ФГБОУ ВПО МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 512.554

Климаков Андрей Владимирович

Обобщенные примитивные элементы свободных алгебр шрайеровых многообразий

Специальность 01.01.06 —
математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор Александр Васильевич Михалёв,
доктор физико-математических наук,
профессор Александр Александрович Михалёв.

МОСКВА — 2013

Содержание

1 Введение

1.1 Шрайеровы многообразия алгебр

Многообразие линейных алгебр над полем определяется как класс алгебр, замкнутых относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. Многообразие алгебр называется шрайеровым, если любая подалгебра свободной алгебры этого многообразия является свободной (в том же многообразии алгебр). Понятие шрайерова многообразия возникло в теории групп: в 1920-х годах Нильсен [50] и Шрайер [55] доказали, что любая подгруппа свободной группы свободна. А. Г. Курош [11] доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны. А. И. Ширшов [22] показал, что многообразие всех алгебр Ли является шрайеровым (этот результат был получен также Виттом в [60], где также было доказано, что многообразие всех p-алгебр Ли является шрайеровым).

А. И. Ширшов в [21] показал, что подалгебры свободных неассоциативных коммутативных и свободных неассоциативных антикоммутативных алгебр свободны. Таким образом многообразие всех коммутативных алгебр (всех антикоммутативных алгебр) является шрайеровым. А. А. Михалев [13] и А. С. Штерн [23] показали, что многообразие супералгебр Ли является шрайеровым. А. А. Михалев [14] получил этот результат для цветных p-супералгебр Ли. А. И. Корепанов [9] доказал, что подалгебры свободных суперкоммутативных неассоциативных алгебр свободны. В. К. Харченко [36] получил обобщение теоремы Ширшова-Витта о подалгебрах свободных алгебр Ли для алгебр Хопфа над полем нулевой характеристики с косым копроизведением. У. У. Умирбаев и И. П. Шестаков [56] доказали, что подалгебры свободных алгебр Акивиса свободны.

У. У. Умирбаев в [17, 58] получил необходимые и достаточные условия для того, чтобы многообразие алгебр было шрайеровым, и построил новые примеры шрайеровых многообразий. Подалгебры свободных алгебр многообразий линейных Ω-алгебр рассматривались в [1, 3, 4], шрайеровы многообразия n-лиевых алгебр описаны в [8].

Группы автоморфизмов свободных алгебр конечного ранга шрайеровых многообразий порождены элементарными автоморфизмами (для алгебр Ли этот результат был получен П. Коном [32], а для свободных алгебр шрайеровых многообразий — Ж. Левиным [37]). У. У. Умирбаев [57] получил описание группы автоморфизмов свободной алгебры конечного ранга шрайерова многообразия алгебр в терминах образующих и определяющих соотношений.

1.2 Примитивные и почти примитивные элементы

Подмножество M ненулевых элементов свободной алгебры $\mathcal{F}$ шрайерова многообразия называется примитивной системой элементов, если существует множество свободных образующих алгебры $\mathcal{F}$, содержащее подмножество M. Используя свободное дифференциальное исчисление, критерии распознавания примитивных систем элементов для свободных (p-)алгебр Ли и свободных (p-)суперачлгебр Ли были получены в [6, 49], для свободных неассоциативных алгебр — в [43]. Алгоритмы распознавания примитивных систем элементов и построение дополнения до множества свободных образующих для свободных неассоциативных, свободных (анти-) коммутативных неассоциативных алгебр были построены (в том числе с компьютерной реализацией) в [15, 16, 18].

Ненулевой элемент свободной алгебры $\mathcal{F}$ называется почти примитивным, если он не является примитивным элементом алгебры $\mathcal{F}$, но является примитивным элементом в любой содержащей его собственной подалгебре алгебры $\mathcal{F}$. Почти примитивные элементы в свободных группах изучались в работах [28, 33, 35, 52–54]. Изучение почти примитивных элементов свободных алгебр было начато в работе А. А. Михалева и Дж. Т. Ю [46]. В частности были построены примеры почти примитивных элементов в свободных неассоциативных алгебрах, свободных (p-)алгебрах Ли и (p-)супералгебрах Ли малых рангов. Используя свойства свободного произведения свободных алгебр, были построены серии примеров для свободных алгебр произвольного ранга. В работе А. В. Михалева, У. У. Умирбаева, Дж. Т. Ю [44] рассматривались свободные алгебры Ли и было доказано, что элемент $u_{kl} = (\operatorname{ad} x)^k(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^l$, где $(\operatorname{ad} u)(v) = u * v = (u)(\operatorname{Ad} v)$ и $*$ является операцией умножения, в свободной алгебре Ли $L(x, y)$ является почти примитивным при $k, l \geqslant 2$ и $k \neq l$.

1.3 Краткое описание работы

Актуальность темы

Классической задачей комбинаторной алгебры является задача распознавание различных комбинаторных свойств объектов. На протяжении последних ста лет проводится изучение свободных структур: свободных групп, свободных модулей, свободных алгебр, их подструктур, элементов, отображений. Исследованию свободных групп и подгрупп были посвящены первые работы Нильсена и Шрайера в 1920-х годах, вопросами неассоциативных свободных алгебр в 1940-60-е годы занимались А. Г. Курош, А. И. Ширшов, их ученики.

На текущий момент основными вопросами свободных шрайеровых алгебр (подалгебры этих алгебр также свободны) являются вопросы распознания примитивных элементов, почти примитивных элементов, автоморфизмов, изучение строений самих алгебр, распознавание комбинаторных свойств элементов. Данные задачи являются не только задачами абстрактной, комбинаторной алгебры, но и компьютерной алгебры.

В последнее время был достигнут значительный прогресс, в том числе за счет применения техники дифференциального исчисления для свободных алгебр, позволившей построить критерии и алгоритмы проверки некоторых свойств объектов, в том числе с последующей компьютерной реализацией. Тем не менее, ряд вопросов об алгоритмической разрешимости некоторых задач до сих пор открыт.

Цель работы

Целью работы является построение критериев и алгоритмов распознавания почти примитивных элементов свободных алгебр основных типов шрайеровых многообразий, а так же построение новых примеров почти примитивных элементов основных типов шрайеровых многообразий.

Научная новизна

Научная новизна данной работы состоит в следующем:

1. Введено новое понятие ранга примитивности элементов свободной алгебры шрайерова многообразия, исследованы его свойства, доказаны формулы для ранга примитивности суммы элементов для свободного произведения алгебр шрайеровых многообразий.

2. Исследованы почти примитивные элементы свободной неассоциативной алгебры, свободной (анти-) коммутативной алгебры и свободной алгебры Ли малых рангов. Получены критерии и построенны алгоритмы проверки почти примитивности однородных элементов в этих алгебрах.

3. Исследована связь почти примитивности элемента и почти примитивности его старшей части в свободных алгебрах шрайеровых многообразий, построены новые серии примеров почти примитивных элементов, старшая часть которых не является почти примитивной.

4. Введено понятие ρ-числа однородного элемента свободной алгебры произвольного ранга, исследованы его свойства, получены критерии и построены алгоритмы проверки почти примитивности однородного элемента степени более 2 в терминах ρ-числа, а также алгоритм вычисления ρ-числа. Получен критерий почти примитивности однородного элемента степени 2 в терминах ранга элемента.

5. Усилены ранее известные результаты про почти примитивность суммы почти примитивных элементов в свободном произведении свободных алгебр шрайеровых многообразий.

Основные методы исследования

В работе применяется техника символьного вычисления, свободного дифференциального исчисления, методы теории неассоциативных алгебр, методы работы с примитивными системами элементов для свободных алгебр шрайеровых многообразий.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет как теоретический, так и прикладной характер. Результаты работы позволяют алгоритмически решать задачу проверки почти примитивности однородных элементов в свободных неассоциативных, в свободных (анти-) коммутативных и в свободных алгебрах Ли.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры МГУ;
- на семинарах "Избранные вопросы алгебры", "Теория колец" кафедры высшей алгебры МГУ;
- на международном алгебраическом симпозиуме, посвященном 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А. В. Михалева, МГУ, Москва, 2010 г.;
- на международной математической конференции, посвященной 70-летию профессора В. В. Кириченко, Николаев, Украина, 2012 г.;

- на конференциях “Алгебра, Комбинаторика, Динамика и Приложения”, Белфаст, UK, 2012, 2013 гг.;

- на конференции “Алгебры Ли и Приложения”, Уппсала, Швеция, 2012 г.;

- на международном семинаре “Алгебра и Криптография”, CUNY, Нью-Йорк, США, 2013 г.;

- на международной конференции “Алгебра и Логика, Теория и Приложения”, посвященной 80-летию В. П. Шункова, Красноярск, 2013 г.;

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 6 работах, список которых приводится в конце библиографии.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из 3 глав (одна из которых является вводной), заключения и библиографии (66 наименований). Общий объем диссертации составляет 70 страниц. Структура работы отражена в оглавлении.

Краткое содержание работы

В **первой главе**, которая является вводной, дается краткий исторический обзор и формулируются основные результаты диссертации.

Во **второй главе** (раздел 2.1) вводятся необходимые понятия и обозначения для работы с примитивными и почти примитивными элементами свободных шрайеровых алгебр. Пусть K — поле, X — непустое множество свободных образующих, $\Gamma(X)$ — свободный группоид неассоциативных одночленов без единичного элемента в алфавите $X : X \subseteq \Gamma(X)$; если $u, v \in \Gamma(X)$, то $u \cdot v \in \Gamma(X)$, где $u \cdot v$ — формальное произведение неассоциативных слов. Рассмотрим линейное пространство $F(X)$ над полем K с базисными элементами из множества $\Gamma(X)$ и умножением

$$(\alpha a) \cdot (\beta b) = (\alpha\beta)(a \cdot b)$$

для всех $\alpha, \beta \in K$, $a, b \in \Gamma(X)$. Тогда $F(X)$ — свободная неассоциативная алгебра. А. Г. Курош [11] доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны.

Пусть $W_0 = \Gamma(X)$, алгебра $U(F(X))$ — универсальная мультипликативная обертывающая алгебры $F(X)$. Тогда $U(F(X))$ является свободной ассоциативной алгеброй с множеством свободных порождающих $S_0 = \{r_w, l_w \mid w \in W_0\}$, где l_w и r_w — универсальные операторы умножения слева и справа соответственно:

$$b \cdot l_a = (\operatorname{ad} a)(b) = ab, \quad b \cdot r_a = (b)(\operatorname{Ad} a) = ba.$$

Рассмотрим двусторонний идеал J_1 свободной неассоциативной алгебры $F(X)$, порожденный множеством $\{ab - ba \mid a, b \in F(X)\}$. Тогда факторалгебра $A_-(X) = F(X)/J_1$ является свободной неассоциативной коммутативной алгеброй с множеством свободных порождающих X.

Предположим множество $\Gamma(X)$ вполне упорядочено таким образом, что для $a, b \in \Gamma(X)$ если $d(a) > d(b)$, то $a > b$, где $d(a)$ — степень элемента a. Построим индуктивно множество W_1 всех регулярных коммутативных одночленов: $X \subset W_1$ и $w \in W_1$, если $w = uv$, u и v — регулярные коммутативные одночлены и $u \geqslant v$.

Тогда смежные классы с представителями из множества W_1 образуют линейный базис факторалгебры $A_-(X) = F(X)/J_1$. Кроме того, универсальная мультипликативная обертывающая алгебра $U(A_-(X))$ алгебры $A_-(X)$ является свободной ассоциативной алгеброй с множеством свободных порождающих $S_1 = \{r_w \mid w \in W_1\}$. А. И. Ширшов [21] доказал, что подалгебры свободных коммутативных неассоциативных алгебр свободны.

Рассмотрим двусторонний идеал J_2 свободной неассоциативной алгебры $F(X)$, порожденный множеством $\{ab + ba \mid a, b \in F(X)\}$. Тогда факторалгебра $A_+(X) = F(X)/J_2$ является свободной неассоциативной антикоммутативной алгеброй с множеством свободных порождающих X.

Построим индуктивно множество W_2 всех регулярных коммутативных одночленов: $X \subset W_2$ и $w \in W_2$, если $w = uv$, u и v — регулярные антикоммутативные одночлены и $u > v$.

Тогда смежные классы с представителями из множества W_2 образуют линейный базис факторалгебры $A_+(X) = F(X)/J_2$. Кроме того, универсальная мультипликативная обертывающая алгебра $U(A_+(X))$ алгебры $A_+(X)$ является свободной ассоциативной алгеброй с множеством свободных порождающих $S_2 = \{r_w \mid w \in W_2\}$. А. И. Ширшов [21] доказал, что подалгебры свободных антикоммутативных неассоциативных алгебр свободны. В дальнейшем мы будем рассматривать свободные (анти-) коммутативные алгебры над полем K характеристики $\operatorname{char} K \neq 2$.

Рассмотрим двусторонний идеал I алгебры $F(X)$, порожденный элементами $\{a^2, (ab)c + (bc)a + (ca)b \mid a, b, c \in F(X)\}$. Тогда факторалгебра $L(X) = F(X)/I$ является свободной алгеброй Ли с множеством свободных порождающих X. Умножение в этой алгебре будем обозначать лиевым коммутантом $[,]$ и использовать запись в левонормированной форме: $[x, y, z] = [[x, y], z]$. А. И. Ширшов [22] доказал, что подалгебры свободных алгебр Ли свободны. Универсальной обертывающей алгебры Ли $L(X)$ является свободная ассоциативная алгебра $F\langle X\rangle$ с линейным базисом $S(X)$ ассоциативных одночленов.

Построим индуктивно множество W всех регулярных одночленов для алгебры $L(X)$: $X \subset W$; $w \in W$, если $w = [u, v]$, u и v — регулярные одночлены и $u > v$, если $u = [u_1, u_2]$, то $u_2 \leqslant v$. Тогда W — базис $L(X)$ как линейного пространства.

Далее под алгеброй $\mathcal{F}$ понимается одна из рассмотренных выше алгебр $F(X)$, $A_-(X)$, $A_+(X)$, $L(X)$. А под линейным базисом алгебры $\mathcal{F}$ и множеством свободных порождающих алгебры $U(\mathcal{F})$ понимаются соответственно W_i и S_i.

Подмножество M алгебры $\mathcal{F}$ называется независимым, если M является множеством свободных образующих подалгебры $\mathrm{alg}\{M\} \subset \mathcal{F}$, порожденной подмножеством M. Подмножество $M = \{a_i\}$ ненулевых элементов алгебры $\mathcal{F}$ называется редуцированным, если для любого i старшая часть a_i° элемента a_i не принадлежит подалгебре алгебры $\mathcal{F}$, порожденной множеством $\{a_j^\circ \mid j \neq i\}$. Рангом множества $H \subset \mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ называется минимальное число свободных образующих из X, от которых может зависеть образ $\phi(H)$, где ϕ пробегает группу автоморфизмов алгебры $\mathcal{F}$ (другими словами, $\mathrm{rank}(H)$ — наименьший ранг свободного фактора алгебры $\mathcal{F}$, содержащего множество H).

Подмножество M различных ненулевых элементов алгебры $\mathcal{F}(X)$ называется примитивным, если существует такое множество Y свободных образующих алгебры $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)$, что $M \subseteq Y$. Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)$, Y — множество свободных образующих алгебры $\mathcal{F}(X)$, то $|Y| = |X| = n$. Соответственно, элемент u алгебры $\mathcal{F}(X)$ называется примитивным, если он является элементом некоторого множества свободных образующих алгебры $\mathcal{F}(X)$. Ненулевой элемент u алгебры $\mathcal{F}(X)$ называется почти примитивным, если он не является примитивным элементом алгебры $\mathcal{F}(X)$, но является примитивным в любой собственной подалгебре $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{F}(X)$, содержащей его, $u \in \mathcal{H}$.

Далее (раздел 2.2) разбираются основные критерии и способы проверки примитивности элементов (на основе символьного вычисления, дифференциального исчисления, факторизации и свободного произведения). Строится важный пример не примитивного элемента специального вида (Предположение 2.12). Затем (в разделе 2.3) вводится понятие **ранга примитивности элемента** свободной алгебры, изучаются его комбинаторные свойства и доказывается **Теорема 2.20 о ранге примитивности суммы элементов при свободном произведении алгебр**. В процессе доказывается Лемма 2.19 о строении критических подалгебр свободного произведения, которая пригодится далее в вопросе изучения почти примитивных элементов.

Первая часть **третьей главы** (разделы 3.1—3.3) посвящена исследованию свободных шрайеровых алгебр малых рангов: идет накопление примеров и свойств почти примитивных элементов свободных неассоциативных алгебр $F(x)$, $F(x, y)$ ранга 1 и 2 соответственно, свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр $A_-(x)$, $A_-(x, y)$, $A_+(x, y)$ и свободной алгебры Ли $L(x, y)$. В этой части доказаны **критерии** и сформулированы **алгоритмы распознавания однородных почти примитивных элементов этих алгебр: Теоремы 3.3, 3.10, 3.15, 3.18, 3.22**.

В разделе 3.4 рассматривается связь между почти примитивностью старшей части элемента и почти примитивностью самого элемента (Теорема 3.26) и доказывается, что элементы вида $(\ldots((ax_1)x_2)\ldots)x_n + x_1$ являются почти примитивными в свободной (коммутативной) неассоциативной алгебре (Теорема 3.29).

Затем происходит обобщение результатов предыдущих разделов на общий случай произвольного ранга (разделы 3.5—3.6) свободной шрайеровой алгебры, посредством определения **понятия ρ-числа элемента**, изучаются его комбинаторные свойства. Далее строится **критерий и алгоритм проверки почти примитивности однородного элемента степени больше 2: Теоремы 3.34, 3.35**. Для однородных элементов степени 2 доказывается Теорема 3.42.

Наконец в завершающем разделе 3.7 мы возвращаемся к технике работы с рангом примитивности и доказываем Теорему 3.47, являющуюся усилением ранее известного результата в свободных алгебрах и аналогом классической теоремы из свободных групп.

