ФГБОУ ВПО “МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА”

На правах рукописи

Козлов Иван Константинович

ИНВАРИАНТЫ СЛОЕНИЙ В СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ И ПУАССОНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Специальность 01.01.04 - геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2014

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова”

Научный руководитель:	**Ошемков Андрей Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Харламов Михаил Павлович**, доктор физико-математических наук, профессор (Волгоградский филиал ФГБОУ ВПО “Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации”, Экономический факультет)
	Воронцов Александр Сергеевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник (ФГБУН Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН)
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО “Удмуртский государственный университет”

Защита диссертации состоится 14 марта 2014 г. в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова” по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова” (Москва, Ломоносовский проспект, дом 27, сектор А, 8 этаж).

Автореферат разослан 11 февраля 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84, созданного на базе
ФГБОУ ВПО МГУ им. М.В.Ломоносова — А. О. Иванов
доктор физико-математических наук,
профессор

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена изучению различных инвариантов слоений, естественным образом возникающих в симплектической и пуассоновой геометрии. А именно, в диссертации будут рассмотрены следующие три типа слоений и следующие связанные с ними задачи:

1. Лагранжевы расслоения. Локально тривиальное расслоение называется лагранжевым, если его тотальное пространство является симплектическим многообразием, и все его слои являются лагранжевыми подмногообразиями этого симплектического многообразия. В диссертации изучается вопрос, когда два лагранжевых расслоения послойно симплектоморфны, и проведена классификация лагранжевых расслоений с компактным тотальным пространством над двумерными поверхностями.

2. Инвариантные слоения невырожденных бигамильтоновых структур. В диссертации изучается некоторый класс распределений, естественным образом возникающих на многообразии, на котором заданы две согласованные невырожденные скобки Пуассона, и исследован вопрос, какие из этих распределений являются интегрируемыми, то есть какие из них задают слоение на данном многообразии.

3. Слоение Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $\mathrm{so}(4)$. В диссертации исследуются топологические свойства интегрируемого случая для уравнений Эйлера на алгебре Ли $\mathrm{so}(4)$, являющегося аналогом классического случая Ковалевской в динамике твёрдого тела.

Хорошо известно, что симплектическая геометрия возникла из гамильтонова формализма классической механики. Рассматриваемые в диссертации объекты и вопросы также связаны с изучением гамильтоновых систем в механике и физике. Рассматриваются слоения и их инварианты, которые могут быть полезны при исследовании различных интегрируемых гамильтоновых и бигамильтоновых систем.

Изучение первого типа слоений — лагранжевых расслоений — можно рассматривать как изучение глобальных инвариантов слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем. Из классической теоремы Лиувилля о существовании координат действие-угол следует, что отображение момента любой интегрируемой гамильтоновой системы задаёт лагранжево расслоение с особенностями. В диссертации изучается глобальное устройство лагранжевых расслоений без особенностей.

Имеется много работ, посвящённых изучению лагранжевых расслоений с особенностями, а также исследованию свойств различных классов особенностей лагранжевых расслоений. Среди этих работ следует отметить работы М. Ф. Атьи[1], В. Гийемина, С. Стернберга[2] и Т. Дельзанта[3], в которых подробно изучены торические многообразия, т.е. многообразия с заданными на них гамильтоновыми действиями тора. Также имеется много работ, посвящённых изучению особенностей слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем. Ссылки на эти работы, а также изложение общей теории о топологических свойствах слоений Лиувилля можно найти в книге А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко[4] и обзоре А. В. Болсинова, А. А. Ошемкова[5].

Ранее Х. Дюистермаат[6] предложил классифицировать лагранжевы расслоения при помощи теории пучков. В частности, он ввел инварианты, полностью определяющие лагранжевы расслоения — решетку на базе лагранжева расслоения и лагранжев класс Черна. Однако даже в случае малой размерности получение полного списка лагранжевых расслоений (например, для данной базы) с помощью инвариантов, описанных Дюистермаатом является, как правило, нетривиальной задачей. Тем не менее,

[1] M. F. Atiyah, "Convexity and commuting Hamiltonians", *Bulletin of the London Mathematical Society*, **14** (1982), 1–15.

[2] V. Guillemin, S. Sternberg, "Convexity properties of the moment map", *Inventiones Mathematicae*, **67**:3 (1982), 491–513.

[3] T. Delzant, "Hamiltoniens periodiques et image convexe de l'application moment" *Bulletin de la Societe Mathmatique de France*, **116**:3 (1988), 315–339.

[4] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Ижевск: Издат. дом "Удмурт. ун–т", 1999.

[5] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, "Singularities of integrable Hamiltonian systems", *Topological methods in the theory of integrable systems*, Cambridge Sci. Publ., Cambridge, 2006, 1—67.

[6] J. J. Duistermaat, "On global action–angle coordinates", *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**:6 (1980), 687–706.

К. Н. Мишачёву[7] удалось получить такой список для лагранжевых расслоений над ориентируемыми двумерными поверхностями. Там же Мишачёв показал, что среди двумерных поверхностей только двумерный тор и бутылка Клейна могут быть базой лагранжева расслоения.

В дальнейшем Нгуен Тьен Зунг[8] обобщил понятие лагранжева класса Черна на случай, когда лагранжево расслоение содержит некоторые определённые классы особенностей, а Н. К. Леунг и М. Симингтон[9] [10] классифицировали тотальные пространства лагранжевых расслоений с невырожденными негиперболическими особенностями с точностью до диффеомофизма.

В диссертации описана классификация лагранжевых расслоений над бутылкой Клейна, и тем самым завершена классификация лагранжевых расслоений над двумерными поверхностями. При этом был введён новый, более широкий класс почти лагранжевых расслоений, отличный от класса лагранжевых расслоений тем, что форма на тотальном пространстве не обязательно замкнута. Для этого нового класса почти лагранжевых расслоений найдены классифицирующие инварианты, и приведён пример нетривиального почти лагранжева расслоения, не являющегося лагранжевым.

