j \xi) d\xi, \quad B'_j = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} F_m \sin(\lambda j \xi) d\xi.$$

Из (3.9) безразмерная магнитная сила F_m имеет нулевое среднее значение:

$$\langle F_m \rangle = \int_{-T_p/2}^{T_p/2} F_m d\xi = 0. \quad (3.10)$$

Заметим, если магнитное поле периодическое по ξ , $H = H(z = d_f, \xi) = H_s + \sum_{j=1}^{j=\infty} (H_j^1 \cos(\lambda j \xi) + H_j^2 \sin(\lambda j \xi))$, то магнитная сила $F_m = M_f \nabla H$, где намагниченность вычисляются по формуле Ланжевена (3.1), может иметь не нулевое среднее $\int_{-T_p/2}^{T_p/2} F_m d\xi \neq 0$ и формула (3.10) не верна. Однако заметим, что $\langle F_m \rangle = \int_{-T_p/2}^{T_p/2} F_m d\xi = 0$ в малых магнитных полях ($M_f = \chi_f H$) и в больших магнитных полях ($M_f = M_{fs}$), а также в некоторых других частных случаях.

Пусть $\varepsilon_H = \max_{j=1..J}(|A'_j|, |B'_j|) \ll 1$, $J \in \mathbf{N}$, $J \gg 1$. Тогда $A_j = A'_j/\varepsilon_H$, $B_j = B'_j/\varepsilon_H$ и безразмерная магнитная сила F_m имеет вид:

$$F_m = \varepsilon_H F_M = \varepsilon_H \sum_{j=1}^{j=N} (A_j \cos(\lambda j \xi) + B_j \sin(\lambda j \xi)), \quad \varepsilon_H \ll 1.$$

Будем искать решение для толщины слоя в виде $h = 1 + \delta(\xi)$, $|\delta| < 1$. Определим средний безразмерный расход как $\langle Q \rangle = \int_0^{T_p} Q d\xi / T_p$. Так как $\int_0^{T_p} \delta d\xi = 0$, то $\langle Q \rangle = 1 + C$. Разложим функцию $h(\xi)$ и константу C в ряд по малому параметру ε_H :

$$h = 1 + \varepsilon_H \delta_1 + \varepsilon_H^2 \delta_2 + \dots, \quad \delta = \varepsilon_H \delta_1 + \varepsilon_H^2 \delta_2 + \dots, \quad C = -1 + \varepsilon_H C_1 + \varepsilon_H^2 C_2 + \dots$$

Здесь учтено, что в нулевом приближении по ε_H верны равенства $h = 1$ и $C_0 = -1$. В первом и втором приближении по ε_H уравнения (3.8) имеют вид:

$$W \frac{\partial^3 \delta_1}{\partial \xi^3} - N \frac{\partial \delta_1}{\partial \xi} = -3(\delta_1 + C_1) - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\alpha\xi + B_n \sin n\alpha\xi). \quad (3.11)$$

$$W \frac{\partial^3 \delta_2}{\partial \xi^3} - N \frac{\partial \delta_2}{\partial \xi} = -3(\delta_2 - 3\delta_1^2 + C_2). \quad (3.12)$$

3.2. Решение задачи. Влияние параметров задачи на средний расход жидкости.

Ищем решения для δ_1 и δ_2 в виде рядов Фурье:

$$\delta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (D_n \cos(n\alpha\xi) + E_n \sin(n\alpha\xi)), \quad \delta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (F_n \cos(n\alpha\xi) + G_n \sin(n\alpha\xi)).$$

Используя (3.11), (3.12), находим выражения для коэффициентов $C_1, C_2, D_n, E_n, F_n, G_n$:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \quad C_2 = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (D_k^2 + E_k^2), \\ D_n &= -\frac{\alpha^3 W n^3 B_n + n\alpha N B_n + 3A_n}{9 + \alpha^6 W^2 n^6 + 2\alpha^4 W n^4 N + \alpha^2 N^2 n^2}, \\ E_n &= \frac{\alpha^3 W n^3 A_n - 3B_n + \alpha N n A_n}{9 + \alpha^6 W^2 n^6 + 2\alpha^4 W n^4 N + \alpha^2 N^2 n^2}, \\ F_n &= 9 \frac{\alpha^3 W n^3 S_n + n\alpha N S_n + 3R_n}{9 + \alpha^6 W^2 n^6 + 2\alpha^4 W n^4 N + \alpha^2 N^2 n^2}, \\ G_n &= -9 \frac{\alpha^3 W n^3 R_n - 3S_n + \alpha N n R_n}{9 + \alpha^6 W^2 n^6 + 2\alpha^4 W n^4 N + \alpha^2 N^2 n^2}, \\ S_k &= \sum_{m+j=k} D_m E_j + \sum_{m-j=k} D_m E_j - \sum_{j-m=k} D_j E_m, \\ R_k &= \sum_{m+j=k} \left(\frac{D_m D_j}{2} - \frac{E_m E_j}{2} \right) + \sum_{m-j=k} \left(\frac{D_m D_j}{2} + \frac{E_m E_j}{2} \right) \\ &+ \sum_{j-m=k} \left(\frac{D_m D_j}{2} + \frac{E_m E_j}{2} \right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Влияние формы силы на средний расход жидкости. Для двух безразмерных сил $F_M(\xi)$ с одинаковыми амплитудами и различной формой (см. рис. 3.2: а - треугольная форма силы, б - пилообразная форма силы) численно на основании формул (3.13) получены соответствующие решения для формы поверхности магнитной жидкости $h(\xi)$ (см. рис. 3.2) при следующих значениях безразмерных параметров $W = 0.1, \varepsilon_H = 0.1, \alpha = 1, N = 0.58$ ($d = 0.05$ см, $k = 2$ см⁻¹, $\rho_f = 1.2$ г/см³, $\rho_f \nu_f = 0.2$ П, $\sigma = 50$ Дин/см, $\omega = 5$ с⁻¹). Для рассматриваемых двух случаев формы силы безразмерный средний расход магнитной жидкости равен $1.04 \cdot 10^{-3}$ и $0.7 \cdot 10^{-3}$, соответственно, а максимальное безразмерное отклонение поверхности от 1 равно 0.03 и 0.02, соответственно. Таким образом приложенное бегущее магнитное поле вызывает течение магнитной жидкости в сторону движения бегущего поля с не нулевым средним расходом. При одинаковой амплитуде магнитной силы расход жидкости зависит от формы приложенной силы: магнитная сила треугольной формы создает течение с большим средним расходом, чем магнитная сила пилообразной

формы. Показано, что форма поверхностной волны близка к форме приложенной магнитной силы, но фаза бегущей на поверхности волны не совпадает с фазой магнитной силы.

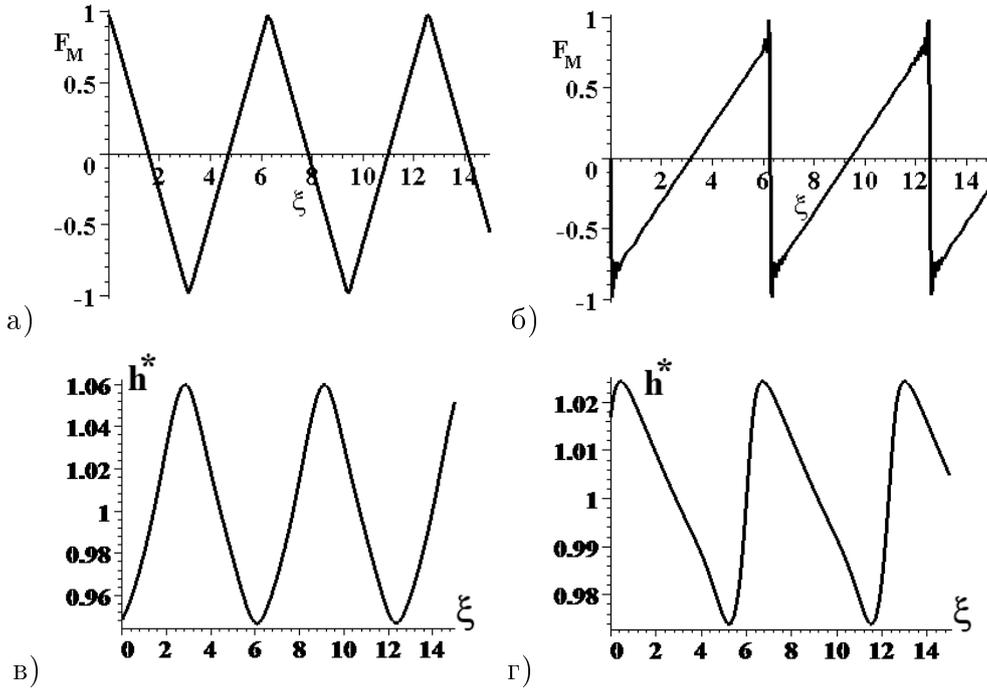


Рис. 3.2. Зависимость безразмерной магнитной силы F_M^* от ξ : а)треугольная форма, б) пилообразная форма. Безразмерная форма поверхностной волны h^* : в) под воздействием силы F_M^* треугольной формы, г) под воздействием силы F_M^* пилообразной формы.

Косинусоидальная магнитная сила. Рассмотрим случай, когда приложена косинусоидальная магнитная сила F_M . Пусть $B_n = 0$, $n = 1..∞$, $A_n = 0$, $n = 2..∞$, $\alpha = 1$ и $A_1 \neq 0$, т. е. $F_M = A_1 \cos \xi$. Тогда средний размерный расход равен:

$$\langle Q \rangle = \varepsilon_H^2 \frac{d\omega}{k} C_2 = \varepsilon_H^2 \frac{3}{2} \frac{d\omega}{k} (D_1^2 + E_1^2) = \varepsilon_H^2 \frac{3}{2} \frac{d\omega}{k} \frac{A_1^2}{9 + (W + N)^2}. \quad (3.14)$$

Средняя размерная скорость вдоль оси x на поверхности жидкости в данном случае будет иметь вид:

$$\langle u(z = h) \rangle = \frac{\omega}{k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z = h(\xi)) d\xi = \varepsilon_H^2 \frac{3}{2} \frac{\omega A_1^2}{k(9 + (W + N)^2)}. \quad (3.15)$$

Нетрудно видеть, что $\langle u(z = h) \rangle = \langle Q \rangle / d$. Это означает, что средняя поверхностная скорость $\langle u \rangle$ пропорциональна среднему расходу $\langle Q \rangle$.

Немонотонные зависимости среднего размерного расхода магнитной жидкости $\langle Q \rangle$ от частоты ω и волнового числа k приложенного магнитного поля и от толщины слоя магнитной жидкости d приведены на рис. 3.3 а, б и 3.4 а для следующих значений размерных

переменных: $M_{fs} = 2.5$ Гс, $H_\infty = 75$ Э, $A_1 = 1$, $d = 0.05$ см, $k = 1$ см⁻¹, $\rho_f = 1.2$ г/см³, $\eta_f = 0.08$ П, $\sigma = 100$ дин/см, $\varepsilon_H = 0.1$. Отметим, что для выбранных параметров число Рейнольдса меньше единицы: при $\omega < 1$ $Re < 0.75$. Зависимость размерной средней скорости $\langle u \rangle$ на поверхности $z = h$ от частоты ω приведены на рис. 3.4 б).

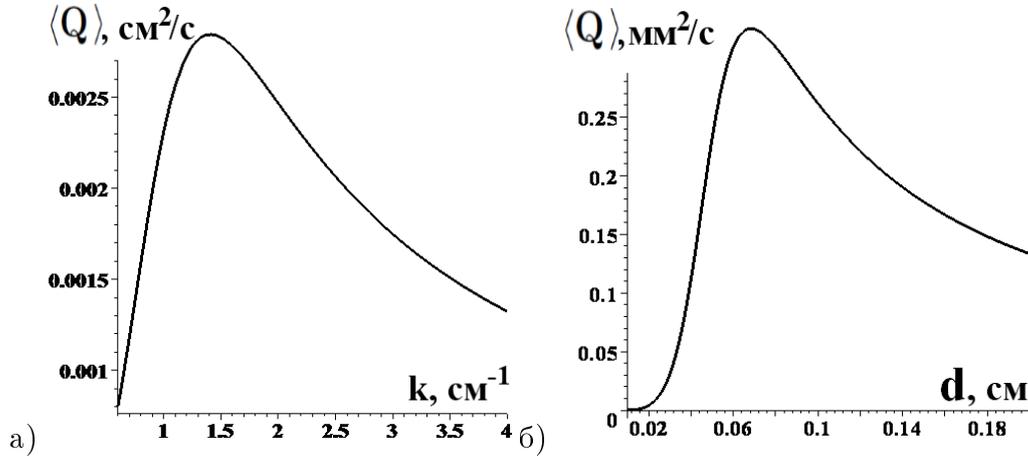


Рис. 3.3. Зависимость размерного среднего расхода $\langle Q \rangle$ для косинусоидальной магнитной силы F_M а) от волнового числа k ; б) от толщины слоя магнитной жидкости d .

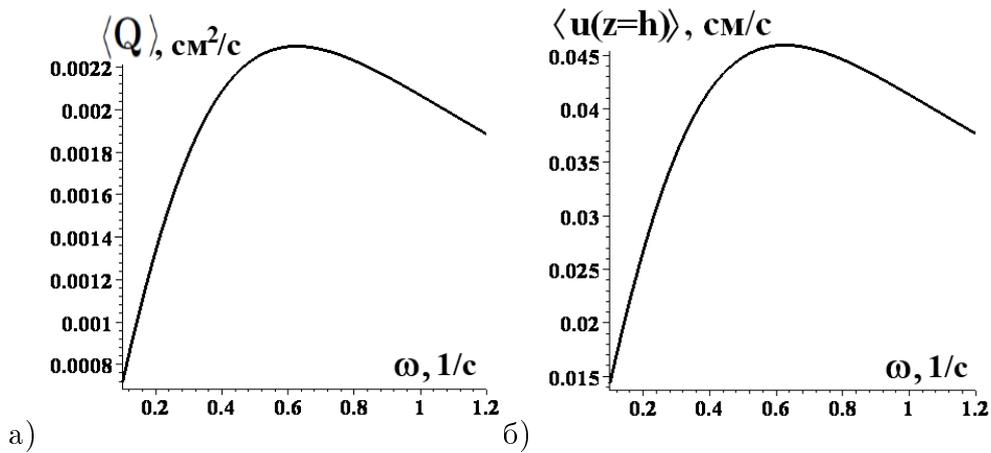


Рис. 3.4. Зависимость размерного среднего расхода $\langle Q \rangle$ и размерной средней скорости $\langle u \rangle$ на поверхности от частоты ω для косинусоидальной магнитной силы F_M .

Немонотонная (один максимум) зависимость размерной средней скорости $\langle u \rangle$ на поверхности $z = h$ от частоты ω приведены на рис. 3.4 б. Максимальное значение средней скорости $\langle u \rangle$ достигается при той же частоте, при которой имеет максимум средний расход. На рис. 3.5 а приведена зависимость амплитуды поверхностной волны $A = h_{max} - h_{min}$ от частоты. Амплитуда монотонно убывает при возрастании ω .

Можно оптимизировать расход по параметрам ω , k . Из равенства нулю соответствующих производных от среднего размерного расхода (3.14): $\partial \langle Q \rangle / \partial \omega = 0$, $\partial \langle Q \rangle / \partial k = 0$ можно получить выражения для оптимальной частоты ω_{opt} и оптимального волнового числа k_{opt} приложенного магнитного поля, при которых средний расход имеет максимальное значение:

$$k_{opt}^2 = \frac{\rho_f g}{\sigma}, \quad \omega_{opt} = \frac{2d^3 \rho_f^2 g^2}{3\sigma \eta_f} \quad (3.16)$$

Сравнение с экспериментом. В [61] исследуется течение слоя магнитной жидкости в замкнутом канале в переменном неоднородном магнитном поле. Магнитное поле в этом эксперименте создается восьмью переключающимися катушками с током, расположенными под линейным участком канала. В каждый момент времени включены i -ая и $i + 4$ -ая катушки, через определенный промежуток времени эти катушки выключаются и включается следующая пара катушек $i + 1$ -ая и $i + 5$ -ая, и т.д. Поле, создаваемое такой системой, не является, строго говоря, бегущим, т.к. поле перемещается скачками при переключении катушек. В [61] экспериментально получена зависимость средней скорости на поверхности жидкости от скорости переключения катушек U , которая равна отношению расстояния между соседними катушками к времени между переключениями катушек. Эта зависимость немонотонна (имеет один максимум). Следует отметить, что в работе [61] указана только часть параметров, необходимых для теоретического расчета.

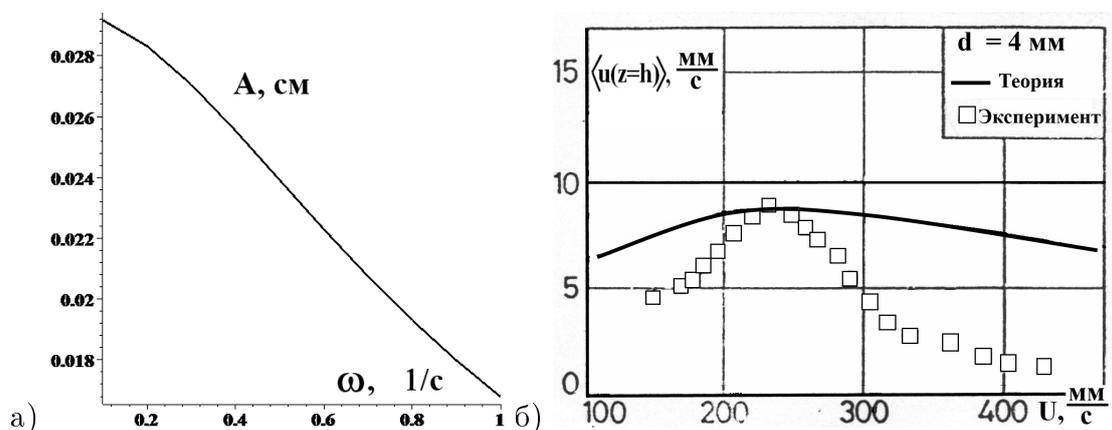


Рис. 3.5. а) Зависимость амплитуды A поверхностной волны от частоты ω для косинусоидальной магнитной силы F_M ; б) Зависимость средней размерной скорости $\langle u \rangle$ на поверхности от скорости бегущего поля $U = \omega/k$.

Проведен расчет размерной средней скорости $\langle u \rangle$ на поверхности $z = h$ от скорости бегущего приложенного магнитного поля $U = \omega/k$ и получена немонотонная зависимость

при следующих параметрах, выбранных для расчета: $M_{fs} = 10$ Гс, $A_1 = 1$, $d = 0.4$ см, $k = 0.067$ см $^{-1}$, $\rho_f = 1.4$ г/см 3 , $\eta_f = 0.087$ П, $\sigma = 25$ дин/см. Магнитное поле представлено синусоидальной функцией $H = H_\infty(1 + \sin \xi)$, $H_\infty = 70$ Э. Теоретическая зависимость средней скорости $\langle u \rangle$ качественно совпадает с экспериментами (совпадает максимальное значение поверхностной скорости жидкости и скорость магнитного поля, при которой достигает максимума поверхностная скорость), см. рис. 3.5 б.

Бегущее магнитное поле, создаваемое движущимися намагничивающимися стержнями. Рассмотрим случай, когда бегущее периодическое магнитное поле создается движущимися со скоростью U цилиндрическими стержнями из ферромагнитного материала радиуса R_r , расположенными на расстоянии Δx ($\Delta x = 1/k$) друг от друга (магнитная проницаемость материала стержней $\mu \gg 1$), в однородном приложенном вертикальном магнитном поле H_∞ (см. рис. 3.6). Невозмущенная поверхность жидкости находится на расстоянии l от центров ферромагнитных стержней.

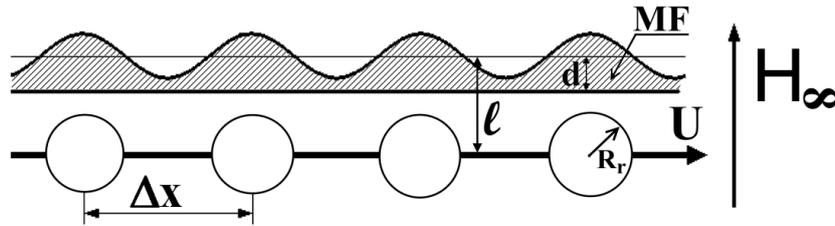


Рис. 3.6. Слой магнитной жидкости над движущимися ферромагнитными стержнями в однородном приложенном магнитном поле.

Магнитное поле H при $\Delta x \gg R_r$ представляется как сумма приложенного магнитного поля и искажения этого поля цилиндрическими стержнями: $\mathbf{H} = \nabla \varphi$, $\varphi \approx H_\infty z + A \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_\infty \mathbf{r}_i / r_i^2$, $r_i = \sqrt{(x - a_i)^2 + (z - b_i)^2}$, $A = -R_r^2$. Здесь $a_i = Ut + i\Delta x$, $b_i = 0$ — координаты центра сечения i -ого стержня. В данном случае система координат выбрана таким образом, что в начальный момент времени начало координат совпадает с центром сечения одного из стержней. Частота бегущего поля $\omega = U/\Delta x$, а волновой вектор $k = 1/\Delta x$. Расчеты проводились при следующих значениях размерных переменных: $H_\infty = 50$ Э, $d = 0.05$ см, $\Delta x = 5$ см, $R_r = 0.1$ см, $l = 1.55$ см, $M_{fs} = 2.5$ Гс, $\rho_f = 1.2$ г/см 3 , $\eta_f = 0.1$ П, $\sigma = 5$ дин/см, $\varepsilon_H = 0.11$. При этом $Re = 0.6U$. Вид безразмерной магнитной силы F_M и рассчитанная безразмерная форма поверхности h^* приведены на рис. 3.7. Видно, что движущиеся стержни создают поверхностную волну, близкую по форме к синусоиде.