Благодарности

Автор благодарит д.ф.-м.н., профессора механико-математического факультета МГУ Александра Васильевича Михалева и д.ф.-м.н., профессора механико-математического факультета МГУ Александра Александровича Михалева за помощь в выборе темы исследования, внимательное руководство в процес-

се исследовательской деятельности и поддержку.

2 Примитивные элементы и ранг примитивности

2.1 Основные определения и примеры

Пусть K — поле, X — непустое множество свободных образующих, $\Gamma(X)$ — свободный группоид неассоциативных одночленов без единичного элемента в алфавите $X : X \subseteq \Gamma(X)$; если $u, v \in \Gamma(X)$, то $u \cdot v \in \Gamma(X)$, где $u \cdot v$ — формальное произведение неассоциативных слов. Рассмотрим линейное пространство $F(X)$ над полем K с базисными элементами из множества $\Gamma(X)$ и умножением

$$(\alpha a) \cdot (\beta b) = (\alpha\beta)(a \cdot b)$$

для всех $\alpha, \beta \in K$, $a, b \in \Gamma(X)$. Тогда $F(X)$ — свободная неассоциативная алгебра. А. Г. Курош [11] доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны.

Определим функцию веса $\mu\colon X \to \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Рассмотрим свободную полугруппу $S(X)$ ассоциативных слов в алфавите X и $\widetilde{\ }\colon \Gamma(X) \to S(X)$ гомоморфизм снятия скобок. Положим, $\mu(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)$ для $x_1, \ldots, x_n \in X$. Если $\mu(x) = 1$ для всех $x \in X$, то μ является обычной функцией длины (степени) слова, $\mu = \mu_X = d = d_X$. Если $a \in F(X)$, $a = \sum \alpha_i a_i$, $0 \neq \alpha_i \in K$, a_i являются базисными одночленами, $a_j \neq a_s$ при $j \neq s$, то мы полагаем $\mu(a) = \max_i\{\mu(\widetilde{a_i})\}$. Через $\widehat{a}$ мы обозначим старшую часть элемента a: $\widehat{a} = \sum_{j, \mu(a_j) = \mu(a)} \alpha_j a_j$. Элемент $a \in F(X)$ называется однородным, если $a = \widehat{a}$. Для функции длины (степени) элемента $\mu = d$ будем обозначать старшую часть элемента a относительно функции длины (степени) через a°.

Пусть $W_0 = \Gamma(X)$, алгебра $U(F(X))$ — универсальная мультипликативная обертывающая алгебры $F(X)$. Тогда $U(F(X))$ является свободной ассоциативной алгеброй с множеством свободных порождающих $S_0 = \{r_w, l_w \mid w \in W_0\}$, где l_w и r_w — универсальные операторы умножения слева и справа соответственно:

$$b \cdot l_a = (\operatorname{ad} a)(b) = ab, \quad b \cdot r_a = (b)(\operatorname{Ad} a) = ba.$$

Рассмотрим двусторонний идеал J_1 свободной неассоциативной алгебры $F(X)$, порожденный множеством $\{ab - ba \mid a, b \in F(X)\}$. Тогда факторалгебра $A_-(X) = F(X)/J_1$ является свободной неассоциативной коммутативной алгеброй с множеством свободных порождающих X.

Предположим множество $\Gamma(X)$ вполне упорядочено таким образом, что для $a, b \in \Gamma(X)$ если $d(a) > d(b)$, то $a > b$, где $d(a)$ — степень элемента a. Построим индуктивно множество W_1 всех регулярных коммутативных одночленов: $X \subset W_1$ и $w \in W_1$, если $w = uv$, u и v — регулярные коммутативные одночлены и $u \geqslant v$.

Тогда смежные классы с представителями из множества W_1 образуют линейный базис факторалгебры $A_-(X) = F(X)/J_1$. Кроме того, универсальная мультипликативная обертывающая алгебра $U(A_-(X))$ алгебры $A_-(X)$ является свободной ассоциативной алгеброй с множеством свободных порождающих $S_1 = \{r_w \mid w \in W_1\}$. А. И. Ширшов [21] доказал, что подалгебры свободных коммутативных неассоциативных алгебр свободны.

Рассмотрим двусторонний идеал J_2 свободной неассоциативной алгебры $F(X)$, порожденный множеством $\{ab + ba \mid a, b \in F(X)\}$. Тогда факторалгебра $A_+(X) = F(X)/J_2$ является свободной неассоциативной антикоммутативной алгеброй с множеством свободных порождающих X.

Построим индуктивно множество W_2 всех регулярных коммутативных одночленов: $X \subset W_2$ и $w \in W_2$, если $w = uv$, u и v — регулярные антикоммутативные одночлены и $u > v$.

Тогда смежные классы с представителями из множества W_2 образуют линейный базис факторалгебры $A_+(X) = F(X)/J_2$. Кроме того, универсальная мультипликативная обертывающая алгебра $U(A_+(X))$ алгебры $A_+(X)$ является свободной ассоциативной алгеброй с множеством свободных порождающих $S_2 = \{r_w \mid w \in W_2\}$. А. И. Ширшов [21] доказал, что подалгебры свободных антикоммутативных неассоциативных алгебр свободны. В дальнейшем мы будем рассматривать свободные (анти-) коммутативные алгебры над полем K характеристики $\operatorname{char} K \neq 2$.

Рассмотрим двусторонний идеал I алгебры $F(X)$, порожденный элементами $\{a^2, (ab)c + (bc)a + (ca)b \mid a, b, c \in F(X)\}$. Тогда факторалгебра $L(X) = F(X)/I$ является свободной алгеброй Ли с множеством свободных порождающих X. Умножение в этой алгебре будем обозначать лиевым коммутантом $[,]$ и использовать запись в левонормированной форме: $[x, y, z] = [[x, y], z]$. А. И. Ширшов [22] доказал, что подалгебры свободных алгебр Ли свободны. Универсальной обертывающей алгебры Ли $L(X)$ является свободная ассоциативная алгебра $F\langle X\rangle$ с линейным базисом $S(X)$ ассоциативных одночленов.

Построим индуктивно множество W всех регулярных одночленов для алгебры $L(X)$: $X \subset W$; $w \in W$, если $w = [u, v]$, u и v — регулярные одночлены и $u > v$, если $u = [u_1, u_2]$, то $u_2 \leqslant v$. Тогда W — базис $L(X)$ как линейного пространства.

Далее под алгеброй $\mathcal{F}$ понимается одна из рассмотренных выше алгебр $F(X)$, $A_-(X)$, $A_+(X)$, $L(X)$. Под линейным базисом алгебры $\mathcal{F}$ и множеством свободных порождающих алгебры $U(\mathcal{F})$ понимаются соответственно W_i и S_i. Обозначим за W_X множество регулярных одночленов вида $A \cdot x$, где $\cdot$ – операция умножения в нашей свободной алгебре, $x \in X$ – одна из свободных порождающих, A — регулярный одночлен степени $d(A) > d(x) = 1$, $W^m = \{w \in W \mid d(w) = m\}$, $W_X^m = W_X \cap W^m$, $\overline{W_X} = W \backslash W_X$, $\overline{W_X^m} = W^m \backslash W_X^m$. Единственное выражение элемента алгебры $a \in \mathcal{F}(X)$ в виде линейной комбинации регулярных одночленов из W будем называть регулярным (каноническим) разложением и обозначать a_{can}; степенью (весом, длиной) элемента a будем называть $d_X(a)$ – наибольшую степень одночленов из W, входящих в регулярное представление элемента a; старшей частью элемента a будем называть a° – совокупность членов регулярного представления элемента a степени $d_X(a)$.

Подмножество M алгебры $\mathcal{F}$ называется независимым, если M является множеством свободных образующих подалгебры $\operatorname{alg}\{M\} \subset \mathcal{F}$, порожденной подмножеством M. Подмножество $M = \{a_i\}$ ненулевых элементов алгебры $\mathcal{F}$ называется редуцированным, если для любого i старшая часть a_i° элемента a_i не принадлежит подалгебре алгебры $\mathcal{F}$, порожденной множеством $\{a_j^\circ \mid j \neq i\}$.

Подмножество M различных ненулевых элементов алгебры $\mathcal{F}(X)$ называется примитивным, если существует такое множество Y свободных образующих алгебры $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)$, что $M \subseteq Y$. Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)$, Y — множество свободных образующих алгебры $\mathcal{F}(X)$, то $|Y| = |X| = n$. Соответственно, элемент u алгебры $\mathcal{F}(X)$ называется примитивным, если он является элементом некоторого множества свободных образующих алгебры $\mathcal{F}(X)$. Ненулевой элемент u алгебры $\mathcal{F}(X)$ называется почти примитивным, если он не является примитивным элементом алгебры $\mathcal{F}(X)$, но является примитивным в любой собственной подалгебре $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{F}(X)$, содержащей его, $u \in \mathcal{H}$.

2.2 Критерии примитивности элемента в свободных алгебрах шрайеровых многообразий

Пусть $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in I\} \subseteq \mathcal{F}$. Отображение $\theta \colon S \to S' \subseteq \mathcal{F}$ называется элементарным преобразованием подмножества S, если либо θ — невырожденное линейное преобразование подмножества S, либо найдется такое $\beta \in I$, что

$\theta(s_\alpha) = s_\alpha$ для всех $\alpha \in I$, $\alpha \neq \beta$, и

$$\theta(s_\beta) = s_\beta + f(\{s_\alpha \mid \alpha \neq \beta\}),$$

где f — элемент свободной алгебры $\mathcal{F}(Y)$, $Y = \{y_i \mid i \in I\}$, в котором сделана подстановка $y_i = s_i$ для всех $i \in I$.

Любое конечное множество элементов алгебры $\mathcal{F}$ может быть приведено к редуцированному множеству с помощью конечного числа элементарных преобразований и, возможно, исключением нулевых элементов, и всякое редуцированное подмножество алгебры $\mathcal{F}$ является независимым подмножеством. Кроме того, используя метод А. Г. Куроша, можно построить редуцированное множество образующих для всякой подалгебры алгебры $\mathcal{F}$.

Ясно, что элементарные преобразования множеств свободных образующих свободной алгебры $\mathcal{F}$ индуцируют автоморфизмы алгебры $\mathcal{F}$. Такие автоморфизмы называются элементарными. Ж. Левин [37] показал, что группа автоморфизмов свободной алгебры $\mathcal{F}(X)$ конечного ранга (то есть $|X| < \infty$) шрайерова многообразия порождается элементарными автоморфизмами. Для свободных алгебр конечного ранга шрайеровых многообразий представление групп автоморфизмов в терминах образующих и определяющих соотношений было получено У. У. Умирбаевыем [57]. Дальнейшие свойства автоморфизмов свободных неассоциативных алгебр отмечены в работах [2, 24, 42]. Рангом множества $H \subset \mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ называется минимальное число свободных образующих из X, от которых может зависеть образ $\phi(H)$, где ϕ пробегает группу автоморфизмов алгебры $\mathcal{F}$ (другими словами, $\mathrm{rank}(H)$ — наименьший ранг свободного фактора алгебры $\mathcal{F}$, содержащего множество H).

Предложение 2.1. *Пусть $\mathcal{F}(X)$ — свободная алгебра с конечным множеством $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ свободных образующих, $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$ — редуцированное множество свободных образующих собственной подалгебры $\mathcal{H}$ алгебры $\mathcal{F}(X)$. Тогда:*

1. *Если элемент является примитивным в подалгебре $\mathcal{H}$, то существует свободная образующая h_i подалгебры $\mathcal{H}$, входящая линейно в его представление;*

2. *Если существует свободная образующая h_i подалгебры $\mathcal{H}$, входящая только линейно в представление элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре $\mathcal{H}$;*

3. *Если существует свободная образующая h_i подалгебры $\mathcal{H}$, такого же степени, что и сам элемент, входящая линейно в представление элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре $\mathcal{H}$;*

4. *Если существует свободная образующая h_i подалгебры $\mathcal{H}$, старшая часть которой входит только линейно в представление старшей части элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Непосредственно следует из определения примитивных элементов и элементарных автоморфизмов. $\square$

Предложение 2.2. *Любой однородный элемент $u \in \mathcal{F}(X)$ степени $d(u) \geqslant 2$ не является примитивным элементом.*

Доказательство. Поскольку для всякой свободной образующей $x \in X$ имеем, что $d(x) = 1$, то она не может входить линейно в представление однородного элемента u степени $d(u) \geqslant 2$. Значит по Предложению 2.1, элемент u не является примитивным. $\square$

Отметим свойства примитивных элементов и систем, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Предложение 2.3 ([46]). *Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_l\}$ примитивная система элементов алгебры $\mathcal{F}$, B — конечно порожденная подалгебра $\mathcal{F}$ такая, что $A \subset B$. Тогда A является примитивной системой в B.*

Лемма 2.4. *Пусть $\mathcal{F}(X)$ является свободным произведением своих собственных подалгебр A и B, $\mathcal{F}(X) = A * B$. Пусть элементы $a \in A$, $b \in B$ не являются примитивными в алгебрах A и B, соответственно. Тогда $a+b$ не является примитивным элементом в алгебре $\mathcal{F}(X)$. Если же хотя бы один из элементов a, b является примитивным в алгебре A или B, соответственно, то $a + b$ является примитивным в $\mathcal{F}(X)$.*

Доказательство. Пусть $Y = \{y_1, \ldots, y_s\}$, $Z = \{z_1, \ldots, z_t\}$, $s + t = n = |X|$, $A = \mathcal{F}(Y)$, $B = \mathcal{F}(Z)$. Предположим, что $a + b$ является примитивным элементом в алгебре $\mathcal{F}(X)$. Так как a и b не являются примитивными элементами в алгебрах A и B, соответственно, то $d_Y(a) > 1$, $d_Z(b) > 1$.

Пусть $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ множество свободных образующих $\mathcal{F}(X)$, $g_1 = a + b$. Обозначим за g'_i, $1 \leq i \leq n$, компоненту g_i, которая не зависит от элементов множества Z. Ясно, что $g'_1 = a$. Используя элементарные автоморфизмы, мы можем считать что ненулевые элементы множества $\{g'_2, \ldots, g'_n\}$ образуют редуцированное подмножество алгебры A, $d_Y(g'_i) < d_Y(g_1) = d_Y(a)$, $2 \leqslant i \leqslant n$. Так как G — множество свободных образующих алгебры $\mathcal{F}(X)$, то конечным числом элементарных автоморфизмов (с исключением нулевых элементов) мы можем привести множество $G' = \{g'_1, \dots, g'_n\}$ к множеству Y свободных образующих алгебры A. Пусть ϕ является композицией этих элементарных автоморфизмов. Если $\phi(g'_1) \neq 0$, то a является примитивным элементом в алгебре A, что приводит к противоречию с условием не примитивности a.

Если $\phi(g'_1) = 0$, то каждый одночлен $\phi(g_1)$ зависит от элементов множества Z. Мы можем считать, что $\phi(g_2)' = y_1, \dots, \phi(g_{s+1})' = y_s$. Значит, используя дополнительные элементарные автоморфизмы, мы можем считать, что $\phi(g_{s+2})' = \ldots = \phi(g_n)' = 0$. Ясно, что элементы $\phi(g_1), \phi(g_{s+2}), \dots, \phi(g_n)$ образуют алгебру B по модулю идеала алгебры $\mathcal{F}$, порожденного множеством Y. Обозначим за $\phi(g_i)''$ компоненту $\phi(g_i)$, которая не зависит от элементов множества Y. Тогда множество

$$H = \{\phi(g_1)'', \phi(g_{s+2})'', \dots, \phi(g_n)''\}$$

порождает алгебру B. Но это множество состоит из t элементов. Значит ранг алгебры B равен t и, по свойству Хопфа для свободных алгебр, H является множеством свободных образующих алгебры B. Таким образом, $\phi(g_1)''$ является примитивным элементом алгебры B. Применяя обратный автоморфизм ϕ^{-1} получаем, что $b = \phi^{-1}(\phi(g_1)'')$. Следовательно, элемент b является примитивным в B. Но элемент b не примитивный в B по условию и мы снова приходим к противоречию. Таким образом, $a + b$ не является примитивным элементом алгебры $\mathcal{F}(X)$. □

П. М. Кон [29–31] доказал (см. также Ж. Левин [38]), что свободная ассоциативная алгебра $F\langle Y\rangle$ является кольцом свободных идеалов, то есть левые (правые) идеалы свободной ассоциативной алгебры является свободными левыми (соответственно, правыми) $F\langle Y\rangle$-модулями единственного ранга. Из этого следует, что любой подмодуль левого (правого) $F\langle Y\rangle$-модуля является свободным.

Пусть $I_{\mathcal{F}}$ — свободный правый $U(\mathcal{F})$-модуль с базисом $y_1, \dots, y_n$,

$$I_{\mathcal{F}} = y_1 U(\mathcal{F}) \oplus \ldots \oplus y_n U(\mathcal{F}).$$

Линейное отображение $\mathcal{D} : \mathcal{F} \to I_{\mathcal{F}}$, заданное формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(x_i) &= y_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \mathcal{D}(ab) &= \mathcal{D}(a) r_b + \mathcal{D}(b) l_a, \end{aligned}$$

где $a, b \in \mathcal{F}$, является универсальным дифференцированием алгебры $\mathcal{F}$. Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ элемента $f \in \mathcal{F}$ однозначно определяются соот-

ношением
$$\mathcal{D}(f)=\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$
Положим
$$\partial(f)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$
Из определения следует, что $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}=\delta_{ij}$,
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)=\frac{\partial u}{\partial x_i} r_v+\frac{\partial v}{\partial x_i} l_u, \quad u, v \in \mathcal{F}.$$

Пусть $\mathcal{H}$ — подалгебра $\mathcal{F}$, $J_{\mathcal{H}}$ — подмодуль в $I_{\mathcal{F}}$, порожденный элементами $\{\mathcal{D}(h) \mid h \in \mathcal{H}\}$. Алгебра $\mathcal{F}$ обладает свойством дифференциальной отделимости для подалгебр: для любого элемента $a \in \mathcal{F}$ выполнено $a \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}(a) \in J_{\mathcal{H}}$ (см. [17]).