Лагранжевы расслоения над бутылкой Клейна были независимо (и практически одновременно) классифицированы Д. Сепе[11].

Изучение второго типа слоений — инвариантных слоений невырожденных бигамильтоновых структур — связано с исследованием топологических свойств бигамильтоновых систем и локального строения согласованных скобок Пуассона. Хорошо известно, что интегрируемость многих гамильтоновых систем в математике, механике и физике связана с наличием в них бигамильтоновой структуры. Оказывается, что многие гамильтоновы системы являются гамильтоновыми сразу относительно двух скобок Пуас-

[7] K. N. Mishachev, “The classification of Lagrangian bundles over surfaces”, *Differential Geom. Appl.*, **6**:4 (1996), 301–320.

[8] Nguyen Tien Zung, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. II : Topological classification”, *Compositio Math.*, **138**:2 (2003): 125–156.

[9] N. C. Leung, M. Symington, *Almost toric symplectic four-manifolds*, `arXiv:math/0312165 [math.SG]`.

[10] M. Symington, *Four dimensions from two in symplectic topology*, `arXiv:math/0210033 [math.SG]`.

[11] D. Sepe, “Classification of Lagrangian fibrations over a Klein bottle”, *Geometriae Dedicata*, **149**:1 (2010), 347–362.

сона и любой их линейной комбинации, которая также является скобкой Пуассона.

После работы Ф. Магри[12], в которой было впервые показано, как бигамильтонова структура может быть использована для нахождения первых интегралов системы, была установлена бигамильтоновость многих классических задач механики и физики. Метод сдвига аргумента, предложенный А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко[13] [14] и использованный ими при интегрировании многомерных аналогов интегрируемых систем, описывающих динамику твёрдого тела, на алгебрах Ли, также может быть переформулирован в бигамильтоновых терминах. Критерий полноты семейства функций, построенных с помощью бигамильтонова подхода, был получен в работах А. В. Болсинова[15] [16]. Некоторые методы изучения особенностей интегрируемых систем с помощью бигамильтоновой техники были предложены в работах А. В. Болсинова, А. М. Изосимова[17] и А. В. Болсинова, А. А. Ошемкова[18].

Недавно, используя теорему Жордана–Кронекера о нормальной форме пары кососимметрических билинейных форм на конечномерном линейном пространстве, И. С. Захаревичем[19], А. Панасюком[20] и Ф. Туриэлем[21] [22] [23] был получен ряд результатов о локальном устройстве пары согласованных

[12] F. Magri, A Simple Model of the Integrable Hamiltonian Equation, *J. Math. Phys.*, 1978, **19**:5, 1156–1162.

[13] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, "Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем", *Функц. анализ и его прил.*, **12**:2 (1978), 46–56

[14] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, "Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:2 (1978), 396–415.

[15] А. В. Болсинов, "Критерий полноты семейства функций в инволюции, построенного методом сдвига аргумента", *Доклады АН СССР*, **301**:5 (1988), 1037–1040.

[16] А. В. Болсинов, "Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:1 (1991), 68–92.

[17] A. V. Bolsinov, A. M. Izosimov, *Singularities of bi-Hamiltonian systems*, `arXiv:1203.3419 [math-ph]`.

[18] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, "Bi–Hamiltonian structures and singularities of integrable Hamiltonian systems", *Regular and Chaotic Dynamics*, **14**:4–5 (2009), 431–454.

[19] I. S. Zakharevich, *Kronecker webs, bihamiltonian structures, and the method of argument translation*, `arXiv:math/9908034v3 [math.SG]`.

[20] A. Panasyuk, "Veronese webs for bihamiltonian structures of higher corank", *Banach Center Publ.* **51** (2000), 251–261.

[21] F. J. Turiel, "Classification locale simultanée de deux formes symplectiques compatibles", *Manuscripta Math.*, **82**:1 (1994), 349–362.

[22] F. J. Turiel, *On the local theory of Veronese webs*, `arXiv:1001.3098v1 [math.DG]`.

[23] F. J. Turiel, *The local product theorem for bihamiltonian structures*, `arXiv:1107.2243v1 [math.SG]`.

скобок Пуассона. Несмотря на эти важные результаты, до сих пор остаются открытыми некоторые вопросы о локальном и глобальном устройстве бигамильтоновых структур. В частности, с точки зрения поиска новых методов интегрирования гамильтоновых систем представляет интерес вопрос о поиске слоений Лиувилля, которые можно описать в терминах самой бигамильтоновой структуры, или, более общо, о поиске интегрируемых распределений, естественным образом связанных с бигамильтоновой структурой.

В диссертации исследована интегрируемость инвариантных распределений, которые определяются тем, что каждый их слой является подпространством, инвариантным относительно группы автоморфизмов соответствующего касательного пространства, сохраняющих билинейные формы, заданные согласованными скобками Пуассона. Задача об интегрируемости инвариантных распределений была поставлена ранее в работе[24].

Наконец изучение третьего типа рассматриваемых слоений — слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $\mathrm{so}(4)$ — связано с исследованием топологических инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем и с исследованием классического случая Ковалевской в динамике твёрдого тела.

На сегодняшний день вычисление глобальных топологических инвариантов слоений Лиувилля для известных случаев интегрируемости является одним из важных направлений исследований в механике твёрдого тела. Начиная с 80-х годов XX века было написано множество работ по исследованию топологии фазового пространства интегрируемых систем, классификации особенностей, построению бифуркационных диаграмм и определению типов бифуркаций, вычислению локальных и глобальных инвариантов слоения Лиувилля и траекторных инвариантов. В диссертации используются методы теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, основы которой были заложены в работах А. Т. Фо-

[24] А. В. Болсинов, А. М. Изосимов, А. Ю. Коняев, А. А. Ошемков, “Алгебра и топология интегрируемых систем. Задачи для исследования”, *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*, **28** (2012), 119–191.

