ФГБОУ ВПО МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Климаков Андрей Владимирович

Обобщенные примитивные элементы свободных алгебр шрайеровых многообразий

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2014

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры
Механико-математического факультета ФГБОУ ВПО "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова".

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Михалёв Александр Васильевич; доктор физико-математических наук, профессор Михалёв Александр Александрович.
Официальные оппоненты:	Кожухов Игорь Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВПО "Национальный исследовательский университет "МИЭТ"; Туганбаев Аскар Аканович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВПО "Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова".
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО "Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого".

Защита диссертации состоится 14 марта 2014 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова", по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВПО "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова", Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова" по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8 этаж.

Автореферат разослан 11 февраля 2014 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84, созданного на базе МГУ,
доктор физико-математических наук, профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена примитивным и почти примитивным элементам свободных алгебр шрайеровых многообразий. В диссертации доказаны критерии и построены алгоритмы распознавания однородных почти примитивных элементов свободной неассоциативной алгебры, свободной (анти-) коммутативной алгебры и свободной алгебры Ли. Построены новые примеры почти примитивных элементов в этих алгебрах.

Актуальность темы. Многообразие линейных алгебр над полем определяется как класс алгебр, замкнутых относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. Многообразие алгебр называется шрайеровым, если любая подалгебра свободной алгебры этого многообразия является свободной (в том же многообразии алгебр). Понятие шрайерова многообразия возникло в теории групп: в 1920-х годах Нильсен[1] и Шрайер[2] доказали, что любая подгруппа свободной группы свободна. А. Г. Курош[3] доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны. А. И. Ширшов[4] показал, что многообразие всех алгебр Ли является шрайеровым (этот результат был получен также Виттом[5], где также было доказано, что многообразие всех p-алгебр Ли является шрайеровым).

А. И. Ширшов[6] показал, что подалгебры свободных неассоциативных коммутативных и свободных неассоциативных антикоммутативных алгебр свободны. Таким образом многообразие всех коммутативных алгебр (всех антикоммутативных алгебр) является шрайеровым. А. А. Михалёв[7] и А. С. Штерн[8] показали, что многообразие супералгебр Ли является шрайеровым. А. А. Михалёв[9] получил этот результат для цветных p-супералгебр Ли. А. И. Корепанов[10] доказал, что подалгебры свободных суперкоммутативных неассоциативных алгебр свободны. В. К. Харченко[11] получил обобщение теоремы Ширшова-Витта о подалгебрах свободных алгебр Ли для алгебр Хопфа над полем нулевой характеристики с косым копроизведением.

[1] J. Nilsen, *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppe*. Math. Ann. **91** (1924), 161–183.

[2] O. Schreier, *Die Untergruppen den freien Gruppen*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), 161–183.

[3] А. Г. Курош, *Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр*. Мат. сб. **20** (1947), 239–262.

[4] А. И. Ширшов, *Подалгебры свободных лиевых алгебр*. Мат. сб. **33** (1953), № 2, 441–452.

[5] E. Witt, *Die Unterringe der freien Lieschen Ringe*. Math. Z. **64** (1956), 195–216.

[6] А. И. Ширшов, *Подалгебры свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр*. Мат. сб. **34** (1954), № 1, 81–88.

[7] А. А. Михалёв, *Подалгебры свободных цветных супералгебр Ли*. Мат. зам. **37**, № 4, (1985), 653–661

[8] А. С. Штерн, *Свободные супералгебры Ли*. Сиб. мат. журн. **27** (1886), № 1, 170–174.

[9] А. А. Михалёв, *Подалгебры свободных p-супералгебр Ли*. Мат. зам. **43**, № 2, (1988), 178–191.

[10] А. И. Корепанов, *Свободные неассоциативные суперкоммутативные алгебры*. Фунд. и прикл. мат. **9** (2003), № 3, 103–109.

[11] V. K. Kharchenko, *Braided version of Shirshov-Witt theorem*. J. Algebra **294** (2005), № 1, 196–225.

У. У. Умирбаев и И. П. Шестаков[12] доказали, что подалгебры свободных алгебр Акивиса свободны. У. У. Умирбаев[13 14] получил необходимые и достаточные условия для того, чтобы многообразие алгебр было шрайеровым, и построил новые примеры шрайеровых многообразий. Подалгебры свободных алгебр многообразий линейных Ω-алгебр рассматривались в работах[15 16 17], шрайеровы многообразия n-лиевых алгебр описаны Ю. А. Кашиной[18].