В работах [43,49] были доказаны следующие критерии примитивности систем элементов свободных неассоциативных алгебр, свободных (анти-) коммутативных алгебр над полем характеристики $\operatorname{char} K \neq 2$ и свободных алгебр Ли над полем характеристики $\operatorname{char} K=0$ с помощью техники дифференциального исчисления.

Теорема 2.5 ([43,49]). *Система элементов $a_1, \ldots, a_r$ алгебры $\mathcal{F}$ примитивна тогда и только тогда, когда матрица $(\partial(a_1), \ldots, \partial(a_r))$ обратима слева над $U(\mathcal{F})$. В частности, элемент a алгебры $\mathcal{F}$ является примитивным тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $m_1, \ldots, m_n \in U(\mathcal{F})$, что*
$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial a}{\partial x_i}=1.$$

Отметим, что Теорема 2.5 не верна для свободных алгебр Ли над полями положительной характеристики — в работах [7, 45] были построены серии контрпримеров.

Следствие 2.6 ([43, 49]). *Элемент a алгебры $\mathcal{F}$ является примитивным тогда и только тогда, когда стандартный базис Гребнера-Ширшова идеала M_a, порожденного элементами $\frac{\partial a}{\partial x_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, состоит только из единичного элемента.*

Предложение 2.7. *Элементы $(xx)y + x$, $(xy)y + x$ не являются примитивными в свободной неассоциативной алгебре $F(x, y)$ и свободной коммутативной алгебре $A_-(x, y)$. Элементы $[[x, y], y] + x$, $(xy)y + x$ не являются примитивными в свободной алгебре Ли $L(x, y)$ и свободной антикоммутативной алгебре $A_+(x, y)$, соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $u = (xx)y + x \in F(x, y)$. Тогда частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (xx)}{\partial x} r_y + 1 = r_x r_y + l_x r_y + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = l_{xx}$$

образуют стандартный базис Гребнера-Ширшова идеала, порожденными ими, и не совпадают с единичным элементом. Следовательно, элемент u не является примитивным в $F(x, y)$.

Аналогично показывается, что остальные элементы не примитивны в соответствующих алгебрах. □

Алгоритмы распознавания примитивных элементов на основе вышеописанных критериев были построены и реализованы в работах [15, 16, 48]. Тем не менее, техника дифференциального исчисления и критерии основанные на ней, не подходят для проверки на почти примитивность серий элементов специального вида. В следующих двух теоремах рассматриваются идеалы, порожденные одним элементом свободной алгебры, и дается нематричный критерий почти примитивности.

Теорема 2.8 (Freiheitssatz, Теорема о свободе [5, 19, 20]). *Пусть элемент $a \in \mathcal{F}(X)$ зависит от свободной образующей $x \in X$, $I(a)$ — идеал алгебры $\mathcal{F}(X)$, порожденный элементом a. Тогда $\mathcal{F}(X \setminus x) \cap I(a) = 0$.*

Теорема о свободе в теории свободных групп восходит к В. Магнусу [39]. Для свободных неассоциативных алгебр она была доказана А. И. Жуковым [5], для свободных (анти-) коммутативных алгебр и для алгебр Ли — А. И. Ширшовым [19, 20], для нешрайеровых многообразий ассоциативных алгебр над полями нулевой характеристики — Л. Г. Макар-Лимановым [40].

Теорема 2.9 ([10,25,43]). *Пусть a — ненулевой элемент свободной алгебры $\mathcal{F}(X)$, $I(a)$ — идеал порожденный элементом a. Тогда a является примитивным элементом в $\mathcal{F}(X)$, если и только если факторалгебра $\mathcal{F}(X)/I(a)$ является свободной алгеброй того же типа.*

Изначально, аналогичный результат для свободных групп был доказан Уайтхедом в [59] (см. также [12]), для свободных неассоциативных и свободных (анти-) коммутативных алгебр в [25, 43], для свободных алгебр Ли в [10]. Общий случай свободных алгебр шрайеровых многообразий рассмотрен А. А. Михалевым, И. П. Шестаковым в [41].

Докажем на основе предыдущих теорем, что элементы вида $u_f = x_1 + f(x_1, \ldots, x_n)$, где $d(f) \geqslant 2$ и всякий одночлен элемента f зависит от x_1, не являются примитивными элементами в свободной алгебре $\mathcal{F}(X)$ с множеством $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ свободных образующих.

Лемма 2.10. *Пусть $I(u_f) \subset \mathcal{F}(X)$ — идеал порожденный элементом $u_f = x_1 + f(x_1, \ldots, x_n)$, где $f \in \mathcal{F}(X)$ — элемент степени $d(f) \geqslant 2$ и всякий одночлен элемента f зависит от x_1. Тогда $x_1 \notin I(u_f)$ и также $x_2, \ldots, x_n \notin I(u_f)$.*

Доказательство. По Теореме 2.8 имеем, что $\mathcal{F}(X \setminus x_1) \cap I(u_f) = 0$, значит $x_2, \ldots, x_n \notin I(u_f)$, так как $x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{F}(X \setminus x_1)$. Если существует такая свободная образующая x_i, $i > 1$, что элемент f зависит от x_i, то аналогично получаем, что $\mathcal{F}(X \setminus x_i) \cap I(u_f) = 0$, $x_1 \in \mathcal{F}(X \setminus x_i)$, а значит $x_1 \notin I(u_f)$. Остается случай, когда элемент $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1)$ степени $d(f) \geqslant 2$ зависит только от x_1. Тогда элемент $u_f = x_1 + f(x_1)$ зависит только от x_1 и имеет степень $d(u_f) \geqslant 2$, а значит $x_1 \notin I(u_f)$. □

Лемма 2.11. *Пусть система элементов $a_1, \ldots, a_k$ свободной алгебры $\mathcal{F}(X)$ имеет ранг $\operatorname{rank}\{a_1, \ldots, a_k\} = k < n = |X|$. Тогда для любого ненулевого неассоциативного многочлена g имеем, что*

$$g(a_1, \ldots, a_k) \neq 0.$$

Доказательство. Используя метод Куроша, мы можем привести множество $\{a_1, \ldots, a_k\}$ к редуцированному множеству $\{b_1, \ldots, b_k\}$ без исключения нулевых элементов, так как $\operatorname{rank}\{a_1, \ldots, a_k\} = k$. Тогда $A = \operatorname{alg}\{a_1, \ldots, a_k\}$ является свободной подалгеброй в $\mathcal{F}(X)$ с множеством $\{b_1, \ldots, b_k\}$ свободных образующих и $\varphi(a_i) = b_i$ является автоморфизмом. Если $g(a_1, \ldots, a_k) = 0$ для некоторого неассоциативного многочлена g, то

$$g(b_1, \ldots, b_k) = g(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)) = \varphi(g(a_1, \ldots, a_k)) = 0.$$

Но $\{b_1, \ldots, b_k\}$ является редуцированным множеством свободных образующих. Получаем противоречие. □

Предложение 2.12. *Элемент $u_f = x_1 + f(x_1, \ldots, x_n)$, где f является элементом степени $d(f) \geqslant 2$ и всякий одночлен элемента f зависит от x_1, не является примитивным элементом в свободной алгебре $\mathcal{F}(X)$.*

Доказательство. Предположим, что элемент u_f является примитивным в $\mathcal{F}(X)$, тогда по Теореме 2.9 факторалгебра $F(X)/I(u_f)$ является свободной алгеброй того же типа и ранга $n-1$ Пусть $\{h_2 + I(u_f), \ldots, h_n + I(u_f)\}$ — множество свободных образующих алгебры $F(X)/I(u_f)$. Так как $x_2, \ldots, x_n \in F(X)/I(u_f)$, то существуют такие многочлены $f_2, \ldots, f_n$, $i = 2, \ldots, n$, что

$$f_i(h_2 + I(u_f), \ldots, h_n + I(u_f)) = x_i + I(u_f) \Leftrightarrow f_i(h_2, \ldots, h_n) = x_i + I(u_f).$$

Следовательно, линейная компонента f_i^1 каждого многочлена f_i равна нулю и если обозначить за h_i^1 линейную компоненту элемента h_i, то $f_i^1(h_2^1, \ldots, h_n^1) = x_i$ для любого элемента h_i^1, содержащего по крайней мере один x_j с $j \neq 1$ в качестве линейного слагаемого. Для элемента $v \in F(X)$ обозначим за $v^{\bar{x}_1}$ сумму тех одночленов из представления элемента v, которые не зависят от x_1. Имеем, что $f_i^1((h_2^1)^{\bar{x}_1}, \ldots, (h_n^1)^{\bar{x}_1}) = x_i$, $(h_2^1)^{\bar{x}_1}, \ldots, (h_n^1)^{\bar{x}_1}$ являются линейно независимыми и $\mathrm{rank}\{h_2^{\bar{x}_1}, \ldots, h_n^{\bar{x}_1}\} = n-1$.

С другой стороны, по Лемме 2.10 имеем, что $x_1 + I(u_f) \in F(X)/I(u_f)$, то есть существую такой ненулевой многочлен g, что

$$g(h_2, \ldots, h_n) = x_1 + I(u_f),$$

следовательно $g(h_2^{\bar{x}_1}, \ldots, h_n^{\bar{x}_1}) = 0$, что противоречит Лемме 2.11. $\square$

2.3 Ранг примитивности и его свойства

Пусть K — поле характеристики $\mathrm{char}\, K \neq 2$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathcal{F}(X)$ — свободная алгебра из рассматриваемых выше.

В статье Д. Пудера [51] было дано определение ранга примитивности для элементов и конечно порожденных подгрупп свободной группы $\mathbf{F}_k$ с k образующими. Дадим аналогичное определение ранга примитивности для элементов свободной алгебры шрайерова многообразия $\mathcal{F}(X)$.

Определение 2.13. Рангом примитивности элемента $w \in \mathcal{F}(X)$ называется

$$\pi(w) = \min\left\{\mathrm{rank}(H) \mid w \in H \subset \mathcal{F}(X) \text{ и } w \text{ не является примитивным в } H\right\}.$$

Если не существует ни одной такой подалгебры H, то $\pi(w) = \infty$ (считаем дальше, что $\infty + k = \infty + \infty = k + \infty = \infty$ и $k < \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$.). Подалгебру H, на которой достигается минимум, будем называть w-критической.

Предложение 2.14. *Для ранга примитивности $\pi(w)$ верны следующие утверждения:*

- $\pi(w) = 1 \Leftrightarrow w \in \mathrm{alg}\{v\}$ *для некоторого* $v \in \mathcal{F}(X)$ *и* $d_{\{v\}}(w) > 1$*;*
- $\pi(w) = \infty \Leftrightarrow w$ *является примитивным элементом в* $\mathcal{F}(X)$*;*
- *Если w не является примитивным в $\mathcal{F}(X)$, то* $\pi(w) \leqslant \mathrm{rank}(w) \leqslant |X|$*;*
- $\pi(w) \in \{1, \ldots, |X|, \infty\}$*;*
- *Если подалгебры $A_1, A_2 \subset \mathcal{F}(X)$ такие, что $w \in A_1 \subset A_2$, то $\pi_{A_1}(w) \geqslant \pi_{A_2}(w)$. Более того, если подалгебра A_1 является w-критической в $\mathcal{F}(X)$, то $\pi_{A_1}(w) = \pi_{A_2}(w) = \pi_{\mathcal{F}(X)}(w)$.*

Доказательство.

1. Ясно, что $H = \mathrm{alg}\{v\}$ является w-критической подалгеброй для любого $w \in \mathrm{alg}\{v\}$ с $d_{\{v\}}(w) > 1$. С другой стороны, если H является w-критической и $\mathrm{rank}(H) = 1$, то $H = \mathrm{alg}\{v\}$ для некоторого элемента v и не примитивный элемент $w \in \mathrm{alg}\{v\}$ имеет вес $d_{\{v\}}(w) > 1$.

2. Как следует из Предложения 2.3, если элемент является примитивным в $\mathcal{F}(X)$, то тогда он является примитивным в любой конечно порожденной подалгебре, его содержащей.

3. Предположим, что w не является примитивным элементом в $\mathcal{F}(X)$ и $\mathrm{rank}(w) = k$, тогда существует такое множество $\{y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n\}$ свободных образующих $\mathcal{F}(X)$, что $w \in \mathcal{F}(y_1, \ldots, y_k)$ и w не является примитивным элементом в подалгебре $\mathcal{F}(y_1, \ldots, y_k) \subset \mathcal{F}(X)$. Следовательно $\pi(w) \leqslant \mathrm{rank}(\mathcal{F}(y_1, \ldots, y_k)) = \mathrm{rank}(w) = k \leqslant |X|$.

4. Следует из предыдущих утверждений.

5. Следует из определения ранга примитивности.

□

Лемма 2.15. *Пусть $u \in \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n, y)$, тогда $\pi_{\mathcal{F}_1}(u) = \pi_{\mathcal{F}_0}(u)$.*

Доказательство. Если u является примитивным элементом алгебры $\mathcal{F}_0$, тогда u является примитивным элементом алгебры $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 * F(y)$; если u является примитивным элементом алгебры $\mathcal{F}_1$ и $u \in \mathcal{F}_0$, то u является примитивным элементом в F_0 согласно Предложению 2.3. Предположим, что u

не примитивный элемент алгебр $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$, $J \subset \mathcal{F}_0$ является u-критической подалгеброй для $u \in \mathcal{F}_0$, то есть u не примитивен в J и $\operatorname{rank}(J) = \pi_{\mathcal{F}_0}(u)$. Тогда подалгебра $J \subset F_1$ является u-критической для $u \in \mathcal{F}_1$, следовательно $\pi_{\mathcal{F}_1}(u) \leqslant \operatorname{rank}(J) = \pi_{\mathcal{F}_0}(u)$.

Обозначим через $t = h\Big|_{\mathcal{F}_0}$ проекцию элемента $h \in \mathcal{F}_1$ на линейное пространство $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$, то есть линейную комбинацию тех одночленов h, которые зависят только от $x_1, \ldots, x_n$. Тогда все одночлены элемента $g = h - t$ зависят от y. Рассмотрим весовую функцию $d(u)$ — степень (длину) элемента u (то есть $d(x_1) = \ldots = d(x_n) = d(y) = 1$) и новую весовую функцию $\mu(u)$ такую, что $\mu(x_i) = d(x_i) = 1$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\mu(y) = 1 + d(u)$.

Предположим, что $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_1$ является u-критической подалгеброй с редуцированным множеством образующих $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$ относительно весовой функции μ (его можно получить после редукции относительно весовой функции μ любого редуцированного множества свободных образующих относительно d). Так как $u \in \mathcal{H}$ и $\mathcal{H}$ является u-критической, то u не является примитивным элементом $\mathcal{H}$ и u зависит от всех $h_i \in H$. Если какая-либо свободная образующая h_i зависит от y, то тогда $\mu(h_i) \geqslant \mu(y) > \mu(u)$, и следовательно u не зависит от свободной образующей h_i. Значит любой элемент h_i не зависит от y, то есть $h_i \in \mathcal{F}_0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$. Но тогда $\mathcal{H}$ является подалгеброй $\mathcal{F}_0$ и u не примитивен в $\mathcal{H}$, таким образом $\pi_{\mathcal{F}_1}(u) = \operatorname{rank}(\mathcal{H}) \geqslant \pi_{\mathcal{F}_0}(u)$. Так как $\pi_{\mathcal{F}_1}(u) \leqslant \pi_{\mathcal{F}_0}(u)$, получаем, что $\pi_{\mathcal{F}_1}(u) = \pi_{\mathcal{F}_0}(u)$. $\square$

Следствие 2.16. *Пусть элемент*

$$u \in \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Тогда $\pi_{\mathcal{F}_1}(u) = \pi_{\mathcal{F}_0}(u)$.