менко, Х. Цишанга[25] и А. В. Болсинова, С. В. Матвеева, А. Т. Фоменко[26]. Подробное изложение этой теории содержится в книге А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко[4]. Одной из предпосылок к созданию этой теории послужили работы М. П. Харламова[27] [28] [29], в которых была подробно исследована топология наиболее сложных случаев (Ковалевской и Горячева–Чаплыгина) в динамике твердого тела. В дальнейшем было написано множество работ, посвященных топологическому анализу, а также вычислению инвариантов для интегрируемых систем классической механики, среди которых следует отметить работы А. А. Ошемкова[30] [31], О. Е. Орёл[32], П. И. Топалова[33], О. Е. Орёл, П. Е. Рябова[34], А. В. Болсинова, П. Х. Рихтера, А. Т. Фоменко[35], П. В. Морозова[36] [37] и П. Е. Рябова, М. П. Харламова[38].

Волчок Ковалевской — одна из самых известных интегрируемых гамильтоновых систем классической механики. Софьей Ковалевской было

[25] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, "Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 546–575.

[26] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, "Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности", *УМН*, **45**:2(272) (1990), 49–77.

[27] М. П. Харламов, "Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской", *Прикладная математика и механика*, **47**:6 (1983), 922–930.

[28] М. П. Харламов, "Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела", *Доклады АН СССР*, **273**:6 (1983), 1322–1325.

[29] М. П. Харламов , *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела*, Изд–во ЛГУ, Ленинград, 1988.

[30] A. A. Oshemkov, "Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations, Topological classication of integrable Hamiltonian systems", AMS, Providence, RI, 1991, 67–146.

[31] А. А. Ошемков, "Вычисление инварианта Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела", *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*, **25**:2 (1993), 23–110.

[32] О. Е. Орел, "Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация систем Горячева–Чаплыгина", *Матем. сб.*, **186**:2 (1995), 105–128.

[33] П. И. Топалов, "Вычисление тонкого инварианта Фоменко–Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела", *Матем. сб.*, **187**:3 (1996), 143–160.

[34] O. E. Orel, P. E. Ryabov, "Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem", *Regular and Chaotic Dynamics*, **3**:2 (1998), 82–91.

[35] А. В. Болсинов, П. Х. Рихтер, А. Т. Фоменко, Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской, *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 3–42.

[36] П. В. Морозов, "Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша", *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 113–138.

[37] П. В. Морозов, "Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа", *Матем. сб.*, **195**:3 (2004), 69–114.

[38] П. Е. Рябов, М. П. Харламов, "Классификация особенностей в задаче о движении волчка Ковалевской в двойном поле сил", *Матем. сб.*, **203**:2 (2012), 111–142.

показано[39], что кроме случаев Эйлера, Лагранжа и открытого ею ранее интегрируемого случая в динамике твёрдого тела[40] не существует никаких других систем, которые были бы аналогичным образом интегрируемы при каждом значении постоянной площадей. Волчок Ковалевской сложнее для изучения, чем волчки Эйлера и Лагранжа, поэтому представляют интерес различные методы, которые позволили бы каким-нибудь образом упростить работу с этим волчком. В диссертации рассмотрено однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтоновых систем, заданных на пучке алгебр Ли $\mathrm{so}(4) - \mathrm{e}(3) - \mathrm{so}(3,1)$, найденное И. В. Комаровым[41], и показано, что некоторая информация о классическом случае Ковалевской, являющимся интегрируемой гамильтоновой системой на алгебре Ли $\mathrm{e}(3)$, может быть получена из изучения интегрируемых гамильтоновых систем на алгебре Ли $\mathrm{so}(4)$.

Идея рассмотрения интегрируемых гамильтоновых систем на компактных алгебрах Ли может оказаться плодотворной — орбиты коприсоединённого представления компактной алгебры Ли компактны, что значительно упрощает анализ заданных на них интегрируемых гамильтоновых систем. Ранее интегрируемые гамильтоновы системы на алгебре Ли $\mathrm{so}(4)$ изучались в работах А. А. Ошемкова[42] (компактный аналог случая Клебша), Г. Хагигатдуста и А. А. Ошемкова[43] (случай Соколова) и Х. Хоршиди[44] (компактный аналог случая Стеклова).

Детальный топологический анализ классического случая Ковалевской содержится в работах М. П. Харламова[27] [28] [29]. В частности, там описаны бифуркационные диаграммы отображения момента и исследованы перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момен-

[39] S. Kowalewski, “Sur une propriété du systéme d'équations differentielles qui définit la rotation d'un corps solide autor d'un point fixe”, *Acta Mathematica*, **14** (1889), 81–83.

[40] S. Kowalewski, “Sur le probléme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe”, *Acta Mathematica* **12** (1889), 177–232.

[41] И. В. Комаров, “Базис Ковалевской для атома водорода”, *ТМФ*, **47**:1 (1981), 67–72.

[42] А. А. Ошемков, “Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на so(4)”, *УМН*, **42**:6(258) (1987), 199–200.

[43] Г. Хагигатдуст, А. А. Ошемков, Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли so(4), *Матем. сб.*, **200**:6 (2009), 119–142

[44] Х. Хоршиди, “Топология интегрируемой гамильтоновой системы для случая Стеклова на алгебре Ли so(4)”, *Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика.*, **61**:5 (2006), 58–61.

та. Тонкий лиувиллев анализ, а также описание круговых молекул для классического случая Ковалевской содержатся в работе А. В. Болсинова, П. Х. Рихтера и А. Т. Фоменко[35] (метод круговых молекул, используемый в диссертации, был предложен А. В. Болсиновым[45]). Все необходимые результаты о классическом случае Ковалевской в удобной для нас форме собраны в книге А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко[4].

В диссертации для рассматриваемых интегрируемых случаев на алгебре Ли so(4) сделано следующее: построены бифуркационные диаграммы отображения момента, проверена невырожденность особых точек ранга 0 и 1, классифицированы невырожденные положения равновесия, определены перестройки торов Лиувилля и описаны круговые молекулы для особых точек бифуркационных диаграмм.

Цель диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Завершение классификации лагранжевых расслоений с компактными тотальными пространствами над двумерными поверхностями.