Подмножество M ненулевых элементов свободной алгебры $\mathcal{F}$ шрайерова многообразия называется примитивной системой элементов, если существует множество свободных образующих алгебры $\mathcal{F}$, содержащее подмножество M. Используя свободное дифференциальное исчисление, критерии распознавания примитивных систем элементов для свободных (p-) алгебр Ли и свободных (p-) супералгебр Ли были получены А. А. Золотых и А. А. Михалёвым[19 20], для свободных неассоциативных алгебр — А. А. Михалёвым, У. У. Умирбаевым и J.-T. Yu[21]. Алгоритмы распознавания примитивных систем элементов и построение дополнения до множества свободных образующих для свободных неассоциативных, свободных (анти-) коммутативных неассоциативных алгебр были построены (в том числе с компьютерной реализацией) в работах[22 23 24].

Ненулевой элемент свободной алгебры $\mathcal{F}$ называется почти примитивным, если он не является примитивным элементом алгебры $\mathcal{F}$, но является примитивным элементом в любой содержащей его собственной подалгебре алгебры $\mathcal{F}$. Почти примитивные элементы в свободных группах изу-

[12] I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, *Free Akivis algebras, primitive elements, and hyperalgebras*. J. Algebra **250** (2002), 533–548.

[13] У. У. Умирбаев, *О шрайреровых многообразиях алгебр*. Алг. и Лог. **33** (1994), № 3, 317–340.

[14] U. U. Umirbaev, *Universal derivations and subalgebras of free algebras*. Algebra(Krasnoyarsk, 1993). Berlin: Walter de Gruyter, 1996, pp. 255–271.

[15] В. А. Артамонов, М. С. Бургин, *Некоторые свойства подалгебр в многообразиях линейных Ω-алгебр*. Мат. сб. **87** (1972), № 1, 67–82.

[16] Т. М. Баранович, М. С. Бургин, *Линейные Ω-алгебры*. Усп. мат. наук, **30** (1975), № 4, 61–106

[17] М. С. Бургин, *Шрайеровы многообразия линейных Ω-алгебр*. Мат. сб. **93** (1974), № 135, 554–572.

[18] Ю. А. Кашина, *Шрайеровы многообразия n-лиевых алгебр*. Сиб. мат. журн., **32** (1991), № 2, 197–199.

[19] А. А. Золотых, А. А. Михалёв, *Ранг элемента свободной (p-) супералгебры Ли*. Доклады АН, **334** (1994), № 6, 690–693.

[20] A. A. Mikhalev, A. A. Zolotykh, *Rank and primitivity of elements of free color Lie (p-) superalgebras*. Intern. J. Algebra Comput. **4** (1994), 617–656.

[21] A. A. Mikhalev, U. U. Umirbaev, J.-T. Yu, *Automorphic orbits of elements of free non-associative algebras*. J. Algebra **243** (2001), 198–223.

[22] К. Шампаньер, *Алгоритмы реализации ранга и примитивности систем элементов свободных неассоциативных алгебр*. Фундамент. и прикл. мат. **6** (2000), № 4, 1229–1238.

[23] А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, А. А. Чеповский, К. Шампаньер, *Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр*. Фундамент. и прикл. мат. **13** (2007), № 5, 171–192.

[24] А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, А. А. Чеповский, *Примитивные элементы свободных коммутативных и антикоммутативных неассоциативных алгебр*. Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер.: Мат., мех., инфор. **10** (2010), № 4, 62–81.

чались в работах[25] [26] [27] [28] [29] [30]. Изучение почти примитивных элементов свободных алгебр было начато в работе А. А. Михалёва и Дж. Т. Ю[31]. В частности были построены примеры почти примитивных элементов в свободных неассоциативных алгебрах, свободных (p-) алгебрах Ли и (p-) суперaлгебрах Ли малых рангов. Используя свойства свободного произведения свободных алгебр, были построены серии примеров для свободных алгебр произвольного ранга. В работе А. В. Михалёва, У. У. Умирбаева, Дж. Т. Ю[32] рассматривались свободные алгебры Ли и было доказано, что элемент $u_{kl} = (\operatorname{ad} x)^k(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^l$, где $(\operatorname{ad} u)(v) = u * v = (u)(\operatorname{Ad} v)$ и $*$ является операцией умножения, в свободной алгебре Ли $L(x, y)$, является почти примитивным при $k, l \geqslant 2$ и $k \neq l$.