Лемма 2.17. *Пусть $\mathcal{F}(X)$ является свободным произведением двух собственных подалгебр A и B, $\mathcal{F}(X) = A * B$, элементы $a \in A$, $b \in B$ не являются примитивными в этих подалгебрах. Пусть $a + b \in \mathcal{H} \subset \mathcal{F}(X)$ и $a + b$ не является примитивным элементом в подалгебре $\mathcal{H}$. Тогда $a, b \in \mathcal{H}$.*

Доказательство. Пусть $A = \mathcal{F}(Y)$, $B = \mathcal{F}(Z)$, $Y = \{y_1, \ldots, y_s\}$, $Z = \{z_1, \ldots, z_t\}$. Если $a \notin \mathcal{H}$ то обозначим через $\mathcal{H}'$ подалгебру $F(X)$, порожденную подалгеброй $\mathcal{H}$ и элементом a. Мы можем считать, что $\mathcal{H}'$ является конечно порожденной подалгеброй. Используя метод Куроша построения множества свободных образующих для свободных подалгебр (см. [11, 21, 22, 26, 27, 48]), мы можем построить такое множество V свободных образующих подалгебры $\mathcal{H}'$, что $a \in V$ и $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'_1 * \mathcal{H}'_2 * \mathcal{H}'_3$, где $\mathcal{H}'_1$ является подалгеброй всех элементов $\mathcal{H}'$, которые не зависят от Z, H_2' — подалгеброй всех элементов $\mathcal{H}'$, не зависящих от Y, а $\mathcal{H}_3'$ является некоторой конечно порожденной подалгеброй (возможно, $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_1' * \mathcal{H}_2'$). $\mathcal{H}_1'$ и $\mathcal{H}_2'$ являются подалгебрами A и B, соответственно, и поскольку $a \in \mathcal{H}_1'$, то $b \in \mathcal{H}_2'$. Так как a является примитивным элементом $\mathcal{H}'$, то a примитивный элемент и подалгебры $\mathcal{H}_1'$ по Предложению 2.3 и следовательно $a + b$ является примитивным элементом $\mathcal{H}'$ по Предложению 2.4. Применив еще раз Предложение 2.3, имеем, что элемент $a + b$ является примитивным элементом подалгебры $\mathcal{H}$. Получаем противоречие. □

Лемма 2.18. *Пусть $\mathcal{F}(X)$ является свободным произведение двух собственных подалгебр A и B, $\mathcal{F}(X) = A * B$, элементы $a \in A$, $b \in B$. Тогда $\pi_{\mathcal{F}(X)}(a + b) \leqslant \pi_A(a) + \pi_B(b)$.*

Доказательство. Ясно, что если элемент a или b является примитивным, в соответствующей подалгебре, то $a + b$ является примитивным в $\mathcal{F}$, следовательно $\pi_F(a+b) = \infty = \pi_A(a)+\pi_B(b)$. Если a и b не примитивные элементы A и B, соответственно, то существуют a-критическая подалгебра $\mathcal{H}_A \subset A$ для элемента $a \in A$ и b-критическая подалгебра $\mathcal{H}_B \subset B$ для элемента $b \in B$. Рассмотрим подалгебру $H = H_A * H_B \subset A * B$, тогда $a + b \in H$. По Предложению 2.4, элемент $a + b$ не является примитивным в H, следовательно $\pi_{F(X)}(a + b) \leqslant \mathrm{rank}(H) = \mathrm{rank}(H_A) + \mathrm{rank}(H_B) = \pi_A(a) + \pi_B(b)$. □

Лемма 2.19. *Пусть $\mathcal{F}(X)$ является свободным произведением двух собственных подалгебр A и B, $\mathcal{F}(X) = A * B$, элементы a и b не примитивны в A и B, соответственно, $\mathcal{H}$ является такой $(a+b)$-критической подалгеброй в $\mathcal{F}(X)$, что $a, b \in \mathcal{H}$. Тогда $\pi_{F(X)}(a + b) = \pi_A(a) + \pi_B(b)$ и существуют такие a-критическая подалгебра $\mathcal{H}_A$ в A и b-критическая подалгебра $\mathcal{H}_B$ в B, что $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A * \mathcal{H}_B$.*

Доказательство. Пусть $A = \mathcal{F}(Y)$, $B = \mathcal{F}(Z)$, $Y = \{y_1, \ldots, y_s\}$, $Z = \{z_1, \ldots, z_t\}$. Будем считать, что $\mathcal{H}$ является конечно порожденной подалгеброй и, по аналогии с предыдущим утверждением, что $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2 * \mathcal{H}_3$, где $\mathcal{H}_1$ — подалгебра всех элементов $\mathcal{H}$, не зависящих от Z, $\mathcal{H}_2$ — подалгебра всех элементов $\mathcal{H}$, не зависящих от Y, а $\mathcal{H}_3$ некоторая конечно порожденная подалгебра (возможно, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$). Значит $a \in \mathcal{H}_1$, $b \in \mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ — подалгебры A, B, соответственно. Если $a \in \mathcal{H}_1$ или $b \in \mathcal{H}_2$ является примитивным элементом в $\mathcal{H}_1$ или $\mathcal{H}_2$, соответственно, то тогда $a + b$ является примитивным в $\mathcal{H}$, что противоречит $(a + b)$-критичности подалгебры $\mathcal{H}$. Следовательно $\mathrm{rank}(\mathcal{H}_1) \geqslant \pi_A(a)$, $\mathrm{rank}(\mathcal{H}_2) \geqslant \pi_B(b)$ и $\mathrm{rank}(\mathcal{H}) = \mathrm{rank}(\mathcal{H}_1) + \mathrm{rank}(\mathcal{H}_2) +$

$\mathrm{rank}(\mathcal{H}_3) \geqslant \pi_A(a) + \pi_B(b) + \mathrm{rank}(\mathcal{H}_3)$. С другой стороны, так как подалгебра $\mathcal{H}$ является $(a+b)$-критической, имеем, что $\pi_A(a) + \pi_B(b) \geqslant \pi_{\mathcal{F}(X)}(a+b) = \mathrm{rank}(\mathcal{H})$ по Лемме 2.18. Следовательно $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$, $\mathrm{rank}(\mathcal{H}_1) = \pi_A(a)$ (то есть подалгебра $\mathcal{H}_1$ является a-критической в A), $\mathrm{rank}(\mathcal{H}_2) = \pi_A(a)$ (то есть подалгебра $\mathcal{H}_2$ является b-критической в B) и $\pi_{\mathcal{F}(X)}(a+b) = \pi_A(a)+\pi_B(b)$. $\square$

Теорема 2.20. *Пусть $\mathcal{F}(X)$ является свободным произведением двух собственных подалгебр A и B, $\mathcal{F}(X) = A * B$, элементы $a \in A$, $b \in B$. Тогда $\pi_{\mathcal{F}(X)}(a+b) = \pi_A(a) + \pi_B(b)$.*

Доказательство. По Предложению 2.4 если элементы a и b не примитивные в подалгебрах A и B, соответственно, то тогда $a+b$ не примитивен в $\mathcal{F}(X)$. Пусть подалгебра $\mathcal{H}$ является $(a+b)$-критической в $\mathcal{F}(X)$, тогда элемент $a+b$ не примитивен в $\mathcal{H}$. По Лемме 2.17 имеем $a, b \in H$. Тогда по Лемме 2.19 получаем, что $\pi_{F(X)}(a+b) = \pi_A(a) + \pi_B(b)$.

Если a или b является примитивным элементом, то и элемент $a+b$ примитивен в $\mathcal{F}(X)$ по Предложению 2.4 и $\pi_A(a)+\pi_B(b) = \infty = \pi_{F(X)}(a+b)$. $\square$

3 Почти примитивные элементы

3.1 Случай свободной неассоциативной алгебры малого ранга

Предложение 3.1. *Элемент $u \in F(x)$ является примитивным элементом алгебры $F(x)$ тогда и только тогда, когда $d(u) = 1$.*

Доказательство. Следует из Теоремы 2.5. □

Предложение 3.2. *Пусть K — поле, $F(x)$ — свободная неассоциативная алгебра над полем K с одной свободной образующей x. Тогда*

1. *Всякий элемент $u \in F(x)$ степени два является почти примитивным элементом.*

2. *Всякий элемент $u \in F(x)$ степени три является почти примитивным элементом.*

Доказательство. Пусть элемент u из пунктов 1 или 2 принадлежит конечно порожденной подалгебре $\mathcal{H} \subseteq F(x)$, $H = \{h_1, \dots, h_k\}$ — редуцированное множество свободных образующих подалгебры $\mathcal{H}$. По Предложению 3.1 элемент u не является примитивным элементом алгебры $F(x)$.

1. Поскольку $d(u) = 2$, то $u^\circ = xx$. Если в u° входит линейно старшая часть h_i° какой-нибудь образующей $h_i, 1 \leqslant i \leqslant k$, то, по Предложению 2.1, элемент u является примитивным элементом подалгебры $\mathcal{H}$. В противном случае, мы можем предполагать, что $u^\circ = h_1^\circ h_2^\circ$, то есть $h_1^\circ = x$, значит $h_1 = x$. Следовательно, $\mathcal{H} = F(x)$ и $\mathcal{H}$ не является собственной подалгеброй в $F(x)$.

2. Поскольку $d(u) = 3$, то $u^\circ = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, где $u_1 = x(xx)$, $u_2 = (xx)x$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ отличен от нуля. Если в u° входит линейно какая-нибудь старшая часть образующей $h_i^\circ, 1 \leqslant i \leqslant k$, то, по Предложению 2.1, элемент u является примитивным элементом подалгебры $\mathcal{H}$. Иначе элемент u° принадлежит подалгебре, порожденной элементами x и xx. Следовательно, $\mathcal{H} = F(x)$ и H не является собственной подалгеброй алгебры $F(x)$.

□

Теорема 3.3. *Однородный элемент $u \in F(x)$ степени $d(u) = m \geqslant 2$ является почти примитивным элементом тогда и только тогда, когда в разложение $u = u(x)$ входит одночлен вида $x \cdot A(x)$ или вида $B(x) \cdot x$, где $A(x)$, $B(x)$ — одночлены степени $d(A) = d(B) = m - 1$.*

Доказательство. Пусть однородный элемент u степени $d(u) = m \geqslant 2$ почти примитивен. Если никакой одночлен вида $x \cdot A(x)$ или вида $B(x) \cdot x$, где A, B — одночлены степени $d(A) = d(B) = m - 1$, не входит в разложение u, то имеет место равенство

$$u = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j A_j B_j,$$

где (A_j, B_j) — различные пары регулярных одночленов степени больше единицы и $d(A_j) + d(B_j) = m$. Тогда u не является примитивным элементом в собственной подалгебре

$$\mathcal{H} = \operatorname{alg}\left\{\bigcup_j \{A_j, B_j\}\right\}.$$

Действительно, приводя множество $\bigcup_j \{A_j, B_j\}$ к редуцированному множеству M, имеем $d(h) < d(u)$ для всех $h \in M$. Следовательно, старшая часть никакой свободной образующей подалгебры $\mathcal{H}$ не входит линейно в представление элемента u. По Предположению 2.1, u не является примитивным элементом подалгебры $\mathcal{H}$.

С другой стороны, если элемент $u \in \mathcal{H} = \operatorname{alg}\{h_1, \ldots, h_k\} \subsetneq F(x)$ содержит, без ограничения общности, одночлен вида $x \cdot A(x)$ и старшая часть h_i° никакой свободной образующей $h_i, 1 \leqslant i \leqslant k$, не входит линейно в разложение u, то, в виду скобочной структуры, имеет место равенство $x \cdot A(x) = h_1^\circ \cdot f(h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ)$, то есть $x = h_1^\circ$, значит $h_1 = x$. Следовательно $\mathcal{H} = F(x)$ и $\mathcal{H}$ не является собственной подалгеброй в $F(x)$. □

Следствие 3.4. *Существует алгоритм, распознающий почти примитивность однородного элемента $u \in F(x)$.*

Доказательство. Если $d(u) = 2, 3$, то, по Предложению 3.2, элемент u является почти примитивным. Если $d(u) > 3$, то записываем элемент u как линейную комбинацию базисных одночленов и проверяем наличие слагаемого вида $x \cdot A(x)$ или $B(x) \cdot x$. □

Следствие 3.5. *Пусть K — поле, $\operatorname{char} K = p > 0$, $|K| = p^n$. Количество однородных почти примитивных элементов степени $d = m \geqslant 3$ в $F(x)$ равно*

$$\#\mathrm{APE}(h, m, F(x)) = (p^n)^{2C(m-2)} - 1,$$

где $C(m)$ — число Каталана — количество различных способов расставить неассоциативно скобки на ассоциативном слове $x_0 x_1 \dots x_m$.

Доказательство. Действительно, по Теореме 3.3 необходимо и достаточно, чтобы в разложение элемента u степени $d(u) = m \geqslant 3$ входил одночлен вида $x \cdot A(x)$ или вида $B(x) \cdot x$, которых ровно $2C(m-2)$ штук. $\square$

Следствие 3.6. *Пусть K поле, $|K| = p^n$. Отношение числа однородных почти примитивных элементов степени $m \geqslant 3$ ко всем однородным элементам степени $m \geqslant 3$ алгебры $F(x)$ равно*

$$\mathfrak{D}(m) = \frac{(p^n)^{2C(m-2)} - 1}{(p^n)^{C(m-1)} - 1} \sim \frac{1}{p^{n\left(\frac{2^{2m-3}}{\sqrt{\pi} m^{3/2}}\right)}}$$

Доказательство. Непосредственно следует из асимптотической оценки для m-го числа Каталана

$$C(m) \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi} m^{3/2}}$$

$\square$

Предложение 3.7. *Пусть $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$. Тогда элемент $u_{k,l}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^k(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^l$ является почти примитивным элементом алгебры $F(x,y)$.*

Доказательство. Напомним, что $(\operatorname{ad} u)(v) = uv$, $(v)(\operatorname{Ad} u) = vu$. Пусть, без ограничения общности, $k > l$. В этом случае $u^\circ_{k,l}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^k(y)$. Пусть $H = \{h_1, \dots, h_m\}$ — редуцированное множество свободных образующих собственной подалгебры $u \in \mathcal{H} \subsetneq F(x,y)$. Если в представление старшей части u° входит линейно h°_i для некоторого i, то элемент u примитивен в подалгебре $\mathcal{H}$, в противном случае $x \in \mathcal{H}$. В последнем случае рассмотрим такую весовую функцию μ, что $\mu(x) = 1$, $\mu(y) = N > k$. Пусть $\{h'_1, \dots, h'_m\}$ — редуцированное множество свободных образующих подалгебры $\mathcal{H}$ относительно весовой функции μ. Тогда старшая часть элемента u относительно весовой функции μ равна $(x)(\operatorname{Ad} y)^l$, и аналогично получаем или примитивность элемента u в подалгебре $\mathcal{H}$, или $y \in \mathcal{H}$. Во втором случае $x, y \in \mathcal{H}$, значит, $\mathcal{H} = F(x,y)$, что противоречит тому, что подалгебра $\mathcal{H}$ собственная. $\square$

Предложение 3.8. *Пусть K — поле, $F(x,y)$ — свободная неассоциативная алгебра над полем K со свободными образующими x, y. Тогда:*

1. *Однородный элемент* $u \in F(x,y)$ *степени два является почти примитивным элементом тогда и только тогда, когда он не является “квадратом”, то есть не имеет место представление* $u = \alpha zz$, *где* $z \in F(x,y)$, $d(z) = 1$, $0 \neq \alpha \in K$.

2. *Элемент* $u \in F(x,y)$ *степени два, не являющийся примитивным, является почти примитивным элементом тогда и только тогда, когда не представляется в виде многочлена второй степени от элемента алгебры единичного степени, то есть не имеет место представление* $u = \alpha zz + \beta z$, *где элемент* $z \in F(x,y)$, $d(z) = 1$, $0 \neq \alpha \in K$, $\beta \in K$. *Это условие эквивалентно тому, что* $\operatorname{rank}(u) = 2$.

3. *Однородный элемент* $u \in F(x,y)$ *степени 3 является почти примитивным тогда и только тогда, когда не имеет место представление* $u = \alpha zA + \beta Bz$, *где* $z \in F(x,y)$, $d(z) = 1$, *однородные элементы* $A, B \in F(x,y)$ *степени* $d(A) = d(B) = 2$, *и хотя бы один из коэффициентов* $\alpha, \beta \in K$ *отличен от нуля.*

4. *Однородный элемент* $u \in F(x,y)$ *степени* $d(u) = m > 3$ *является почти примитивным тогда и только тогда, когда не имеет место представление*
$$u = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j A_j B_j + \alpha zC + \beta Dz,$$
где (A_j, B_j) *— различные пары одночленов степени* $d(A_j) \geqslant 2$, $d(B_j) \geqslant 2$, $d(A_j) + d(B_j) = m$, C, D *— однородные элементы степени* $d(C) = d(D) = m - 1$, z *— элемент степени* $d(z) = 1$ *и хотя бы один из коэффициентов* $\lambda_j, \alpha, \beta \in K$ *отличен от нуля.*

5. *Всякий однородный элемент* $u \in F(x,y)$ *степени* $d(u) = m \geqslant 3$ *имеет следующее представление:*
$$u = u(x,y) = \sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j \Phi_j \Psi_j + \\ + \big(\gamma_{(x,\lambda)} x \Lambda_x + \gamma_{(y,\lambda)} y \Lambda_y + \gamma_{(\eta,x)} N_x x + \gamma_{(\eta,y)} N_y y\big) = u_{\Phi\Psi} + \widetilde{u}, \quad (1)$$
где
$$u_{\Phi\Psi} = \sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j \Phi_j \Psi_j, \quad \widetilde{u} = \gamma_{(x,\lambda)} x \Lambda_x + \gamma_{(y,\lambda)} y \Lambda_y + \gamma_{(\eta,x)} N_x x + \gamma_{(\eta,y)} N_y y$$
(в случае $d(u) = 3$ *предполагаем, что* $u_{\Phi\Psi} = 0$, $\widetilde{u} = u$*),* $(\Phi_j(x,y), \Psi_j(x,y))$ *— различные пары одночленов степени* $d(\Phi_j) \geqslant 2$, $d(\Psi_j) \geqslant 2$,

$d(\Phi_j) + d(\Psi_j) = m$, $\Lambda_x, \Lambda_y, N_x, N_y$ — однородные элементы степени $d(\Lambda_x) = d(\Lambda_y) = d(N_x) = d(N_y) = m-1$, коэффициенты $\gamma_j, \gamma_{(x,\lambda)}, \gamma_{(y,\lambda)}$, $\gamma_{(\eta,x)}, \gamma_{(\eta,y)} \in K$. Тогда почти примитивность элемента u в алгебре $F(x,y)$ эквивалентна почти примитивности элемента $\widetilde{u}$ в алгебре $F(x,y)$.

Доказательство. Пусть элемент u из пунктов $1-5$ принадлежит конечно порожденной подалгебре $\mathcal{H} \subseteq F(x)$, $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$ — редуцированное множество свободных образующих подалгебры $\mathcal{H}$. Обозначим через H_ν множество образующих подалгебры $\mathcal{H}$ степени ν, то есть $H_\nu = \{h_i \mid d(h_i) = d(h_i^\circ) = \nu\} \subset H$.

1. Пусть элемент u не является примитивным в $\mathcal{H}$, тогда никакой элемент h_i° не входит линейно в представление элемента u°. Так как $d(u) = 2$ и элемент u однородный, то имеет место следующее представление элемента u через элементы единичной степени:

   $$u = u^\circ = \sum_{\substack{h_i, h_j \in H_1 \\ \lambda_{ij} \neq 0}} \lambda_{ij} h_i h_j.$$

   Тогда, если $|H_1| \geqslant 2$, то ввиду редуцированности множества свободных образующих, из любых двух различных свободных образующих $h_{i_1}, h_{i_2} \in H_1$, можно получить $\{x, y\}$, значит $\mathcal{H} = \mathrm{alg}\{h_1, \ldots, h_k\} = \mathrm{alg}\{x, y\} = F(x,y)$ не является собственной подалгеброй. Остается случай $|H_1| = 1$, в котором элемент u имеет вид $u = \gamma_{i_1 i_1} h_{i_1} h_{i_1}$, где $H_1 = \{h_{i_1}\}$, $d(h_{i_1}) = 1$, $0 \neq \gamma_{i_1 i_1} \in K$.