2. Описание всех инвариантных слоений невырожденных бигамильтоновых структур в окрестности регулярной точки.

3. Топологический анализ интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли so(4).

Методы исследования

В диссертации используются методы дифференциальной геометрии, топологии и линейной алгебры. При исследовании топологии слоения Лиувилля случая Ковалевской на алгебре Ли so(4) используются методы теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и заключаются в следующем:

[45] A. V. Bolsinov, “Methods of calculation of Fomenko–Zieschang topological invariant”, *Adv. in Soviet Math.*, **6** (1991), 147–183.

1. Классифицированы все лагранжевы расслоения с компактными тотальными пространствами над бутылкой Клейна.

2. Введён класс почти лагранжевых расслоений, обобщающих понятие лагранжева расслоения. Построен набор классифицирующих инвариантов для почти лагранжевых расслоений. Также приведён пример нетривиального почти лагранжева расслоения, не являющегося лагранжевым (доказано, что не любые решетка и препятствие к построению сечения могут быть реализованы лагранжевым расслоением).

3. Описаны все инвариантные распределения невырожденной бигамильтоновой структуры в окрестности регулярной точки, и установлено, какие из них являются интегрируемыми.

4. Для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли so(4) построены бифуркационные диаграммы отображения момента, проверена невырожденность особых точек ранга 0 и 1, классифицированы невырожденные положения равновесия, вычислены перестройки торов Лиувилля и круговые молекулы особых точек бифуркационных диаграмм.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании интегрируемых гамильтоновых систем, в частности, при исследовании лиувиллевых слоений и возмущений интегрируемых систем, а также при исследовании бигамильтоновых систем и согласованных скобок Пуассона. Полученные результаты о лагранжевых расслоениях могут быть использованы при изучении глобальных топологических инвариантов интегрируемых систем, а также при изучении лагранжевых слоений на симплектических многообразиях. Полученные результаты об интегрируемости инвариантных распределений невырожденных бигамильтоновых структур могут быть использованы при изучении различных бигамильтоновых систем и при изучении локального устройства согласованных скобок Пуассона. Полученные результаты о топологии слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли so(4) могут быть использованы при исследовании слоений Лиувилля различных интегрируемых систем.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященная 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего (Москва, 30 марта – 2 апреля 2009 г.);

вторая международная конференция «Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2010», (Белград, Сербия, 7–13 сентября 2010 г.);

XVIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 11–15 апреля 2011 г.);

международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» (23-я сессия), посвящённая 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И. Г. Петровского (Москва, 29 мая – 4 июня 2011 г.);

XIX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 9–13 апреля 2012 г.);

международная топологическая конференция «Александровские Чтения», (Москва, 21–25 мая 2012 г.);

XVII Geometrical Seminar (Златибор, Сербия, 3–8 сентября 2012 г.);

XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 8–13 апреля 2013 г.);

четвёртая международная конференция «Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2013» (Ижевск, 10–14 июня 2013 г.).

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров:

на семинаре «Современные геометрические методы» под руководством акад. А.Т. Фоменко и проф. А.С. Мищенко (неоднократно: 2008 – 2013 гг.);

на семинаре «Динамические системы» под руководством проф. А.М. Стёпина в 2010 г.;

на семинаре «Некоммутативная геометрия и топология» под руководством проф. А.С. Мищенко в 2010 г.;

на семинаре «Геометрия, топология и математическая физика» под руководством акад. С.П. Новикова, чл.-корр. В.М. Бухштабера и проф. Б.А. Дубровина (неоднократно: 2011 – 2013 гг.);

на семинаре «Геометрия в целом» под руководством проф. И.Х. Сабитова в 2012 г.;

на семинаре «Геометрия и топология» под руководством проф. Т.Е. Панова и доц. А.В. Пенского в 2013 г.;

на семинаре «Группы Ли и теория инвариантов» под руководством проф. Э.Б. Винберга в 2013 г.;

на семинаре «Oberseminar Differentialgeometrie» под руководством проф. Г. Книпера (совместный семинар Рурского университета в Бохуме и Технического университета в Дортмунде, Германия, 2009);

на семинаре «Hamiltonian Dynamics Seminar» под руководством проф. Т.С. Ратью (Федеральная политехническая школа Лозанны, Лозанна, Швейцария, 2012).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах [1-12], список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объём

Диссертация состоит из введения и четырёх глав. Текст диссертации изложен на 193 страницах и содержит 7 таблиц и 34 рисунка. Список литературы содержит 73 наименования.

Содержание работы

Во **введении** описывается структура диссертации и история рассматриваемых вопросов, обосновывается актуальность темы и научная новизна полученных результатов, описываются основные результаты диссертации.

В **первой главе** приводятся необходимые определения и классические результаты о симплектических и пуассоновых многообразиях, а также об интегрируемых гамильтоновых и бигамильтоновых системах, используемые в диссертации.

Во **второй главе** изучаются глобальные инварианты лагранжевых расслоений и проведена классификация лагранжевых расслоений над бутылкой Клейна. Также в этой главе введено понятие почти лагранжевых расслоений, обобщающее понятие лагранжевых расслоений, и описаны классифицирующие инварианты для почти лагранжевых расслоений.

Определение. Локально тривиальное расслоение $\pi : (M^{2n}, \eta) \to B^n$ называется *почти лагранжевым расслоением*, если на тотальном пространстве M^{2n} задана 2-форма η, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Форма η невырождена.

2. Ограничение формы η на каждый слой тождественно равно.

3. $d\eta = \pi^*\psi$ для некоторой 3-формы ψ на базе B^n.