Цель работы. Построение критериев и алгоритмов распознавания почти примитивных однородных элементов свободных алгебр основных типов шрайеровых многообразий, а также построение новых примеров почти примитивных элементов основных типов шрайеровых многообразий.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Введено понятие ранга примитивности элемента свободной алгебры шрайерова многообразия, исследованы его свойства, доказаны формулы для ранга примитивности суммы элементов для свободного произведения алгебр шрайеровых многообразий.

2. Исследованы почти примитивные элементы свободной неассоциативной алгебры, свободной (анти-) коммутативной алгебры и свободной алгебры Ли малых рангов. Получены критерии и построенны алгоритмы проверки почти примитивности однородных элементов в этих алгебрах.

3. Исследована связь почти примитивности элемента и почти примитивности его старшей части в свободных алгебрах шрайеровых многообразий, построены новые серии примеров почти примитивных элементов, старшая часть которых не является почти примитивной.

4. Введено понятие ρ-числа однородного элемента свободной алгебры

[25] A. M. Brunner, R. G. Burns, and S. Oates-Williams, *On almost primitive elements of free groups with an application to Fuchsian groups*. Can. J. Math. **45** (1993), 225–254.

[26] L. P. Comerford, *Generic elements of free groups*. Arch. Math. (Basel) **65** (1995), № 3, 185–195.

[27] B. Fine, G. Rosenberger, D. Spellman, and M. Stille, *Test words, generic elements and almost primitivity*. Pacific J. Math. **190** (1999), 277–297.

[28] G. Rosenberger, *Alternierende Produkte in freien Gruppen*, Pacific J. Math. **78** (1978), 243–250.

[29] G. Rosenberger, *Uber Darstellungen von Elementen und Untergruppen in freien Produkten*, Springer Lect. Notes Math. **1098** (1984), 142–160.

[30] G. Rosenberger, *A property of subgroups of free groups*. Bull. Austral. Math. Soc. **43** (1991), 269–272.

[31] A. A. Mikhalev, J.-T. Yu, *Primitive, almost primitive, test, and Δ-primitive elements of free algebras with the Nielsen-Schreier property*. J. Algebra **228** (2000), 603–623.

[32] A. A. Mikhalev, U. U. Umirbaev, J.-T. Yu, *Generic, Almost primitive and test elements of free Lie algebras*. Proc. AMS **130** (2002), № 5, 1303–1310.

произвольного ранга, исследованы его свойства, получены критерии и построены алгоритмы проверки почти примитивности однородного элемента степени более 2 в терминах ρ-числа, а также алгоритм вычисления ρ-числа. Получен критерий почти примитивности однородного элемента степени 2 в терминах ранга элемента.

5. Усилены ранее известные результаты про почти примитивность суммы почти примитивных элементов свободных алгебр шрайеровых многообразий в свободном произведении.

Методы исследования. В работе применяется техника символьных вычислений, свободного дифференциального исчисления, методы теории неассоциативных алгебр, методы работы с примитивными системами элементов для свободных алгебр шрайеровых многообразий.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет как теоретический, так и прикладной характер. Результаты работы позволяют алгоритмически решать задачу проверки почти примитивности однородных элементов в свободных неассоциативных, в свободных (анти-) коммутативных и в свободных алгебрах Ли.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- на международном алгебраическом симпозиуме, посвященном 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А. В. Михалёва, МГУ, Москва, 2010 г.;
- на международной математической конференции, посвященной 70-летию профессора В. В. Кириченко, Николаев, Украина, 2012 г.;
- на конференциях "Алгебра, Комбинаторика, Динамика и Приложения", Белфаст, UK, 2012, 2013 гг.;
- на конференции "Алгебры Ли и Приложения", Уппсала, Швеция, 2012 г.;
- на семинаре "Алгебра и Криптография", CUNY, Нью-Йорк, США, 2013 г.;
- на международной конференции "Алгебра и Логика, Теория и Приложения", посвященной 80-летию В. П. Шункова, Красноярск, 2013 г.;

  а также на следующих семинарах кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ:

- на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры, 2011–2013 гг., неоднократно;

- на семинаре “Избранные вопросы алгебры”, 2009–2013 гг., неоднократно;
- на семинаре “Теория колец”, 2009–2013 гг., неоднократно;

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]—[6], из них первые две — в журналах из перечня ВАК.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, содержащих 13 разделов, и списка литературы. Библиография содержит 66 наименований. Текст диссертации изложен на 70 страницах.

Содержание работы

Глава 1 имеет вспомогательный характер. В ней даётся краткий исторический обзор и формулируются основные результаты диссертации.