   С другой стороны, элемент $\alpha z z$, где z — элемент степени $d(z) = 1$, $0 \neq \alpha \in K$, не примитивен в подалгебре $\mathcal{H} = \mathrm{alg}\{z\} \subsetneq F(x,y)$ по Предложению 3.1.

2. Пусть элемент u не является примитивным в $\mathcal{H}$, тогда никакой элемент h_i° не входит линейно в представление старшей части u°. Так как $d(u) = 2$, то имеет место представления элемента u через элементы единичного степени:

   $$u = \sum_{\substack{h_i, h_j \in H_1 \\ \lambda_{ij} \neq 0}} \lambda_{ij} h_i h_j + \sum_{\substack{h_t \in H_1 \\ \beta_t \neq 0}} \eta_t h_t.$$

   Тогда при $|H_1| \geqslant 2$ подалгебра $\mathcal{H}$ не является собственной, а при $|H_1| = 1$ элемент u имеет вид $u = \lambda_{i_1 i_1} h_{i_1} h_{i_1} + \eta_{i_1} h_{i_1}$, где $H_1 = \{h_{i_1}\}$, $d(h_1) = 1$, $0 \neq \lambda_{i_1 i_1} \in K$, $\eta_{i_1} \in K$, и не является примитивным в $\mathcal{H}$.

С другой стороны, элемент $u = \alpha zz + \beta z$, $d(z) = 1$, $0 \neq \alpha \in K$, $\beta \in K$ не является примитивным в подалгебре $\mathcal{H} = \mathrm{alg}\{z\} \subsetneq F(x,y)$ по Предложению 3.1, поскольку $d(u) = 2$.

Заметим, что элемент u не имеет вид $u = \alpha zz + \beta z$, $d(z) = 1$, $0 \neq \alpha \in K$, $\beta \in K$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank}(u) = 2$. Так как элемент $u \in F(x,y)$, то $\mathrm{rank}(u) \leqslant 2$, значит элемент $u \in F(x,y)$ степени два, не являющийся примитивным, является почти примитивным, тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank}(u) = 2$.

3. Пусть однородный элемент u не является примитивным в $\mathcal{H}$, тогда никакая старшая часть h_i° не входит линейно в представление u°. Так как $d(u^\circ) = 3$ и $|H_1| = 1$ (при $|H_1| \geqslant 2$ подалгебра $\mathcal{H}$ совпадает с алгеброй $F(x,y)$ и, тем самым, не является собственной подалгеброй), имеем:

$$u = u^\circ = \lambda_1(h_{i_1}h_{i_1})h_{i_1} + \lambda_2 h_{i_1}(h_{i_1}h_{i_1}) + \sum_{\substack{h_t \in H_2 \\ \eta_{t,i_1} \neq 0}} \eta_{t,i_1} h_t^\circ h_{i_1} + \sum_{\substack{h_t \in H_2 \\ \eta_{i_1,t} \neq 0}} \eta_{i_1,t} h_{i_1} h_t^\circ,$$

где $H_1 = \{h_{i_1}\}$ и хотя бы один из коэффициентов $\eta_{t,i_1}, \eta_{i_1,t}, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ отличен от нуля. Тогда элемент u имеет вид

$$u = u^\circ = h_{i_1}\left(\lambda_2(h_{i_1}h_{i_1}) + \sum_{\substack{t \in H_2 \\ \eta_{i_1,t} \neq 0}} \eta_{i_1,t} h_t^\circ\right) + \left(\lambda_1(h_{i_1}h_{i_1}) + \sum_{\substack{t \in H_2 \\ \eta_{t,i_1} \neq 0}} \eta_{t,i_1} h_t^\circ\right)h_{i_1} =$$
$$= h_{i_1}A^\star + B^\star h_{i_1},$$

где
$$A^\star = \lambda_2 h_{i_1}^2 + \sum_{\substack{H_t \in H_2 \\ \eta_{i_1,t} \neq 0}} \eta_{i_1,t} h_t^\circ, \quad B^\star = \lambda_1 h_{i_1}^2 + \sum_{\substack{t \in H_2 \\ \eta_{t,i_1} \neq 0}} \eta_{t,i_1} h_t^\circ h_{i_1},$$

элемент $h_{i_1} = h_{i_1}^\circ$ степени $d(h_{i_1}) = 1$, $A^\star, B^\star$ — однородные элементы степени два или нулевые, причем хотя бы один из них отличен от нуля.

С другой стороны, элемент $u = \alpha zA + \beta Bz$, где z — элемент степени $d(z) = 1$, A, B — однородные элементы степени $d(A) = d(B) = 2$, и хотя бы один из коэффициентов $\alpha, \beta \in K$ отличен от нуля, не является примитивным в подалгебре $\mathcal{H} = \mathrm{alg}\{z, A, B\} \subsetneq F(x,y)$ по Предложению 2.1.

4. Пусть однородный элемент u не является примитивным в $\mathcal{H}$, тогда никакая старшая часть h_i° не входит линейно в представление u°. Так как $d(u^\circ) = d(u) = m \geqslant 3$ и $|H_1| = 1$ (при $|H_1| \geqslant 2$, подалгебра $\mathcal{H}$ совпадает

с алгеброй $F(x,y)$ и не является собственной подалгеброй), то элемент u имеет вид

$$u = u^{\circ} = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j A_j^{\star}(h_1, \dots, h_k) B_j^{\star}(h_1, \dots, h_k) + \\ + \eta_{i_1,c} h_{i_1} C^{\star}(h_1, \dots, h_k) + \eta_{d,i_1} D^{\star}(h_1, \dots, h_k) h_{i_1} = \\ = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j A_j^{\star} B_j^{\star} + \eta_{i_1,c} h_{i_1} C^{\star} + \eta_{d,i_1} D^{\star} h_{i_1},$$

где $H_1 = \{h_{i_1}\}$, $(A_j^{\star}, B_j^{\star})$ — различные пары одночленов алгебры $F(x,y)$ степени $d(A_j^{\star}) \geqslant 2$, $d(B_j^{\star}) \geqslant 2$, $d(A_j^{\star}) + d(B_j^{\star}) = m$, $C^{\star}, D^{\star}$ — однородные элементы алгебры $F(x,y)$ степени $d(C^{\star}) = d(D^{\star}) = m-1$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_j, \eta_{i_1,c}, \eta_{d,i_1} \in K$ отличен от нуля.

С другой стороны элемент

$$u = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j A_j B_j + \alpha z C + \beta D z,$$

где (A_j, B_j) — различные пары одночленов степени $d(A_j) \geqslant 2$, $d(B_j) \geqslant 2$, $d(A_j) + d(B_j) = m$, C, D — однородные элементы степени $d(C) = d(D) = m-1$, z — элемент степени $d(z) = 1$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_j, \alpha, \beta \in K$ отличен от нуля, не является примитивным в подалгебре

$$\mathcal{H} = \operatorname{alg}\left\{\bigcup_j \{A_j, B_j\}, C, D, z\right\} \subsetneq F(x,y).$$

Действительно, приводя множество $\left\{\bigcup_j \{A_j, B_j\}, C, D, z\right\}$ к редуцированному множеству M, имеем $d(h) < d(u)$ для всех $h \in M$. Следовательно, старшая часть свободной образующей подалгебры $\mathcal{H}$ не может входить линейно в представление однородного элемента u. По Предположению 2.1, u не является примитивным элементом подалгебры $\mathcal{H}$.

5. Утверждение следует из пункта 4.

□

Следствие 3.9. *Пусть K — поле характеристики $\operatorname{char} K = p > 0$, $|K| = p^n$. Тогда*

1. *Число $\#\mathrm{APE}(h, 2, F(x,y))$ однородных почти примитивных элементов степени два равно $p^{4n} - p^{2n}$;*

2. *Число* $\#\mathrm{APE}(h,3,F(x,y))$ *однородных почти примитивных элементов степени три равно* $(p^{4n}-1)((p^{8n}+1)(p^{4n}+1)-(p^n+1)(p^{4n}+p^{3n}+p^{2n}+p^n+1))$.

Доказательство. 1. Всего имеется

$$\#\{h,2\}=(p^n)^4-1=p^{4n}-1$$

однородных элементов степени два, так как любой элемент степени два имеет вид

$$\lambda_{xx}xx+\lambda_{xy}xy+\lambda_{yx}yx+\lambda_{yy}yy,$$

где хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Различных однородных элементов степени два вида αzz имеется

$$\begin{aligned}\#\{u=\alpha zz\}&=\#\{u=\alpha(\lambda_x x+\lambda_y y)^2\}=\\&=\#\{u=\alpha(x+\lambda_y y)^2\}+\#\{u=\alpha yy\}=\\&=(p^n-1)p^n+(p^n-1)=(p^n-1)(p^n+1)=p^{2n}-1,\end{aligned}$$

так как

$$\alpha(\lambda_x x+\lambda_y y)^2=\alpha\lambda_x^2(x+\frac{\lambda_y}{\lambda_x}y)^2$$

при $\lambda_x\neq 0$ и

$$\alpha(\lambda_y y)^2=\alpha\lambda_y^2 yy$$

при $\lambda_y\neq 0$. Значит,

$$\begin{aligned}\#\mathrm{APE}(h,2,F(x,y))&=\#\{h,2\}-\#\{u=\alpha zz\}=\\&=(p^{4n}-1)-(p^{2n}-1)=p^{4n}-p^{2n}.\end{aligned}$$

2. Всего имеется

$$\#\{h,3\}=(p^n)^{16}-1=p^{16n}-1$$

однородных элементов степени три. Различных однородных элементов степени три вида $\alpha zA+\beta Bz$, где $d(z)=1$, $d(A)=d(B)=2$, имеется

$$\#\{u=\alpha zA+\beta Bz\}=\#\{u=\alpha\widetilde{z}\widetilde{A}+\beta\widetilde{B}\widetilde{z}\},$$

где $\widetilde{z}=x+\lambda_y y$ или $z=y$, $\widetilde{A}=xx+\lambda_{xy}xy+\lambda_{yx}yx+\lambda_{yy}yy$, или $\widetilde{A}=xy+\lambda_{yx}yx+\lambda_{yy}yy$, или $\widetilde{A}=yx+\lambda_{yy}yy$, или $\widetilde{A}=yy$, $\widetilde{B}$ имеет вид аналогичный $\widetilde{A}$, а из α,β хотя бы один не нулевой. Значит,

$$\begin{aligned}\#\{u=\alpha\widetilde{z}\widetilde{A}+\beta\widetilde{B}\widetilde{z}\}&=\#\{u=\alpha(\widetilde{z}\widetilde{A}+\beta\widetilde{B}\widetilde{z}),\alpha\neq 0\}+\#\{\alpha\widetilde{B}\widetilde{z},\alpha\neq 0\}=\\&=(p^n-1)(p^n+1)(p^{3n}+p^{2n}+p^n+1)(p^n)(p^{3n}+p^{2n}+p^n+1)+\\&\quad+(p^n-1)(p^{3n}+p^{2n}+p^n+1)(p^n+1)=\\&=(p^n+1)(p^{4n}-1)(p^{4n}+p^{3n}+p^{2n}+p^n+1).\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
\#\mathrm{APE}(h,3,F(x,y)) &= \#\{h,3\} - \#\{u=\alpha zA+\beta Bz\} = \\
&= (p^{16n}-1)-(p^n+1)(p^{4n}-1)(p^{4n}+p^{3n}+p^{2n}+p^n+1) = \\
&= (p^{4n}-1)((p^{8n}+1)(p^{4n}+1)-(p^n+1)(p^{4n}+p^{3n}+p^{2n}+p^n+1)).
\end{aligned}$$

□

Теорема 3.10. *Однородный элемент $u \in F(x,y)$ степени $d(u)=m \geqslant 3$, имеющий вид (1) (считаем, что коэффициенты учтены в представлении элементов Λ_x, Λ_y, N_x, N_y), является почти примитивным тогда и только тогда, когда не существует такого коэффициента пропорциональности $\theta \in K$, что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y, N_x \overset{\theta}{\sim} N_y$ ($\Lambda_x = \theta\Lambda_y, N_x=\theta N_y$ или $\theta\Lambda_x=\Lambda_y, \theta N_x = N_y$).*

Доказательство. Воспользуемся утверждением 5 Предложения 3.8 и будем проверять представимость ненулевого элемента

$$\begin{aligned}
\widetilde{u} &= \gamma_{(x,\lambda)}x\Lambda_x + \gamma_{(y,\lambda)}y\Lambda_y + \gamma_{(\eta,x)}N_x x + \gamma_{(\eta,y)}N_y y = \\
&= x\left(\sum \varepsilon_j^{\Lambda_x} M_j\right) + y\left(\sum \varepsilon_j^{\Lambda_y} M_j\right) + \left(\sum \varepsilon_j^{N_x} M_j\right)x + \left(\sum \varepsilon_j^{N_y} M_j\right)y,
\end{aligned}$$

где $M_j = M_j(x,y)$ — одночлены степени $d(M_j)=m-1$ с различной скобочной структурой (их всего $\mathfrak{L}=2^{m-1}C(m-2)$) с фиксированным упорядочиванием, в виде $\widetilde{u}=\alpha zC+\beta Dz$ методом неопределенных коэффициентов (если $\widetilde{u}=0$, то элемент u, очевидно, не является почти примитивным). Без ограничения общности будем считать, что коэффициенты $\gamma_{(x,\lambda)}$, $\gamma_{(y,\lambda)}$, $\gamma_{(\eta,x)}$, $\gamma_{(\eta,y)}$, α, β уже учтены в представлениях Λ_x, Λ_y, N_x, N_y, C, D соответственно. Пусть

$$\begin{cases}
z = k_x x + k_y y, \\
C = \sum a_j M_j, \\
D = \sum b_j M_j,
\end{cases}$$

где $k_x, k_y, \{a_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}, \{b_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}} \in K$ — неизвестные переменные в количестве $2+2\mathfrak{L}$, причем хотя бы одна переменная из k_x, k_y и хотя бы одна из $\{a_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}, \{b_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}$ должны быть отличны от нуля (так как $\widetilde{u} \neq 0$). Тогда имеем уравнение, которое нам надо решить, с известной левой частью:

$$\begin{aligned}
&x\Lambda_x + y\Lambda_y + N_x x + N_y y = \widetilde{u} = zC + Dz \Longleftrightarrow \\
&\quad\Longleftrightarrow x\Lambda_x + y\Lambda_y + N_x x + N_y y = \widetilde{u} = (k_x x + k_y y)C + D(k_x x + k_y y) \Longleftrightarrow \\
&\quad\Longleftrightarrow x(k_x C - \Lambda_x) + y(k_y C - \Lambda_y) + (k_x D - N_x)x + (k_y D - N_y)y = 0 \Longleftrightarrow \\
&\quad\Longleftrightarrow \begin{cases} k_x C - \Lambda_x = 0, \\ k_y C - \Lambda_y = 0, \\ k_x D - N_x = 0, \\ k_y D - N_y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k_x(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{L}})^t - (\varepsilon_1^{\Lambda_x}, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{L}}^{\Lambda_x})^t = 0, \\ k_y(a_1, \ldots, a_{\mathfrak{L}})^t - (\varepsilon_1^{\Lambda_y}, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{L}}^{\Lambda_y})^t = 0, \\ k_x(b_1, \ldots, b_{\mathfrak{L}})^t - (\varepsilon_1^{N_x}, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{L}}^{N_x})^t = 0, \\ k_y(b_1, \ldots, b_{\mathfrak{L}})^t - (\varepsilon_1^{N_y}, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{L}}^{N_y})^t = 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

где $(\ldots)^t$ — вектор-столбец коэффициентов — элемент линейного пространства $K^{\mathfrak{L}}$. Приравнивая покомпонентно, получаем систему уравнений на неизвестные переменные $k_x, k_y \in K$ и $\{a_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}, \{b_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}} \in K$ при известных $\{\varepsilon_j^{\Lambda_x}\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}$, $\{\varepsilon_j^{\Lambda_y}\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}$, $\{\varepsilon_j^{N_x}\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}$, $\{\varepsilon_j^{N_y}\}_{j=1}^{\mathfrak{L}} \in K$:

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant \mathfrak{L} : \begin{cases} k_x a_j - \varepsilon_j^{\Lambda_x} = 0, \\ k_y a_j - \varepsilon_j^{\Lambda_y} = 0, \\ k_x b_j - \varepsilon_j^{N_x} = 0, \\ k_y b_j - \varepsilon_j^{N_y} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \forall 1 \leqslant j \leqslant \mathfrak{L} : \begin{cases} \left.\begin{aligned} k_x\varepsilon_j^{\Lambda_y} - k_y\varepsilon_j^{\Lambda_x} = 0, \\ k_x\varepsilon_j^{N_y} - k_y\varepsilon_j^{N_x} = 0, \end{aligned}\right\} \\ \left.\begin{aligned} k_x a_j - \varepsilon_j^{\Lambda_x} = 0, \\ k_y a_j - \varepsilon_j^{\Lambda_y} = 0, \\ k_x b_j - \varepsilon_j^{N_x} = 0, \\ k_y b_j - \varepsilon_j^{N_y} = 0, \end{aligned}\right\} \end{cases}$$

причем хотя бы одна из переменных k_x, k_y и хотя бы одна из переменных $\{a_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}, \{b_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}$ должны быть отличны от нуля. Если верхняя подсистема (первые два уравнения) имеет только тривиальное нулевое решение $k_x = 0, k_y = 0$, то все $\Lambda_x = \Lambda_y = N_x = N_y = 0$, что следует из нижней подсистемы (оставшихся четырех уравнений). Нетрудно убедиться, что верхняя подсистема имеет нетривиальное решение (k_x, k_y) тогда и только тогда, когда существует $\theta \in K$, такое что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y, N_x \overset{\theta}{\sim} N_y$, тогда же из нижней подсистемы можно получить нетривиальное решение $(\{a_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}, \{b_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}})$. Таким образом, критерием несуществования нетривиального решения системы (а значит, непредставимости $\widetilde{u}$ в виде $\widetilde{u} = \alpha zC + \beta Dz$) является несуществование такого коэффициента пропорциональности $\theta \in K$, что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y, N_x \overset{\theta}{\sim} N_y$. □

Следствие 3.11. *Существует алгоритм, распознающий почти примитивные однородные элементы алгебры $F(x, y)$.*

Доказательство. Воспользуемся Теоремой 3.10. Нам надо выяснить, существует ли такой коэффициент пропорциональности $\theta \in K$, что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y, N_x \overset{\theta}{\sim} N_y$. Это алгоритмически проверяется покомпонентным сравнением элементов $(\varepsilon_1^{\Lambda_x}, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{L}}^{\Lambda_x})$ и $(\varepsilon_1^{\Lambda_y}, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{L}}^{\Lambda_y})$, а также $(\varepsilon_1^{N_x}, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{L}}^{N_x})$ и $(\varepsilon_1^{N_y}, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{L}}^{N_y})$. $\square$

Предложение 3.12. *Пусть $k, l \in \mathbb{N}$. Тогда элемент $u_{k,l}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^k(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^l$ является почти примитивным элементом алгебры $F(x,y)$.*

Доказательство. Пусть $k = l$, тогда элемент u является однородным относительно функции степени d, и, по Теореме 3.10, элемент u является почти примитивным в $F(x,y)$. Случай $k \neq l$ был рассмотрен в Предложении 3.7. $\square$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Продемонстрируем на примере почти примитивного элемента $u_{k,k}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^k(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^k$ свободной неассоциативной алгебры $F(x,y)$ работу алгоритма распознавания почти примитивности однородного элемента в алгебре $F(x,y)$.