Показано, что почти лагранжево расслоение полностью определяется, с точностью до лагранжевой эквивалентности (т.е. с точностью до послойного диффеоморфизма, тождественно действующего на базе и переводящего одну форму в другую) и поднятия 2-формы с базы, двумя своими инвариантами: решеткой на базе и первым препятствием к построению сечения. Решетка на базе лагражева расслоения введена Х. Дюистермаатом[6]. Первое препятствие к построению сечения является известным инвариантом, используемым в алгебраической топологии. А именно, в диссертации доказано следующее утверждение (Теорема 9):

Теорема. *Для любых двух почти лагранжевых расслоений* $\pi_i : (M_i^{2n}, \eta_i) \to B^n$ *($i = 1, 2$) с одинаковыми соответствующими решетками* $P_i \subset T^*B$ *и препятствиями к построению сечения* $\gamma_i \in H^2(B, P_i)$ *существует такая 2-форма* φ *на базе* B*, что расслоение* $\pi_1 : (M_1^{2n}, \eta_1 + \pi_1^*\varphi) \to B^n$ *лагранжево эквивалентно второму расслоению* $\pi_2 : (M_2^{2n}, \eta_2) \to B^n$*.*

Для лагранжевых расслоений аналогичное утверждение в терминах теории пучков было доказано Х. Дюистермаатом[6].

Также в диссертации установлено, когда поднятие 2-формы с базы не меняет почти лагранжево расслоение. А именно, в диссертации доказано следующее утверждение (Теорема 10):

Теорема. *Два почти лагранжевых расслоения* $\pi : (M^{2n}, \eta + \pi^*\varphi_i) \to B^n$ *($i = 1, 2$) с соответствующей решеткой* P *лагранжево эквивалентны тогда и только тогда, когда* $\varphi_1 - \varphi_2 = d\alpha$ *для некоторого сечения* $\alpha : B^n \to T^*B^n/P$*.*

Для лагранжевых расслоений аналогичное утверждение было доказано К. Н. Мишачёвым[7].

Кроме того, в диссертации доказана следующая теорема о реализации описанных инвариантов почти лагранжевыми расслоениями (Теорема 11):

Теорема. *Любые решетка $P \subset T^*B^n$ и препятствие $\gamma \in H^2(B, P)$ могут быть реализованы некоторым почти лагранжевым расслоением $\pi : (M^{2n}, \eta) \to B^n$.*

Также в диссертации построен пример решетки и препятствия к построению сечения, которые не могут быть реализованы лагранжевым расслоением (Пример 7). Тем самым приведён пример нетривиального почти лагранжевого расслоения, не являющегося лагранжевым.

Из Теорем 9, 10 и 11 следует, что для классификации лагранжевых расслоений с компактными и связными слоями над бутылкой Клейна достаточно сделать следующее: классифицировать все решетки P (ранга 2) на бутылке Клейна и вычислить пространство препятствий к построению сечения $H^2(\mathbb{K}^2, P)$ для каждой из этих решеток P. Решетки на бутылке Клейна описаны в Теореме 13:

Теорема. *1. Любая решетка P (ранга 2) на бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$ изоморфна одной из следующих решеток.*

- *Серия $\mathbb{K}^2_{m,y;\delta,x}$. Бутылка Клейна вместе с решеткой $(\mathbb{K}^2, P)$ изоморфна фактору плоскости $\mathbb{R}^2$ по действию группы $\pi_1(\mathbb{K}^2)$. Образы порождающих фундаментальной группы $g, h \in \pi_1(\mathbb{K}^2)$ суть*

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad h = \left(\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{m-\delta}{2} y \\ y \end{pmatrix}\right)$$

  Порождающие удовлетворяют единственному соотношению $g^{-1}hgh = e$. Здесь $m, \delta \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, $m \geq 0$, и δ равно 0 или 1. Если $\delta = 0$, то m четно.

2. Описанные решетки на бутылке Клейна попарно неизоморфны.

Пространства препятствий к построению $H^2(\mathbb{K}^2, P)$ для каждой из решеток P на $\mathbb{K}^2$ описаны в Теореме 14. Полученный результат может быть сформулирован следующим образом.

Теорема. *Пусть P — решетка ранга 2 на бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$. Тогда*

1. *Для решетки P из серии $\mathbb{K}^2_{m,y;0,x}$ ($m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$) пространство препятствий $H^2(\mathbb{K}^2, P)$ изоморфно $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_m$ (где $\mathbb{Z}_0$ формально полагается равным $\mathbb{Z}$).*

2. *Для решетки P из серии $\mathbb{K}^2_{2m,y;1,x}$ ($m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$) пространство препятствий $H^2(\mathbb{K}^2, P)$ изоморфно $\mathbb{Z}_{4m}$ (где $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$).*

В **третьей главе** описаны все инвариантные слоения невырожденных бигамильтоновых структур в окрестности регулярных точек.

Невырожденная бигамильтонова структура на многообразии задаётся парой *согласованных* симплектических структур на этом многообразии, т.е. парой симплектических форм (ω_0, ω_1), для которых равен нулю тензор Нийенхейса поля эндоморфизмов $P = \omega_0^{-1}\omega_1$. Напомним, что тензор Нийенхейса N_P поля эндоморфизмов P задаётся формулой

$$N_P(X,Y) = [PX, PY] - P[PX,Y] - P[X,PY] + P^2[X,Y].$$

Определение. Распределение F на многообразии M, на котором задана пара согласованных симплектических форм (ω_0, ω_1) называется *инвариантным*, если каждое подпространство $F_x \subset T_xM$ является инвариантным относительно действия группы линейных преобразований соответствующего касательного пространства, сохраняющих обе формы, $\mathrm{Aut}\,(T_xM, \omega_0, \omega_1)$.

Устройство группы автоморфизмов линейного пространства с заданными на нём парой билинейных форм были описаны П. Чжан[46]. С помощью результатов П. Чжан в диссертации описаны все подпространства линейного пространства с заданными на нём двумя симплектическими формами, инвариантные относительно автоморфизмов этого линейного пространства, сохраняющих формы (Теоремы 32 и 33). Основной полученный результат может быть сформулирован следующим образом.

[46] P. Zhang, *Algebraic properties of compatible Poisson structures*, Preprint (Loughborough University, no. 10–02), 2010.