Глава 2 содержит определения основных рассматриваемых объектов и ряд результатов о примитивных элементах. В **разделе 2.1** вводятся необходимые понятия и обозначения для работы с примитивными и почти примитивными элементами свободных шрайеровых алгебр. Пусть K — поле, X — непустое множество свободных образующих, $\Gamma(X)$ — свободный группоид неассоциативных одночленов без единичного элемента в алфавите $X : X \subseteq \Gamma(X)$; если $u, v \in \Gamma(X)$, то $u \cdot v \in \Gamma(X)$, где $u \cdot v$ — формальное произведение неассоциативных слов. Рассмотрим линейное пространство $F(X)$ над полем K с базисными элементами из множества $\Gamma(X)$ и умножением

$$(\alpha a) \cdot (\beta b) = (\alpha\beta)(a \cdot b)$$

для всех $\alpha, \beta \in K$, $a, b \in \Gamma(X)$. Тогда $F(X)$ — свободная неассоциативная алгебра. А. Г. Курош[33] доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны.

Пусть $W_0 = \Gamma(X)$, алгебра $U(F(X))$ — универсальная мультипликативная обертывающая алгебры $F(X)$. Тогда $U(F(X))$ является свободной ассоциативной алгеброй с множеством свободных порождающих $S_0 = \{r_w, l_w \mid w \in W_0\}$, где l_w и r_w — универсальные операторы умножения слева и справа соответственно:

$$b \cdot l_a = (\operatorname{ad} a)(b) = ab, \quad b \cdot r_a = (b)(\operatorname{Ad} a) = ba.$$

Рассмотрим двусторонний идеал J_1 свободной неассоциативной алгебры $F(X)$, порожденный множеством $\{ab - ba \mid a, b \in F(X)\}$. Тогда факторал-

[33] А. Г. Курош, *Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр*. Мат. сб. **20** (1947), 239–262.

гебра $A_-(X) = F(X)/J_1$ является свободной неассоциативной коммутативной алгеброй с множеством свободных порождающих X.

Предположим множество $\Gamma(X)$ вполне упорядочено таким образом, что для $a, b \in \Gamma(X)$ если $d(a) > d(b)$, то $a > b$, где $d(a)$ — степень элемента a. Построим индуктивно множество W_1 всех регулярных коммутативных одночленов: $X \subset W_1$ и $w \in W_1$, если $w = uv$, u и v — регулярные коммутативные одночлены и $u \geqslant v$.

Тогда смежные классы с представителями из множества W_1 образуют линейный базис факторалгебры $A_-(X) = F(X)/J_1$. Кроме того, универсальная мультипликативная обертывающая алгебра $U(A_-(X))$ алгебры $A_-(X)$ является свободной ассоциативной алгеброй с множеством свободных порождающих $S_1 = \{r_w \mid w \in W_1\}$. А. И. Ширшов[34] доказал, что подалгебры свободных коммутативных неассоциативных алгебр свободны.

Рассмотрим двусторонний идеал J_2 свободной неассоциативной алгебры $F(X)$, порожденный множеством $\{ab + ba \mid a, b \in F(X)\}$. Тогда факторалгебра $A_+(X) = F(X)/J_2$ является свободной неассоциативной антикоммутативной алгеброй с множеством свободных порождающих X.

Построим индуктивно множество W_2 всех регулярных коммутативных одночленов: $X \subset W_2$ и $w \in W_2$, если $w = uv$, u и v — регулярные антикоммутативные одночлены и $u > v$.

Тогда смежные классы с представителями из множества W_2 образуют линейный базис факторалгебры $A_+(X) = F(X)/J_2$. Кроме того, универсальная мультипликативная обертывающая алгебра $U(A_+(X))$, алгебры $A_+(X)$ является свободной ассоциативной алгеброй с множеством свободных порождающих $S_2 = \{r_w \mid w \in W_2\}$. А. И. Ширшов[34] доказал, что подалгебры свободных антикоммутативных неассоциативных алгебр свободны. В дальнейшем мы будем рассматривать свободные (анти-) коммутативные алгебры над полем K характеристики $\operatorname{char} K \neq 2$.