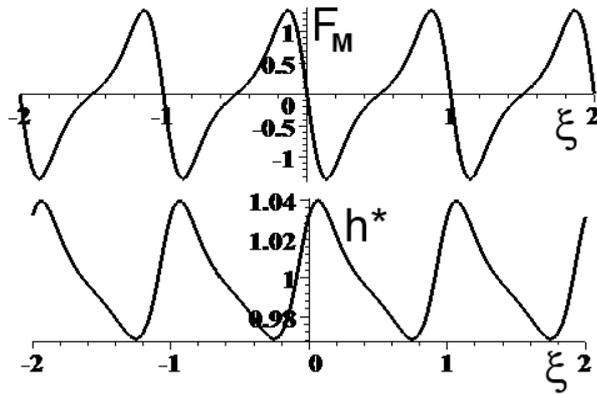


Рис. 3.7. Магнитная сила F_M и форма поверхности h^* для случая, когда бегущее поле создается движущимися цилиндрами из ферромагнитного материала в однородном магнитном поле.

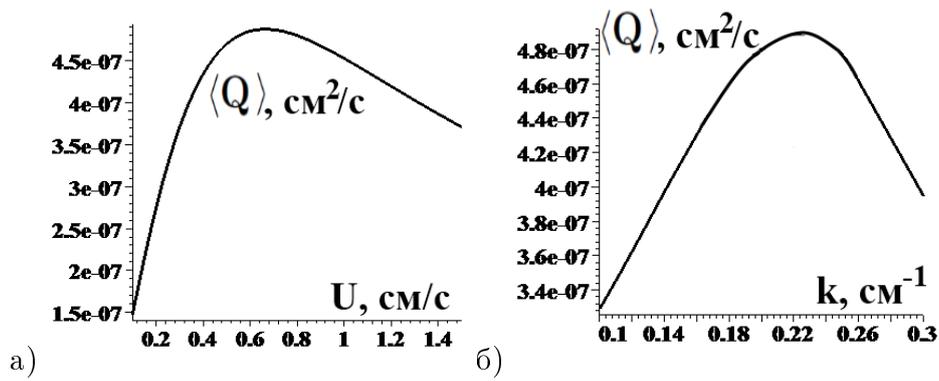


Рис. 3.8. Зависимость размерного среднего расхода $\langle Q \rangle$ от скорости U и волнового числа k .

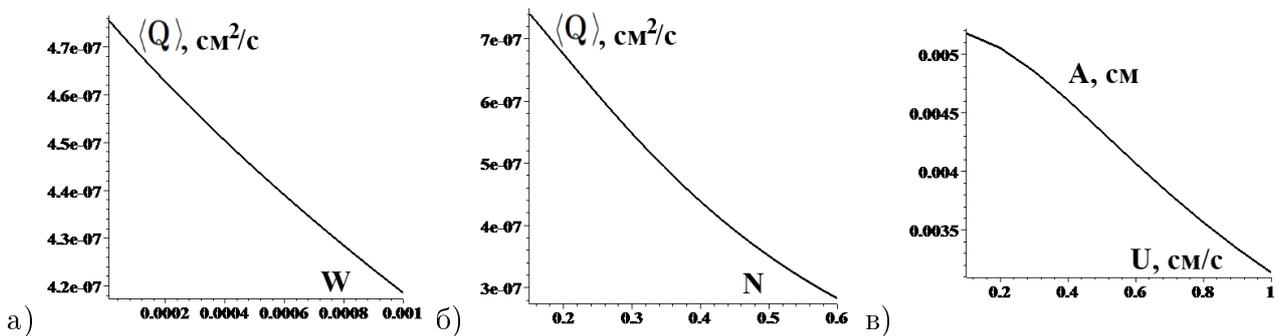


Рис. 3.9. Зависимость размерного среднего расхода $\langle Q \rangle$ от параметров а) W ; б) N в) Зависимость амплитуды A поверхностной волны от скорости стержней U .

На рис. 3.8 приведена немонотонная (имеющая один максимум) зависимость размерного среднего расхода $\langle Q \rangle = Ud \langle Q^* \rangle$ от скорости движения цилиндров U и волнового числа k . На рис. 3.9 приведена полученная численно зависимость среднего размерного расхода $\langle Q \rangle$ от основных безразмерных параметров задачи. Расход монотонно убывает при увеличении параметров $W = \sigma dk^2/P$, $N = \rho_f gd/P$ ($P = \eta_f \omega / \varepsilon^2$). Исследована зависимость размерной амплитуды поверхностной волны $A = h_{max} - h_{min}$ от скорости движения цилиндров U (см. рис. 3.9 в).

Амплитуда поверхностной волны убывает при увеличении скорости стержней. Зависимость среднего расхода магнитной жидкости от скорости движения стержней имеет один максимум. Этот результат качественно совпадает с результатами экспериментальных работ [61–63, 66].

Вывод к главе 3. Аналитически решена динамическая задача о плоском течении тонкого слоя вязкой несжимаемой магнитной жидкости на твердой горизонтальной подложке в неоднородных бегущих периодических магнитных полях с учетом силы тяжести, поверхностного натяжения и зависимости намагниченности жидкости от величины магнитного поля. Получено уравнение для определения толщины слоя в длинноволновом приближении. Получены формулы для формы бегущей поверхностной волны, распределения скоростей и среднего расхода жидкости. Исследована зависимость среднего расхода жидкостей от параметров задачи. Показано наличие немонотонной зависимости (наличие единственного максимума) среднего расхода магнитной жидкости от частоты и волнового числа приложенного магнитного поля. Полученные зависимости позволяют выбирать оптимальные значения параметров, при которых расход жидкости максимален. Показано качественное совпадение теоретических и экспериментальных результатов. Предложенная методика расчета среднего расхода может быть использована для выбора оптимальной конструкции перистальтических насосов на основе магнитной жидкости.

Двухслойное течение и деформация поверхности раздела жидкостей с разной намагниченностью в бегущем магнитном поле

В данной главе исследуется плоское течение двух слоев вязких несжимаемых жидкостей, одна из которых — магнитная жидкость, в неоднородном магнитном поле. Неоднородное периодическое бегущее магнитное поле вызывает волнообразные изменения поверхности магнитной жидкости и расходные течения жидкостей. Рассмотрен случай течения двух слоев жидкости, верхняя из которых более легкая и не намагничивающаяся. При заданном бегущем периодическом магнитном поле вычисляются форма поверхности раздела жидкостей, скорости и средние расходы жидкостей.

4.1. Постановка задачи. Вывод уравнения для формы поверхности раздела двух жидкостей.

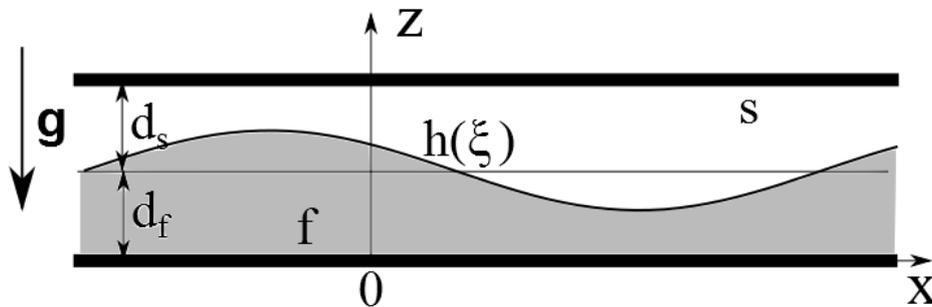


Рис. 4.1. Слой магнитной жидкости (1) и слой немагнитной жидкости (2) в бегущем магнитном поле.

Рассматривается плоское изотемическое двухслойное течение вязких тяжелых несжимаемых жидкостей между горизонтальными неподвижными плоскостями (см. рис. 4.1). Расстояние между плоскостями $L = d_f + d_s$, d_i , $i = f, s$ — толщины слоев в невозмущенном состоянии. Ось x декартовой системы координат (x, z) лежит в нижней неподвижной плоскости, ось z направлена вертикально вверх. К системе приложено неоднородное пере-

менное во времени магнитное поле $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z, x, t)$. Жидкости считаются несмешиваемыми и имеют разные магнитные свойства. Индексы f и s обозначают параметры нижнего и верхнего слоя жидкости, соответственно. Верхняя, более легкая, жидкость считается не намагничивающейся, $M_{fs} = 0$. Намагниченность нижней, более тяжелой, магнитной жидкости зависит от величины напряженности магнитного поля H по формуле Ланжевена:

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}_f| &= M_f(\zeta) = M_{fs}\Lambda(\zeta), \quad \Lambda(\zeta) = \text{cth}(\zeta) - \frac{1}{\zeta}, \\ \zeta &= \frac{mH}{k_b T}, \quad m = \frac{M_{fs}}{n}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $T = \text{const}$ — температура жидкости, k_b — константа Больцмана, M_{fs} — намагниченность насыщения магнитной жидкости, m — магнитный момент одной ферромагнитной частицы, n — численная концентрация ферромагнитных частиц магнитной жидкости. При решении задачи учитываются силы тяжести и поверхностного натяжения, температура считается постоянной. Считается, что выполнено условие безындукционного приближения ($H \gg 4\pi M$), и магнитное поле равно приложенному, не искаженному магнитной жидкости, полю \mathbf{H} .

Рассматривается система уравнений, состоящая из уравнения неразрывности и уравнения Навье-Стокса для каждого слоя ($i = f, s$):

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v}_i &= 0, \\ \rho_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= -\nabla p_i^H + \eta_i \Delta \mathbf{v}_i, \\ p_i^H &= p_i + \rho_i g z - \int_0^H M_i dH. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь $\mathbf{v}_i = (u_i, w_i)$ — векторы скоростей жидкостей, p_i — давление жидкостей, ρ_i — плотности, η_i — динамическая вязкость, g — ускорение свободного падения.

На неподвижных плоскостях ставится условие прилипания.

$$z = 0 : \quad u_f = w_f = 0, \quad z = L : \quad u_s = w_s = 0. \quad (4.3)$$

На поверхности раздела жидкостей $z = h(x, t)$ в безындукционном приближении ($H \gg 4\pi M$) верны следующие граничные условия ($[A]_s^f = A_s - A_f$):

$$\begin{aligned} u_f = u_s, \quad w_f = w_s, \quad \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w, \\ [-p]_s^f \mathbf{n} + [\tau_{ij} n^j]_s^f \mathbf{e}^i &= 2\sigma K \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения, $K = h''/(1 + h'^2)^{3/2}$ — средняя кривизна поверхности раздела двух сред, $\tau_{ij} = 2\nu e_{ij}$ — компоненты тензора вязких напряжений, $e_{ij} = (\partial v_j/\partial x_i + \partial v_i/\partial x_j)/2$.

Пусть приложенное поле \mathbf{H} является "бегущим": $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z, \xi)$, $\xi = kx - \omega t$. Введем безразмерные переменные: $x^* = xk$, $z^* = z/d_f$, $h^* = h/d_f$, $u^* = u/U_c$, $w^* = w/\varepsilon U_c$, $U_c = \omega/k$, $\varepsilon = d_f k$, $t^* = t\omega$, $p_i^* = p_i/P$, $H^* = \xi = mH/kT$, $L^* = (d_f + d_s)/d_f$, $Re = \rho_f U_c d_f/\eta_f$, $W = \sigma d_f k^2/P$, $N = (\rho_f - \rho_s)g/P$, $M_f^* = M_f/M_{fs}$, $S = H_\infty M_{fs}/P$, $P = \eta_f \omega/\varepsilon^2$, $n_f = 1$, $n_2 = \eta_s/\eta_f$. Здесь H_∞ характерное значение приложенного магнитного поля ($H_\infty k \sim dH/dx$).

В безразмерном виде система уравнений и граничных условий имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_i^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w_i^*}{\partial z^*} = 0, \quad i = f, s, \\
& \varepsilon Re \frac{\rho_i}{\rho_f} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x^*} + w_i^* \frac{\partial u_i^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p_i^{*H}}{\partial x^*} + n_i \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^{*2}} \right), \\
& \varepsilon^3 Re \frac{\rho_i}{\rho_f} \left(\frac{\partial w_i^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial w_i^*}{\partial x^*} + w_i^* \frac{\partial w_i^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p_i^{*H}}{\partial z^*} + n_i \varepsilon^2 \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_i^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w_i^*}{\partial z^{*2}} \right), \\
& z^* = h^* : \quad \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} - w^* = 0, \quad u_f^* = u_s^*, \quad w_f^* = w_s^*, \\
& [\tau_{nr}^*]_s^f = \frac{2\varepsilon n_f}{1 + \varepsilon^2 (\partial h^*/\partial x^*)^2} \left[\varepsilon^2 \frac{\partial u_f^*}{\partial x^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u_f^*}{\partial z^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial w_f^*}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_f^*}{\partial z^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial w_f^*}{\partial x^*} \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial w_f^*}{\partial z^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right] - \\
& \quad \frac{2\varepsilon n_2}{1 + \varepsilon^2 (\partial h^*/\partial x^*)^2} \left[\varepsilon^2 \frac{\partial u_s^*}{\partial x^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u_s^*}{\partial z^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial w_s^*}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_s^*}{\partial z^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial w_s^*}{\partial x^*} \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial w_s^*}{\partial z^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right] = 0, \\
& p_f^{*H} - N h^* + S \int_0^{H^*} M_f^*(H^*) dH^* - p_s^{*H} + \varepsilon^2 [\tau_{nn}^*]_s^f = -W \frac{\partial^2 h^*/\partial x^{*2}}{(1 + \varepsilon^2 (\partial h^*/\partial x^*)^2)^{3/2}}, \\
& \tau_{nni}^* = \frac{2n_i}{1 + \varepsilon^2 (\partial h^*/\partial x^*)^2} \left[\varepsilon^2 \frac{\partial u_i^*}{\partial x^*} \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{\partial w_i^*}{\partial z^*} + \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial w_i^*}{\partial x^*} \right) \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right], \\
& z^* = 0 : \quad u_f^* = w_f^* = 0, \quad z^* = L : \quad u_s^* = w_s^* = 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Далее звездочки (*) для обозначения безразмерных параметров будем опускать. Предположим, что $\varepsilon \ll 1$, $W = O(1)$, $Re < 1$, $Re\rho_s\eta_s/(\rho_f\eta_f) < 1$, $Re\rho_s/\rho_f < 1$ тогда в нулевом приближении по параметру ε система уравнений и граничных условий (4.5) в безразмер-

ном виде запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial w_i}{\partial z} &= 0, & -\frac{\partial p_i^H}{\partial x} + n_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial z_i^2} &= 0, \\
n_f = 1, \quad n_2 &= \frac{\eta_s}{\eta_f}, & \frac{\partial p_i^H}{\partial z} &= 0, & F = \frac{\partial p_f^H}{\partial x}, & F + G = \frac{\partial p_s^H}{\partial x}, & G = -\frac{\partial(p_f^H - p_s^H)}{\partial x}, \\
z = h : \quad u_f &= u_s, & w_f &= w_s, \\
\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - w &= 0, & \frac{\partial u_f}{\partial z} &= n_2 \frac{\partial u_s}{\partial z}, \\
\Delta p = p_f^H(x, t) - p_s^H(x, t) &= -W \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + Nh - S \int_0^{H(z=h, \xi)} M_f(H) dH, \\
z = 0 : \quad u_f = w_f &= 0, & z = L : \quad u_s = w_s &= 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Будем искать решение для формы поверхности раздела жидкостей в виде бегущей волны $h = h(\xi)$, $\xi = x - t$. Заметим $\partial/\partial x = d/d\xi$, $\partial/\partial t = -d/d\xi$. Интегрируя уравнение движения в виде $d^2 u_f(\xi, z)/dz^2 = -F(\xi)$, $d^2 u_s(\xi, z)/dz^2 = -n_2(F(\xi) + G(\xi))$, с учетом граничных условий на твердых стенках и условий на свободной поверхности для компонент скоростей u_i , получим:

$$\begin{aligned}
u_i &= A_i z^2 + B_i z + C_i, \\
A_1 &= -F/2, \quad A_2 = (F + G)/2n_2, \\
B_1 &= B_2 n_2 - hG, \quad B_2 = [(F + 2G)h^2 n_2 + (L^2 - h^2)(F + G)]D^{-1}, \\
C_1 &= 0, \quad C_2 = [Lh((F + G)(L - h)(n_2 - 1) - Ghn_2)]D^{-1}, \\
D &= 2n_2(hn_2 - h + L), \\
G &= -d\Delta p/d\xi = W(d^3 h(\xi)/d\xi^3) - N(dh(\xi)/d\xi) + F_m, \quad F_m = SM_f dH/d\xi.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Расходы жидкостей определяются формулами $Q_f = \int_0^h u_f dz$, $Q_s = \int_h^L u_s dz$. Используя уравнение неразрывности в виде $dh/d\xi = dQ_f/d\xi$, $d(L - h)/d\xi = dQ_s/d\xi$, получим уравнения для определения $h(\xi)$ и $F(\xi)$:

$$h(\xi) + q_1 = f_1 F(\xi) + f_2 G(\xi), \quad L - h(\xi) + q_2 = f_3 F(\xi) + f_4 G(\xi) \tag{4.8}$$

Здесь f_1, f_2, f_3, f_4 — функции от h, n_2 и L ; q_1 и q_2 — константы интегрирования, которые определяются из условия периодичности $h(\xi)$ и $F(\xi)$.

$$\begin{aligned}
f_1 &= h^2 n_2 (h^2 (n_2 - 1) + L(3L - 2h))/6D, \\
f_2 &= h^2 n_2 (h - L)^2 / 2D, \\
f_3 &= (hn_2 (h^3 - 6h^2 L + 9hL^2 - 4L^3) - (L - h)^4) / 6D, \\
f_4 &= (4hn_2 (h - L)^3 - (h - L)^4) / 6D.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Расходы жидкостей Q_f и Q_s определяются формулами $Q_f = f_1 F(\xi) + f_2 G(\xi)$, $Q_s = f_3 F(\xi) + f_4 G(\xi)$.

Таким образом получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (4.8) для определения $h(\xi)$ и $F(\xi)$. Для функции h это уравнение третьего порядка.

При $n_2 = 0$, $p_s^H = const$ получим $G = -F$ и уравнение для h имеет вид $h + q_1 = (f_1 - f_2)F = h^3 F/3$, и система уравнений (4.8) сводится к уравнению для толщины одного слоя магнитной жидкости (3.7).

4.2. Решение задачи. Влияние параметров задачи на средние расходы жидкостей.

Рассмотрим периодическое бегущее приложенное магнитное поле $H = H(z = d_f, \xi)$ с периодом T_p . Рассмотрим случай, когда безразмерная магнитная сила F_m имеет вид ($\lambda = 2\pi/T_p$):

$$F_m = \sum_{j=1}^{j=N} (A'_j \cos(\lambda j \xi) + B'_j \sin(\lambda j \xi)). \quad (4.10)$$

$$A'_j = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} F_m \cos(\lambda j \xi) d\xi, \quad B'_j = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} F_m \sin(\lambda j \xi) d\xi.$$

Пусть безразмерная магнитная сила F_m имеет нулевое среднее значение:

$$\int_{-T_p/2}^{T_p/2} F_m d\xi = 0.$$

Заметим, если магнитное поле периодическое по ξ , $H = H(z = d_f, \xi) = H_s + \sum_{j=1}^{j=\infty} (H_j^1 \cos(\lambda j \xi) + H_j^2 \sin(\lambda j \xi))$, то магнитная сила $F_m = M_f \nabla H$, где намагниченность вычисляются по формуле (4.1), может иметь не нулевое среднее $\int_{-T_p/2}^{T_p/2} F_m d\xi \neq 0$ и формула (4.10) не верна. Однако заметим, что $\langle F_m \rangle = \int_{-T_p/2}^{T_p/2} F_m d\xi = 0$ в малых магнитных полях ($M_f = \chi_f H$) и в больших магнитных полях ($M_f = M_{fs}$), а также в некоторых других частных случаях.