Теорема. *Пусть P — нильпотентный самосопряжённый оператор на симплектическом пространстве (V, B). Тогда любое подпространство $W \subset V$, инвариантное относительно группы автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\,(V, B, P)$*, имеет вид*

$$W = \bigoplus_{i=1}^{s} (\mathrm{Ker}\ P^{k_i} \cap \mathrm{Im}\ P^{l_i}),$$

для некоторых $s \in \mathbb{N}$, $k_i, l_i \geq 0$.

С помощью результатов Ф. Туриэля[21] о локальном устройстве невырожденных бигамильтоновых структур в диссертации описаны все инвариантные распределения в окрестности точки общего положения, а также установлено, какие из этих распределений являются интегрируемыми (Теоремы 28 и 29). Основными результатами главы 3 являются следующие теоремы.

Теорема. *Пусть многообразие M с заданной на нём парой согласованных симплектических структур (ω_0, ω_1) распадается в прямое произведение*

$$(M, \omega_0, \omega_1) = (M', \omega_0', \omega_1') \times (M'', \omega_0'', \omega_1''),$$

где (ω_0', ω_1') и (ω_0'', ω_1'') — пары согласованных симплектических форм на M' и M'' соответственно. Тогда, если характеристические многочлены χ' и χ'' пар форм (ω_0', ω_1') и (ω_0'', ω_1'') взаимно-просты в каждой точке M, то любое инвариантное распределение F на M является прямым произведением инвариантных распределений F' и F'' на M' и M'' соответственно. Инвариантное распределение F на M интегрируемо тогда и только тогда, когда интегрируемы соответствующие распределения F' на M' и F'' на M''.

Теорема. *Рассмотрим пару согласованных форм ω_0, ω_1 на M с одним собственным значением λ или с одной парой комплексно-сопряжённых собственных значений $\alpha \pm i\beta$. Пусть x_0 — регулярная точка M. Предположим, что в точке x_0 соответствующее разложение Жордана–Кронекера пространства $(T_{x_0}M, \omega_0, \omega_1)$ состоит из жордановых $k_1 + 1, k_2, \ldots, k_n$ блоков. Тогда существует окрестность точки x_0, в которой* *все инвариантные распределения, кроме, может быть,* $\mathrm{Ker}\,(P-\lambda E)^{k_i}$ *и* $\mathrm{Ker}\,(P^2-2\alpha P+(\alpha^2+\beta^2)E)^{k_i}$*, где* $i>1$*, являются интегрируемыми. В случае одного собственного значения* λ*, распределения* $\mathrm{Ker}\,(P-\lambda E)^{k_i}$*, где* $i>1$*, являются интегрируемыми в некоторой окрестности точки* x_0 *тогда и только тогда, когда собственное значение* λ *постоянно в некоторой окрестности точки* x_0*. Аналогично, в случае пары комплексно-сопряжённых собственных значений* $\alpha\pm i\beta$ *, распределения* $\mathrm{Ker}\,(P^2-2\alpha P+(\alpha^2+\beta^2)E)^{k_i}$*, где* $i>1$*, являются интегрируемыми в некоторой окрестности точки* x_0 *тогда и только тогда, когда функции* α *и* β *постоянны в некоторой окрестности точки* x_0*.*

В **четвёртой главе** изучается топология слоения Луивилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли so(4), который был открыт И. В. Комаровым[41]. В координатах $(J_1,J_2,J_3,x_1,x_2,x_3)$, в которых скобка Ли-Пуассона алгебры Ли so(4) имеет вид

$$\{J_i,J_j\}=\varepsilon_{ijk}J_k,\quad \{J_i,x_j\}=\varepsilon_{ijk}x_k,\quad \{x_i,x_j\}=\varkappa\varepsilon_{ijk}J_k,$$

где ε_{ijk} — знак перестановки $\{123\}\to\{ijk\}$, а $\varkappa>0$ — произвольная постоянная, гамильтониан рассматриваемого интегрируемого случая равен

$$H=J_1^2+J_2^2+2J_3^2+2c_1x_1, \tag{1}$$

а интеграл имеет вид

$$K=(J_1^2-J_2^2-2c_1x_1+\varkappa c_1^2)^2+(2J_1J_2-2c_1x_2)^2, \tag{2}$$

где c_1 — произвольная постоянная. Рассматриваемая система является интегрируемой гамильтоновой системой на неособых орбитах коприсоединенного представления

$$M_{a,b}=\{(\mathbf{J},\mathbf{x})|\quad \mathbf{x}^2+\varkappa\mathbf{J}^2=a,\quad \langle\mathbf{x},\mathbf{J}\rangle=b\}, \tag{3}$$

где $a^2-4\varkappa b^2\neq 0$.

В диссертации для рассматриваемого интегрируемого случая на алгебре Ли so(4) сделано следующее: построены бифуркационные диаграммы отображения момента (Теоремы 42 и 45), проверена невырожденность особых точек ранга 0 и 1 (Леммы 20, 21 и 23), классифицированы невырожденные положения равновесия (Леммы 20 и 23), определены перестройки торов Лиувилля (Теорема 43) и описаны круговые молекулы для особых точек бифуркационных диаграмм (Теорема 44).

В частности, в диссертации доказаны следующие утверждения.