Рассмотрим двусторонний идеал I алгебры $F(X)$, порожденный элементами $\{a^2, (ab)c + (bc)a + (ca)b \mid a, b, c \in F(X)\}$. Тогда факторалгебра $L(X) = F(X)/I$ является свободной алгеброй Ли с множеством свободных порождающих X. Умножение в этой алгебре будем обозначать лиевым коммутантом $[,]$ и использовать запись в левонормированной форме: $[x, y, z] = [[x, y], z]$. А. И. Ширшов[35] доказал, что подалгебры свободных алгебр Ли свободны. Универсальной обертывающей алгебры Ли $L(X)$ является свободная ассоциативная алгебра $F\langle X \rangle$ с линейным базисом $S(X)$ ассоциативных одночленов.

Построим индуктивно множество W всех регулярных одночленов для

[34] А. И. Ширшов, *Подалгебры свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр*. Мат. сб. **34** (1954), № 1, 81–88.

[35] А. И. Ширшов, *Подалгебры свободных лиевых алгебр*. Мат. сб. **33** (1953), № 2, 441–452.

алгебры $L(X)$: $X \subset W$; $w \in W$, если $w = [u, v]$, u и v — регулярные одночлены и $u > v$, если $u = [u_1, u_2]$, то $u_2 \leqslant v$. Тогда W — базис $L(X)$ как линейного пространства.

Далее под алгеброй $\mathcal{F}$ понимается одна из рассмотренных выше алгебр $F(X)$, $A_-(X)$, $A_+(X)$, $L(X)$. А под линейным базисом алгебры $\mathcal{F}$ и множеством свободных порождающих алгебры $U(\mathcal{F})$ понимаются соответственно W_i и S_i.

Подмножество M алгебры $\mathcal{F}$ называется независимым, если M является множеством свободных образующих подалгебры $\mathrm{alg}\{M\} \subset \mathcal{F}$, порожденной подмножеством M. Подмножество $M = \{a_i\}$ ненулевых элементов алгебры $\mathcal{F}$ называется редуцированным, если для любого i старшая часть a_i° элемента a_i не принадлежит подалгебре алгебры $\mathcal{F}$, порожденной множеством $\{a_j^\circ \mid j \neq i\}$. Рангом множества $H \subset \mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ называется минимальное число свободных образующих из X, от которых может зависеть образ $\varphi(H)$, где φ пробегает группу автоморфизмов алгебры $\mathcal{F}$ (другими словами, $\mathrm{rank}(H)$ — наименьший ранг свободного фактора алгебры $\mathcal{F}$, содержащего множество H).

Подмножество M различных ненулевых элементов алгебры $\mathcal{F}(X)$ называется примитивным, если существует такое множество Y свободных образующих алгебры $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)$, что $M \subseteq Y$. Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)$, Y — множество свободных образующих алгебры $\mathcal{F}(X)$, то $|Y| = |X| = n$. Соответственно, элемент u алгебры $\mathcal{F}(X)$ называется примитивным, если он является элементом некоторого множества свободных образующих алгебры $\mathcal{F}(X)$. Ненулевой элемент u алгебры $\mathcal{F}(X)$ называется почти примитивным, если он не является примитивным элементом алгебры $\mathcal{F}(X)$, но является примитивным в любой собственной подалгебре $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{F}(X)$, содержащей его, $u \in \mathcal{H}$.

В **разделе 2.2** приводятся основные критерии и способы проверки примитивности элементов (на основе символьного вычисления, дифференциального исчисления, факторизации и свободного произведения) и строится важный пример непримитивного элемента.

Предложение 2.12. *Элемент $u_f = x_1 + f(x_1, \ldots, x_n)$, где f является элементом степени $d(f) \geqslant 2$ и всякий одночлен элемента f зависит от x_1, не является примитивным элементом в свободной алгебре $\mathcal{F}(X)$.*

В **разделе 2.3** вводится понятие ранга примитивности элемента свободной алгебры шрайерова многообразия, изучаются его комбинаторные свойства и доказывается теорема о ранге примитивности суммы элементов в свободном произведении алгебр.

Определение 2.13. *Рангом примитивности элемента $w \in \mathcal{F}(X)$*

называется

$$\pi(w) = \min\{\mathrm{rank}(H) \mid w \in H \subset \mathcal{F}(X) \text{ и } w \text{ не примитивен в } H\}.$$

Если не существует ни одной такой подалгебры H, то $\pi(w) = \infty$.