Пусть $\varepsilon_H = \max_{j=1..J} (|A'_j|, |B'_j|) \ll 1$, $J \in \mathbf{N}$, $J \gg 1$. Тогда $A_j = A'_j/\varepsilon_H$, $B_j = B'_j/\varepsilon_H$ и безразмерная магнитная сила F_m имеет вид:

$$F_m = \varepsilon_H F_M = \varepsilon_H \sum_{j=1}^{j=N} (A_j \cos(\lambda j \xi) + B_j \sin(\lambda j \xi)), \quad \varepsilon_H \ll 1.$$

В случае бегущей периодической магнитной силы возникает бегущее периодическое течение с ненулевым средним расходом. Будем искать решение в виде $h = h(\xi)$. Так как жидкости несжимаемые, то $\langle h \rangle = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} h d\xi = 1$. Используя (4.8), можно показать, что средние расходы $\langle Q_f \rangle = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} Q_f d\xi$ и $\langle Q_s \rangle = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} Q_s d\xi$ определяются константами q_1 и q_2 :

$$\langle Q_f \rangle = 1 + q_1, \quad \langle Q_s \rangle = L - 1 + q_2.$$

Будем искать решение системы уравнений (4.8) в виде ряда по малому параметру ε_H :

$$h = 1 + \varepsilon_H h_1 + \varepsilon_H^2 h_2 + \dots, \quad F = \varepsilon_H F_1 + \varepsilon_H^2 F_2 + \dots, \quad q_i = q_{i0} + \varepsilon_H q_{i1} + \dots \quad (4.11)$$

Из (4.8) в нулевом приближении получим $q_{10} = -1$, $q_{20} = 1 - L$. В первом приближении по ε_H , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для h_1 и F_1 с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} h_1 + a_1 \frac{dh_1}{d\xi} - a_2 \frac{d^3 h_1}{d\xi^3} - a_3 F_1 + q_{11} &= a_4 F_M, \\ h_1 - b_1 \frac{dh_1}{d\xi} + b_2 \frac{d^3 h_1}{d\xi^3} + b_3 F_1 + q_{21} &= -b_4 F_M. \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= Na, \quad a_2 = Wa, \quad a_3 = n_2(3L^2 - 2L + n_2 - 1)/6D_1, \quad a_4 = a, \\ a &= n_2(L - 1)^2/2D_1, \\ b_3 &= (n_2(4L^3 - 9L^2 + 6L - 1) + (L - 1)^4)/6D_1, \\ b_1 &= Nb, \quad b_2 = Wb, \quad b_4 = b, \\ b &= (4n_2(L - 1)^3 + (L - 1)^4)/6D_1, \quad D_1 = 2(n_2 + L - 1)n_2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Решение системы уравнений (4.12) ищется в виде

$$h_1 = \sum_{j=1}^{\infty} (A_j^h \cos(\lambda j \xi) + B_j^h \sin(\lambda j \xi)), \quad F_1 = \sum_{j=1}^{\infty} (A_j^F \cos(\lambda j \xi) + B_j^F \sin(\lambda j \xi)) \quad (4.14)$$

При этом $q_{11} = q_{21} = 0$. Выражения для A_i^h , B_i^h , A_i^F , B_i^F имеют вид:

$$\begin{aligned} A_j^h &= [(ab_3 - ba_3)(a_3 + b_3)A_j - (ab_3 - ba_3)^2(\lambda j N + \lambda^3 j^3 W)B_j]/\psi, \\ B_j^h &= [(ab_3 - ba_3)^2(\lambda j N + \lambda^3 j^3 W)A_j + (ab_3 - ba_3)(a_3 + b_3)B_j]/\psi, \\ A_j^F &= -[(a + b)(a_3 + b_3)A_j - (ab_3 - ba_3)(a + b)(\lambda j N + \lambda^3 j^3 W)B_j]/\psi, \\ B_j^F &= -[(ab_3 - ba_3)(a + b)(\lambda j N + \lambda^3 j^3 W)A_j + (a + b)(a_3 + b_3)B_j]/\psi, \\ \psi &= (a_3 + b_3)^2 + \lambda^2 j^2 (ab_3 - ba_3)^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Во втором приближении по ε_H , получим систему неоднородных дифференциальных уравнений третьего порядка по h_2 с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} x_1 G_1 h_1 + x_2 F_1 h_1 - h_2 + a_3 F_2 + a \left(W \frac{d^3 h_2}{d\xi^3} - N \frac{dh_2}{d\xi} \right) - q_{12} &= 0, \\ y_1 F_1 h_1 + y_2 G_1 h_1 + h_2 + b_3 F_2 + b \left(W \frac{d^3 h_2}{d\xi^3} - N \frac{dh_2}{d\xi} \right) - q_{22} &= 0, \\ G_1 &= W d_f^3 h_1 / d\xi^3 - N dh_1 / d\xi + F_M. \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{(2L^3 + (n_2 - 7)L^2 + (8 - 4n_2)L + 3(n_2 - 1))n_2^2}{D_1^2}, \\
x_2 &= n_2^2 \frac{2L^3 + (n_2 - 3)L^2 + (n_2 - 1)^2}{D_1^2}, \\
y_1 &= -n_2 \frac{[(L - 1)^4 + n_2(4L - 1)](1 - n_2) + L^2 n_2(3n_2 + 2L - 5)}{D_1^2}, \\
y_2 &= -n_2 \frac{[(L - 1)^4 - 4n_2(L - 1)^2](1 - n_2) + 4Ln_2(L - 1)^2}{D_1^2}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Из решения системы уравнений (4.16) можно получить величины средних массовых расходов жидкостей в обоих слоях $\langle Q_f \rangle = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} Q_f d\xi = \varepsilon_H^2 q_{12}$, $\langle Q_s \rangle = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} Q_s d\xi = \varepsilon_H^2 q_{22}$:

$$q_{21} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (x_1(A_j A_j^h + B_j B_j^h) + x_2(A_j^F A_j^h + B_j^F B_j^h)). \tag{4.18}$$

$$q_{22} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (y_2(A_j A_j^h + B_j B_j^h) + y_1(A_j^F A_j^h + B_j^F B_j^h)). \tag{4.19}$$

Следует отметить, что средние расходы жидкостей имеют второй порядок малости по малому параметру амплитуды поля ε_H^2 и определяются решением для $h(\xi)$ и $F(\xi)$ в первом приближении. Таким образом для определения средних расходов жидкостей решение во втором приближении не нужно.

Решение системы уравнений (4.16) ищется в виде

$$h_2 = \sum_{j=1}^{\infty} (C_j^h \cos(\lambda j \xi) + D_j^h \sin(\lambda j \xi)), \quad F_2 = \sum_{j=1}^{j=2N} (C_j^F \cos(\lambda j \xi) + D_j^F \sin(\lambda j \xi)) \tag{4.20}$$

Выражения для C_i^h , D_i^h , C_i^F , D_i^F имеют вид:

$$\begin{aligned}
C_n^h &= -(X_{2n} b_3 a_3 - X_{1n} b_3 a_3 + X_{2n} a_3^2 - X_{1n} b_3^2 - \lambda n a N a_3 b_3 Y_{2n} + \lambda n a N b_3^2 Y_{1n} \\
&+ \lambda n b N a_3^2 Y_{2n} - \lambda^3 n^3 a W a_3 b_3 Y_{2n} + \lambda^3 n^3 a W b_3^2 Y_{1n} + \lambda^3 n^3 b W a_3^2 Y_{2n} \\
&- \lambda^3 n^3 b W b_3 a_3 Y_{1n} - \lambda n b N b_3 a_3 Y_{1n}) / \psi_1,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
D_n^h &= (-a_3 b_3 b N \lambda n X_{1n} - a_3^2 Y_{2n} - a_3 b_3 b W \lambda^3 n^3 X_{1n} - a_3 b_3 Y_{2n} + b_3 a_3 Y_{1n} + \\
&b N \lambda n a_3^2 X_{2n} - b_3 a N \lambda n a_3 X_{2n} + b_3^2 a W \lambda^3 n^3 X_{1n} + b W \lambda^3 n^3 a_3^2 X_{2n} \\
&+ b_3^2 a N \lambda n X_{1n} - b_3 a W \lambda^3 n^3 a_3 X_{2n} + b_3^2 Y_{1n}) / \psi_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_n^F &= -(-a_3 \lambda^3 n^3 a W Y_{2n} - a_3 \lambda n b N Y_{2n} + a_3 \lambda^6 n^6 a W^2 b X_{2n} + 2a_3 \lambda^4 n^4 a N b W X_{2n} \\
&- a_3 X_{1n} - a_3 \lambda^3 n^3 b W Y_{2n} + a_3 \lambda^2 n^2 a N^2 b X_{2n} - a_3 \lambda n a N Y_{2n} - a_3 X_{2n} - a_3 X_{1n} b^2 W^2 \lambda^6 n^6 \\
&- 2a_3 X_{1n} b^2 W \lambda^4 n^4 N - a_3 X_{1n} b^2 N^2 \lambda^2 n^2 - X_{1n} b_3 - X_{2n} b_3 + \lambda n a N b_3 Y_{1n} \\
&+ 2\lambda^4 n^4 a N b_3 b W X_{1n} + \lambda^2 n^2 a N^2 b_3 b X_{1n} - 2\lambda^4 n^4 a^2 N b_3 W X_{2n} + \lambda^6 n^6 a W^2 b_3 b X_{1n} \\
&- \lambda^2 n^2 a^2 N^2 b_3 X_{2n} + \lambda^3 n^3 b W b_3 Y_{1n} + \lambda^3 n^3 a W b_3 Y_{1n} - \lambda^6 n^6 a^2 W^2 b_3 X_{2n} + \lambda n b N b_3 Y_{1n}) / \psi_1,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
D_n^F = & -(-a_3 Y_{2n} + bN\lambda n a_3 X_{2n} + a_3 a W^2 \lambda^6 n^6 b Y_{2n} - a_3 Y_{1n} + 2a_3 a W \lambda^4 n^4 b N Y_{2n} \\
& + aN\lambda n a_3 X_{2n} - a_3 Y_{1n} b^2 W^2 \lambda^6 n^6 - 2a_3 Y_{1n} b^2 W \lambda^4 n^4 N - a_3 Y_{1n} b^2 N^2 \lambda^2 n^2 + a_3 a N^2 \lambda^2 n^2 b Y_{2n} \\
& + bW \lambda^3 n^3 a_3 X_{2n} + aW \lambda^3 n^3 a_3 X_{2n} - b_3 Y_{1n} - b_3 a W \lambda^3 n^3 X_{1n} - b_3 a N \lambda n X_{1n} - b_3 Y_{2n} \\
& - b_3 b W \lambda^3 n^3 X_{1n} - b_3 b N \lambda n X_{1n} - 2b_3 a^2 W \lambda^4 n^4 N Y_{2n} - b_3 a^2 N^2 \lambda^2 n^2 Y_{2n} \\
& - b_3 a^2 W^2 \lambda^6 n^6 Y_{2n} + aW^2 \lambda^6 n^6 b b_3 Y_{1n} + 2aW \lambda^4 n^4 b N b_3 Y_{1n} + aN^2 \lambda^2 n^2 b b_3 Y_{1n}) / \psi_1, \\
\psi_1 = & a_3^2 + 2b_3 a_3 + b^2 W^2 \lambda^6 n^6 a_3^2 + 2b^2 W \lambda^4 n^4 a_3^2 N + b^2 N^2 \lambda^2 n^2 a_3^2 - 2a_3 b_3 b W^2 \lambda^6 n^6 a \\
& - 4a_3 b_3 b W \lambda^4 n^4 a N - 2a_3 b_3 b N^2 \lambda^2 n^2 a + b_3^2 + b_3^2 a^2 W^2 \lambda^6 n^6 + 2b_3^2 a^2 W \lambda^4 n^4 N + b_3^2 a^2 N^2 \lambda^2 n^2;
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
X_{1n} &= (\sum_{i+j=n} (Z_{i,j}^{(1)}) + \sum_{i-j=n} (Z_{i,j}^{(2)}) + \sum_{j-i=n} (Z_{i,j}^{(3)})) / 2, \\
Y_{1n} &= (\sum_{i+j=n} (Z_{i,j}^{(4)}) + \sum_{i-j=n} (Z_{i,j}^{(5)}) + \sum_{j-i=n} (Z_{i,j}^{(6)})) / 2, \\
X_{2n} &= (\sum_{i+j=n} (Z_{i,j}^{(7)}) + \sum_{i-j=n} (Z_{i,j}^{(8)}) + \sum_{j-i=n} (Z_{i,j}^{(9)})) / 2, \\
Y_{2n} &= (\sum_{i+j=n} (Z_{i,j}^{(10)}) + \sum_{i-j=n} (Z_{i,j}^{(11)}) + \sum_{j-i=n} (Z_{i,j}^{(12)})) / 2;
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
Z_{i,j}^{(1)} &= x_1 (W \lambda^3 i^3 + N \lambda i) (-A_i^h B_j^h - B_i^h A_j^h) + x_1 (A_i A_j^h - B_i B_j^h) + \\
& x_2 (A_i^F A_j^h - B_i^F B_j^h), \\
Z_{i,j}^{(2)} &= x_1 (W \lambda^3 i^3 + N \lambda i) (A_i^h B_j^h - B_i^h A_j^h) + x_1 (A_i A_j^h + B_i B_j^h) + \\
& x_2 (A_i^F A_j^h + B_i^F B_j^h), \quad Z_{i,j}^{(3)} = Z_{i,j}^{(2)}, \\
Z_{i,j}^{(4)} &= x_1 (W \lambda^3 i^3 + N \lambda i) (A_i^h A_j^h - B_i^h B_j^h) + \\
& x_1 (B_i A_j^h + A_i B_j^h) + x_2 (B_i^F A_j^h + A_i^F B_j^h), \\
Z_{i,j}^{(5)} &= x_1 (W \lambda^3 i^3 + N \lambda i) (A_i^h A_j^h + B_i^h B_j^h) + \\
& x_1 (-A_i B_j^h + B_i A_j^h) + x_2 (B_i^F A_j^h - A_i^F B_j^h), \quad Z_{i,j}^{(6)} = -Z_{i,j}^{(5)}, \\
Z_{i,j}^{(7)} &= y_1 (A_i^F A_j^h - B_i^F B_j^h) + y_2 (W \lambda^3 i^3 + N \lambda i) (-A_i^h B_j^h - B_i^h A_j^h) + \\
& y_2 (A_i A_j^h - B_i B_j^h), \\
Z_{i,j}^{(8)} &= y_1 (A_i^F A_j^h + B_i^F B_j^h) + y_2 (W \lambda^3 i^3 + N \lambda i) (A_i^h B_j^h - B_i^h A_j^h) + \\
& y_2 (A_i A_j^h + B_i B_j^h), \quad Z_{i,j}^{(9)} = Z_{i,j}^{(8)}, \\
Z_{i,j}^{(10)} &= y_1 (B_i^F A_j^h + A_i^F B_j^h) + y_2 (W \lambda^3 i^3 + N \lambda i) (A_i^h A_j^h - B_i^h B_j^h) + \\
& y_2 (B_i A_j^h + A_i B_j^h), \\
Z_{i,j}^{(11)} &= y_1 (B_i^F A_j^h - A_i^F B_j^h) + y_2 (W \lambda^3 i^3 + N \lambda i) (A_i^h A_j^h + B_i^h B_j^h) + \\
& y_2 (-A_i B_j^h + B_i A_j^h), \quad Z_{i,j}^{(12)} = -Z_{i,j}^{(11)}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Косинусоидальная магнитная сила. Рассмотрим косинусоидальную приложенную магнитную силу малой амплитуды: $F_m = \varepsilon_H A_1 \cos(\xi)$. Численно получена форма поверхности $h = 1 + \varepsilon_H h_1 + \varepsilon_H^2 h_2$ см. рис. 4.2. Расчеты проведены для следующих значений параметров: $M_{fs} = 2.5$ Гс, $H_\infty = 75$ Э, $A_1 = 1$, $d_f = 0.05$ см, $k = 2$ см $^{-1}$, $\omega = 0.3$ с $^{-1}$, $\eta_f = 0.08$ П, $\sigma = 25$ дин/см, $\varepsilon_H = 0.1$, $n_2 = 0.125$, $L = 0.1/d_f$, $W = 2$, $N = 1.47$. При этом $Re = 0.38\omega < 1$.

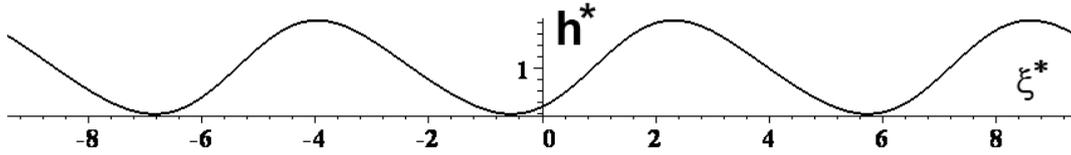


Рис. 4.2. Безразмерная форма поверхности раздела магнитной и немагнитной жидкостей h^* в бегущем косинусоидальном магнитном поле малой амплитуды.

Из выражений (4.18) и (4.19) для констант интегрирования во втором приближении по ε_H вычисляются величины средних размерных расходов жидкостей в слое:

$$\begin{aligned} \langle Q_f \rangle &= \frac{\omega d_f}{k} \langle Q_f^* \rangle = \varepsilon_H^2 \frac{\omega d_f}{k} q_{21} = \frac{\varepsilon_H^2 \omega d_f A_1^2 (ba_3 - b_3 a) (x_2(b+a) - x_1(b_3 + a_3))}{2 k (b_3 + a_3)^2 + (N+W)^2 (ba_3 - b_3 a)^2}, \\ \langle Q_s \rangle &= \frac{\omega d_f}{k} \langle Q_s^* \rangle = \varepsilon_H^2 \frac{\omega d_f}{k} q_{22} = \frac{\varepsilon_H^2 \omega d_f A_1^2 (ba_3 - b_3 a) (y_1(b+a) - y_2(b_3 + a_3))}{2 k (b_3 + a_3)^2 + (N+W)^2 (ba_3 - b_3 a)^2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Здесь $x_1, x_2, y_1, y_2, a, a_3, b, b_3$ — функции от n_2 и L (см. (4.13), (4.17)). Отметим, если формально положить $n_2 = 0$ формула для $\langle Q_f \rangle$ совпадает с формулой для расхода в однослойной задаче (3.14).

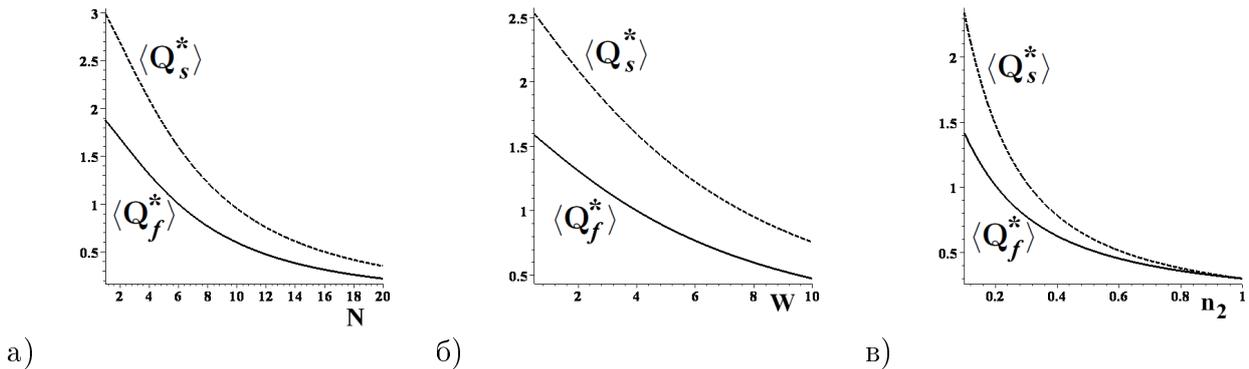


Рис. 4.3. Зависимость безразмерного среднего расхода жидкостей $\langle Q_i^* \rangle$ от а) безразмерного параметра N ; б) от безразмерного параметра W ; в) безразмерного параметра $n_2 = \eta_s/\eta_f$.

Исследована зависимость средних безразмерных расходов жидкостей $\langle Q_i^* \rangle$ от безразмерных параметров задачи. При возрастании безразмерных параметров N, W и $n_2 =$

η_s/η_f , отвечающих влиянию силы тяжести, силы поверхностного натяжения и вязких сил, соответственно безразмерные средние расходы жидкостей $\langle Q_i^* \rangle$ монотонно убывают (см. рис. 4.3). При исследовании варьировалось значение одного из параметров при постоянных значениях остальных параметров, указанных выше.

Зависимости средних размерных расходов жидкостей и $\langle Q_i \rangle$, от частоты ω , волнового числа k приложенного магнитного поля (см. рис. 4.4) и толщины слоя магнитной жидкости d_f (см. рис. 4.5 а) при фиксированных, указанных выше, значениях остальных параметров немонотонны и имеют один глобальный максимум.

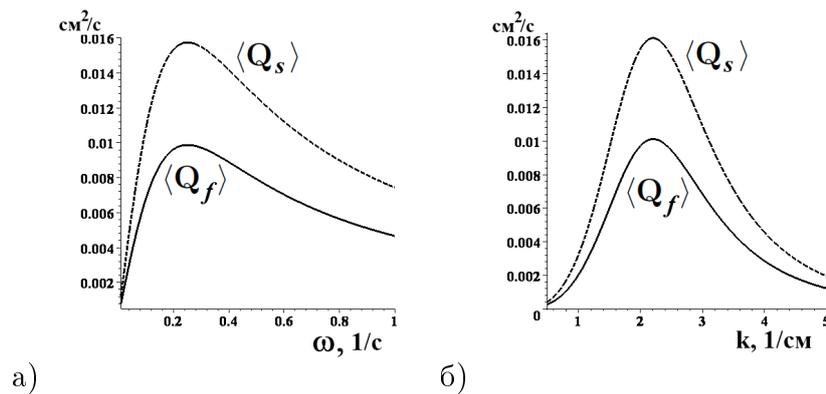


Рис. 4.4. Зависимость размерного среднего расхода жидкостей $\langle Q_i \rangle$ от а) частоты ω приложенного поля; б) волнового числа k приложенного поля.