Лемма. *Пусть $b \neq 0$ и $\varkappa \neq 0$. Тогда для любой неособой орбиты $M_{a,b}$ (то есть для любой такой орбиты, что $a^2 - 4\varkappa b^2 \neq 0$) бифуркационная диаграмма $\Sigma_{h,k}$ интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (1) и интегралом (2) содержится в объединении следующих трёх семейств кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h,k)$:*

1. *Прямая $k = 0$;*
2. *Параметрическая кривая*
$$h(z) = \frac{b^2c_1^2}{z^2} + 2z, \qquad k(z) = \left(4ac_1^2 - \frac{4b^2c_1^2}{z} + \frac{b^4c_1^4}{z^4}\right) - 2\varkappa c_1^2 h(z) + \varkappa^2 c_1^4, \tag{4}$$
где $z \in \mathbb{R} - \{0\}$.
3. *Объединение двух парабол*
$$k = \left(h - \varkappa c_1^2 - \frac{a}{\varkappa} + \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa}\right)^2 \tag{5}$$
и
$$k = \left(h - \varkappa c_1^2 - \frac{a}{\varkappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa}\right)^2. \tag{6}$$

Теорема. *Пусть $\varkappa > 0$ и $b > 0$. Функции f_k, f_r, f_m, f_t и f_l, заданные формулами*
$$f_k(b) = \frac{3b^{4/3} + 6\varkappa b^{2/3}c_1^{4/3} - \varkappa^2 c_1^{8/3}}{4c_1^{2/3}},$$
$$f_r(b) = \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} + \varkappa b^{2/3}c_1^{2/3},$$
$$f_m(b) = \frac{b^2}{\varkappa c_1^2} + \varkappa^2 c_1^2,$$
$$f_t(b) = \left(\frac{\varkappa c_1^2 + t^2}{2c_1}\right)^2 + \varkappa t^2, \qquad \text{где} \quad b = t\left(\frac{\varkappa c_1^2 + t^2}{2c_1}\right),$$
$$f_l(b) = 2\sqrt{\varkappa}|b|$$

делят область $\{b > 0, a > 2\sqrt{\varkappa b}\} \subset \mathbb{R}^2(a, b)$ *на 9 областей. Бифуркационные диаграммы отображения момента для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом* (1) *и интегралом* (2) *на орбите* $M_{a,b}$ *алгебры Ли* $\mathrm{so}(4)$ *качественно различаются для каждой из этих 9 областей. Эти бифуркационные диаграммы вместе с указанными типами перестроек торов Лиувилля приведены на рис. 4.3–4.21.*

Для примера на рис.1 указана бифуркационная диаграмма для области $\{f_m(b) < a\}$.

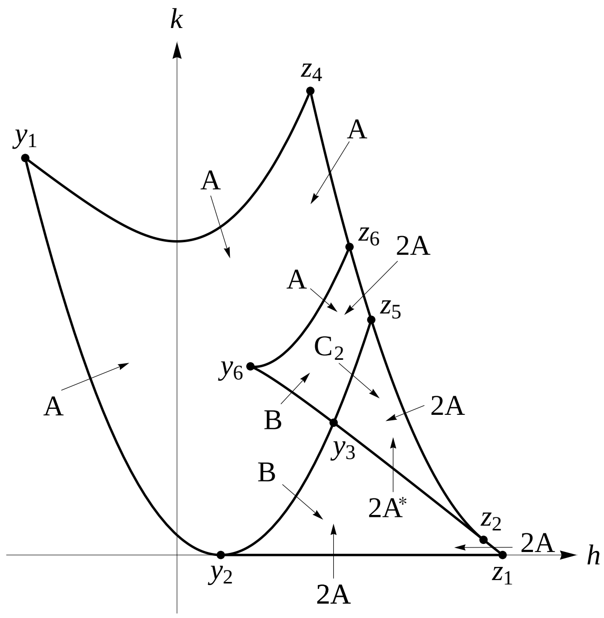

Рис. 1: Бифуркационная диаграмма для области $\{f_m(b) < a\}$

Особые точки бифуркационных диаграмм обозначены y_1–y_{13} и z_1–z_{11}. Они соответствуют точкам возврата, точкам пересечения и точкам касания кривых, из которых состоит бифуркационная диаграмма отображения момента. Доказано, что особенности в прообразе остальных точек бифуркационных диаграмм являются невырожденными особыми точками ранга 1. Также в диссертации установлено, какие из особых точек бифуркационных диаграмм соответствуют невырожденным особым точкам ранга 0 и определён тип этих точек. Полученный результат про особые точки ранга 0 может быть сформулирован следующим образом.

Лемма. *Пусть* $\varkappa > 0$ *и* $b > 0$. *Тогда образы критических точек ранга* 0 *лежат в объединении следующих трёх семейств точек.*

1. *Точка пересечения парабол (5) и (6). Если $a > f_m(b)$, то в прообразе этой точки на орбите $M_{a,b}$ лежат две критические точки ранга 0, которые имеют тип центр-седло. Если $a < f_m(b)$, то в прообразе нет критических точек ранга 0.*

2. *Точки пересечения парабол (5), (6) с кривой (4). Соответствующие значения параметра z на кривой (4) задаются равенством*

$$z^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{2} c_1^2$$

На каждой неособой орбите $M_{a,b}$ каждой точке пересечения кривой (4) с одной из парабол соответствует ровно одна критическая точка ранга 0. Обе критические точки, для которых $z < 0$, имеют тип центр-центр.

Типы оставшихся точек пересечения описаны в таблице 1. Здесь z_{+l} и z_{+r} — это оставшиеся точки пересечения кривой (4) с левой параболой (5) и правой параболой (6) соответственно.

		$0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4$	$b^2 > \varkappa^3 c_1^4$
$a > f_m(b)$	z_{+r}	центр-центр	центр-центр
	z_{+l}	седло-седло	седло-седло
$f_m(b) > a > f_t(b)$	z_{+r}	центр-центр	центр-седло
$a \neq f_r(b)$	z_{+l}	центр-седло	седло-седло
$f_t(b) > a > f_l(b)$	z_{+r}	центр-центр	центр-седло
$a \neq f_r(b)$	z_{+l}	центр-центр	центр-седло

Таблица 1: Типы точек пересечения кривой (4) и парабол (5) и (6).