Элемент

$$u_{k,k}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^k(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^k$$

представляется в виде

$$u_{k,k}(x,y) = x\Lambda_x + y\Lambda_y + N_x x + N_y y,$$

где

$$\Lambda_x = (\operatorname{ad} x)^{k-1}(y), \quad \Lambda_y = 0, \quad N_x = 0, \quad N_y = (x)(\operatorname{Ad} y)^{k-1}.$$

Пусть упорядочивание неассоциативных одночленов с учетом скобок задано следующим образом: считаем, что $x > y$ и $m_1(x,y) > m_2(x,y)$, если $\widetilde{m_1}(x,y) >_{lex} \widetilde{m_2}(x,y)$ или $\widetilde{m_1}(x,y) =_{lex} \widetilde{m_2}(x,y)$ и $m_1(x,y) >_{()} m_2(x,y)$, где $m_1(x,y)$, $m_2(x,y)$ — неассоциативные одночлены, $\widetilde{\ }$ — гомоморфизм снятия скобок, $>_{()}$ — зафиксированное упорядочивание скобок.

Тогда

$$\varepsilon^{\Lambda_x} = (0, \ldots, 0, 1_i, 0, \ldots, 0), \quad \varepsilon^{\Lambda_y} = (0, \ldots, 0),$$
$$\varepsilon^{N_x} = (0, \ldots, 0), \quad \varepsilon^{N_y} = (0, \ldots, 0, 1_j, 0, \ldots, 0),$$

где

$$m_i(x,y) = \Lambda_x = (\operatorname{ad} x)^{k-1}(y) > N_y = (x)(\operatorname{Ad} y)^{k-1} = m_j(x,y),$$

то есть $i \neq j$. Покомпонентно сравнивая ε^{Λ_x} и ε^{Λ_y}, получаем, что единственно возможное значение — $\theta = 0$, что противоречит тому, что $\varepsilon_j^{N_x}\theta = 0 \neq 1 = \varepsilon_j^{N_y}$. Поэтому однородный элемент $u_{k,k}(x,y)$ является почти примитивным.

Предложение 3.13. *Элемент* $u = xy + (\ldots((xz)z)\ldots)z = xy + (x)(\operatorname{Ad} z)^t$ *при* $t \geqslant 2$ *является почти примитивным в свободной неассоциативной алгебре* $F(x, y, z)$.

Доказательство. Элемент u не является примитивным в алгебре $F(x, y, z)$ поскольку не содержит ни одной линейной компоненты x, y или z. Пусть элемент u принадлежит подалгебре $\mathcal{H}$, порожденной редуцированным множеством $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$ свободных образующих. Если какая-то старшая часть h_i° входит линейно в представление старшей части $u^\circ = (x)(\operatorname{Ad} z)^t$, то образующая h_i входит только линейно в представление элемента u, обеспечивая его примитивность в подалгебре $\mathcal{H}$. В противном случае, $h_1 = h_1^\circ = z, h_2^\circ = (x)(\operatorname{Ad} z)^t, s < t$. Пусть $h_2 = h_2^\circ + h_2^*$, тогда положим

$$u' = u - (h_2)(\operatorname{Ad} h_1)^{t-s} = xy + (h_2^*)(\operatorname{Ad} h_1)^{t-s} \in \mathcal{H}.$$

Затем для записи элемента u' от свободных образующих $\{h_1, \ldots, h_k\}$ получим элементы u'' и так далее. На каждом шаге этой цепочки получаем новое $u^{(m+1)}$ или только линейное вхождение некоторой образующей h_i в элемент $u^{(m)}$, а значит, примитивность элемента u в подалгебре $\mathcal{H}$. В конце получим $u^{(n)} = xy$ и $x, y \in \mathcal{H}$, а с учетом $z \in \mathcal{H}$ имеем $\mathcal{H} = F(x, y, z)$, что противоречит собственности подалгебры $\mathcal{H}$. □

3.2 Случай свободной неассоциативной (анти-) коммутативной алгебры малого ранга

В этом разделе под алгеброй $A(X)$ будет пониматься одна из алгебр $A_-(X)$ или $A_+(X)$.

Предложение 3.14. *Пусть* K *— поле,* $\operatorname{char} K \neq 2$, $A_+(x)$ *— свободная неассоциативная антикоммутативная алгебра над полем* K *с одной свободной образующей* x. *Тогда любой элемент* $u \in A_+(x)$ *не является почти примитивным.*

Доказательство. Так как в алгебре $A_+(x)$ имеем $x^2 = 0$, то $A_+(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in K\}$. Поскольку каждый ненулевой элемент алгебры $A_+(x)$ является примитивным, то он не может быть почти примитивным. □

Теорема 3.15. *Однородный элемент* $u \in A_-(x)$ *степени* $d(u) = m \geqslant 2$ *является почти примитивным элементом тогда и только тогда, когда в разложение элемента* $u = u(x)$ *входит одночлен вида* $A \cdot x$, *где* A *— регулярный одночлен степени* $d(A) = m - 1$.

Доказательство. Пусть однородный элемент u степени $d(u) = m \geqslant 2$ почти примитивен. Если никакой одночлен вида $A \cdot x$, где A — регулярный одночлен степени $d(A) = m - 1$, не входит в разложение u, то имеет место разложение

$$u = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j A_j B_j,$$

где (A_j, B_j) — различные пары регулярных одночленов степени больше единицы, $A_j \geqslant B_j$ и $d(A_j) + d(B_j) = m$. Тогда u не является примитивным элементом в собственной подалгебре

$$\mathcal{H} = \mathrm{alg}\left\{\bigcup_j \{A_j, B_j\}\right\}.$$

Действительно, приводя множество $\bigcup_j \{A_j, B_j\}$ к редуцированному множеству M, имеем $d(h) < d(u)$ для всех $h \in M$. Следовательно, старшая часть никакой свободной образующей подалгебры $\mathcal{H}$ не входит линейно в представление элемента u. Согласно Предложению 2.1, u не является примитивным элементом подалгебры $\mathcal{H}$.

С другой стороны, если элемент $u \in \mathcal{H} = \mathrm{alg}\{h_1, \ldots, h_k\} \subset A_-(x)$ содержит одночлен вида $A \cdot x$ и старшая часть h_i° никакой свободной образующей $h_i, 1 \leqslant i \leqslant k$, не входит линейно в разложение u, то ввиду скобочной структуры имеет место равенство $A \cdot x = g(h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ) \cdot h_1^\circ$, то есть $x = h_1^\circ$, значит, $h_1 = x$. Следовательно, $\mathcal{H} = A_-(x)$ и $\mathcal{H}$ не является собственной подалгеброй в $A_-(x)$. □

Следствие 3.16. *Существует алгоритм, распознающий почти примитивность однородного элемента $u \in A_-(x)$.*

Доказательство. Если $d(u) = 2, 3$, то элемент u всегда содержит в каноническом представлении одночлен $A \cdot x$, поэтому является почти примитивным. Если $d(u) > 3$, то записываем элемент u как линейную комбинацию регулярных одночленов и проверяем наличие слагаемого вида $A \cdot x$. □

Предложение 3.17. *Пусть $A_-(x, y)$ — свободная неассоциативная коммутативная алгебра над полем K со свободными образующими x, y; $A_+(x, y)$ — свободная неассоциативная антикоммутативная алгебра над полем K со свободными образующими x, y; алгебра $A(x, y)$ — одна из алгебр $A_-(x, y)$, $A_+(x, y)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Любой элемент $u \in A_+(x, y)$ степени 2 является почти примитивным. Однородный элемент $u \in A_-(x, y)$ степени 2 является почти*

примитивным тогда и только тогда, когда не имеет место представление $u = \alpha zz$, где $z \in A_-(x,y)$, $d(z) = 1$, $0 \neq \alpha \in K$.

2. *Любой однородный элемент $u \in A_+(x,y)$ степени 3 не является почти примитивным. Однородный элемент $u \in A_-(x,y)$ степени 3 является почти примитивным тогда и только тогда, когда не имеет место представление $u = \alpha z A$, где $z \in A_-(x,y)$, $d(z) = 1$, однородный элемент $A \in A_-(x,y)$ степени $\ell(A) = 2$ и $\alpha \in K$ отличен от нуля.*

3. *Однородный элемент $u \in A(x,y)$ степени $d(u) = m > 3$ является почти примитивным тогда и только тогда, когда не имеет место представление*
$$u = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j A_j B_j + \alpha C z,$$
где (A_j, B_j) — различные пары регулярных одночленов степени $d(A_j) \geqslant 2$, $d(B_j) \geqslant 2$, $d(A_j) + d(B_j) = m$, C — однородный элемент степени $d(C) = m - 1$, z — элемент степени $d(z) = 1$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_j, \alpha \in K$ отличен от нуля.

4. *Всякий однородный элемент $u \in A(x,y)$ степени $d(u) = m \geqslant 3$ имеет следующее разложение:*
$$u = \sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j \Phi_j \Psi_j + \left(\gamma_{(x,\lambda)} \Lambda_x x + \gamma_{(y,\lambda)} \Lambda_y y\right) = u_{\Phi\Psi} + \widetilde{u}, \qquad (2)$$
где $u_{\Phi\Psi} = \sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j \Phi_j \Psi_j$; $\widetilde{u} = \gamma_{(x,\lambda)} \Lambda_x x + \gamma_{(y,\lambda)} \Lambda_y y$ (в случае $d(u) = 3$ предполагаем $u_{\Phi\Psi} = 0$, $u = \widetilde{u}$); $(\Phi_j(x,y), \Psi_j(x,y))$ — различные пары регулярных одночленов степени $d(\Phi_j) \geqslant 2$, $d(\Psi_j) \geqslant 2$, $d(\Phi_j) + \ell(\Psi_j) = m$; Λ_x, Λ_y — однородные элементы степени $d(\Lambda_x) = d(\Lambda_y) = m - 1$; $\gamma_j, \gamma_{(x,\lambda)}, \gamma_{(y,\lambda)} \in K$ и хотя бы один из этих коэффициентов отличен от нуля. Тогда почти примитивность элемента u в алгебре $A(x,y)$ эквивалентна почти примитивности элемента $\widetilde{u}$ в алгебре $A(x,y)$.

Доказательство. Пусть элемент u из пунктов 1–4 принадлежит конечнопорожденной подалгебре $\mathcal{H} \subseteq A(x,y)$, $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$ — редуцированное множество свободных образующих подалгебры $\mathcal{H}$.

1. Старшая часть u° любого элемента $u \in A_+(x,y)$ степени 2 имеет вид $u^\circ = \alpha xy$, поэтому либо старшая часть некоторой свободной образующей h_i° подалгебры $\mathcal{H}$ входит линейно в представление u°, значит, по Предложению 2.1 элемент u является почти примитивным, либо

$u^\circ = h_i^\circ h_j^\circ$ и следовательно $h_i = x, h_j = y$, что противоречит собственности подалгебры $\mathcal{H}$.

Однородный элемент $u = \alpha zz$, где $z \in A_-(x,y)$, $d(z) = 1$, $0 \neq \alpha \in K$, не является примитивным в собственной подалгебре $\mathcal{H} = \mathrm{alg}\{z\}$. С другой стороны, пусть однородный элемент u не является примитивным в $\mathcal{H}$, тогда никакая образующая подалгебры $\mathcal{H}$ не входит линейно в его каноническое представление по Предложению 2.1, поэтому

$$u = u^\circ = \sum_{h_i, h_j \in H_1} \lambda_{i,j} h_i h_j,$$

где $H_\nu = \{h_i \mid d(h_i) = d(h_i^\circ) = \nu\} \subset H$. В случае $|H_1| \geqslant 2$ подалгебра $\mathcal{H}$ совпадает с $A_-(x,y)$, поэтому $|H_1| = 1$ и элемент $u = \lambda_{t,t} h_t h_t$, где $H_1 = \{h_t\}$.

2. Любой однородный элемент $u \in A_+(x,y)$ степени 3 имеет каноническое представление $u = u_{\mathrm{can}} = \alpha(xy)x + \beta(xy)y = (xy)(\alpha x + \beta y)$, где $\alpha, \beta \in K$ и хотя бы один из них отличен от нуля. Тогда u не примитивен в собственной подалгебре $\mathcal{H} = \mathrm{alg}\{\alpha x + \beta y, xy\}$.

   Однородный элемент $u = \alpha z A$, где $z \in A_+(x,y)$, $d(z) = 1$, однородный элемент $A \in A_+(x,y)$ имеет степень $d(A) = 2$ и коэффициент $\alpha \in K$ отличен от нуля, не является примитивным в собственной подалгебре $\mathcal{H} = \mathrm{alg}\{z, A\}$. С другой стороны, пусть однородный элемент u не является примитивным в $\mathcal{H}$, тогда никакая образующая подалгебры $\mathcal{H}$ не входит линейно в его каноническое представление по Предложению 2.1 и, как было показано выше, H_1 состоит из одного элемента h_t, поэтому

$$u = u^\circ = \lambda(h_t h_t)h_t + \sum_{h_i \in H_2} \eta_i h_i^\circ h_t = A h_t,$$

   где $A = \lambda h_t h_t + \sum_{h_i \in H_2} \eta_i h_i^\circ$ — однородный элемент степени 2, коэффициенты $\lambda, \eta_i \in K$ и хотя бы один из них отличен от нуля.

3. Пусть однородный элемент u не является примитивным в $\mathcal{H}$, тогда никакая старшая часть h_i° не входит линейно в представление u°. Так как $d(u^\circ) = d(u) = m > 3$ и среди $h_1^\circ \ldots, h_k^\circ$ не более одного элемента степени 1, то элемент u имеет вид

$$\begin{aligned} u = u^\circ &= \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j A_j^\star(h_1, \ldots, h_k) B_j^\star(h_1, \ldots, h_k) + \eta_t C^\star(h_1, \ldots, h_k) h_t = \\ &= \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j A_j^\star B_j^\star + \eta_t C^\star h_t, \end{aligned}$$

где h_t — единственная свободная образующая подалгебры $\mathcal{H}$ единичного степени или $\eta_t = 0$, $(A^\star_j, B^\star_j)$ — различные пары одночленов алгебры $A(x, y)$ степени $d(A^\star_j) \geqslant 2$, $d(B^\star_j) \geqslant 2$, $d(A^\star_j) + d(B^\star_j) = m$, $C^\star$ — однородный элементы алгебры $A(x, y)$ степени $d(C^\star) = m - 1$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_j, \eta_t \in K$ отличен от нуля. Переставив, если нужно $A^\star_j, B^\star_j$ местами и взяв их регулярные представления, получаем искомое представление элемента u.

С другой стороны, элемент

$$u = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j A_j B_j + \alpha C z$$

с канонической правой частью, где (A_j, B_j) — различные пары регулярных одночленов степени $d(A_j) \geqslant 2$, $d(B_j) \geqslant 2$, $d(A_j) + d(B_j) = m$, C — однородный элементы степени $d(C) = m - 1$, z — элемент степени $d(z) = 1$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_j, \alpha \in K$ отличен от нуля, не является примитивным в подалгебре

$$\mathcal{H} = \mathrm{alg}\left\{ \bigcup_j \{A_j, B_j\}, C, z \right\} \subsetneq A(x, y).$$

Действительно, приводя множество $\left\{\bigcup_j \{A_j, B_j\}, C, z\right\}$ к редуцированному множеству M, имеем $d(h) < d(u)$ для всех $h \in M$. Следовательно, старшая часть свободной образующей подалгебры $\mathcal{H}$ не может входить линейно в представление однородного элемента u. По Предложению 2.1, u не является примитивным элементом подалгебры $\mathcal{H}$.

4. Утверждение следует из пунктов 2, 3.