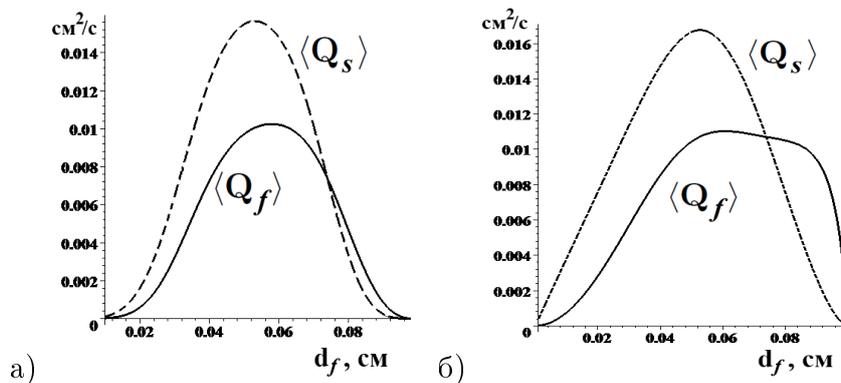


Рис. 4.5. Зависимость среднего размерного расхода жидкостей $\langle Q_i \rangle$ от толщины слоя магнитной жидкости d_f а) при $L^* = 0.1/d_f$, $k = 2 \text{ cm}^{-1}$, $\omega = 0.3 \text{ c}^{-1}$; б) при $k = k_{opt}$, $\omega = \omega_{opt}$, $L^* = 0.1/d_f$.

Можно оптимизировать расход по трем параметрам ω , k , d_f . Дифференцируя выражения для средних размерных расходов $\partial \langle Q_i \rangle / \partial \omega = 0$, $\partial \langle Q_i \rangle / \partial k = 0$, учитывая (4.26), а также выражения для безразмерных параметров $W = (\sigma d_f^3 k^4) / (\eta_f \omega)$, $N = ((\rho_f - \rho_s) g d_f^3 k^2) / (\eta_f \omega)$,

можно получить уравнения, для определения k_{opt} и ω_{opt} :

$$\begin{aligned} -\eta_f^2 \omega^2 (b_3 + a_3)^2 + d_f^6 k^4 (ba_3 - b_3 a)^2 ((\rho_f - \rho_s)g + \sigma k^2)^2 &= 0, \\ -3\eta_f^2 \omega^2 (b_3 + a_3)^2 + d_f^6 k^4 (ba_3 - b_3 a)^2 ((\rho_f - \rho_s)g + \sigma k^2)((\rho_f - \rho_s)g + 5\sigma k^2) &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получим выражения для значений частоты ω_{opt} и k_{opt} волнового числа приложенного магнитного поля, при которых средние расходы как немагнитной, так и магнитной жидкости достигают максимального значения:

$$k_{opt}^2 = \frac{(\rho_f - \rho_s)g}{\sigma}, \quad \omega_{opt} = \frac{2d_f^3 (ba_3 - b_3 a)(\rho_f - \rho_s)^2 g^2}{\sigma \eta_f (b_3 + a_3)} \quad (4.27)$$

Пусть размерное расстояние между плоскостями $L = d_f + d_s = \text{const}$. Подставив $k = k_{opt}$, $\omega = \omega_{opt}$ в (4.26), учитывая, что $L^* = L/d_f$ получим немонотонную зависимость оптимальных расходов от толщины слоя магнитной жидкости d_f . Используя $\partial \langle Q_i \rangle / \partial d_f = 0$, получены уравнения для определения оптимального d_f , в которые входят L , $n_2 = \eta_s / \eta_f$. При $L = 0.1$ см и $n_2 = 0.125$, получено $k_{opt} = 2.8$ см⁻¹, $\omega_{opt} = 0.66$ с⁻¹, и максимальный средний расход перекачиваемой немагнитной жидкости $\langle Q_s \rangle = 0.0168$ см²/с будет достигаться при $d_f = 0.053$ см, а максимальный средний расход магнитной жидкости $\langle Q_f \rangle = 0.0111$ см²/с при $d_f = 0.061$ см, см. рис. 4.5 б.

В случае, когда $k = 2$ см⁻¹ и $\omega = 0.3$ с⁻¹, получены меньшие значения максимальных средних расходов: $\langle Q_s \rangle = 0.0157$ см²/с при $d_f = 0.053$ см, $\langle Q_f \rangle = 0.0103$ см²/с при $d_f = 0.058$ см, см. рис. 4.5 а. Формулы (4.26) и (4.27) могут быть использованы для оптимизаций работы перистальтического насоса на основе магнитной жидкости.

Бегущее магнитное поле, создаваемое движущимися намагничивающимися стержнями. Аналогично тому, как это было сделано выше для однослойного течения, рассмотрим случай, когда бегущее периодическое магнитное поле создается движущимися со скоростью U цилиндрическими стержнями из ферромагнитного материала радиуса R_r , расположенными на расстоянии Δx друг от друга (магнитная проницаемость материала стержней $\mu \gg 1$), в однородном приложенном вертикальном магнитном поле H_∞ (см. рис. 3.6). Невозмущенная поверхность жидкости находилась на расстоянии l от центров ферромагнитных стержней. Магнитная сила F_M вычисляются аналогично тому, как это сделано в главе 3.

Вид безразмерной магнитной силы F_M и безразмерная форма поверхности h^* при $U = 0.8$ см/с приведены на рис. 4.6 а для следующих значений размерных переменных:

$H_\infty = 50 \text{ Э}$, $d_f = d_s = 0.05 \text{ см}$, $\Delta x = 3 \text{ см}$, $R_r = 0.1 \text{ см}$, $l = 1.05 \text{ см}$, $M_{fs} = 2.5 \text{ Гс}$, $\rho_f = 1.24 \text{ г/см}^3$, $\rho_s = 1 \text{ г/см}^3$, $\eta_f = 0.08 \text{ П}$, $\eta_s = 0.01 \text{ П}$, $\sigma = 25 \text{ дин/см}$, $\varepsilon_H = 0.03$. При этом $Re = 0.7U$. На рис. 4.6 б приведена немонотонная (имеющая один максимум при $U = 0.2 \text{ см/с}$) зависимость размерного среднего расхода $\langle Q \rangle = Ud \langle Q^* \rangle$ от скорости движения цилиндров U . Из приведенных выше примеров видно, что изменяя частоту приложенного магнитного поля или скорость движения цилиндрических стержней U , можно оптимизировать средний расход жидкости в каждом слое.

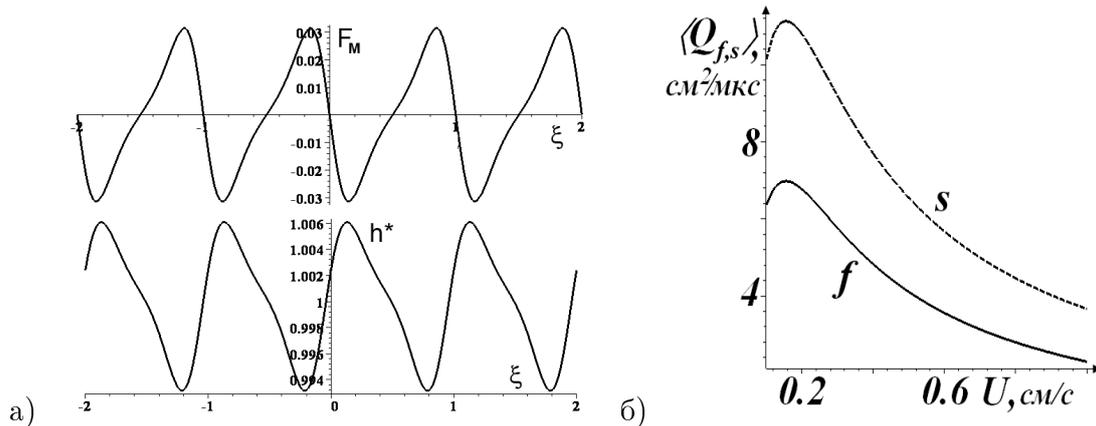


Рис. 4.6. а) Безразмерная магнитная сила F_M и безразмерная форма поверхности h^* для магнитного поля, созданного ферромагнитными стержнями в однородном магнитном поле. б) Зависимость среднего размерного расхода жидкостей $\langle Q_i \rangle$ от скорости стержней U

Выводы к главе 4. В четвертой главе аналитически решена плоская задача о течении двух тонких слоев вязких несжимаемых жидкостей (одна из которых — магнитная жидкость), имеющих разные магнитные свойства, между двумя горизонтальными твердыми плоскостями в неоднородном бегущем магнитном поле с учетом силы тяжести, поверхностного натяжения и зависимости намагниченности жидкости от величины магнитного поля. В длинноволновом приближении получена система уравнений для определения толщины слоя магнитной жидкости и градиента давления в этом слое. Для малых амплитуд периодической магнитной силы найдены форма бегущей поверхностной волны, распределение скоростей, давления и средние расходы жидкостей. Показано наличие немонотонной зависимости (единственный максимум) средних расходов жидкостей от частоты и волнового числа приложенного магнитного поля, а также от толщины слоя магнитной жидкости. Для косинусоидальной магнитной силы получены формулы для оптимальных значений некоторых параметров, при которых средний расход в слоях жидкостей достигает максимума.

Заключение

1. Создана экспериментальная установка для исследования деформации формы поверхности магнитной жидкости, содержащей намагничивающийся цилиндр, в однородном приложенном магнитном поле разного направления. Экспериментально обнаружено, что в некоторых диапазонах полей существует множество устойчивых равновесных форм фиксированного объема магнитной жидкости, состоящего из одного, двух или трех объемов. Экспериментально наблюдались скачкообразные изменения и гистерезис формы магнитной жидкости в циклически возрастающем и убывающем магнитном поле, связанные с существованием множества равновесных форм жидкости. Обнаружена зависимость количества скачкообразных изменений формы жидкости от скорости и характера изменения приложенного магнитного поля. Показана возможность создания течения окружающей среды с помощью деформации формы поверхности магнитной жидкости в переменных однородных приложенных магнитных полях.
2. Созданы программы численного расчета равновесной формы поверхности магнитной жидкости, содержащей тело (цилиндр или шар) из намагничивающегося материала, в однородном приложенном магнитном поле. В случае постоянного объема магнитной жидкости численно получены различные формы, состоящего из одного, двух или трех объемов. Разработана методика расчета диапазонов значений магнитных полей, при которых существуют разные типы решений. Показано хорошее совпадение экспериментальных и теоретических результатов. В случае переменного объема магнитной жидкости, если в отсутствии поля реализуется односвязное решение, то при любом значении поля существуют только однозначные односвязные решения.
3. Теоретически исследовано влияние пленки на равновесную форму поверхности магнитной жидкости для случаев постоянного и переменного объема магнитной жидкости. Получено, что в случае переменного объема существует только односвязный объем жидкости, как при наличии пленки, так и без нее. При этом не возникают скачкообразные и гистерезисные явления, связанные с неоднозначностью решения.
4. Аналитически решены задачи о течении тонкого слоя вязкой несжимаемой магнитной жидкости на горизонтальной подложке и о течении двух слоев вязких несжи-

маемых жидкостей, имеющих разные магнитные свойства, между горизонтальными плоскостями в бегущем периодическом магнитном поле. Получены формулы для формы поверхности, скоростей, давлений и средних расходов жидкостей.

5. Обнаружена немонотонная зависимость (с одним максимумом) средних расходов жидкостей в слоях от частоты и волнового числа приложенного магнитного поля, а также от толщины слоя магнитной жидкости. Определены оптимальные параметры задачи, при которых средние расходы жидкостей максимальны. Полученные зависимости могут использоваться для описания, конструирования и оптимизации перистальтических насосов на основе магнитной жидкости.

Литература

- [1] Л. И. Седов. Механика сплошной среды. - М.:Наука. 1983.
- [2] Л. И. Седов. О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций // Прикл. матем. и мех. 1965, № 1, том 29, pp. 4–17.
- [3] Гогосов В.В., Полянский В.А. Электродинамика: задачи и приложения, основные уравнения, разрывные решения // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. Механика жидкости и газа. 1976, том 10, с. 5–85.
- [4] Ватажин А.Б., Грабовский В.И., Лихтер В.А., Шульгин В.И. Электрогазодинамические течения. — М.: Наука. 1983, 344 с.
- [5] Neuringer J.L., Rosensweig R.E. Ferrohydrodynamics // Phys. Fluids. 1964, 7, No 12, pp. 1927-1937. (Пер. на русский: Розенцвейг Р. Феррогидродинамика, - М.: Мир. 1989, 356 с.)
- [6] Шлиомис М.И. Магнитные жидкости // Успехи физических наук. 1974, том 112, вып. 3, с. 427-458.
- [7] Гогосов В.В., Налетова В.А., Шапошникова Г.А. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. Механика жидкости и газа. 1981, том 16, с. 76-208.
- [8] Голубятников А.Н., Субханкулов Г.И. О поверхностном натяжении магнитной жидкости // Магнитная гидродинамика. 1986, № 1, с. 73-78.
- [9] Тарапов И.Е. Некоторые вопросы гидростатики намагничивающихся и поляризующихся сред // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974, № 5, с. 141 - 144.
- [10] Архипенко В.И., Барков Ю.Д., Баштовой В.Г. Исследование формы капли намагничивающейся жидкости в однородном магнитном поле // Магнитная гидродинамика. 1978, № 3, с. 131-134.
- [11] Bacri J.-C., Salin D. Instability of ferrofluid magnetic drops under magnetic field // Journal de physique - letters. 1982, vol. 43, N 17, pp. 649-654.

- [12] Bacri J.-C., Salin D. Dynamics of the shape transition of a magnetic ferrofluid drop // Journal de physique - letters. 1983, vol. 44, N 11, pp. 415-420.
- [13] Барков Ю.Д., Берковский Б.М. Распад капли намагничивающейся жидкости // Магнитная гидродинамика. 1980, № 3, с. 11-14.
- [14] Архипенко В.И., Барков Ю.Д., Баштовой В.Г. Некоторые особенности поведения капли намагничивающейся жидкости в магнитных полях. // Магнитная гидродинамика. 1980, № 3, с. 3-10.
- [15] Берковский Б.М., Смирнов Н.Н. Некоторые решения уравнения поверхности намагничивающейся жидкости // Магнитная гидродинамика. 1984, № 1, с. 15-20.
- [16] Рекс А.Г. Некоторые вопросы механики магнитожидкостных систем со свободной поверхностью. - Мн.: БНТУ. 2005, 256 с.
- [17] Голубятников А.Н. Определение магнитной восприимчивости, плотности и поверхностного натяжения магнитной жидкости. Отчет НИИ Механики МГУ № 2238. Москва, 1979.
- [18] Голубятников А.Н. Колебания капли магнитной жидкости в переменном поле. Отчет НИИ Механики МГУ № 2438. Москва, 1980.
- [19] Берковский Б.М., Орлов Л.Г. К исследованию формы свободной поверхности и аналога понч-эффекта в намагничивающихся жидкостях // Магнитная гидродинамика. 1973, № 4, с. 38 - 44.
- [20] Райхер Ю.Л., Соснин П.А., Коровин В.М., Пшеничников А.Ф. Равновесие капли магнитной жидкости в поле прямоугольного магнита // Магнитная гидродинамика. 1992, № 4, с. 24-30.
- [21] Кирюшин В.В., Назаренко А.В. Взаимодействие магнитной жидкости с проводником с током и постоянным магнитом // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988, № 2, с. 176-181.
- [22] Баштовой В.Г., Будник А.М., Полевиков В.К., Рекс А.Г. Исследование двухсвязных равновесных форм магнитной жидкости в магнитном поле вертикального проводника // Магнитная гидродинамика. 1984, № 2, с. 47-53.

- [23] Krueger D.A., Jones T.B. Hydrostatic profile of ferrofluid around a vertical current-carrying wire // *Phys. Fluids*. 1974, vol. 17, № 10, pp. 1831-1833.
- [24] Борисов И.Д. О равновесных формах поверхности намагничивающейся жидкости // *Магнитная гидродинамика*. 1976, № 4, с. 11-18.
- [25] Берковский Б.М., Каликманов В.И. Одно точное решение уравнений равновесной поверхности намагничивающейся жидкости в кольцевом зазоре // *Магнитная гидродинамика*. 1984, № 1, с. 10-14.
- [26] J.-C. Bacri, R. Perzynski, D. Salin and F. Tourinho. Magnetic Wetting Transition of a Ferrofluid on a Wire // *Europhysics Letters*. 1988, 5(6), pp 547-552.
- [27] J.-C. Bacri, C. Frenois, R. Perzynski and D. Salin. Magnetic drop-sheath wetting transition of a ferrofluid on a wire // *Revue Phys. Appl.* 1988, 23, pp. 1017-1022.
- [28] V.A. Naletova, V.V. Kiryushin, V.G. Bashtovoi, A.G. Reks. Ambiguity of the shape of a magnetic fluid drop in a magnetic field of a line conductor // *Magnetohydrodynamics*. 2005, vol. 41, № 4, pp. 379-384.
- [29] Налетова В.А., Кирюшин В.В., Турков В.А. Подъем магнитной жидкости из цилиндрического сосуда по проводнику с током. В сб.: 12-я Международная Плесская конференция по магнитным жидкостям, Плес. 2006, с. 220-225.
- [30] V.A. Naletova, V.V. Kiryushin, A.G. Reks, E. Suvchuk. Hysteresis of the shape of a magnetic fluid volume near a line conductor // *Magnetohydrodynamics*. 2008, vol. 44, № 2, pp. 167-174.
- [31] V.A. Naletova, V.A. Turkov, A.S. Vinogradova. A magnetic fluid bridge between coaxial cylinders with a line conductor // *Physics Procedia*. 2010, vol. 9, pp. 68-73.
- [32] Виноградова А.С., Волкова Т.И. Статические формы поверхности магнитной жидкости в поле проводника с током // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011, № 4, часть 5, с. 2066-2068.
- [33] V.A. Naletova, V.A. Turkov, T.I. Volkova. Magnetic fluid between horizontal plates in the fields of horizontal conductors // *Physics Procedia*. 2010, vol. 9, pp. 126-130.

- [34] Кирюшин В.В., Чыонг За Бинь. Фигуры равновесия намагничивающейся жидкости в магнитном поле // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1980, № 4, с. 123-128.
- [35] Кирюшин В.В., Параскевопуло О. Р. Форма поверхности капли магнитной жидкости вблизи острия магнитного клина // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1992, № 4, с. 113 - 119.
- [36] Циммерман К., Зейдис И., Налетова В.А., Турков В.А., Гончаров П.А. Поверхность магнитной жидкости, содержащей сферическое тело в однородном магнитном поле. 2005.
- [37] Гогосов В.В., Симоновский А.Я., Шапошникова Г.А. Гидродинамика магнитных жидкостей. Некоторые модели и примеры их применений // Труды математического института АН СССР. 1989, Т. 186, с. 140 - 149.
- [38] Гогосов В.В., Симоновский А.Я. О локально-неоднородном охлаждении при закалке в магнитной жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989, № 2, с. 3 - 11.
- [39] В.В. Гогосов, О.А. Гришанина, В.В. Кирюшин, А.Я. Симоновский Экспериментальное исследование форм свободной поверхности магнитной жидкости, окружающей намагничивающуюся пластину, во внешнем магнитном поле // Магнитная Гидродинамика. 1998, Т. 34, № 1, с. 40 - 49.
- [40] В.В. Гогосов, О.А. Гришанина, В.В. Кирюшин, А.Я. Симоновский Теоретическое описание форм свободной поверхности магнитной жидкости, окружающей намагничивающуюся пластину, во внешнем магнитном поле // Магнитная Гидродинамика. 1998, Т. 34, № 1, с. 50 - 57.
- [41] V.V. Gogosov, A. Ya. Simonovskii, R.D. Smolkin Quenching and separation in magnetic fluids // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 1990, № 85, pp. 227-232.
- [42] В.В. Гогосов, Х.Д. Искандеров, В.В. Кирюшин, А.Я. Симоновский Влияние магнитного поля и типов магнитных жидкостей на теплоперенос при охлаждении намагничивающегося шара в магнитных жидкостях. Эксперимент и его объяснение // Магнитная Гидродинамика. 1998, Т. 34, № 1, с. 50 - 57.

- [43] В.В. Гогосов, О.А. Гришанина, А.Я. Симоновский Влияние магнитного поля на охлаждение намагничивающейся пластины в магнитных жидкостях // Магнитная Гидродинамика. 1999, Т. 36, № 1, с. 36 - 51.
- [44] В.В. Гогосов, Х.Д. Искандеров, А.Я. Симоновский Влияние величины магнитного поля и размеров намагничивающихся шаров на изменение интенсивности их охлаждения в магнитных жидкостях со временем // Магнитная Гидродинамика. 1999, Т. 35, № 2, с. 179 - 183.
- [45] В.В. Гогосов, М.Ю. Клименко, А.Я. Симоновский Влияние магнитного поля и температуры нагрева полого намагничивающегося цилиндра на тепломассоперенос при охлаждении цилиндра в магнитной жидкости // Магнитная Гидродинамика. 2000, Т. 36, № 3, с. 251 - 276.
- [46] Cowley M.D., Rosensweig R.E. The interfacial stability of a ferromagnetic fluid // J. Fluid Mech. 1967, vol. 30, part 4, pp. 671-688.
- [47] Гайлитис А. Форма поверхностной неустойчивости ферромагнитной жидкости // Магнитная гидродинамика. 1969, № 1, с. 68-70.
- [48] Gailitis A. Formation of the hexagonal pattern on the surface of a ferromagnetic fluid in an applied magnetic field // J. Fluid Mech. 1977, 82, № 3, pp. 401-413.
- [49] В.М. Коровин Длинные волны в двухслойной магнитной жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа 1993, N 3, с. 126-133.
- [50] Баштовой В.Г. Устойчивость поверхности намагничивающейся жидкости, покрытой тонкой упругой пленкой // Магнитная гидродинамика. 1978, N 4, стр. 21-24.
- [51] В.М. Коровин. Течение тонкой пленки магнитной жидкости по вертикальному токонесущему цилиндру. Отчет НИИ Механики МГУ № 4974. 2008, 21 с.
- [52] Коровин В.М., Райхер Ю.Л. Увлечение магнитной жидкости движущейся границей плоскопараллельного слоя // Магнитная гидродинамика. 1987, № 1, с. 49-52.
- [53] Buchin V.A., Shaposhnikova, G.A. Suppression of disturbances on the thin film surface of viscous magnetic fluid flowing on the vertical wall // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 1999, Vol. 201, pp. 343-345.