3. *Точки пересечения кривой (4) и прямой $k = 0$. В прообразе каждой точки пересечения, лежащей правее точки*

$$h = \varkappa c_1^2 + \frac{a}{\varkappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa}$$

(т.е. правее точки пересечения параболы (6) и прямой $k = 0$) лежат ровно две критические точки ранга 0, при этом типы этих двух точек совпадают. Прообразы остальных точек пересечения пусты. Точкам пересечения с параметром $z > z_{cusp} = \sqrt[3]{b^2 c_1^2}$, т.е. имеющим

параметр больший, чем у точки возврата кривой (4), *соответствуют точки типа центр-центр. Если* $a \neq f_t(b)$, *то точкам пересечения с параметром* $z < z_{cusp} = \sqrt[3]{b^2 c_1^2}$ *соответствуют точки типа центр-седло.*

Особые точки, обозначенные через y_i, соответствуют особенностям, встречающимся в классическом случае Ковалевской в динамике твердого тела. В диссертации доказано, что их типы и круговые молекулы совпадают с типами и круговыми молекулами соответствующих особенностей в классическом случае Ковалевской.

Круговые молекулы для z_i указаны в Теореме 44. Этот результат приведён в таблице 2.

z_1	$\mathrm{A} \stackrel{r=0}{\text{———}} \mathrm{A}$ $\mathrm{A} \stackrel{r=0}{\text{———}} \mathrm{A}$	z_6	$\mathrm{A} \stackrel{r=0}{\text{———}} \mathrm{A}$ $\mathrm{A} \stackrel{r=\infty}{\text{———}} \mathrm{A}$
z_2	$\mathrm{A} \stackrel{r=0}{\text{———}} \mathrm{A}^* \stackrel{r=1/2}{\text{———}} \mathrm{A}$ $\mathrm{A} \stackrel{r=0}{\text{———}} \mathrm{A}^* \stackrel{r=1/2}{\text{———}} \mathrm{A}$	z_7	$\mathrm{A} \stackrel{r=0}{\text{———}} \mathrm{A}$ $\mathrm{A} \stackrel{r=0}{\text{———}} \mathrm{A}$
z_3	$\mathrm{A} \stackrel{r=\infty}{\text{———}} \mathrm{B} \begin{array}{l} \overset{r=\infty}{\diagup} \mathrm{A} \\ \underset{r=\infty}{\diagdown} \mathrm{A} \end{array}$	z_8	$\begin{array}{r} \mathrm{A} \overset{r=0}{\diagdown} \\ \mathrm{A} \underset{r=0}{\diagup} \end{array} \mathrm{B} \stackrel{r=0}{\text{———}} \mathrm{A}$
z_4	$\mathrm{A} \stackrel{r=0}{\text{———}} \mathrm{A}$	z_9	$\mathrm{A} \stackrel{r=0}{\text{———}} \mathrm{A}$
z_5	$\begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & & & & \mathrm{A} \\ & \overset{r=\infty}{\diagdown} & & \overset{r=\infty}{\diagup} & \\ & & \mathrm{C}_2 & & \\ & \underset{r=\infty}{\diagup} & & \underset{r=\infty}{\diagdown} & \\ \mathrm{A} & & & & \mathrm{A} \end{array}$	z_{10}	$\mathrm{A} \stackrel{r=\infty}{\text{———}} \mathrm{B} \begin{array}{l} \overset{r=\infty}{\diagup} \mathrm{A} \\ \underset{r=\infty}{\diagdown} \mathrm{A} \end{array}$
		z_{11}	$\mathrm{A} \stackrel{r=0}{\text{———}} \mathrm{A}$

Таблица 2: Круговые молекулы для точек z_1–z_{11}.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Андрею Александровичу Ошемкову за постановку задач и за неоценимую помощь на всех этапах написания работы. Автор благодарен профессору А. В. Болсинову за плодотворные дискуссии и ценные замечания к работе и профессору Т. С. Ратью за обсуждения задач. Автор благодарен всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико–математического факультета МГУ и, в особенности, заведующему кафедрой академику РАН А. Т. Фоменко за творческую атмосферу и поддержку.

Основные публикации автора по теме диссертации

Из официального Перечня ВАК:

1. И. К. Козлов, “Классификация лагранжевых расслоений”, *Матем. сб.*, **201**:11 (2010), 89–136.

2. И. К. Козлов, Т. С. Ратью, “Бифуркационная диаграмма для случая Ковалевской на алгебре Ли so(4)”, *Доклады Академии Наук*, **447**:5 (2012), 486–489.

   И. К. Козлову принадлежат построение бифуркационных диаграмм отображения момента и классификация невырожденных положений равновесия.

3. И. К. Козлов, “Элементарное доказательство теоремы Жордана-Кронекера”, *Матем. заметки*, **94**:6 (2013), 857–870.

Прочие:

4. И. К. Козлов, “Классификация лагранжевых расслоений”, Международная конференция “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвящённая 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего, Москва, 30 марта – 2 апреля 2009 года, с. 284.

5. I. K. Kozlov, “Classification of Lagrangian fibrations”, Second International Conference “Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2010”, Belgrade, Serbia, 7–13 September 2010, p. 21.

6. И. К. Козлов, “Классификация почти лагранжевых расслоений”, XVIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”, Москва, 11–15 апреля 2011 г., http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2011/1257/32180_6702.pdf.

7. И. К. Козлов, “Почти торические расслоения над двумерными поверхностями”, Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы” (23-я сессия), посвящённая 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И. Г. Петровского (1901–1973), Москва, 29 мая – 4 июня 2011 г., МГУ, с. 237–238.

8. И. К. Козлов, “Бифуркационная диаграмма для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли so(4).” XIX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”, Москва, 9–13 апреля 2012 г., http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2012/1792/32180_f926.pdf.

9. I. K. Kozlov, “Symplectic invariants of almost toric 4-manifolds”, International Topological Conference Alexandroff Readings, Moscow, Russia, May 21–25, 2012, p. 39.

10. I. K. Kozlov, “The topology of Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra so(4)”, XVII Geometrical Seminar, Zlatibor, Serbia, 3–8 September 2012, p.44–45.

11. И. К. Козлов, “Инварианты Жордана-Кронекера алгебр Ли.”, XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”, Москва, 8–13 апреля 2013 г., http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2189/32180_d57b.pdf.

12. I. K. Kozlov, “Local properties of bi-Hamiltonian systems”, Fourth International Conference “Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2013”, Izhevsk, Russia, 10–14 June 2013, p. 36.