$\square$

Теорема 3.18. *Однородный элемент $u \in A(x, y)$ степени $d(u) = m \geqslant 3$, имеющий вид (2) (считаем, что коэффициенты учтены в представлении элементов Λ_x, Λ_y), является почти примитивным тогда и только тогда, когда не существует такого коэффициента пропорциональности $\theta \in K$, что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y$ (т.е. $\Lambda_x = \theta \Lambda_y$ или $\theta \Lambda_x = \Lambda_y$).*

Доказательство. По Предложению 3.17, пункты 3, 4 необходимым и достаточным условием почти примитивности элемента u является невозможность представить элемент $\widetilde{u} = \Lambda_x x + \Lambda_y y$ в виде $\widetilde{u} = \alpha C z$, где C — однородный элемент степени $d(C) = m - 1$, z — элемент степени $d(z) = 1$, что выполняется тогда и только тогда, когда элементы Λ_x, Λ_y непропорциональны. $\square$

Следствие 3.19. *Существует алгоритм, распознающий почти примитивные однородные элементы свободной неассоциативной коммутативной (антикоммутативной) алгебры $A(x, y)$.*

Доказательство. Воспользуемся Теоремой 3.18. Нам необходимо выяснить, существует ли для элемента u такой коэффициент пропорциональности $\theta \in K$, что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y$. Это алгоритмически проверяется покомпонентным сравнением элементов $(\varepsilon_1^{\Lambda_x}, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{L}}^{\Lambda_x}) \in K^{\mathfrak{L}}$ и $(\varepsilon_1^{\Lambda_y}, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{L}}^{\Lambda_y}) \in K^{\mathfrak{L}}$, где

$$\Lambda_x = \sum_{i=1}^{\mathfrak{L}} \varepsilon_i^{\Lambda_x} m_i,\ \Lambda_y = \sum_{i=1}^{\mathfrak{L}} \varepsilon_i^{\Lambda_y} m_i,$$

$M = \{m_1, \ldots, m_{\mathfrak{L}}\}$ — множество регулярных одночленов в $A(x, y)$ степени $d(u) - 1$. □

3.3 Случай свободной алгебры Ли малого ранга

Предложение 3.20. *Пусть K — поле, $L(x)$ — свободная алгебра Ли над полем K с одной свободной образующей x. Тогда любой элемент $u \in L(x)$ не является почти примитивным.*

Доказательство. Так как в алгебре $L(x)$ выполнено $[x, x] = 0$, то $L(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in K\}$. Поскольку каждый ненулевой элемент алгебры $L(x)$ является примитивным, то он не может быть почти примитивным. □

Предложение 3.21. *Пусть $L(x, y)$ — свободная алгебра Ли над полем K со свободными образующими x, y. Тогда:*

1. *Любой элемент $u \in L(x, y)$ степени два является почти примитивным.*

2. *Любой однородный элемент $u \in L(x, y)$ степени три не является почти примитивным.*

3. *Однородный элемент $u \in L(x, y)$ степени $d(u) = m > 3$ является почти примитивным тогда и только тогда, когда не имеет место представление*
$$u = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j, B_j] + \alpha [C, z],$$
где (A_j, B_j) — различные пары регулярных одночленов степени $d(A_j) \geqslant 2$, $d(B_j) \geqslant 2$, $d(A_j) + d(B_j) = m$, C — однородный элемент степени

$d(C)=m-1$, z — элемент степени $d(z)=1$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_j, \alpha \in K$ отличен от нуля.

4. *Всякий однородный элемент $u \in L(x,y)$ степени $d(u)=m \geqslant 3$ имеет следующее регулярное разложение:*

$$
\begin{aligned}
u = u_{\text{can}} &= \sum_{v_j \in \overline{W^m_{\{x,y\}}}} \gamma_j v_j + \sum_{m_i \in W^m_{\{x,y\}}} \beta_i m_i = \\
&= \left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j [\Phi_j, \Psi_j] \right) + \sum_{m_i \in W^m_{\{x,y\}}} \beta_i m_i = \\
&= \left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j [\Phi_j, \Psi_j] \right) + \left(\sum_{\gamma_{(x,t)} \neq 0} \gamma_{(x,t)} [\Lambda^t_x, x] + \sum_{\gamma_{(y,s)} \neq 0} \gamma_{(y,s)} [\Lambda^s_y, y] \right) = \qquad (3) \\
&= \left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j [\Phi_j, \Psi_j] \right) + \left[\sum_{\gamma_{(x,t)} \neq 0} \gamma_{(x,t)} \Lambda^t_x,\ x \right] + \left[\sum_{\gamma_{(y,s)} \neq 0} \gamma_{(y,s)} \Lambda^s_y,\ y \right] = \\
&= \left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j [\Phi_j, \Psi_j] \right) + \gamma_x [\Lambda_x, x] + \gamma_y [\Lambda_y, y] = u_{\Phi\Psi} + \widetilde{u},
\end{aligned}
$$

где

$$
\gamma_x \Lambda_x = \sum_{\gamma_{(x,t)} \neq 0} \gamma_{(x,t)} \Lambda^t_x, \quad \gamma_y \Lambda_y = \sum_{\gamma_{(y,s)} \neq 0} \gamma_{(y,s)} \Lambda^s_y,
$$
$$
u_{\Phi\Psi} = \sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j [\Phi_j, \Psi_j], \quad \widetilde{u} = \gamma_x [\Lambda_x, x] + \gamma_y [\Lambda_y, y]
$$

(в случае $d(u)=3$ предполагаем $u_{\Phi\Psi}=0$, $\widetilde{u}=u$); $[\Phi_j(x,y), \Psi_j(x,y)] \in W$ — регулярные одночлены со степенями $d(\Phi_j) \geqslant 2$, $d(\Psi_j) \geqslant 2$ и $d([\Phi_j(x,y), \Psi_j(x,y)]) = d(\Phi_j) + d(\Psi_j) = m$; $[\Lambda^t_x, x], [\Lambda^s_y, y] \in W_{\{x,y\}}$ — регулярные одночлены с $d(\Lambda^t_x) = d(\Lambda^s_y) = m-1$; коэффициенты $\gamma_j, \gamma_{(x,t)}, \gamma_{(y,s)}, \gamma_x, \gamma_y \in K$ и хотя бы один из $\gamma_j, \gamma_{(x,t)}, \gamma_{(y,s)}$ отличен от нуля (или эквивалентно, хотя бы один из $\gamma_j, \gamma_x, \gamma_y$ отличен от нуля). В случае отсутствия второго или третьего слагаемого считаем $\gamma_x = 0$, $\Lambda_x = 0$ или $\gamma_y = 0$, $\Lambda_y = 0$, соответственно (в частности, если отсутствуют оба слагаемых, то $\widetilde{u} = 0$). Тогда почти примитивность элемента u в алгебре $L(x,y)$ эквивалентна почти примитивности элемента $\widetilde{u}$ в алгебре $L(x,y)$.

Доказательство. Пусть элемент u из пунктов 1–4 принадлежит конечно порожденной подалгебре $\mathcal{H} \subsetneq L(x,y)$, $x > y$, $H = \{h_1, \dots, h_k\}$ — редуцированное множество свободных образующих подалгебры $\mathcal{H}$.

1. Старшая часть u° любого элемента $u \in L(x, y)$ степени два имеет вид $u^\circ = \alpha[x, y]$, поэтому либо старшая часть некоторой свободной образующей h_i° подалгебры $\mathcal{H}$ входит линейно в представление u°, значит по Предложению 2.1 элемент u является почти примитивным, либо $u^\circ = [h_i^\circ, h_j^\circ]$, следовательно $h_i = x, h_j = y$, что противоречит собственности подалгебры $\mathcal{H}$.

2. Любой однородный элемент $u \in L(x, y)$ степени три имеет каноническое представление
$$u = u_{\text{can}} = \alpha[[x, y], x] + \beta[[x, y], y] = [[x, y], \alpha x + \beta y],$$
где $\alpha, \beta \in K$ и хотя бы один из них отличен от нуля. Тогда u не примитивен в собственной подалгебре $\mathcal{H} = \operatorname{alg}\{\alpha x + \beta y, [x, y]\}$.

3. Пусть однородный элемент u не является примитивным в $\mathcal{H}$, тогда никакая старшая часть h_i° не входит линейно в представление u°. Так как $d(u^\circ) = d(u) = m > 3$, $d_H(u^\circ) = d_H(u) > 1$ и среди $h_1 \ldots, h_k$ не более одного элемента единичного степени, то элемент u имеет вид
$$\begin{aligned} u = u^\circ = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j^\star(h_1, \ldots, h_k), B_j^\star(h_1, \ldots, h_k)] + \eta_t [C^\star(h_1, \ldots, h_k), h_t] = \\ = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j^\star, B_j^\star] + \eta_t [C^\star, h_t], \end{aligned}$$
где h_t — единственная свободная образующая подалгебры $\mathcal{H}$ единичного степени ($d_X(h_t) = 1$) или $\eta_t = 0$, $(A_j^\star, B_j^\star)$ — различные пары одночленов подалгебры $\mathcal{H}$ степени $d_H(A_j^\star) \geqslant 2$, $d_H(B_j^\star) \geqslant 2$, $d_H(A_j^\star) + d_H(B_j^\star) = d_H(u)$, $C^\star$ — однородный элемент подалгебры $\mathcal{H}$ степени $d_H(C^\star) = d_H(u) - 1$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_j, \eta_t \in K$ отличен от нуля. Тогда в алгебре $\mathcal{H}^\circ = \operatorname{alg}\{H^\circ\}$, $H^\circ = \{h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ\}$, существуют такие одночлены $\widetilde{A}_j^\star = \widetilde{A}_j^\star(h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ)$, $\widetilde{B}_j^\star = \widetilde{B}_j^\star(h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ)$ и однородный элемент $\widetilde{C}^\star = \widetilde{C}^\star(h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ)$ с такими же степенями $d_{H^\circ}(\widetilde{A}_j^\star) = d_H(A_j^\star)$, $d_{H^\circ}(\widetilde{B}_j^\star) = d_H(B_j^\star)$ и $d_{H^\circ}(\widetilde{C}^\star) = d_H(C^\star)$, что
$$u = u^\circ = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [\widetilde{A}_j^\star, \widetilde{B}_j^\star] + \eta_t [\widetilde{C}^\star, h_t].$$
Рассмотрев новые элементы как элементы алгебры $L(x, y)$, получаем, что $d_X(\widetilde{A}_j^\star) \geqslant 2$, $d_X(\widetilde{B}_j^\star) \geqslant 2$, $d_X(\widetilde{C}^\star) = m - 1$, $d_X(\widetilde{A}_j^\star) + d_X(\widetilde{B}_j^\star) = m$.

Взяв регулярные представления одночленов $\widetilde{A}_j^{\star}$, $\widetilde{B}_j^{\star}$, получаем искомое представление элемента u.

С другой стороны элемент

$$u = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j, B_j] + \alpha[C, z],$$

где (A_j, B_j) — различные пары регулярных одночленов степени $d(A_j) \geqslant 2$, $d(B_j) \geqslant 2$, $d(A_j) + d(B_j) = m$, C — однородный элемент степени $d(C) = m - 1$, z — элемент степени $d(z) = 1$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_j, \alpha \in K$ отличен от нуля, не является примитивным в подалгебре

$$\mathcal{H} = \operatorname{alg}\left\{\bigcup_j \{A_j, B_j\}, C, z\right\} \subsetneq L(x, y).$$

Действительно, приводя множество $\left\{\bigcup_j \{A_j, B_j\}, C, z\right\}$ к редуцированному множеству M, имеем $d(h) < d(u)$ для всех $h \in M$. Следовательно, старшая часть свободной образующей подалгебры $\mathcal{H}$ не может входить линейно в представление однородного элемента u. По Предположению 2.1, u не является примитивным элементом подалгебры $\mathcal{H}$.

4. Если $d(u) = 3$, то $\widetilde{u} = u$, поэтому свойство почти примитивности сохраняется. В случае когда $\widetilde{u} = 0$, элемент u не является примитивным по пункту 3. Пусть ненулевой элемент $\widetilde{u}$ не является почти примитивным, тогда по пункту 3 имеет место представление

$$\widetilde{u} = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j, B_j] + \alpha[C, z],$$

поэтому

$$u = u_{\Phi\Psi} + \widetilde{u} = \left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j [\Phi_j, \Psi_j] + \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j, B_j]\right) + \alpha[C, z].$$

Следовательно, по пункту 3. элемент u тоже не является почти примитивным.

Обратно, если элемент u не почти примитивен, то по пункту 3

$$\left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j [\Phi_j, \Psi_j]\right) + \widetilde{u} = u = \left(\sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j, B_j]\right) + \alpha[C, z].$$

Поэтому

$$\widetilde{u} = \left(\sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j, B_j] - \sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j [\Phi_j, \Psi_j] \right) + \alpha [C, z].$$

Значит $\widetilde{u}$ также не почти примитивен.

$\square$

Теорема 3.22. *Однородный элемент $u \in L(x, y)$ степени $d(u) = m \geqslant 3$, имеющий вид (3) (считаем, что коэффициенты учтены в представлении элементов Λ_x, Λ_y), является почти примитивным тогда и только тогда, когда не существует решения уравнения*

$$u\Big|_{\langle W_{\{x,y\}} \rangle} = \widetilde{u} = [\Lambda_x, x] + [\Lambda_y, y] = [f, l]\Big|_{\langle W_{\{x,y\}} \rangle} \tag{4}$$

относительно однородных переменных $f, l \in L(x, y)$ степени $d(f) = m - 1$, $d(l) = 1$ соответственно, где $a\Big|_{\langle W_{\{x,y\}} \rangle}$ — проекция элемента a на линейное пространство с базисом $W_{\{x,y\}}$, то есть линейная комбинация регулярных одночленов из $W_{\{x,y\}}$, входящих в регулярное представление a_{can}.

Доказательство. Так как для однородных элементов $f, l \in L(x, y)$ степени $d(f) = m - 1$, $d(l) = 1$ соответственно

$$[f, l] = [f, l]\Big|_{\langle W^m \rangle} = [f, l]\Big|_{\langle W^m_{\{x,y\}} \rangle} + [f, l]\Big|_{\langle \overline{W^m_{\{x,y\}}} \rangle},$$

где всякий регулярный одночлен $b \in \overline{W^m_{\{x,y\}}}$ имеет вид $b = [A, B]$, где A, B — регулярные одночлены степени больше 2 и $d(A) + d(B) = d(b) = m$, то уравнение $\widetilde{u} = [f, l]\Big|_{\langle W_{\{x,y\}} \rangle}$ равносильно уравнению

$$\widetilde{u} = [f, l] - [f, l]\Big|_{\langle \overline{W_{\{x,y\}}} \rangle} = [f, l] + \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j, B_j].$$

Утверждение Предложения 3.21 пункт 3 завершает доказательство. $\square$

Отметим, что в случае свободной свободной неассоциативной (анти-) коммутативной алгебр (Теорема 3.18) уравнение $\Lambda_x x + \Lambda_y y = fl\Big|_{\langle W_{\{x,y\}} \rangle} = fl$ имеет решение тогда и только тогда, когда существует такой коэффициент пропорциональности $\theta \in K$, что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y$ (то есть $\Lambda_x = \theta \Lambda_y$ или $\theta \Lambda_x = \Lambda_y$). В лиевом случае, за счет тождества Якоби, $[f,l]\Big|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} = [f,l]\Big|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle}$ не обязательно совпадает с $[f,l]$, поэтому область значений параметров, при которых разрешимо уравнение (4) значительно шире. В качестве примеров рассмотрим элементы $u_{3,3}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^3(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^3$ и $u_{4,4}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^4(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^4$. В работе [43] было доказано, что элемент $u_{k,l}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^k(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^l$ является почти примитивным в алгебре $L(x,y)$ при $k,l \geqslant 2$, $k \neq l$.

Предложение 3.23. *Пусть $L(x,y)$ — свободная алгебра Ли над полем K, тогда элемент*

$$u_{3,3}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^3(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^3 = ([x,y])(\operatorname{Ad} x)^2 + ([x,y])(\operatorname{Ad} y)^2$$

является почти примитивным элементом в $L(x,y)$, если и только если в поле K не имеет решений уравнение $\alpha^2 + 1 = 0$.

Доказательство. Пусть в левонормированной форме

$$\begin{aligned} f &= a[x,y,y] + b[x,y,x], & (a,b) &\neq (0,0),\\ l &= \delta x + \alpha y, & (\delta,\alpha) &\neq (0,0). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} [f,l] = \delta a[x,y,y,x] + \delta b[x,y,x,x] + \alpha a[x,y,y,y] + \alpha b[x,y,y,x] =\\ = (\delta a + \alpha b)[x,y,y,x] + \delta b[x,y,x,x] + \alpha a[x,y,y,y]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} u_{3,3}(x,y) = [f,l]\Big|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} \Leftrightarrow [x,y,x,x] + [x,y,y,y] =\\ = (\delta a + \alpha b)[x,y,y,x] + \delta b[x,y,x,x] + \alpha a[x,y,y,y], \end{aligned}$$

что эквивалентно системе уравнений

$$\delta a + \alpha b = 0,\ \delta b = 1,\ \alpha a = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \delta^2 = 0,\ b = \frac{1}{\delta},\ a = \frac{1}{\alpha}, (\delta,\alpha) \neq (0,0).$$

Данная система имеет решение тогда и только тогда, когда в поле K разрешимо уравнение $\alpha^2 + 1 = 0$. Поэтому элемент $u_{3,3}(x,y)$ является почти примитивным тогда и только тогда, когда для всех $\alpha \in K$ выполнено $\alpha^2 \neq -1$.

Если же уравнение $\alpha^2 + 1 = 0$ разрешимо и i является его корнем, то при $\delta = 1$, $\alpha = -i$ получаем, что $a = i$, $b = 1$, поэтому для элемента $u_{3,3}(x,y)$, не являющегося почти примитивным, справедливо следующее разложение

$$u_{3,3}(x,y) = \big[i[x,y,y] + [x,y,x], x - iy\big] = \Big[\big[[x,y], x + iy\big], x - iy\Big].$$

$\square$

Предложение 3.24. *Пусть $L(x,y)$ — свободная алгебра Ли над полем K, тогда элемент*

$$u_{4,4}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^4(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^4 = -([x,y])(\operatorname{Ad} x)^3 + ([x,y])(\operatorname{Ad} y)^3$$

не является почти примитивным в $L(x,y)$.