- [54] Buchin V.A., Shaposhnikova, G.A. Dynamic effects in flowing-down layers of magnetic fluids in unsteady magnetic fields // Doklady Physics. 2001, N 12, Vol. 46, pp. 873-875.
- [55] V.A. Naletova, L.G.Kim, V.A. Turkov. Hydrodynamics of a horizontally rotating thin magnetizable liquid film // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 1995, Vol. 149, pp. 162-164.
- [56] Налетова В.А., Турков В.А. Влияние импульсного магнитного поля на процесс растекания намагничивающейся жидкости по поверхности горизонтального вращающегося диска. В сб.: Тезисы докладов VIII научной школы: Физика импульсных разрядов в конденсированных средах. 1997, pp. 18-19.
- [57] V.A. Naletova, V.A. Turkov. Film thickness discontinuity generation in a magnetic field. In: Abstract Book of 8th International Conference on Magnetic Fluids (ICMF8). 1998, pp. 349-350.
- [58] V.A. Naletova, V.A. Turkov. Film thickness discontinuity generation in a magnetic field // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 1999, Vol. 201, pp. 346-349.
- [59] Needham, D. J.; Merkin, J. H. The development of nonlinear waves on the surface of a horizontally rotating thin liquid film // Journal of Fluid Mechanics. 1987, vol. 184, pp. 357-379.
- [60] Tyatyushkin A.N. Thin magnetic liquid layer in a magnetic field. In: Abstract Book of 9th International Conference on Magnetic Fluids (ICMF9), Bremen. 2001, pp. 169.
- [61] Kikura H., Sawada T., Tanahashi T., Seo. L.S. Propagation of surface waves of magnetic fluids in traveling magnetic fields // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 1990, Vol. 85, pp. 167-170.
- [62] Friedrich T., Rehberg I., Richter R. Magnetic traveling-stripe forcing: Enhanced transport in the advent of the Rosensweig instability // Physical review. 2010, N 036304, Vol. 82, pp. 1-5.
- [63] Beetz A., Gollwitzer C., Richter R., and Rehberg I. Response of a ferrofluid to traveling-stripe forcing // Journal of Physics: Condensed Matter. 2008, N 20, Vol. 20, pp. 204109.

- [64] Zhao Meng, Zou Jibin, Shang Jing, Qi Ming. Spin Travelling Wave Pump on Magnetic Fluid. In: Abstract Book of 12th International Conference on Magnetic Fluids (ICMF12), Sendai. 2010, pp. 138-139.
- [65] Zhao Meng, Zou Jibin, Hu Jianhui, Xu Yongxiang. Analysis of driving capacity on traveling wave pump of magnetic fluid. In: Abstract Book of 12th International Conference on Magnetic Fluids (ICMF12), Sendai. 2010, pp. 138-139.
- [66] Y. Ido, K. Tanaka, Y. Siguira. Fluid transportation mechanisms by a coupled system of elastic membranes and magnetic fluid // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2002, Vol. 252, pp. 344-346.
- [67] Курилов В.В. Вибрационный конвейер. Описание изобретения к авторскому свидетельству № 1293086. 1987.
- [68] Tanaka Koichi. Driving and propulsion using traveling wave. Patent abstracts of japan. 1991.
- [69] Park G.S., Park S.H. Design of magnetic fluid linear pump // IEEE Trans. Magn. 1999, Vol 35, pp. 4058-4060.
- [70] Park G.S., Park S.H. New structure of the magnetic fluid linear pump // IEEE Trans. Magn. 2000, Vol 36, pp. 3709-3711.
- [71] Park G.S., Kang S. New Design of the magnetic fluid linear pump to reduce the discontinuities of the pumping forces // IEEE Trans. Magn. 2004, Vol 40, pp. 916-919.
- [72] Баштовой В.Г., Краков М.С. О возбуждении волн на поверхности магнитной жидкости бегущим магнитным полем // Магнитная гидродинамика. 1977, N 1, стр. 22-27.
- [73] K. Zimmermann, I. Zeidis, V.A. Naletova, V.A. Turkov, A.V. Rozin. Modeling of a magnetic fluid layer dynamics in a traveling magnetic field. In: Book of Abstracts of VI international congress on mathematical modeling. 2004, pp. 174.
- [74] K. Zimmermann, I. Zeidis, V.A. Naletova, V.A. Turkov, A.V. Rozin. Numerical simulation of a magnetic fluid surface dynamic in a traveling magnetic field. In: Book of Abstracts of 49th internationales wissenschaftliches kolloquium. 2004, Vol. 1, pp. 361-364.

- [75] K. Zimmermann, I. Zeidis, V.A. Naletova and V.A. Turkov. Waves on the surface of a magnetic fluid layer in a traveling magnetic field // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2004, Vol. 268, pp. 227-231.
- [76] K. Zimmermann, I. Zeidis, V.A. Naletova and V.A. Turkov. Travelling waves on a free surface of a magnetic fluid layer // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2004, Vol. 272-276, pp. 2343-2344.
- [77] K. Zimmermann, I. Zeidis, V.A. Naletova, V.A. Turkov, V.E. Bachurin. Magnetic fluid layer on a cylinder in a traveling magnetic field // J. Phys. Chem. 2006, Vol. 220, pp. 117-124.
- [78] Циммерман К., Зейдис И., Налетова В.А., Бачурин В.Е., Турков В.А. Управление формой поверхности раздела двух сред с помощью магнитного поля. В сб.: Сборник научных трудов XI международной конференции по магнитным жидкостям, Плес. 2004, стр. 299-304.
- [79] В.А. Налетова, В.А. Турков, Д.А. Пелевина, С.А. Калмыков. Деформация поверхности магнитной жидкости, содержащей намагничивающееся тело, в однородном магнитном поле. В сб.: Тезисы докладов XIV школы - семинара "Современные проблемы аэрогидродинамики", Сочи. 2006, с. 71.
- [80] З. В.А. Налетова, В.А. Турков, Д.А. Пелевина. Поверхность магнитной жидкости, содержащей магнитные концентраторы, в однородном магнитном поле. В сб.: Тезисы докладов научной конференции "Ломоносовские чтения". 2007, с. 124-125.
- [81] K. Zimmermann, V.A. Naletova, I. Zeidis, V.A. Turkov, D.A. Pelevina. Surface of a magnetic fluid containing magnetizable bodies in an applied uniform magnetic field. In: Abstract Book of 11th International Conference on Magnetic Fluids (ICMF11), Kosice. 2007, p. 6P15.
- [82] В.А. Налетова, Д.А. Пелевина, В.А. Турков. Численный расчет формы поверхности магнитной жидкости, содержащей концентраторы магнитного поля. В сб.: Тезисы докладов научной конференции "Ломоносовские чтения". 2008, с. 135-136.
- [83] K. Zimmermann, V.A. Naletova, I. Zeidis, V.A. Turkov, D.A. Pelevina, V. Böhm, J. Popp.

Surface of a magnetic fluid containing magnetizable bodies in an applied uniform magnetic field // Magnetohydrodynamics. 2008, Vol. 44, N 2, pp. 175-182.

- [84] Naletova V.A., Zimmermann K., Zeidis I., Turkov V.A., Pelevina D.A., Friedrich T. and Richter R. Deformation of a magnetic fluid surface due to ferromagnetic bodies in an applied uniform magnetic field. In: Proceedings of the 7th International PAMIR conference on fundamental and applied Magnetohydrodynamics, Giens, France. 2008, Vol. 2, pp. 747-751.
- [85] Пелевина Д.А. Деформация и движение свободной поверхности магнитной жидкости при наличии концентраторов магнитного поля. В сб.: Труды конференции-конкурса молодых ученых, Москва. 2009, с 176-181.
- [86] Пелевина Д.А. Несимметричные формы поверхности магнитной жидкости в симметричном магнитном поле. В сб.: Материалы докладов XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", Москва. 2009. с. 95.
- [87] В.А. Налетова, В.А. Турков, Д.А. Пелевина. Статика магнитной жидкости, содержащей концентраторы магнитного поля // Известия РАН, Механика жидкости и газа. 2009, №6, с. 3-10.
- [88] В.А. Налетова, А.В. Розин, Д.А. Пелевина. Статика и динамика магнитной жидкости, содержащей концентратор магнитного поля. В сб.: Тезисы докладов первой всероссийской конференции "Проблемы механики и акустики сред с микро- и наноструктурой", Нижний Новгород. 2009, с. 202-208.
- [89] Налетова В.А., Пелевина Д.А., Розин А.В., Турков В.А. Движение магнитной жидкости, содержащей концентраторы магнитного поля. В сб.: Сборник научных трудов II всероссийской научной конференции "Физико-химические и прикладные проблемы магнитных дисперсных наносистем", Ставрополь. 2009, с. 350-355.
- [90] 1. Налетова В.А., Пелевина Д.А., Розин А.В., Турков В.А. Изменение формы поверхности магнитной жидкости под действием магнитного поля при наличии погруженных в нее концентраторов магнитного поля. В сб.: Тезисы докладов научной конференции "Ломоносовские чтения". 2010, с. 143-144.

- [91] V.A. Naletova, V.A. Turkov, A.V. Rozin, D.A. Pelevina. Dynamics of the free surface of the magnetic fluid containing cylindrical ferromagnetic body. In: Abstract Book of 12th International Conference on Magnetic Fluids (ICMF12), Sendai. 2010, pp. 162-163.
- [92] В.А. Налетова, В.А Турков, Д.А. Пелевина. Статика магнитной жидкости, содержащей цилиндр из намагничивающегося материала в однородном магнитном поле. В сб.: Сборник научных трудов III всероссийской научной конференции "Физико-химические и прикладные проблемы магнитных дисперсных наносистем", Ставрополь. 2011, с. 69-73.
- [93] Налетова В.А., Пелевина Д.А., Турков В.А. Поведение объема магнитной жидкости, содержащей намагничивающееся тело, в однородном магнитном поле. В сб.: Тезисы докладов XX Всероссийская школа-конференция молодых ученых и студентов "Математическое моделирование в естественных науках", Пермь. 2011, с 143-144.
- [94] В.А. Налетова, В.А Турков, Д.А. Пелевина. Экспериментальное и теоретическое исследование объема магнитной жидкости вокруг твердого намагничивающегося тела в однородном магнитном поле. В сб.: Тезисы докладов "Российская конференция по Магнитной Гидродинамике", Пермь. 2012, с. 73.
- [95] Пелевина Д.А. Создание направленного движения на основе магнитной жидкости в неоднородных магнитных полях. В сб.: Материалы докладов Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", Москва. 2012. http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2012/1796/5120/_957a.pdf
- [96] D.A. Pelevina. Locomotion systems on the base of a magnetic fluid. In: Conference Volume of Humboldt Colloquium "The Role of Fundamental Sciences in Society", Moscow. 2012, pp. 154-155.
- [97] Налетова В.А, Пелевина Д.А, Турков В.А. Конечные объемы магнитной жидкости во вращающихся магнитных полях. В сб.: Сборник научных трудов IV Всероссийской Научной Конференции "Физико-химические и прикладные проблемы магнитных дисперсных наносистем", Ставрополь. 2013, с. 168-173.
- [98] Пелевина Д.А., Налетова В.А., Лукашевич В.М. Форма магнитной жидкости в наклонных магнитных полях. В сб.: Материалы XXII Всероссийской школы-конференции

ции молодых ученых и студентов “Математическое моделирование в естественных науках”, Пермь. 2013, с 120-122.

- [99] I. V.A. Naletova, V.A. Turkov, D.A. Pelevina, A.V. Rozin, K. Zimmermann, J. Popp, I. Zeidis. Behavior of a free surface of a magnetic fluid containing a magnetizable cylinder // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2012, Vol. 324, pp. 1253-1257.
- [100] V.A. Naletova, V.A. Turkov, D.A. Pelevina, A.V. Rozin, V. Bohm, J. Popp, I. Zeidis, K. Zimmermann. Enhanced deformation of magnetizable fluids for efficiency increase of ferrofluid based locomotion systems. In: Abstract Book of 13th International Conference on Magnetic Fluids (ICMF13), New Dehli. 2013, pp. 386-388.
- [101] J. Popp, I. Zeidis, K. Zimmermann, V. Boehm, V. A. Naletova, V. A. Turkov, D. A. Pelevina, A. V. Rozin. Enhanced deformation of magnetizable fluids for efficiency increase of ferrofluid based locomotion systems // Magnetohydrodynamics. 2013, Vol. 49, N 3-4, pp. 468-472.
- [102] В.А. Налетова, В.А Турков, Д.А. Пелевина. Форма магнитной жидкости, содержащей цилиндр из ферромагнитного материала, под полимерной пленкой в однородном магнитном поле. В сб.: Сборник докладов: "X международная научная конференция современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей", Санкт-Петербург. 2012, с. 250-252
- [103] V.A. Naletova, V.A. Turkov, D.A. Pelevina. The behavior of the magnetic fluid covered by impermeable film in nonuniform magnetic field. In: Abstract Book of 13th International Conference on Magnetic Fluids (ICMF13), New Dehli. 2013, pp. 453-455.
- [104] D.A. Pelevina, V.A. Turkov, V.A. Naletova. The behavior of the magnetic fluid covered by impermeable film in nonuniform magnetic field // Magnetohydrodynamics. 2013, Vol. 49, N 3-4, pp. 536-540.
- [105] V. Bashtovoi, A. Motsar, V. Naletova, A. Reks, D. Pelevina. Free surface of a magnetic fluid with a spherical ferromagnetic body in a uniform magnetic field // Magnetohydrodynamics. 2013, Vol. 49, N 3-4, pp. 592-595.
- [106] В.А. Налетова, В.Е. Бачурин, В.А. Турков, Д.А. Пелевина. Деформация свободной поверхности слоя магнитной жидкости в бегущем магнитном поле. В сб.: Тезисы до-

кладов XIV школы - семинара "Современные проблемы аэрогидродинамики", Сочи. 2006, стр. 70.

- [107] V.A. Naletova, V.A. Turkov, D.A. Pelevina, S.A. Kalmykov. Hydrodynamics of a magnetic fluid layer in a traveling magnetic field. In: Abstract Book of 11th International Conference on Magnetic Fluids (ICMF11), Kosice. 2007, p. 6P16.
- [108] С.А. Калмыков, В.А. Налетова, Д.А. Пелевина, В.А. Турков. Расходное течение слоя тяжелой магнитной жидкости в бегущем магнитном поле. В сб.: Тезисы докладов XV школы - семинара "Современные проблемы аэрогидродинамики", Сочи. 2007, с. 56-57.
- [109] V.A. Naletova, V.A. Turkov, D.A. Pelevina, S.A. Kalmykov. Hydrodynamics of a magnetic fluid layer in a traveling magnetic field // Magnetohydrodynamics. 2008, Vol. 44, N 2, pp. 149-154.
- [110] Д.А. Пелевина. Средний расход течения намагничивающихся сред в бегущем магнитном поле. В сб.: Тезисы докладов XVII Зимняя школа по механике сплошных сред, Пермь. 2011, с. 250.
- [111] Пелевина Д.А., Калмыков С.А. Двухслойное течение намагничивающихся сред в бегущем магнитном поле. В сб.: Тезисы докладов XIX Всероссийской школы-конференции молодых ученых и студентов "Математическое моделирование в естественных науках", Пермь. 2010, с. 86.
- [112] Пелевина Д.А., Калмыков С.А. Волны на границе раздела двух намагничивающихся жидкостей в бегущем магнитном поле. В сб.: Труды конференции-конкурса молодых ученых 2010 г., Москва. 2011, с. 223-229.
- [113] Пелевина Д.А., Калмыков С.А. Двухслойное течение намагничивающихся жидкостей, связанное с движением ферромагнитных цилиндров. В сб.: Тезисы докладов XXI Всероссийской школы-конференции молодых ученых и студентов "Математическое моделирование в естественных науках", Пермь. 2012, с. 143-144.
- [114] С.А. Калмыков, В.А. Налетова, Д.А. Пелевина, В.А. Турков. Двухслойное течение намагничивающихся жидкостей // Известия РАН, Механика жидкости и газа. 2013, No. 5 с. 3-13.

Приложение 1: Программа для управления магнитными полями в эксперименте

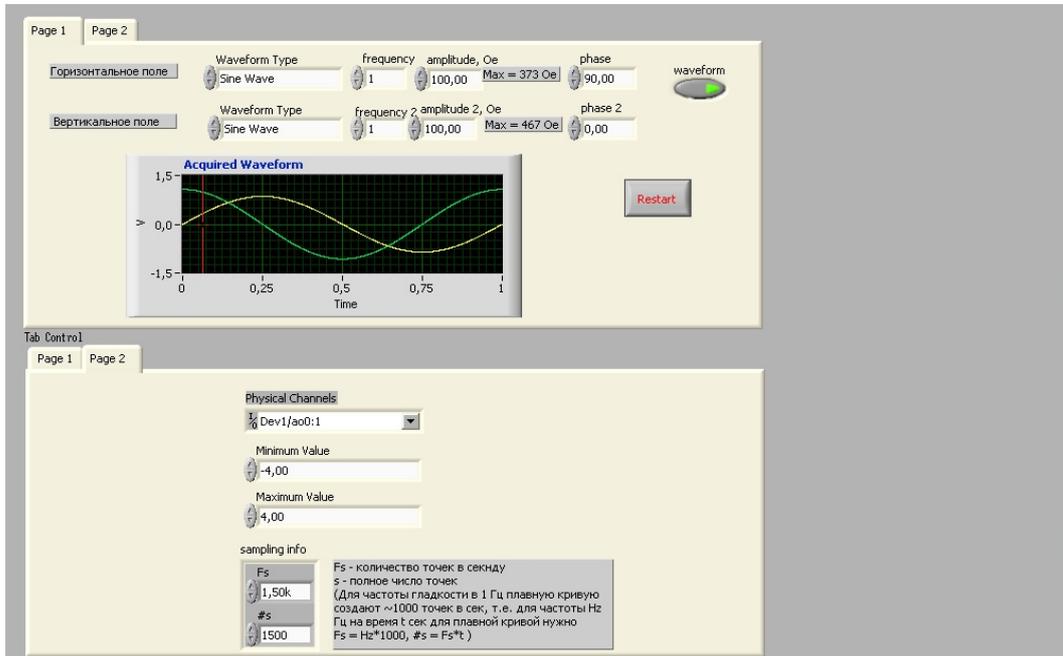


Рис. 7. Виртуальный прибор LabView для создания различных зависимостей $H_{\infty}(t)$.

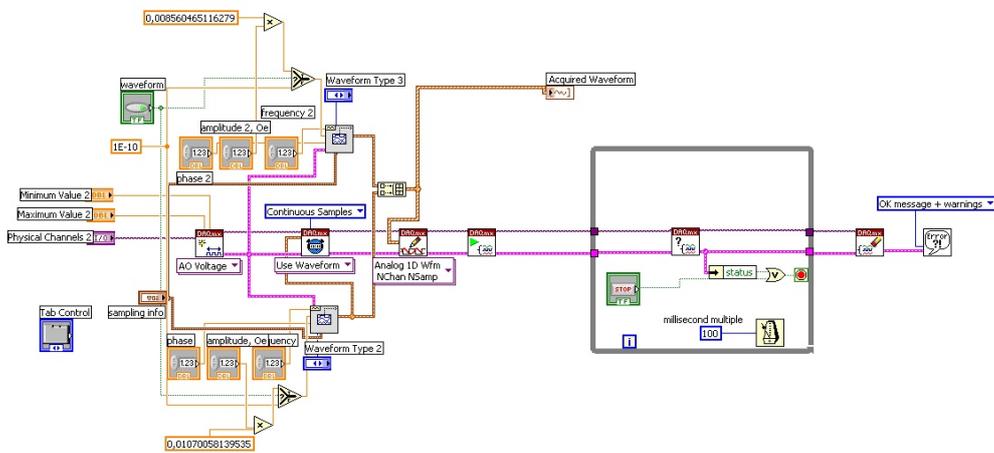


Рис. 8. Блок-диаграмма LabView для создания различных зависимостей $H_{\infty}(t)$.