Теорема 2.20. *Пусть $\mathcal{F}(X)$ является свободным произведением двух собственных подалгебр A и B, $\mathcal{F}(X) = A * B$, элементы $a \in A$, $b \in B$. Тогда $\pi_{\mathcal{F}(X)}(a+b) = \pi_A(a) + \pi_B(b)$ (считаем, что $\infty + k = \infty + \infty = k + \infty = \infty$).*

Глава 3 посвящена почти примитивным элементам. В **разделах 3.1–3.3** изучаются почти примитивные элементы свободных шрайеровых алгебр малых рангов: свободных неассоциативных алгебр $F(x)$, $F(x,y)$ ранга 1 и 2 соответственно, свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр $A_-(x)$, $A_-(x,y)$, $A_+(x,y)$ и свободных алгебр Ли $L(x,y)$. Доказаны критерии и построены алгоритмы распознавания однородных почти примитивных элементов в этих алгебрах. Построены новые примеры почти примитивных элементов в этих алгебрах.

Теорема 3.3. *Однородный элемент $u \in F(x)$ степени $d(u) = m \geqslant 2$ является почти примитивным элементом тогда и только тогда, когда в разложение $u = u(x)$ входит одночлен вида $x \cdot A(x)$ или вида $B(x) \cdot x$, где $A(x)$, $B(x)$ — одночлены степени $d(A) = d(B) = m - 1$.*

Теорема 3.10. *Однородный элемент $u \in F(x,y)$ степени $d(u) = m \geqslant 3$, имеющий каноническое представление*

$$u = u(x,y) = \sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j \Phi_j \Psi_j + (x\Lambda_x + y\Lambda_y + N_x x + N_y y),$$

где $(\Phi_j(x,y),\ \Psi_j(x,y))$ — различные пары одночленов степени $d(\Phi_j) \geqslant 2$, $d(\Psi_j) \geqslant 2$, $d(\Phi_j) + d(\Psi_j) = m$, $\Lambda_x, \Lambda_y, N_x, N_y$ — однородные элементы степени $d(\Lambda_x) = d(\Lambda_y) = d(N_x) = d(N_y) = m - 1$ или нулевые элементы, коэффициенты $\gamma_j \in K$, является почти примитивным тогда и только тогда, когда не существует такого коэффициента пропорциональности $\theta \in K$, что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y, N_x \overset{\theta}{\sim} N_y$ ($\Lambda_x = \theta\Lambda_y, N_x = \theta N_y$ или $\theta\Lambda_x = \Lambda_y, \theta N_x = N_y$).

Теорема 3.15. *Однородный элемент $u \in A_-(x)$ степени $d(u) = m \geqslant 2$ является почти примитивным элементом тогда и только тогда, когда в разложение элемента $u = u(x)$ входит одночлен вида $A \cdot x$, где A — регулярный одночлен степени $d(A) = m - 1$.*

Теорема 3.18. *Однородный элемент $u \in A(x,y)$ степени $d(u) = m \geqslant 3$, имеющий каноническое представление*

$$u = \sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j \Phi_j \Psi_j + (\Lambda_x x + \Lambda_y y),$$

где $(\Phi_j(x,y),\Psi_j(x,y))$ — различные пары регулярных одночленов степени $d(\Phi_j)\geqslant 2$, $d(\Psi_j)\geqslant 2$, $d(\Phi_j)+\ell(\Psi_j)=m$; Λ_x,Λ_y — однородные элементы степени $d(\Lambda_x)=d(\Lambda_y)=m-1$ или нулевые элементы, $\gamma_j\in K$, является почти примитивным тогда и только тогда, когда не существует такого коэффициента пропорциональности $\theta\in K$, что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y$ (т.е. $\Lambda_x=\theta\Lambda_y$ или $\theta\Lambda_x=\Lambda_y$).

Теорема 3.22. *Однородный элемент $u\in L(x,y)$ степени $d(u)=m\geqslant 3$, имеющий каноническое представление*

$$u=\left(\sum_{\gamma_j\neq 0}\gamma_j[\Phi_j,\Psi_j]\right)+[\Lambda_x,x]+[\Lambda_y,y],$$

где $[\Phi_j(x,y),\Psi_j(x,y)]\in W$ — регулярные одночлены со степенями $d(\Phi_j)\geqslant 2$, $d(\Psi_j)\geqslant 2$ и $d([\Phi_j(x,y),\Psi_j(x,y)])=d(\Phi_j)+d(\Psi_j)=m$, Λ_x,Λ_y — однородные элементы степени $d(\Lambda_x)=d(\Lambda_y)=m-1$ или нулевые элементы,$\gamma_j\in K$, является почти примитивным тогда и только тогда, когда не существует решения уравнения

$$u\Big|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle}=[\Lambda_x,x]+[\Lambda_y,y]=[f,l]\Big|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle}$$

относительно однородных переменных $f,l\in L(x,y)$ степени $d(f)=m-1$, $d(l)=1$ соответственно, где $a\Big|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle}$ — проекция элемента a на линейное пространство с базисом $W_{\{x,y\}}$, то есть линейная комбинация регулярных одночленов из $W_{\{x,y\}}$, входящих в каноническое представление элемента a.