Приложение 2: Программа для расчета форм поверхности вокруг цилиндрического концентратора

```
Один объем
// #define __DOUBLE_PRECISION__
#include "../defs.h" // определения типов, инклюды
// константы расчета (чтобы долго не искать в main'e)
#define N 200
#define H_0 170
#define R_0 1.7777
#define alpha 0.741203673
#define beta Pi/6
#define Eps 0.01
#define xi_inf 0.006323656713
#define P1 46.41943982 // 89.69940063
#define G 63.26834062 // 122.2576630
#define Ms 5.218499595
#define u_0 0.1245
// глобальные переменные - координаты точек для рисования
int nez = 0;
int debug = 0, shot_finished;
quad h = 1.0/N;
int curve_point = 1, Nc, ic=0;
int cross_flag = NoCrossing, crtmp;
quad C=0, a=-1000, b=1000, a_prev, b_prev, H_angle=beta;
quad rhoc = 0, tetac = 10, uc = u_0;
quad Vol1 = 0, Vol2 = 0, delta = I;
FILE *f;
quad u[4*N];
quad rho[4*N];
quad teta[4*N];
#include "../fs.h" // стандартные функции f1, f2, f3, cross
#include "../glfs.h" // функции рисования
char calc_step(int i, int flag, quad C)
{
/*
returns new flag using old cross_flag
0: no crossing
1, -1: self-crossing clockwise or counterclockwise
10: crossover of the curve and sphere
-10: curve is going away
*/
quad k11, k12, k13, k21, k22, k23;
k11=h*f1(teta[i-1]);
k12=h*f2(teta[i-1]);
k13=h*f3(rho[i-1], u[i-1], C, H_0);
k21=h*f1(teta[i-1]+k13);
k22=h*f2(teta[i-1]+k13);
k23=h*f3(rho[i-1]+k11, u[i-1]+k12, C, H_0);
rho[i]=rho[i-1]+(k11+k21)*0.5;
u[i]=u[i-1]+(k12+k22)*0.5;
teta[i]=teta[i-1]+(k13+k23)*0.5;
// CHECKING CROSS //
if((rho[i]<-1)&&(u[i]<u[0]))
flag = ClockWise;
if((rho[i]<-1)&&(u[i]>u[0]))
flag = CounterClockWise;
if(i>2){
crtmp = cross(rho, u, i);
if(
((crtmp == CounterClockWise) && (flag == ClockWise))
||
((crtmp == ClockWise) && (flag == CounterClockWise))
)
}
```

```

flag = NoCrossing;
else if(crtmp != NoCrossing)
flag = crtmp;
}
if(rho[i]*rho[i]+u[i]*u[i]<R*R){
flag = SphereCrossing;
//printf("curve&sphere: rho=%f, u=%f (double)rho[i], (double)u[i]);
}
if(i>3*N)
flag = GoesToInfy;
return flag;
}
// end of calc_step
void one_point_calc()
{
cross_flag = calc_step(curve_point, cross_flag, C);
tetac = teta[curve_point];
rhoc = rho[curve_point];
uc = u[curve_point];
curve_point++;
}
quad shoot(quad C_old)
{
printf("C=%f,teta=%f, rhoc=%f (double)C,(double)(tetac+Pi/2),(double)rhoc);
if(nez>0){
a = a_prev; b = b_prev;
C = (a+b)/2;
if(nez<5)
b=C;
else
a=C;
C = (a+b)/2;
}
a_prev = a; b_prev = b;
while((rhoc<1)&&(cross_flag == NoCrossing))
one_point_calc();
if(nez == 0) {
if(cross_flag == SphereCrossing){
printf("Drop ");
b=C_old;
}
if(cross_flag == ClockWise)
b=C_old;
if(cross_flag == CounterClockWise)
a=C_old;
if(cross_flag == NoCrossing){
if(tetac-alpha<-Eps)
a=C_old;
if(tetac-alpha>Eps)
b=C_old;
}
if((cross_flag == GoesToInfy)&&(uc < u[0]))
b=C_old;
if((cross_flag == GoesToInfy)&&(uc > u[0]))
a=C_old;
}
cross_flag = NoCrossing;
printf("new C=%f (double)(a+b)/2);
printf("delta_C=%e (double)(C_old-(a+b)/2));
return (a+b)/2;
}
double MF(double x, double y, double H0)
{
double rhof, P0, ff;
quad qx, qy;

```

```

    qx = (quad)x; qy = (quad)y;
    ff=0;
    P0=825.2344857;
    ff=H0*H0*pow((double)H(qx,qy),2)/(8*Pi)
-P0*(double)P(qx,qy,(quad)H0)+
(double)L(qx,qy,(quad)H0)*H0*(double)H(qx,qy);
    return ff;
}
void change_debug_mode()
{
if(debug)
debug = 0;
else
debug = 1;
}
void quit_and_save()
{
int i;
quad Vol=0;
printf("Quitting: TETAsm=%f (double)tetac);
printf("h0=%f, C=%f (double)u[0],(double)C);
// CALCULATIG OF THE VOLUME //
for(i=1;i<Nc;i++){
Vol=Vol+0.5*(u[i-1]+u[i]+2*R)*(rho[i]-rho[i-1]);
}
Vol=Vol-Pi*R*R;
printf("V0l=%f, rho0=%f (double)Vol,(double)rho[ic]);
fprintf(f,"C=%f; V=%f; h0=%f; H0=%f; (double)C,(double)Vol,(double)u[0],(double)H_0);
for(i=0;i<Nc;i++)
fprintf(f,"[%f,%f], (double)rho[i],(double)u[i]);
fclose(f);
scanf("%d &i);
exit(1);
}
void keyWindow (unsigned char k, int x, int y)
{
quad C_old = C;
nez = 0;
switch (k) {
case 0x1B : exit(0);
case '1': nez = 1; break;
case '2': nez = 10; break;
case '3': nez = 666; break;
case '9': change_debug_mode(); break;
}
if(((fabs((double)(tetac-alpha))<Eps))||(nez == 666))
quit_and_save();
if(debug==1){
one_point_calc();
printf("rho=%f, flag=%d (double)(rhoc), cross_flag);
if((rhoc>=1)||(cross_flag!=NoCrossing)){
C = shoot(C);
if(C-C_old==0)
printf("more precision needed ");
shot_finished = 1;
}
} else {
rhoc=rho[0];
uc=u_0;
C = shoot(C);
if(C-C_old==0)
printf("more precision needed a-C=%e, b-c=%e (double)(a-C),(double)(b-C));
shot_finished = 1;
}
drawWindow();
}

```

```

if(shot_finished){
Nc = curve_point;
curve_point = 1;
}
}
// инициализация графики и начальные данные
int main(int argc, char **argv)
{
f=fopen("test.txt "w");
//printf("xi_0=%f, H_0=%f, Tetasm=%f xi_inf,H_0,-Pi/2);
u[0]=u_0;
rho[0] = -1;
tetac = 10-alpha;
teta[0] = -alpha;
// инициализация графики
glutInit(&argc,argv);
glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE | GLUT_RGB);
// создание окна
glutInitWindowPosition(0, 0);
glutInitWindowSize(900, 400);
glutCreateWindow("Cilindr");
// настройка обработчиков событий
glutDisplayFunc(drawWindow);
glutReshapeFunc(reshapeWindow);
glutKeyboardFunc(keyWindow);
// цикл ожидания нажатия клавиши (keyWindow)
glutMainLoop();
return 0;
}
Левый и правый несимметричные объемы
char calc_step(int i, int flag, quad C)
{
/*
returns new flag using old cross_flag
0: no crossing
1, -1: self-crossing clockwise or counterclockwise
10: crossover of the curve and sphere
-10: curve is going away
*/
quad k11, k12, k13, k21, k22, k23, ff;
k11=h*f1(teta[i-1]);
k12=h*f2(teta[i-1]);
k13=h*f3(rho[i-1],u[i-1],C,H_0);
k21=h*f1(teta[i-1]+k13);
k22=h*f2(teta[i-1]+k13);
k23=h*f3(rho[i-1]+k11,u[i-1]+k12,C,H_0);
rho[i]=rho[i-1]+(k11+k21)*0.5;
u[i]=u[i-1]+(k12+k22)*0.5;
teta[i]=teta[i-1]+(k13+k23)*0.5;
// CHECKING CROSS //
if((rho[i]<-1)&&(u[i]<u[0]))
flag = ClockWise;
if((rho[i]<-1)&&(u[i]>u[0]))
flag = CounterClockWise;
if(i>2){
crtmp = cross(rho,u,i);
if(
((crtmp == CounterClockWise) && (flag == ClockWise))
||
((crtmp == ClockWise) && (flag == CounterClockWise))
)
flag = NoCrossing;
else if(crtmp != NoCrossing)
flag = crtmp;
}
}

```

```

if(rho[i]*rho[i]+u[i]*u[i]<R*R){
flag = SphereCrossing;
//printf("curve&sphere: rho=%f, u=%f (double)rho[i], (double)u[i]);
}
if(i>3*N)
flag = GoesToInfy;
return flag;
}
// end of calc_step
void one_point_calc()
{
quad new_tetac =
__atanq((u[curve_point]-u[curve_point-1])/(rho[curve_point]-rho[curve_point-1]));
cross_flag = calc_step(curve_point, cross_flag, C);
tetac = tetac[curve_point];
rhoc = rho[curve_point];
uc = u[curve_point];
if(rhoc!=0){
arc=__atanq(uc/rhoc);
alphac=Pi/2+arc-new_tetac;
} else {
printf("ACHTUNG!!! RHOC=0!!! ");
exit(444);
}
curve_point++;
}
quad shoot(quad C_old)
{
int i;
quad tetac_new;
if(nez>0){
a = a_prev; b = b_prev;
C = (a+b)/2;
if(nez<5)
b=C;
else
a=C;
C = (a+b)/2;
}
a_prev = a; b_prev = b;
// printf("C=%f,teta=%f (double)C,(double)(tetac+Pi/2));
while(cross_flag == NoCrossing)
one_point_calc();
if(nez==0){
if(cross_flag == SphereCrossing){
tetac_new = __atanq((uc-u[curve_point-2])/(rhoc-rho[curve_point-2]));
printf("Drop rhoc=%e, alphac-alpha=%e (double)rhoc, (double)(alphac-alpha));
printf("uc=%e, uc1=%e, rhoc=%e, rhoc1=%e
(double)uc, (double)u[curve_point-2],(double)rhoc, (double)rho[curve_point-2]);
printf("tetac=%e (double)tetac_new);
if(alphac-alpha<-Eps){
b=C;
}
}
if(alphac-alpha>Eps){
if(tetac_new > 0)
a=C;
else
b=C;
}
}
if(cross_flag == ClockWise)
b=C_old;
if(cross_flag == CounterClockWise)
a=C_old;
if(cross_flag == NoCrossing)

```

```

a=C_old;
if((cross_flag == GoesToInfy)&&(uc < u[0]))
b=C_old;
if((cross_flag == GoesToInfy)&&(uc > u[0]))
a=C_old;
}
printf("arc=%f, tetac=%f C=%e (double)arc,(double)tetac, (double)C);
cross_flag = NoCrossing;
return (a+b)/2;
}
void change_debug_mode()
{
if(debug)
debug = 0;
else
debug = 1; }
void quit_and_save()
{
int i;
int i_rho_min = 0;
quad Vol=0;
printf("Quitting: TETAsm=%f (double)tetac);
printf("h0=%f, C=%f (double)u[0],(double)C);
// CALCULATIG OF THE VOLUME //
Vol=0;
for(i=1;i<Nc+1;i++)
{Vol=Vol+0.5*(u[i-1]+u[i]+2*R)*(rho[i]-rho[i-1]);
}
if(rhoc<0)
{if(uc>0)
Vol=Vol-(R*R*_atanq(__sqrtq(R*R-rhoc*rhoc)/fabs((double)rhoc))
-__sqrtq(R*R-rhoc*rhoc)*fabs((double)rhoc)+(fabs((double)rhoc)*R
-0.5*R*R*(Pi/2-__atanq(__sqrtq(R*R-rhoc*rhoc)/fabs((double)rhoc))
-0.5*__sqrtq(R*R-rhoc*rhoc)*fabs((double)rhoc)));
if(uc<0)
Vol=Vol+(fabs((double)rhoc)*R-
0.5*R*R*(Pi/2-__atanq(__sqrtq(R*R-rhoc*rhoc)/fabs((double)rhoc))-
0.5*__sqrtq(R*R-rhoc*rhoc)*fabs((double)rhoc)));
}
if(rhoc>0)
Vol=Vol-Pi*R*R+R*R*_atanq(__sqrtq(R*R-rhoc*rhoc)/fabs((double)rhoc))-
__sqrtq(R*R-rhoc*rhoc)*fabs((double)rhoc);
printf("V0l=%f (double)Vol);
for(i=0;i<Nc;i++){
if(fabs((double)rho[i]) < fabs((double)rho[i_rho_min]))
i_rho_min = i;
}
printf("rho[%d]=%e, u[%d]=%e i_rho_min,(double)rho[i_rho_min],i_rho_min,(double)u[i_rho_min]);
fprintf(f,"C=%f; V=%f; h0=%f; H0=%f; (double)C,(double)Vol,(double)u[0],(double)H_0);
for(i=0;i<Nc;i++)
fprintf(f,"[%f,%f], (double)rho[i],(double)u[i]);
fclose(f);
//getch();
scanf();
exit(1);
}
void keyWindow (unsigned char k, int x, int y)
{
char shot_finished = 0;
quad new_tetac = __atanq((u[Nc-1]-u[Nc-2])/(rho[Nc-1]-rho[Nc-2]));
quad C_old = C;
nez=0;
switch (k) {
case 0x1B : exit(0);
case '1': nez = 1; break;
}

```

```

case '2': nez = 10; break;
case '3': nez = 666; break;
case 'd': nez = -555; break;
case '9': change_debug_mode(); break;
}
if(nez===-555){
printf("%e b-a=%e (double)C,(double)(b-a);
return;
}
printf("d alpha=%e, d R=%e
(double)(Pi/2-new_tetac+arc-alpha), (double)(uc*uc+rhoc*rhoc-R*R));
printf("arc=%e, tetac=%e (double)(arc), (double)(new_tetac));
if(
((fabs((double)(Pi/2-new_tetac+arc-alpha))<Eps)&&
(fabs((double)(uc*uc+rhoc*rhoc-R*R))<Eps))
||
(nez == 666)
)
quit_and_save();
if(debug==1){
one_point_calc();
printf("rho=%f, flag=%d (double)(rhoc), cross_flag);
if(cross_flag!=NoCrossing){
C = shoot(C);
if(C-C_old==0)
printf("more precision needed ");
shot_finished = 1;
}
} else {
rhoc=1;
uc=0;
C = shoot(C);
if(C-C_old==0)
printf("more precision needed a-C=%e, b-c=%e (double)(a-C),(double)(b-C));
shot_finished = 1;
}
drawWindow();
if(shot_finished){
Nc = curve_point;
curve_point = 1;
}
}
// инициализация графики и начальные данные
int main(int argc, char **argv)
{
f=fopen("LEFT.txt "w");
//printf("xi_0=%f, H_0=%f, Tetasm=%f xi_inf,H_0,-Pi/2);
u[0]=u_0;
rho[0]=-1;
printf("%e (double)rho[0]);
teta[0] = on_wall;
printf("teta 0 = %e (double)teta[0]);
tetac = 0;
arc = 0;
rhoc = 1;
uc = 0;
//cross_flag = ClockWise;
curve_point = 1;
cross_flag = NoCrossing;
// инициализация графики
glutInit (&argc,argv);
glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE | GLUT_RGB);
// создание окна
glutInitWindowPosition(0, 0);
glutInitWindowSize(900, 400);

```

```

glutCreateWindow("Cilindr");
// настройка обработчиков событий
glutDisplayFunc(drawWindow);
glutReshapeFunc(reshapeWindow);
glutKeyboardFunc(keyWindow);
// цикл ожидания нажатия клавиши (keyWindow)
glutMainLoop();
return 0;
}
Капля жидкости на цилиндре
char calc_step(int i, int flag, quad C){
/*
returns new flag using old cross_flag
0: no crossing
1, -1: self-crossing clockwise or counterclockwise
10: crossover of the curve and sphere
-10: curve is going away
*/
quad k11, k12, k13, k21, k22, k23, ff;
k11=h*f1(teta[i-1]);
k12=h*f2(teta[i-1]);
k13=h*f3(rho[i-1],u[i-1],C,H_0);
k21=h*f1(teta[i-1]+k13);
k22=h*f2(teta[i-1]+k13);
k23=h*f3(rho[i-1]+k11,u[i-1]+k12,C,H_0);
rho[i]=rho[i-1]+(k11+k21)*0.5;
u[i]=u[i-1]+(k12+k22)*0.5;
teta[i]=teta[i-1]+(k13+k23)*0.5;
ff = teta[i]/(2*Pi);
ff = ff - floor(ff);
teta[i] = ff*2*Pi;
// CHECKING CROSS //
if((rho[i]<-1)&&(u[i]<u[0]))
flag = ClockWise;
if((rho[i]<-1)&&(u[i]>u[0]))
flag = CounterClockWise;
if(i>2){
crtmp = cross(rho,u,i);
if(
((crtmp == CounterClockWise) && (flag == ClockWise))
||
((crtmp == ClockWise) && (flag == CounterClockWise))
)
flag = NoCrossing;
else if(crtmp != NoCrossing)
flag = crtmp;
}
if(rho[i]*rho[i]+u[i]*u[i]<R*R){
flag = SphereCrossing;
//printf("curve& sphere: rho=%f, u=%f (double)rho[i], (double)u[i]);
}
if(i>3*N)
flag = GoesToInfity;
return flag;
}
// end of calc_step
void one_point_calc()
{
cross_flag = calc_step(curve_point, cross_flag, C);
tetac = teta[curve_point];
rhoc = rho[curve_point];
uc = u[curve_point];
if(rhoc!=0)
arc=__atanq(uc/rhoc);
curve_point++;
}

```

```

}
quad shoot(quad C_old){
int i;
printf("C=%f,teta=%f (double)C,(double)(tetac+Pi/2));
if(nez>0){
a = a_prev; b = b_prev;
C = (a+b)/2;
if(nez<5)
a=C;
else
b=C;
C = (a+b)/2;
}
a_prev = a; b_prev = b;
while(cross_flag == NoCrossing)
one_point_calc();
if(nez==0) {
if(cross_flag == SphereCrossing){
printf("Drop rhoc=%e (double)rhoc);
if(rhoc<0){
if(uc<u[0])
a=C_old;
else
b=C_old;
}
else {
if(-Pi/2+tetac+arc-alpha<-Eps)
a=C_old;
if(-Pi/2+tetac+arc-alpha>Eps)
b=C_old;
//for(i=0;i<Nc;i++)
//printf("%e (double)teta[i]);
printf("tetac=%e arc=%e (double)tetac, (double)arc);
printf("a-C=%e, b-c=%e, -Pi/2+tetac+arc-alpha=%e Eps=%e
(double)(a-C_old),(double)(b-C_old),(double)(-Pi/2+tetac+arc-alpha),Eps);
}
}
}
if(cross_flag == ClockWise)
b=C_old;
if(cross_flag == CounterClockWise)
a=C_old;
if(cross_flag == NoCrossing){
if(tetac-alpha<-Eps)
a=C_old;
if(tetac-alpha>Eps)
b=C_old;
}
if((cross_flag == GoesToInfy)&&(uc < u[0]))
b=C_old;
if((cross_flag == GoesToInfy)&&(uc > u[0]))
a=C_old;
}
cross_flag = NoCrossing;
printf("a-b=%e (double)(a-b));
printf("delta_C=%e (double)(C_old-(a+b)/2));
return (a+b)/2;
}
void change_debug_mode()
{
if(debug)
debug = 0;
else
debug = 1;
}
double mass0(double x, double y)
{

```

```

return 1;
}
void quit_and_save()
{
int i;
quad Vol=0;
printf("Quitting: TETAsm=%f (double)tetac);
printf("h0=%f, C=%f (double)u[0],(double)C);
// CALCULATIG OF THE VOLUME //
Vol=volume1(rho,u, Nc);
printf("V0l=%f (double)Vol);
fprintf(f,"C=%f; V=%f; h0=%f; H0=%f; (double)C,(double)Vol,(double)u[0],(double)H_0);
for(i=0;i<Nc;i++)
fprintf(f,"[%f,%f], (double)rho[i],(double)u[i]);
fclose(f);
scanf();
exit(1);
}
void keyWindow (unsigned char k, int x, int y)
{
char shot_finished = 0;
quad C_old = C;
nez=0;
switch (k) {
case 0x1B : exit(0);
case '1': nez = 1; break;
case '2': nez = 10; break;
case '3': nez = 666; break;
case 'd': nez = -555; break;
case '9': change_debug_mode(); break;
}
printf("d alpha=%e, d R=%e
(double)(-Pi/2+tetac+arc-alpha), (double)(uc*uc+rhoc*rhoc-R*R));
if(
((fabs((double)(-Pi/2+tetac+arc-alpha))<Eps)
&&(fabs((double)(uc*uc+rhoc*rhoc-R*R))<Eps))
||
(nez == 666)
)
quit_and_save();
if(debug==1){
one_point_calc();
printf("rho=%f, flag=%d (double)(rhoc), cross_flag);
if(cross_flag!=NoCrossing){
C = shoot(C);
if(C-C_old==0)
printf("more precision needed ");
shot_finished = 1;
}
} else {
rhoc=1;
uc=0;
C = shoot(C);
if(C-C_old==0)
printf("more precision needed a-C=%e, b-c=%e (double)(a-C),(double)(b-C));
shot_finished = 1;
}
if(nez>0){
printf("%e (double)C);
printf();
}
drawWindow();
if(shot_finished){
Nc = curve_point;
curve_point = 1;
}
}