В **разделе 3.4** рассмотрена связь между почти примитивностью старшей части элемента и почти примитивностью самого элемента в свободных алгебрах шрайеровых многообразий. Доказано, что элементы вида $(\ldots((ax_1)x_2)\ldots)x_n+x_1$ являются почти примитивными в свободной (коммутативной) неассоциативной алгебре, старшая часть которых не почти примитивна.

Теорема 3.26. *Пусть $n>2$, $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$. Тогда*

1. *Пусть элемент $u\in\mathcal{F}(X)$ не является примитивным элементом в $\mathcal{F}(X)$, но старшая часть u° является примитивным элементом в любой собственной подалгебре, порожденной однородными образующими, $u^\circ\in\mathcal{H}^\circ\subsetneq\mathcal{F}(X)$, Тогда элемент u является почти примитивным элементом в $\mathcal{F}(X)$;*

2. *В обратную сторону утверждение 1 верно для однородных элементов;*

3. Существуют неоднородные элементы в $\mathcal{F}(x,y)$, для которых в обратную сторону утверждение 1 неверно.

В **разделе 3.5** вводится понятие ρ-числа однородного элемента свободной алгебры шрайерова многообразия и изучаются его комбинаторные свойства.

Определение 3.30. *Пусть $\mathcal{H}^\circ = \mathrm{alg}\{h_1, \ldots, h_k\} \subseteq \mathcal{F}(X)$ — подалгебра $\mathcal{F}(X)$ с редуцированным множеством $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$ однородных свободных образующих. Всякий однородный элемент $u \in \mathcal{H}^\circ$ степени $d_X(u) \geqslant 3$, в представление которого не входит линейно никакая свободная образующая h_i, имеет следующий вид (считаем, что операция умножения в алгебре $\mathcal{F}(X)$ записывается как $a \cdot b$):*

$$u = u(h_1, \ldots, h_k) = \sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j A_j B_j + \sum_{\substack{d_X(h_p)=1 \\ \gamma_{(l,p)} \neq 0}} \gamma_{(l,p)} h_p C_p + \sum_{\substack{d_X(h_q)=1 \\ \gamma_{(r,q)} \neq 0}} \gamma_{(r,q)} D_q h_q.$$

Обозначим через

$$u_{AB} = \left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j A_j B_j \right), \quad \widetilde{u} = \left(\sum_{\substack{d_X(h_p)=1 \\ \gamma_{(l,p)} \neq 0}} \gamma_{(l,p)} h_p C_p + \sum_{\substack{d_X(h_q)=1 \\ \gamma_{(r,q)} \neq 0}} \gamma_{(r,q)} D_q h_q \right), \quad (1)$$

где $(A_j(h_1, \ldots, h_k),\ B_j(h_1, \ldots, h_k))$ — различные пары регулярных одночленов степени $d_X(A_j) \geqslant 2$, $d_X(B_j) \geqslant 2$, $d_X(A_j) + d_X(B_j) = d_X(u)$, $C_p(h_1, \ldots, h_k)$, $D_q(h_1, \ldots, h_k)$ — однородные элементы степени $d_X(C_p) = d_X(D_q) = d_X(u) - 1$. Обозначим через J_p множество (возможно пустое) различных свободных образующих h_p степени 1, участвующих в сумме $\widetilde{u}$ в представлении (1), через J_q — аналогичное множество свободных образующих h_q. Определим $J(u) = J_p \cup J_q \subset H$ как множество свободных образующих степени 1, участвующих в представлении элемента u, в качестве множителей некоторых слагаемых "левой" или "правой" скобочной структуры.