```

```

}
}
// инициализация графики и начальные данные
int main(int argc, char **argv)
{
f=fopen("DROP.txt "w");
u[0]=u_0;
rho[0]=__sqrtq(R*R-u[0]*u[0]);
printf("%e (double)rho[0]);
teta[0]=__atanq(rho[0]/fabs((double)u[0]))-alpha;
printf("teta 0 = %e (double)teta[0]);
tetac = 0;
arc = 0;
rhoc = 1;
uc = 0;
//cross_flag = ClockWise;
curve_point = 1;
cross_flag = NoCrossing;
// инициализация графики
glutInit(&argc,argv);
glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE | GLUT_RGB);
// создание окна
glutInitWindowPosition(0, 0);
glutInitWindowSize(900, 400);
glutCreateWindow("Cilindr");
// настройка обработчиков событий
glutDisplayFunc(drawWindow);
glutReshapeFunc(reshapeWindow);
glutKeyboardFunc(keyWindow);
// цикл ожидания нажатия клавиши (keyWindow)
glutMainLoop();
return 0;
}
}
fs.h
// H(r,z) //
quad H(quad r,quad z)
{
quad tmp;
double A=-0.03160493827;
const double c_b = cos(H_angle);
const double s_b = sin(H_angle);
quad r2 = (r*r+z*z);
quad r4 = r2*r2;
tmp=(c_b+A*c_b/r2-2*A*r*(r*c_b+z*s_b)/r4)*
(c_b+A*c_b/r2-2*A*r*(r*c_b+z*s_b)/r4)+
(s_b+A*s_b/r2-2*A*z*(r*c_b+z*s_b)/r4)*
(s_b+A*s_b/r2-2*A*z*(r*c_b+z*s_b)/r4);
return __sqrtq(tmp);
}
// L(r,z,H0) //
quad L(quad r,quad z,quad H0)
{
quad xi = xi_inf*H0;
quad H_nd = H(r,z);
quad pp = (__expq(xi*H_nd)+__expq(-xi*H_nd))/(__expq(xi*H_nd)-__expq(-xi*H_nd))-1/(xi*H_nd);
return Ms*pp;
}
// P(r,z,H0) //
quad P(quad r,quad z,quad H0)
{
quad xi = xi_inf*H0;
quad H_nd = H(r,z);
quad pp = __logq(__expq(xi*H_nd)/2-__expq(-xi*H_nd)/2)-__logq(xi*H_nd);
return pp;
}
}

```

```

quad f1(quad y) { return __cosq(y);} // dr/dl //
quad f2(quad y) { return -__sinq(y);} // dh/dl //
quad f3(quad r, quad u,quad C, quad H0) // d(TETA)/dl //
{
quad k=-G*u+P1*P(r,u,H0);
// APPROXIMATION AS A SPHERE AT POINT RHO=0 //
quad ff=(C+k);//-1.0*sin(teta)/r;
return ff;
}
// CHECKING: CURVE CROSS HIMSELF AND DIRECTION OF THE TURN //
int cross(quad *x,quad *y,int n)
{ int j;
quad f1,f2,g1,g2,k;
for(j=2;j<n-1;j++)
{
f1=(x[j]-x[n-1])/(x[n]-x[n-1])-(y[j]-y[n-1])/(y[n]-y[n-1]);
f2=(x[j-1]-x[n-1])/(x[n]-x[n-1])-(y[j-1]-y[n-1])/(y[n]-y[n-1]);
g1=(x[n]-x[j-1])/(x[j]-x[j-1])-(y[n]-y[j-1])/(y[j]-y[j-1]);
g2=(x[n-1]-x[j-1])/(x[j]-x[j-1])-(y[n-1]-y[j-1])/(y[j]-y[j-1]);
k=(x[j]-x[n])*(y[n-1]-y[j])-(y[j]-y[n])*(x[n-1]-x[j]);
if((f1*f2<0)&&(g2*g1<0))
{ if(k>0) return CounterClockWise;
if(k<0) return ClockWise;
}
}
return NoCrossing;
}
quad tr(quad x1, quad y1, quad x2, quad y2,quad x3,quad y3)
{
quad a,b,c,p;
a=__sqrtq((x1-x2)*(x1-x2)+(y1-y2)*(y1-y2));
b=__sqrtq((x3-x2)*(x3-x2)+(y3-y2)*(y3-y2));
c=__sqrtq((x1-x3)*(x1-x3)+(y1-y3)*(y1-y3));
p=(a+b+c)/2;
return __sqrtq(p*(p-a)*(p-b)*(p-c));
}
quad midvol(quad *x, quad *y, int Num)
{
int i;
quad vol=0;
if((fabs((double)x[0]-R)>0.0000001)||fabs((double)x[Num-1]-R)>0.0000001))
{
printf("MIDVOL ERROR");
}
for(i=1;i<Num-1;i++)
vol=vol+tr(x[0],y[0],x[i],y[i],x[i+1],y[i+1]);
return vol;
}
quad upvol(quad *x, quad *y, int Num)
{
quad vol=0;
int i;
if(fabs((double)x[Num-1]-R)>0.0000001) printf("UpVol Error
n");
for(i=0;i<Num-1;i++){
printf("%f, %e, %e
n (double)vol, (double)x[i+1], (double)y[i+1]);
vol=vol+0.5*(x[i+1]-x[i])*((y[i]-__sqrtq(R*R-x[i]*x[i]))+
(y[i+1]-__sqrtq(R*R-x[i+1]*x[i+1])));
}
return vol;
}
quad downvol(quad *x, quad *y, int Num)
{

```

```

quad vol=0;
int i;
if(fabs((double)x[0]-R)>0.0000001) printf("UpVol Error");
for(i=0;i<Num-1;i++)
vol=vol+0.5*(x[i]-x[i+1])
*((-__sqrtq(R*R-x[i]*x[i])-y[i])+(-y[i+1]-__sqrtq(R*R-x[i+1]*x[i+1])));
return vol;
}
quad volume(quad *rho, quad *u, int Nc)
{
char msg[70];
quad vol=0;
int i=0, Nup, Nmid;
quad x[4*N], y[4*N];
for(i=0;(rho[i]<R)&& (i<Nc);i++)
{
x[i]=rho[i];
y[i]=u[i];
}
Nup=i;
{
if(rho[i]==R) { x[i]=R;y[i]=u[i];}
else
{
x[i]=R;
y[i]=(u[i-1]+u[i]*(R-rho[i-1])/(rho[i]-R))
/((R-rho[i-1])/(rho[i]-R)+1);
}
}
printf("
n");
vol=vol+upvol(x,y,Nup+1);
printf("upvol= %f
n (double)upvol(x,y,Nup+1));
x[0]=R; y[0]=y[Nup];
if(rho[i]==R) Nup++; //Nup of rho = 1-st of mid
for(i=Nup;(rho[i]>R)&& (i<Nc);i++)
{
x[i-Nup+1]=rho[i];
y[i-Nup+1]=u[i];
}
Nmid = i; //Nmid of rho = 1-st of down
{
if(rho[Nmid]==R) { x[Nmid-Nup+1]=R; y[Nmid-Nup+1]=u[Nmid];}
else
{
x[Nmid-Nup+1]=R;
y[Nmid-Nup+1]=(u[i-1]+u[i]*(R-rho[i-1])/(rho[i]-R))
/((R-rho[i-1])/(rho[i]-R)+1);
}
}
vol=vol+midvol(x,y,Nmid-Nup+2);
x[0]=R; y[0]=y[Nmid-Nup+1];
if(rho[i]==R) Nmid++; //Nup of rho = 1-st of mid
i=Nmid;
for(i=Nmid;i<Nc+1;i++)
{
x[i-Nmid+1]=rho[i];
y[i-Nmid+1]=u[i];
}
vol=vol+downvol(x,y,Nc-Nmid+2);
return vol;
}
quad volume1(quad *rho, quad *u, int Nc)
{

```

```

quad theta[4*N]; // угол точки относительно горизонтали
quad r[4*N]; // расстояние до точки
quad S[4*N]; // площадь треугольника, образованного (к-1)ой, (к)ой точками и центром круга
quad Ssum = 0;
int i; // индекс точки, первая - нулевая, последняя - (Nc)ая
int direction;
for(i=0;i<Nc;i++){
theta[i] = __atanq(u[i]/rho[i]); // это можно исключить (?) и заметить на teta[i]
if(rho[i]<0)
theta[i] += Pi; // от -Pi/2 до 3*Pi/2
r[i] = __sqrtq(u[i]*u[i]+rho[i]*rho[i]);
}
direction = 1; // ориентация контура, например, капля начинается на левом боку, а кончается на
правом => ориентация отрицательная
if(theta[0]>theta[Nc-1]) // так обычно и бывает
direction = -1;
for(i=1;i<Nc;i++){
S[i] = 0.5*r[i]*r[i-1]*__sinq(theta[i]-theta[i-1])*direction; // формула S=1/2 a*b*sin(alpha), учитывает
ориентацию контура
Ssum += S[i];
}
Ssum += -0.5*R*R*(theta[Nc-1]-theta[0])*direction; // вычитаем площадь сектора от первой до по-
следней точки
return Ssum;
}
double massVol(quad *rho, quad *u, double (*mass)(double x, double y), int Nc)
{
double theta[4*N]; // угол точки относительно горизонтали
double r[4*N]; // расстояние до точки
double S[4*N]; // площадь треугольника, образованного (к-1)ой, (к)ой точками и центром круга
double rc, Sc, r_min, Ssum = 0;
int i; // индекс точки поверхности, первая - нулевая, последняя - (Nc)ая
int j; // индекс трапеции для i-ого (треугольника - сектора)
int direction, Ntr;
double sin_teta, sinc, cosc;
double delta = 1;
for(i=0;i<Nc;i++){
theta[i] = (double)__atanq(u[i]/rho[i]); // это можно исключить (?) и заметить на teta[i]
if(rho[i]<0)
theta[i] += Pi; // от -Pi/2 до 3*Pi/2
r[i] = (double)(__sqrtq(u[i]*u[i]+rho[i]*rho[i]));
if(((r[i]-R)/2 < delta)&& (r[i]-R>0.00001))
delta = (r[i]-R)/2; // высоты трапеций, на которые мы делим треугольник O-p1-p2
}
direction = 1; // ориентация контура, например, капля начинается на левом боку, а кончается на
правом => ориентация отрицательная
if(theta[0]>theta[Nc-1]) // так обычно и бывает
direction = -1;
for(i=1;i<Nc;i++){
r_min = r[i]; // минимум из 2 вершин i-ого треугольника
if(r[i-1] < r_min)
r_min = r[i-1];
if(r_min-R>0.00001){
Ntr = (int)((r_min - R)/(2*delta)); // число трапеций высотой в 2*delta в i-ом (треугольнике -
секторе)
sin_teta = sin(theta[i]-theta[i-1])*direction; // синус угла, учитывает ориентацию контура
sinc = sin((theta[i]+theta[i-1])/2); // синус угла биссектрисы угла
cosc = cos((theta[i]+theta[i-1])/2); // косинус угла биссектрисы угла
for(j=0;j<(Ntr-1);j++){ // суммируем равнобокие трапеции
Sc = 0.5*sin_teta*(pow(R+2*(j+1)*delta, 2) - pow(R+2*j*delta, 2));
rc = R+(2*j+1)*delta;
Ssum += mass(rc*cosc,rc*sinc)*Sc;
}
// добавляем последний четырехугольник по формуле разности площадей треугольников S=1/2
a*b*sin(alpha)

```

```

Sc = 0.5*sin_teta*(r[j]*r[i-1] - pow(R+2*delta*(Ntr-1),2));
rc = R+(2*Ntr-1)*delta;
Ssum += mass(rc*cosc, rc*sinc)*Sc;
}
}
return Ssum;
}
glfs.h
int scale = 400;
void reshapeWindow(int w, int h) {
// настройка системы координат
glMatrixMode(GL_PROJECTION);
glLoadIdentity();
gluOrtho2D(0,900,0,400);
glViewport (0,0,900,400);
glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
glLoadIdentity();
}
void drawWindow() {
// рисование
int j;
int circle_precise = 360;
glClearColor(1.0, 1.0, 1.0, 0.0);
glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
glColor3f(0.0,0.0,0.0);
glBegin(GL_LINES);
for(j=1;j<curve_point;j++)
glVertex2d(450+scale*rho[j-1], 100+scale*u[j-1]);
glVertex2d(450+scale*rho[j], 100+scale*u[j]);
}
//glLineWidth(1.0);
// walls
glVertex2d(450-scale,100-R*scale);
glVertex2d(450-scale,100+2*R*scale);
glVertex2d(450-scale,100-R*scale);
glVertex2d(450+scale,100-R*scale);
glVertex2d(450+scale,100-R*scale);
glVertex2d(450+scale,100+2*R*scale);
glEnd();
glBegin(GL_LINE_LOOP);
for(j=1;j<circle_precise;j++)
glVertex2d(450+scale*R*cos(j*2*Pi/circle_precise),
100+scale*R*sin(j*2*Pi/circle_precise));
glEnd();
glFlush();
}

```

Приложение 3: Программа для расчета форм поверхности вокруг сферического концентратора

```

Один объем
//#define __DOUBLE_PRECISION__
#include "../defs.h"// определения типов, инклюды
// константы расчета (чтобы долго не искать в main'e)
#define N 200
#define H_0 350
#define R 0.06647221276
#define alpha -0.5410520681
#define beta Pi/2
#define Eps 0.01
//#define Vo5_0 0.754
#define xi_inf 0.004973591970
#define PI 290.3761507
#define G 697.8648613
#define Ms 9.6
#define u_0 0.134;
int space_pressed = 0;
// глобальные переменные - координаты точек для рисования
int nez = 0;
int debug = 0, shot_finished;
quad h = 1.0/N;
int curve_point = 1, Nc, ic=0;
int cross_flag = NoCrossing, crtmp;
quad C=0,a=-1000,b=1000, a_prev, b_prev, H_angle=beta;
quad rhoc = 0, tetac = 10, uc = u_0;
quad Vol1 = 0, Vol2 = 0, delta = 1;
FILE *f;
quad u[4*N];
quad rho[4*N];
quad teta[4*N];
//#include "../fs.h"// стандартные функции f1,f2,f3,cross
#include "../glfs.h"// функции рисования
quad H(quad r,quad z)
{
quad tmp;
quad A=-1.0*(R*R*R);
tmp=9*A*A*z*r/(r+z)/(r+z)/(r+z)/(r+z)/(r+z)/(r+z)+
(1+A*(1/___sqrtq((r+z)*(r+z)*(r+z))
-3*z/___sqrtq((r+z)*(r+z)*(r+z)*(r+z)*(r+z))))*
(1+A*(1/___sqrtq((r+z)*(r+z)*(r+z))
-3*z/___sqrtq((r+z)*(r+z)*(r+z)*(r+z)*(r+z))));
tmp=___sqrtq(tmp);
return tmp;
}
quad L(quad r,quad z,quad H0) {
quad xi = xi_inf*H0;
quad H_nd = H(r,z);
quad pp = (___expq(xi*H_nd)+___expq(-xi*H_nd))/
(___expq(xi*H_nd)-___expq(-xi*H_nd))-1/(xi*H_nd);
return Ms*pp;
}
quad P(quad r,quad z,quad H0)
{
quad xi = xi_inf*H0;
quad H_nd = H(r,z);
quad pp = ___logq(___expq(xi*H_nd)/2-___expq(-xi*H_nd)/2)-
___logq(xi*H_nd);
return pp;
}
quad f3(quad r, quad u,quad C, quad H0, quad theta)
{

```

```

quad ff, k;
k=-G*u+P1*P(r,u,H0);
if(r==0) {
ff=(C+k)*0.5;
return ff;
}
ff=(C+k)-1.0*__sinq(theta)/r;
return ff;
}
quad f1(quad y) { return __cosq(y); }
quad f2(quad y) { return -__sinq(y); }
// CHECKING: CURVE CROSS HIMSELF AND DIRECTION OF THE TURN //
int cross(quad *x,quad *y,int n)
{int j;
quad f1,f2,g1,g2,k;
for(j=2;j<n-1;j++)
{
f1=(x[j]-x[n-1])/(x[n]-x[n-1])-(y[j]-y[n-1])/(y[n]-y[n-1]);
f2=(x[j-1]-x[n-1])/(x[n]-x[n-1])-(y[j-1]-y[n-1])/(y[n]-y[n-1]);
g1=(x[n]-x[j-1])/(x[j]-x[j-1])-(y[n]-y[j-1])/(y[j]-y[j-1]);
g2=(x[n-1]-x[j-1])/(x[j]-x[j-1])-(y[n-1]-y[j-1])/(y[j]-y[j-1]);
k=(x[j]-x[n])*(y[n-1]-y[j])-(y[j]-y[n])*(x[n-1]-x[j]);
if((f1*f2<0)&&(g2*g1<0))
{if(k>0) return CounterClockWise;
if(k<0) return ClockWise;
}
}
return NoCrossing;
}
char calc_step(int i, int flag, quad C)
{
/*
returns new flag using old cross_flag
0: no crossing
1, -1: self-crossing clockwise or counterclockwise
10: crossover of the curve and sphere
-10: curve is going away
*/
quad k11, k12, k13, k21, k22, k23;
k11=h*f1(teta[i-1]);
k12=h*f2(teta[i-1]);
k13=h*f3(rho[i-1], u[i-1], C, H_0, teta[i-1]);
k21=h*f1(teta[i-1]+k13);
k22=h*f2(teta[i-1]+k13);
k23=h*f3(rho[i-1]+k11,u[i-1]+k12,C,H_0,teta[i-1]+k13);
rho[i]=rho[i-1]+(k11+k21)*0.5;
u[i]=u[i-1]+(k12+k22)*0.5;
teta[i]=teta[i-1]+(k13+k23)*0.5;
// CHECKING CROSS //
if((rho[i]<0)&&(u[i]<u[0]))
flag = ClockWise;
if((rho[i]<0)&&(u[i]>u[0]))
flag = CounterClockWise;
if(i>2){
crtmp = cross(rho,u,i);
if(
((crtmp == CounterClockWise) && (flag == ClockWise))
||
((crtmp == ClockWise) && (flag == CounterClockWise))
)
flag = NoCrossing;
else if(crtmp != NoCrossing)
flag = crtmp;
}
if(rho[i]*rho[i]+u[i]*u[i]<R*R){

```

```

flag = SphereCrossing;
//printf("curve&sphere: rho=%f, u=%f (double)rho[i], (double)u[i]);
}
if(i>3*N)
flag = GoesToInfy;
return flag;
}
// end of calc_step
void one_point_calc()
{
cross_flag = calc_step(curve_point, cross_flag, C);
tetac = teta[curve_point];
rhoc = rho[curve_point];
uc = u[curve_point];
curve_point++;
}
quad shoot(quad C_old)
{
printf("C=%f,teta=%f, rhoc=%f (double)C,(double)(tetac+Pi/2),(double)rhoc);
if(nez>0){
a = a_prev; b = b_prev;
C = (a+b)/2;
if(nez<5)
b=C;
else
a=C;
C = (a+b)/2;
}
a_prev = a; b_prev = b;
while((rhoc<1)&&(cross_flag == NoCrossing))
one_point_calc();
if(nez == 0) {
if(cross_flag == SphereCrossing){
printf("Drop ");
b=C_old;
}
if(cross_flag == ClockWise)
b=C_old;
if(cross_flag == CounterClockWise)
a=C_old;
if(cross_flag == NoCrossing){
if(tetac-alpha<-Eps)
a=C_old;
if(tetac-alpha>Eps)
b=C_old;
}
if((cross_flag == GoesToInfy)&&(uc < u[0]))
a=C_old;
if((cross_flag == GoesToInfy)&&(uc > u[0]))
b=C_old;
}
cross_flag = NoCrossing;
printf("new C=%f (double)(a+b)/2);
printf("delta_C=%e (double)(C_old-(a+b)/2));
return (a+b)/2;
}
double MF(double x, double y, double H0)
{
double rhof, P0, ff;
quad qx, qy;
qx = (quad)x; qy = (quad)y;
ff=0;
P0=2974.325581;
ff=H0*H0*pow((double)H(qx,qy),2)/(8*Pi)-
P0*(double)P(qx,qy,(quad)H0)+

```

```

(double)L(qx,qy,(quad)H0)*H0*(double)H(qx,qy)/4/Pi;
return ff;
}
void change_debug_mode()
{
if(debug)
debug = 0;
else
debug = 1;
}
void quit_and_save()
{
int i;
quad Vol=0;
printf("Quitting: TETAsm=%f (double)tetac);
printf("key pressed:%d times space_pressed);
printf("h0=%f, C=%f (double)u[0],(double)C);
// CALCULATIG OF THE VOLUME //
for(i=1;i<Nc;i++){
Vol=Vol+0.5*Pi*(u[i-1]+R+u[i]+R)*(rho[i]*rho[i]-rho[i-1]*rho[i-1]);
}
Vol=Vol-4*Pi*R*R*R/3;
for(i=0;i<Nc+1;i++)
{ if(rho[i]*rho[i]+u[i]*u[i]-R*R<delta)
{delta=rho[i]*rho[i]+u[i]*u[i]-R*R;ic=i;}
}
printf("V0l=%f, rho0=%f, Volleft=%f, Volright=%f
(double)Vol,(double)rho[ic],(double)Vol1,(double)Vol2);
fprintf(f,"C=%f; V=%f; h0=%f; H0=%f;
(double)C,(double)Vol,(double)u[0],(double)H_0);
for(i=0;i<Nc;i++)
fprintf(f,"%f,%f], (double)rho[i],(double)u[i]);
fclose(f);
scanf("%d &i);
exit(1);
}
void keyWindow (unsigned char k, int x, int y)
{
quad C_old = C;
space_pressed++;
nez = 0;
switch (k) {
case 0x1B : exit(0);
case '1': nez = 1; break;
case '2': nez = 10; break;
case '3': nez = 666; break;
case '9': change_debug_mode(); break;
}
if(
(fabs((double)(tetac-alpha))<Eps)
||
(nez == 666)
)
quit_and_save();
if(debug==1){
one_point_calc();
printf("rho=%f, flag=%d (double)(rhoc), cross_flag);
if((rhoc>=1)||((cross_flag!=NoCrossing)){
C = shoot(C);
if(C-C_old==0)
printf("more precision needed ");
shot_finished = 1;
}
} else {
rhoc=rho[0];