Определение 3.31. *Если всякая свободная образующая подалгебры $\mathcal{H}^\circ = \mathrm{alg}\{h_1, \ldots, h_k\}$, $u \in \mathcal{H}^\circ$, где $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$ — редуцированное множество однородных образующих, не входит линейно в представление старшей части u°, то определим $\rho_H(u) = |J|$, в противном случае $\rho_H(u) = +\infty$. Определим $\rho_{\mathcal{H}^\circ}(u)$ как минимальное значение $\rho_H(u)$, где H пробегает все редуцированные множества однородных образующих алгебры $\mathcal{H}^\circ$. Отметим, что $\rho_{\mathcal{H}^\circ}(u), \rho_H(u) \in \{0, 1, \ldots, n, +\infty\}$.*

Определение 3.32. *Для однородного элемента $u \in \mathcal{F}(X)$ степени $d_X(u) \geqslant 3$ определим ρ-число в обозначениях предыдущих определений* *следующим образом:*

$$\rho(u) = \min_{u \in \mathcal{H}^\circ \subset F(X)} \rho_{\mathcal{H}^\circ}(u),$$

где минимум берется по всем подалгебрам $\mathcal{H}^\circ \subset F(X)$, имеющим редуцированное множество однородных образующих и содержащим однородный элемент u.

В **разделе 3.6** доказывается критерий почти примитивности однородного элемента свободной алгебры произвольного ранга шрайерова многообразия в случае степени элемента больше 2 в терминах ρ-числа элемента, в случае степени элемента равной 2 в терминах ранга элемента. Строятся алгоритмы проверки почти примитивности однородного элемента в обоих случаях.

Теорема 3.34. *Пусть $u \in \mathcal{F}(X)$ — однородный элемент степени $d(u) = m \geqslant 3$. Тогда элемент u является почти примитивным в $\mathcal{F}(X)$, если и только если $\rho(u) = n = |X|$.*

Теорема 3.42. *Однородный элемент $u \in \mathcal{F}(X)$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, степени $d(u) = 2$ является почти примитивным тогда и только тогда, когда элемент u имеет максимальный ранг, то есть $\operatorname{rank}(u) = n$.*

В **разделе 3.7** доказывается почти примитивность суммы почти примитивных элементов свободных алгебр шрайеровых многообразий в их свободном произведении, что является усилением ранее известного результата для однородных почти примитивных элементов и аналогом классической теоремы из теории свободных групп.

Теорема 3.42. *Пусть $\mathcal{F}(X)$ является свободным произведением двух собственных подалгебр A и B, $\mathcal{F} = A * B$. Пусть также a и b являются почти примитивными элементами A и B, соответственно. Тогда элемент $a + b$ является почти примитивным элементом $\mathcal{F}(X)$.*

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям: д.ф.-м.н., профессору механико-математического факультета МГУ Александру Васильевичу Михалёву и д.ф.-м.н., профессору механико-математического факультета МГУ Александру Александровичу Михалёву за помощь в выборе темы исследования, постановки задач, внимательное руководство в процессе исследовательской деятельности и поддержку, а также профессору Владимиру Шпильрайну и профессору Елене Игоревне Буниной за ценные советы и обсуждения. Автор благодарен всему коллективу кафедры высшей алгебры за тёплую атмосферу и внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] А. В. Климаков, *Почти примитивные элементы свободных неассоциативных (анти)коммутативных алгебр малых рангов*. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, матем. мех. **5** (2012), 19–24. Перевод: *Almost primitive elements of free nonassociative (anti)commutative algebras of small rank*. Moscow Univ. Math. Bulletin **67** (2012), № 5-6, 206–210.

[2] А. В. Климаков, *Однородные почти примитивные элементы свободных неассоциативных (анти)коммутативных алгебр*. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, матем. мех. **6** (2013), 50–54.

[3] А. В. Климаков, А. А. Михалёв, *Почти примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр малых рангов*. Фундамент. и прикл. мат. **17** (2012), № 1, 127–141. Перевод: *Almost primitive elements of free nonassociative algebras of small ranks*. J. Math. Sci. **185** (2012), № 3, 430–439. *А. В. Климакову принадлежат основные результаты работы. А. А. Михалёву принадлежит введение и общая редакция работы.*

[4] А. В. Климаков, *Почти примитивные элементы свободных алгебр Ли малых рангов*. Фундамент. и прикл. мат. **18** (2013), № 1, 63–74.

[5] A. V. Klimakov, *Almost primitive elements of free Lie algebras of small ranks*. International Mathematical Conference On occasion the 70th year anniversary of Professor Vladimir Kirichenko, June 13-19, 2012, Mykolayiv, Ukraine, pp. 103-104 (2012).

[6] A. V. Klimakov, *Homogeneous almost primitive elements of free nonassociative algebras*. Международная конференция, посвященная памяти В. П. Шункова “Алгебра и Логика: Теория и Приложения”, 21-27 Июля, 2013, Красноярск, Россия, с. 161-163 (2013).