```

```

uc=u_0;
C = shoot(C);
if(C-C_old==0)
printf("more precision needed a-C=%e, b-c=%e (double)(a-C),(double)(b-C));
shot_finished = 1;
}
drawWindow();
if(shot_finished){
Nc = curve_point;
curve_point = 1;
}
}
// инициализация графики и начальные данные
void userInterfaceInit(int argc, char **argv)
{
// инициализация графики
glutInit(&argc,argv);
glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE | GLUT_RGB);
// создание окна
glutInitWindowPosition(0, 0);
glutInitWindowSize(900, 400);
glutCreateWindow("Sphere");
// настройка обработчиков событий
glutDisplayFunc(drawWindow);
glutReshapeFunc(reshapeWindow);
glutKeyboardFunc(keyWindow);
// цикл ожидания нажатия клавиши (keyWindow)
glutMainLoop();
}
int main(int argc, char **argv)
{
f=fopen("sphere.txt "w");
u[0]=u_0;
rho[0] = 0;
tetac = 1000;
teta[0] = 0;
userInterfaceInit(argc, argv);
return 0;
}
Нижний объем
// #define __DOUBLE_PRECISION__
#include "../defs.h" // определения типов, инклюды
/* Состояния кривой на некотором шаге расчета */
// typedef enum Flags {NoCrossing, ClockWiseWall, ClockWise, GoesToInfity, AboveBody, SphereCrossing,
CounterClockWise,
BottomCrossing, CounterWiseWall};
int space_pressed = 0;
// глобальные переменные - координаты точек для рисования
int nez = 0;
int debug = 0, shot_finished;
quad h = 1.0/N;
int curve_point = 1, Nc, ic=0;
int cross_flag = NoCrossing, crtmp;
quad C=0,a=-1000,b=1000, a_prev, b_prev, H_angle=beta;
quad rhoc = 0, tetac = 10, arc, alphac = 0,uc = u_0;
quad Vol1 = 0, Vol2 = 0, delta = 1;
FILE *f;
quad u[4*N];
quad rho[4*N];
quad teta[4*N];
// #include "../fs.h" // стандартные функции f1,f2,f3,cross
#include "../glfs.h" // функции рисования
/**
Utilily function to get int power of quad value
*/

```

```

quad __qpow(quad value, int pow)
{
quad result = 1;
int i;
for(i = 0; i < pow; i++){
result = result * value;
}
return result;
}

void print(quad value) {
printf("%f (double)value);
}

quad f3(quad r, quad u,quad C, quad H0, quad theta)
{
quad ff, k;
k=-G*u+P1*P(r,u,H0);
if(r==0) {
ff=(C+k)*0.5;
return ff;
}
ff=(C+k)-1.0*__sinq(theta)/r;
return ff;
}

quad f1(quad y) { return -__cosq(y); }
quad f2(quad y) { return -__sinq(y); }
// CHECKING: CURVE CROSS HIMSELF AND DIRECTION OF THE TURN //
int cross(quad *x,quad *y,int n)
{int j;
quad f1,f2,g1,g2,k;
for(j=2;j<n-1;j++) {
f1=(x[j]-x[n-1])/(x[n]-x[n-1])-(y[j]-y[n-1])/(y[n]-y[n-1]);
f2=(x[j-1]-x[n-1])/(x[n]-x[n-1])-(y[j-1]-y[n-1])/(y[n]-y[n-1]);
g1=(x[n]-x[j-1])/(x[j]-x[j-1])-(y[n]-y[j-1])/(y[j]-y[j-1]);
g2=(x[n-1]-x[j-1])/(x[j]-x[j-1])-(y[n-1]-y[j-1])/(y[j]-y[j-1]);
k=(x[j]-x[n])*(y[n-1]-y[j])-(y[j]-y[n])*(x[n-1]-x[j]);
if((f1*f2<0)&&(g2*g1<0))
{if(k>0) return CounterClockWise;
if(k<0) return ClockWise;
}
}
return NoCrossing;
}

char calc_step(int i, int flag, quad C)
{
/*
returns new flag using old cross_flag
0: no crossing
1, -1: self-crossing clockwise or counterclockwise
10: crossover of the curve and sphere
-10: curve is going away
*/
quad k11, k12, k13, k21, k22, k23;
k11=h*f1(teta[i-1]);
k12=h*f2(teta[i-1]);
k13=h*f3(rho[i-1], u[i-1], C, H_0, teta[i-1]);
k21=h*f1(teta[i-1]+k13);
k22=h*f2(teta[i-1]+k13);
k23=h*f3(rho[i-1]+k11,u[i-1]+k12,C,H_0,teta[i-1]+k13);
rho[i]=rho[i-1]+(k11+k21)*0.5;
u[i]=u[i-1]+(k12+k22)*0.5;
teta[i]=teta[i-1]+(k13+k23)*0.5;
// CHECKING CROSS //
if((rho[i]>1)&&(u[i]<u[0])) {
flag = CounterClockWise;
}
}

```

```

if((rho[i]>1)&&(u[i]>u[0])) {
flag = ClockWise;
}
if(i>2){
crtmp = cross(rho,u,i);
if(
((crtmp == CounterClockWise) && (flag == ClockWise))
||
((crtmp == ClockWise) && (flag == CounterClockWise))
)
flag = NoCrossing;
else if(crtmp != NoCrossing)
flag = crtmp;
}
if(rho[i]*rho[i]+u[i]*u[i]<R*R){
flag = SphereCrossing;
}
if(i>3*N) {
flag = GoesToInfty;
}
return flag;
}
// end of calc_step
void one_point_calc()
{
cross_flag = calc_step(curve_point, cross_flag, C);
tetac = tetac[curve_point];
rhoc = rho[curve_point];
uc = u[curve_point];
if(uc!=0)arc=atan(rhoc/uc);
if(uc>0)alphac=arc+tetac;
if(uc<0)alphac=2*Pi+arc-tetac;
curve_point++;
}
// Возвращает новое значение константы C вычисленное по старому значению этой константы
(C_old)
// Меняет полуглобальную переменную для передачи наружу индекса последней вычисленной точки в этой функции
quad shoot(quad C_old)
{
printf("C=%f,teta=%f, rhoc=%f (double)C,(double)(tetac+Pi/2),(double)rhoc);
if(nez>0){
a = a_prev; b = b_prev;
C = (a+b)/2;
if(nez<5)
a=C;
else
b=C;
C = (a+b)/2;
}
a_prev = a; b_prev = b;
//cross_flag = NoCrossing;
//curve_point
while(cross_flag == NoCrossing) {
one_point_calc();
}
if(nez == 0) {
if(cross_flag == SphereCrossing){
printf("Drop rhoc=%e, alphac-alpha=%e (double)rhoc, (double)(alphac-alpha));
if(alphac-alpha<-Eps)a=C_old;
if(alphac-alpha>Eps)b=C_old;
}
if(cross_flag == BottomCrossing){
printf("Bottom tetac=%e, alpha=%e (double)tetac, (double)on_wall);
if(tetac-on_wall<-Eps)a=C_old;
}
}
}

```

```

if(tetac-on_wall>Eps)b=C_old;
}
if(cross_flag == ClockWise)
a=C_old;
if(cross_flag == CounterClockWise)
b=C_old;
if(cross_flag == NoCrossing){
b=C_old;
}
if((cross_flag == GoesToInfy)&&(uc < u[0]))
a=C_old;
if((cross_flag == GoesToInfy)&&(uc > u[0]))
b=C_old;
}
printf("arc=%f, tetac=%f C=%e (double)arc,(double)tetac, (double)C);
cross_flag = NoCrossing;
return (a+b)/2;
}
void change_debug_mode()
{
if(debug)
debug = 0;
else
debug = 1;
}
void quit_and_save()
{
int i;
quad S1, S2, Vol=0;
printf("Quitting: TETAsm=%f (double)tetac);
printf("h0=%f, C=%f (double)u[0],(double)C);
// CALCULATIG OF THE VOLUME //
for(i=1;i<Nc+1;i++){
Vol=Vol+0.5*Pi*(u[i-1]+R+u[i]+R)*(rho[i-1]*rho[i-1]-rho[i]*rho[i]);
}
if(uc>0){
S1=4*Pi/3*__sqrtq((R*R-rhoc*rhoc)*(R*R-rhoc*rhoc)*(R*R-rhoc*rhoc));
S2=2*Pi*(__sqrtq((R*R-rhoc*rhoc)*(R*R-rhoc*rhoc)*(R*R-rhoc*rhoc))
-R*R*R)/3+Pi*R*rhoc*rhoc;
Vol=Vol+S2-S1;
}
if(uc<=0){
S1=0;
S2=2*Pi*(__sqrtq((R*R-rhoc*rhoc)*(R*R-rhoc*rhoc)*(R*R-rhoc*rhoc))
-R*R*R)/3+Pi*R*rhoc*rhoc;
Vol=Vol+S2-S1;
}
printf("V0l=%f (double)Vol);
printf("u_c=%f (double)uc);
fprintf(f,"C=%f; V=%f; h0=%f; H0=%f;
(double)C,(double)Vol,(double)u[0],(double)H_0);
for(i=0;i<Nc;i++){
fprintf(f,"[%f,%f], (double)rho[i],(double)u[i]);
fclose(f);
scanf("%d &i);
exit(1);
}
void keyWindow (unsigned char k, int x, int y)
{
quad C_old = C;
nez = 0;
switch (k) {
case 0x1B : exit(0);
case '1': nez = 1; break;
case '2': nez = 10; break;

```

```

case '3': nez = 666; break;
case '9': change_debug_mode(); break;
}
if((uc*uc + rhoc*rhoc < R*R) &&
((fabs((double)(tetac-alpha))<Eps))
||
(nez == 666)
)
quit_and_save();
if(debug==1){
} else {
rhoc=rho[0];
uc=u_0;
C = shoot(C);
if(C-C_old==0)
printf("\nmore precision needed a-C=%e, b-c=%e (double)(a-C),(double)(b-C));
shot_finished = 1;
}
drawWindow();
if(shot_finished){
Nc = curve_point;
curve_point = 1;
}
}
// инициализация графики и начальные данные
void userInterfaceInit(int argc, char **argv)
{
// инициализация графики
glutInit (&argc,argv);
glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE | GLUT_RGB);
// создание окна
glutInitWindowPosition(0, 0);
glutInitWindowSize(900, 400);
glutCreateWindow("Sphere");
// настройка обработчиков событий
glutDisplayFunc(drawWindow);
glutReshapeFunc(reshapeWindow);
glutKeyboardFunc(keyWindow);
// цикл ожидания нажатия клавиши (keyWindow)
glutMainLoop();
}
int main(int argc, char **argv)
{
f=fopen("sphere.txt "w");
arc = 0;
u[0]=u_0;
rho[0] = 1;
tetac = 1000;
teta[0] = on_wall;
userInterfaceInit(argc, argv);
return 0;
}
Капля жидкости на сфере
quad f3(quad r, quad u,quad C, quad H0, quad theta) {
quad ff, k;
k=-G*u+P1*P(r,u,H0);
if(r==0) {
ff=(C+k)*0.5;
return ff; }
ff=(C+k)-1.0*__sinq(theta)/r;
return ff;
}
quad f1(quad y) { return __cosq(y); }
quad f2(quad y) { return -__sinq(y); }

```

```

// CHECKING: CURVE CROSS HIMSELF AND DIRECTION OF THE TURN //
int cross(quad *x,quad *y,int n)
{int j;
quad f1,f2,g1,g2,k;
for(j=2;j<n-1;j++)
{
f1=(x[j]-x[n-1])/(x[n]-x[n-1])-(y[j]-y[n-1])/(y[n]-y[n-1]);
f2=(x[j-1]-x[n-1])/(x[n]-x[n-1])-(y[j-1]-y[n-1])/(y[n]-y[n-1]);
g1=(x[n]-x[j-1])/(x[j]-x[j-1])-(y[n]-y[j-1])/(y[j]-y[j-1]);
g2=(x[n-1]-x[j-1])/(x[j]-x[j-1])-(y[n-1]-y[j-1])/(y[j]-y[j-1]);
k=(x[j]-x[n])*(y[n-1]-y[j])-(y[j]-y[n])*(x[n-1]-x[j]);
if((f1*f2<0)&&(g2*g1<0))
{if(k>0) return CounterClockWise;
if(k<0) return ClockWise;
}
}
return NoCrossing;
}
char calc_step(int i, int flag, quad C)
{
/*
returns new flag using old cross_flag
0: no crossing
1, -1: self-crossing clockwise or counterclockwise
10: crossover of the curve and sphere
-10: curve is going away
*/
quad k11, k12, k13, k21, k22, k23, ff;
k11=h*f1(teta[i-1]);
k12=h*f2(teta[i-1]);
k13=h*f3(rho[i-1], u[i-1], C, H_0, teta[i-1]);
k21=h*f1(teta[i-1]+k13);
k22=h*f2(teta[i-1]+k13);
k23=h*f3(rho[i-1]+k11,u[i-1]+k12,C,H_0,teta[i-1]+k13);
rho[i]=rho[i-1]+(k11+k21)*0.5;
u[i]=u[i-1]+(k12+k22)*0.5;
teta[i]=teta[i-1]+(k13+k23)*0.5;
ff = teta[i]/(2*Pi);
ff = ff - floor(ff);
teta[i] = ff*2*Pi;
// CHECKING CROSS //
if((rho[i]<0)&&(u[i]<u[0]))
flag = ClockWise;
if((rho[i]<0)&&(u[i]>u[0]))
flag = CounterClockWise;
if(i>2){
crtmp = cross(rho,u,i);
if(
((crtmp == CounterClockWise) && (flag == ClockWise))
||
((crtmp == ClockWise) && (flag == CounterClockWise))
)
flag = NoCrossing;
else if(crtmp != NoCrossing)
flag = crtmp;
}
if(rho[i]*rho[i]+u[i]*u[i]<R*R){
flag = SphereCrossing;
//printf("curve&sphere: rho=%f, u=%f (double)rho[i], (double)u[i]);
}
}
if(i>3*N)
flag = GoesToInfity;
return flag;
}
// end of calc_step

```

```

void one_point_calc()
{
cross_flag = calc_step(curve_point, cross_flag, C);
tetac = teta[curve_point];
rhoc = rho[curve_point];
uc = u[curve_point];
if(rhoc!=0)
arc=__atanq(uc/rhoc);
curve_point++;
}
quad shoot(quad C_old){
int i;
printf("C=%f,teta=%f (double)C,(double)(tetac+Pi/2));
if(nez>0){
a = a_prev; b = b_prev;
C = (a+b)/2;
if(nez<5)
a=C;
else
b=C;
C = (a+b)/2;
}
a_prev = a; b_prev = b;
while(cross_flag == NoCrossing)
one_point_calc();
if(nez==0) {
if(cross_flag == SphereCrossing){
printf("Drop rhoc=%e (double)rhoc);
if(rhoc<0){
if(uc<u[0])
a=C_old;
else
b=C_old;
}
else {
if(-Pi/2+tetac+arc-alpha<-Eps)
a=C_old;
if(-Pi/2+tetac+arc-alpha>Eps)
b=C_old;
printf("tetac=%e arc=%e (double)tetac, (double)arc);
printf("a-c=%e, b-c=%e, -Pi/2+tetac+arc-alpha=%e Eps=%e
(double)(a-C_old),(double)(b-C_old),(double)(-Pi/2+tetac+arc-alpha),Eps);
}
}
}
if(cross_flag == ClockWise)
b=C_old;
if(cross_flag == CounterClockWise)
a=C_old;
if(cross_flag == NoCrossing){
if(tetac-alpha<-Eps)
a=C_old;
if(tetac-alpha>Eps)
b=C_old;
}
if((cross_flag == GoesToInfty)&&(uc < u[0]))
b=C_old;
if((cross_flag == GoesToInfty)&&(uc > u[0]))
a=C_old;
}
cross_flag = NoCrossing;
printf("a-b=%e (double)(a-b));
printf("delta_C=%e (double)(C_old-(a+b)/2));
return (a+b)/2;
}
void change_debug_mode()

```

```

{
if(debug)
debug = 0;
else
debug = 1;
}
double volume1(int Nc) {
return 0;
}
void quit_and_save()
{
int i;
int i_rho_min = 0;
quad S;
quad Vol=0;
printf("Quitting: TETAsm=%f (double)tetac);
printf("h0=%f, C=%f (double)u[0],(double)C);
// CALCULATIG OF THE VOLUME //
printf("uc=%f (double)uc);
Vol=0;
for(i=1;i<Nc+1;i++)
{Vol=Vol+0.5*Pi*(u[i-1]-u[i])*(rho[i]*rho[i]+rho[i-1]*rho[i-1]);
}
S=2*Pi*R*R*R/3-Pi*R*R*uc+Pi*uc*uc*uc/3;
Vol=Vol-S;
printf("V0l=%f (double)Vol);
fprintf(f,"C=%f; V=%f; h0=%f; H0=%f;
(double)C,(double)Vol,(double)u[0],(double)H_0);
for(i=0;i<Nc;i++)
fprintf(f,"%f,%f], (double)rho[i],(double)u[i]);
fclose(f);
getch();
scanf();
exit(1);
}
void keyWindow (unsigned char k, int x, int y)
{
char shot_finished = 0;
quad C_old = C;
nez=0;
switch (k) {
case 0x1B : exit(0);
case '1': nez = 1; break;
case '2': nez = 10; break;
case '3': nez = 666; break;
case 'd': nez = -555; break;
case '9': change_debug_mode(); break;
}
if(
((fabs((double)(-Pi/2+tetac+arc-alpha))<Eps)
&&(fabs((double)(uc*uc+rhoc*rhoc-R*R))<Eps))
||
(nez == 666)
)
quit_and_save();
if(debug==1){
one_point_calc();
printf("rho=%f, flag=%d (double)(rhoc), cross_flag);
if(cross_flag!=NoCrossing){
C = shoot(C);
if(C-C_old==0)
printf("more precision needed ");
shot_finished = 1;
}
} else {

```

```

rhoc=1;
uc=0;
C = shoot(C);
if(C-C_old==0)
printf("more precision needed a-C=%e, b-c=%e (double)(a-C),(double)(b-C));
shot_finished = 1;
}
if(nez>0){
printf("%e (double)C);
printf();
}
drawWindow();
if(shot_finished){
Nc = curve_point;
curve_point = 1;
}
}
// инициализация графики и начальные данные
int main(int argc, char **argv)
{
f=fopen("DROP.txt "w");
u[0]=u_0;
rho[0]=0;
printf("%e (double)rho[0]);
teta[0]=0;
printf("teta 0 = %e (double)teta[0]);
tetac = 0;
arc = 0;
rhoc = 1;
uc = 0;
//cross_flag = ClockWise;
curve_point = 1;
cross_flag = NoCrossing;
// инициализация графики
glutInit(&argc,argv);
glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE | GLUT_RGB);
// создание окна
glutInitWindowPosition(0, 0);
glutInitWindowSize(900, 400);
glutCreateWindow("Cilindr");
// настройка обработчиков событий
glutDisplayFunc(drawWindow);
glutReshapeFunc(reshapeWindow);
glutKeyboardFunc(keyWindow);
// цикл ожидания нажатия клавиши (keyWindow)
glutMainLoop();
return 0;
}
glfs.h
int scale = 400;
void reshapeWindow(int w, int h)
{
// настройка системы координат
glMatrixMode(GL_PROJECTION);
glLoadIdentity();
gluOrtho2D(0,900,0,400);
glViewport (0,0,900,400);
glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
glLoadIdentity();
}
void drawWindow() {
// рисование
int j;
int circle_precise = 360;
glClearColor(1.0, 1.0, 1.0, 0.0);

```

```

glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
glColor3f(0.0,0.0,0.0);
glBegin(GL_LINES);
for(j=1;j<curve_point;j++)
glVertex2d(450+scale*rho[j-1], 100+scale*u[j-1]);
glVertex2d(450+scale*rho[j], 100+scale*u[j]);
}
glVertex2d(450-scale,100-R*scale);
glVertex2d(450-scale,100+2*R*scale);
glVertex2d(450-scale,100-R*scale);
glVertex2d(450+scale,100-R*scale);
glVertex2d(450+scale,100-R*scale);
glVertex2d(450+scale,100+2*R*scale);
glEnd();
glBegin(GL_LINE_LOOP);
for(j=1;j<circle_precise;j++)
glVertex2d(450+scale*R*cos(j*2*Pi/circle_precise),
100+scale*R*sin(j*2*Pi/circle_precise));
glEnd();
glFlush(); }

```