Доказательство. Пусть в левонормированной форме

$$\begin{aligned} f &= a[x,y,x,x] + b[x,y,y,x] + c[x,y,y,y], \qquad && (a,b,c) \neq (0,0,0), \\ l &= \delta x + \alpha y, && (\delta, \alpha) \neq (0,0). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} [f,l] &= \delta a[x,y,x,x,x] + \delta b[x,y,y,x,x] + \delta c[x,y,y,y,x] + \\ &\quad + \alpha a[x,y,x,x,y] + \alpha b[x,y,y,x,y] + \alpha c[x,y,y,y,y] = \\ &\quad = \delta a[x,y,x,x,x] + \delta b[x,y,y,x,x] + \delta c[x,y,y,y,x] + \\ &\quad + \alpha a([[x,y,x],[x,y]] + [x,y,y,x,x]) + \\ &\quad + \alpha b([[x,y,y],[x,y]] + [x,y,y,y,x]) + \alpha c[x,y,y,y,y], \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} [f,l]\Big|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} &= \delta a[x,y,x,x,x] + (\delta b + \alpha a)[x,y,y,x,x] + \\ &\qquad + (\delta c + \alpha b)[x,y,y,y,x] + \alpha c[x,y,y,y,y]. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} & u_{4,4}(x,y) = [f,l]|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow -[x,y,x,x,x] + [x,y,y,y,y] = \delta a[x,y,x,x,x] + (\delta b + \alpha a)[x,y,y,x,x] + \\ &\quad + (\delta c + \alpha b)[x,y,y,y,x] + \alpha c[x,y,y,y,y], \end{aligned}$$

что эквивалентно системе уравнений

$$\delta a = -1, \quad \alpha c = 1, \quad \delta b + \alpha a = 0, \quad \delta c + \alpha b = 0,$$

имеющей решение, например:

$$\delta = -1, \quad \alpha = 1, \quad a = b = c = 1.$$

Тогда представление для $u_{4,4}(x,y)$, не являющегося почти примитивным, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{4,4}(x,y) = [f,l]\Big|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} &= [f,l] - (\alpha a[[x,y,x],[x,y]] + \alpha b[[x,y,y],[x,y]]) = \\ &= [f,l] - [[x,y,x] + [x,y,y],[x,y]] = [f,l] - [[[x,y],x+y],[x,y]] = \\ &= [f,l] - [p,q], \end{aligned}$$

где

$$f=[x,y,x,x]+[x,y,y,x]+[x,y,y,y],\ l=y-x,\ p=[x,y,x]+[x,y,y],\ q=[x,y].$$

Отметим, что множество $\{f,p,q,l\}$ является редуцированным множеством. $\square$

Следствие 3.25. *Существует алгоритм, распознающий почти примитивные однородные элементы алгебры $L(x,y)$ над алгебраически замкнутым полем.*

Доказательство. Пусть элемент $u\in L(x,y)$ имеет степень $d(u)=m>3$ (остальные случаи были разобраны в Предложении 3.21). Пусть для каждого элемента $w\in W^{m-1}$ известны проекции $[w,x]\Big|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle}$, $[w,y]\Big|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle}$, то есть найдены матрицы линейных операторов $\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \langle W^{m-1}\rangle\to\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle$, $\mathcal{A}(w)=(w)(\operatorname{Ad}x)\Big|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle}$, $\mathcal{B}(w)=(w)(\operatorname{Ad}y)\Big|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle}$ в базисе W_{m-1}. Тогда для

$$f=\sum_{w_j\in W^{m-1}}\lambda_j w_j,\quad l=\delta x+\alpha y,$$

где хотя бы одно из λ_j отлично от нуля и $(\delta,\alpha)\neq(0,0)$, выполнено

$$\begin{aligned}&[f,l]\Big|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle}=[f,\delta x+\alpha y]\Big|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle}=\\&=\delta\mathcal{A}(f)+\alpha\mathcal{B}(f)=\sum_{w_j\in W^{m-1}}\big(\delta\lambda_j\mathcal{A}(w_j)+\alpha\lambda_j\mathcal{B}(w_j)\big)=\\&=\sum_j\sum_{m_i\in W^m_{\{x,y\}}}\lambda_j(\delta a_{ij}m_i+\alpha b_{ij}m_i)=\sum_i\Bigg(\sum_j\lambda_j(\delta a_{ij}+\alpha b_{ij})\Bigg)m_i.\end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (3) уравнение (4) превращается в систему из $\mathfrak{L}=|W^m_{\{x,y\}}|$ уравнений

$$\left\{\beta_i=\sum_j\lambda_j(\delta a_{ij}+\alpha b_{ij})\right\}_i\Leftrightarrow\left\{0=\sum_j(a_{ij}\delta\lambda_j+b_{ij}\alpha\lambda_j)-\beta_i=g_i\right\}_i\qquad(5)$$

с неизвестными δ,α,λ_j. По Теореме 3.21 элемент u будет почти примитивным тогда и только тогда, когда данная система не имеет решения. Если поле K алгебраически замкнутое, то система (5) не имеет решение тогда и только тогда, когда редуцированный базис Гребнера-Ширшова идеала $I=\langle g_1,\dots,g_{\mathfrak{L}}\rangle$, порожденного элементами g_i в кольце многочленов от $2+|W^{m-1}_{\{x,y\}}|$ переменных, содержит единицу, что алгоритмически проверяется его вычислением. $\square$

Если единица содержится в редуцированном базисе Гребнера-Ширшова идеала I, то элемент u будет почти примитивным независимо от алгебраической замкнутости поля K.

3.4 Почти примитивность элемента и его старшей части

Теорема 3.26. *Пусть $n > 2$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда*

1. *Пусть элемент $u \in \mathcal{F}(X)$ не является примитивным элементом в $\mathcal{F}(X)$, но старшая часть u° является примитивным элементом в любой собственной подалгебре, порожденной однородными образующими, $u^\circ \in \mathcal{H}^\circ \subsetneq \mathcal{F}(X)$, Тогда элемент u является почти примитивным элементом в $\mathcal{F}(X)$;*

2. *В обратную сторону утверждение 1 верно для однородных элементов;*

3. *Существуют неоднородные элементы в $\mathcal{F}(x, y)$, для которых в обратную сторону утверждение 1 неверно.*

Доказательство. 1. Пусть элемент u не является почти примитивным, тогда существуют собственная подалгебра $\mathcal{H} = \mathrm{alg}\{h_1, \dots, h_k\}$ с редуцированным множеством свободных образующих, в которой элемент u не является примитивным. Рассмотрим подалгебру $\mathcal{H}^\circ = \mathrm{alg}\{h_1^\circ, \dots, h_k^\circ\}$ алгебры $F(X)$ с редуцированным множеством свободных образующих и покажем, что в ней элемент u° не является примитивным. Во-первых, подалгебра $\mathcal{H}^\circ$ является собственной, так как существует $v \in \mathcal{F}(X)$, такой что $d(v) = 1$, $v \notin \mathcal{H}$, следовательно, $v \notin \mathcal{H}^\circ$. Во-вторых, так как $u \in \mathcal{H}$, то $u = f(h_1, \dots, h_k)$, но тогда найдется g, такой что $u^\circ = g(h_1^\circ, \dots, h_k^\circ)$, значит $u^\circ \in \mathcal{H}^\circ$. Наконец, u° не примитивен в $\mathcal{H}^\circ$, так как в противном случае существует старшая часть h_j°, входящая линейно в представление элемента u°. Но тогда образующая h_j входит только линейно в представление элемента u в подалгебре $\mathcal{H}$, а значит, u является примитивным элементом подалгебры $\mathcal{H}$ по Предложению 2.1. Но по условию теоремы элемент u° является примитивным элементом в любой собственной подалгебре, порожденной однородными образующими, а значит примитивен в подалгебре $\mathcal{H}^\circ$. Противоречие.

2. Утверждение очевидно.

3. В качестве примеров можно взять элементы $(xx)y + x$ или $(xy)y + y$ для свободной неассоциативной алгебры $F(x, y)$ и свободной коммутативной

алгебры $A_-(x,y)$; элемент $(xy)y+y$ для свободной антикоммутативной алгебры $A_+(x,y)$ над полем K, в котором уравнение $\alpha^2+1=0$ не имеет решения; элемент $[[x,y],y]+x$ для свободной алгебры Ли $L(x,y)$ над полем K, в котором уравнение $\alpha^2+1=0$ не имеет решения. Как было доказано в Предложении 2.7 данные элементы не являются примитивными. Ясно, что старшие части этих элементов не являются почти примитивными, поскольку имеют вид произведения, а значит, в соответствующей подалгебре по Предложению 2.1 будут непримитивны.

Рассмотрим элемент $u=[[x,y],y]+x$, пусть u принадлежит подалгебре $\mathcal{H}=\mathrm{alg}\{h_1,\ldots,h_k\}\subsetneq L(x,y)$ с редуцированным множеством свободных образующих $H=\{h_1,\ldots,h_k\}$. Тогда, если никакая старшая часть h_i° не входит линейно в u, то без ограничения общности возможны два случая. В первом случае, когда $h_1^\circ=[x,y]$, $h_2^\circ=y$, имеем $h_1=[x,y]+\alpha x+\beta y, h_2=y$. Тогда $H\ni u'=[h_1-\beta h_2,h_2]-u-\alpha(h_1-\beta h_2)=-(\alpha^2+1)x$. Так как в поле K уравнение $\alpha^2+1=0$ не имеет решения, то $u'\neq 0$. Значит, $\{x,y\}\subset H$, поэтому $H=L(x,y)$. Во втором случае, когда $[[h_1^\circ,h_2^\circ],h_3^\circ]=[[x,y],y]$, имеем $h_1=x$, $h_2=y$, поэтому $H=L(x,y)$. Противоречие. Следовательно u является примитивным элементом в H, а значит почти примитивным элементом в $L(x,y)$. Почти примитивность остальных элементов доказывается аналогично.

$\square$

Рассмотрим еще одну серию примеров для утверждения 3 Теоремы 3.26 для свободной неассоциативной (коммутативной) алгебры $\mathcal{F}(X)$. Но в начале докажем следующие леммы.

Лемма 3.27. *Пусть $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ — непустое множество, d_X — весовая функция степени элемента. Предложим, что собственная подалгебра $\mathcal{H}$ алгебры $\mathcal{F}(X)$ порождена редуцированным множеством свободных образующих $H=\{h_1,\ldots,h_k\}$. Тогда при элементарных преобразованиях вида $\tilde{h}_\alpha=\theta h_\alpha+f(h_\beta\mid\beta\neq\alpha)$, $\tilde{h}_\beta=h_\beta$, $\beta\neq\alpha$ с $\theta\neq 0$, $d_X(f(h_\beta\mid\beta\neq\alpha))\leqslant d_X(h_\alpha)$ множество H остается по-прежнему редуцированным множеством свободных образующих подалгебры $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Так как каждое элементарное преобразование вида

$$\begin{cases}\tilde{h}_\alpha=\theta h_\alpha+f(h_\beta\mid\beta\neq\alpha),\\ \tilde{h}_\beta=h_\beta,\ \beta\neq\alpha,\end{cases}\tag{6}$$

при $d_X(f(h_\beta \mid \beta \neq \alpha)) < d_X(h_\alpha)$ не изменяет множество старших частей $\{h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ\}$, а при $d_X(f(h_\beta \mid \beta \neq \alpha)) = d_X(h_\alpha)$ задает элементарное преобразование вида

$$\begin{cases} \tilde{h}_\alpha^\circ & = \theta h_\alpha^\circ + g(h_\beta^\circ \mid \beta \neq \alpha), \\ \tilde{h}_\beta^\circ & = h_\beta^\circ,\ \beta \neq \alpha, \end{cases}$$

возможно с другим элементом g, но таким, что $g(h_\beta^\circ \mid \beta \neq \alpha) = f(h_\beta \mid \beta \neq \alpha)^\circ$. Тем не менее, множество старших частей остается редуцированным множеством, а значит, и множество H так же остается редуцированным. $\square$

Определим следующие элементы: $u_{t,s}(a) = (\ldots((ax_t)x_{t+1})\ldots)x_s \in \mathcal{F}(X)$ для любого $a \in \mathcal{F}(X)$, где $\mathcal{F}(X)$ — свободная неассоциативная ((анти-) коммутативная) алгебра с множеством $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ свободных образующих. Тогда для любого i, $t < i < s$ имеем, что $u_{t,s}(a) = u_{i,s}(u_{t,i-1}(a))$ и элемент $v^\circ = (\ldots((x_1^2 x_2)x_3)\ldots)x_n = u_{1,n}(x_1)$.

Лемма 3.28. *Пусть $\mathcal{H}$ — подалгебра, порожденная редуцированным множеством образующих $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$, $\mathcal{H}^\circ = \operatorname{alg}\{H^\circ\}$, где $H^\circ = \{h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ\}$. Предположим, что $u_{t,n}(a) \in \mathcal{H}$, где $1 \leqslant t < n$ (тогда имеем, что $u_{t,n}^\circ(a) = (\ldots((a^\circ x_t)x_{t+1})\ldots)x_n = u_{t,n}(a^\circ) \in \mathcal{H}^\circ$), но $a^\circ, x_t, \ldots, x_n$ не содержатся в $\mathcal{H}^\circ$ одновременно. Тогда существует минимальное число $m \in \{t+1, \ldots, n\}$, такое что $u_{t,m-1}(a^\circ) \in \mathcal{H}^\circ$, $x_m, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ и более того $u_{t,m-1}(a^\circ)$ является старшей частью некоторой образующей из множества $\widetilde{H}$, $x_m, \ldots, x_n \in \widetilde{H}$, где $\widetilde{H} = \{\widetilde{h}_1, \ldots, \widetilde{h}_k\}$ есть результат применения некоторого элементарного преобразования вида (6) после линейного преобразования множества H, дающего элементы $x_m, \ldots, x_n$.*

Доказательство. Действительно, предположим что m является таким минимальным числом, что $u_{t,n}(a^\circ)$ разлагается как $u_{t,n}^\circ = (\ldots(u_{t,m-1}(a^\circ)x_m)\ldots)x_n$ с $u_{t,m-1}(a^\circ) \in \mathcal{H}^\circ$ и, без ограничения общности, $x_m, \ldots, x_n \in H$ (то есть мы сначала применили некоторое линейное преобразование к множеству образующих). Если никакое h_i° не является линейным слагаемым в $u_{t,m-1}(a^\circ)$, то тогда

$$u_{t,m-1}(a^\circ) = (\ldots((a^\circ x_t)x_{t+1})\ldots)x_{m-1} = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j A_j B_j, \tag{7}$$

где $A_j = A_j(h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ), B_j = B_j(h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ) \in \mathcal{H}^\circ$ — одночлены степени $d_H(A_j), d_H(B_j) \geqslant 1$ и $d_X(A_j) + d_X(B_j) = m$. Из представления (7) следует, что все произведения $\lambda_j A_j B_j$ с $B_j \neq x_{m-1}$ должны сократиться, значит

$$u_{t,m-1}(a^\circ) = \sum_{\substack{\lambda_j \neq 0, \\ B_j = x_{m-1}}} \lambda_j A_j x_{m-1} = (\sum_{\substack{\lambda_j \neq 0, \\ B_j = x_{m-1}}} \lambda_j A_j) x_{m-1} = A x_{m-1}, \tag{8}$$

где $A = \sum \lambda_j A_j \in \mathcal{H}^\circ$ с суммой по всем индексам j для которых $B_j = x_{m-1}$. Согласно (8) имеем, что $u_{t,m-2}(a^\circ) = A \in \mathcal{H}^\circ$, что противоречит с минимальностью числа m. Следовательно, существует старшая часть $h^\circ_{i_1}$, которая является линейным слагаемым в представлении элемента $u_{t,m-1}(a^\circ)$, то есть $u_{t,m-1}(a^\circ) = h^\circ_{i_1} + f(h^\circ_j \mid j \neq i_1)$. По Лемме 3.27 множество $\{\tilde{h}_{i_1} = h_{i_1} + f(h_j \mid j \neq i_1)\} \cup \{h_j \mid j \neq i_1\}$ является редуцированным множеством образующих подалгебры $\mathcal{H}$ и $u_{t,m-1}(a^\circ) = (\ldots((a^\circ x_t)x_{t+1})\ldots)x_{m-1} = \tilde{h}^\circ_{i_1}$. $\square$

Теорема 3.29. *Пусть $\mathcal{F}(X)$ — свободная неассоциативная (коммутативная) алгебра с множеством $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ свободных образующих. Тогда для любого $a \in \mathcal{F}(X)$ элемент $v = u_{1,n}(a) + x_1 = (\ldots(((ax_1)x_2)x_3)\ldots)x_n + x_1$ является почти примитивным в $\mathcal{F}(X)$.*

Доказательство. Как было доказано в Предложении 2.12, элемент v не является примитивным в алгебре $\mathcal{F}(X)$.

Предположим, что $\mathcal{H}$ является собственной подалгеброй $F(X)$, порожденной редуцированным множеством свободных образующих $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$, содержит элемент $v_0 = v = (\ldots((ax_1)x_2)\ldots)x_n + x_1 = v_0^\circ + x_1$ степени $d_X(v) = n + d_X(a)$ со старшей частью $v_0^\circ = (\ldots((a^\circ x_1)x_2)\ldots)x_n \in \operatorname{alg}\{H^\circ\} = \mathcal{H}^\circ$, где $H^\circ = \{h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ\}$. Допустим, что все старшие части не являются линейными слагаемыми в представлении элемента v_0° (иначе элемент $v = v_0$ будет примитивным).

Тогда по Лемме 3.28 (для $v_0^\circ = u_{1,n}(x_1)$ и условия того, что $x_1, \ldots, x_n$ не содержатся в $\mathcal{H}^\circ$ одновременно, что выполняется, так как $\mathcal{H}$ — собственная подалгебра) существуют минимальное $2 \leqslant m_1 \leqslant n$ и, без ограничения общности, образующая h_{i_1}, такие что $h^\circ_{i_1} = u_{1,m_1-1}(a^\circ)$ и $x_{m_1}, \ldots x_n \in H$, H является редуцированным множеством образующих. Рассмотрим элемент $v_1 = v_0 - (\ldots(h_{i_1}x_{m_1})\ldots)x_n = (\ldots(h'_{i_1}x_{m_1})\ldots)x_n + x_1 = u_{m_1,n}(h'_{i_1}) + x_1 \in \mathcal{H}$ с $\ell_X(v_1) < \ell_X(v)$, $h_{i_1} = h^\circ_{i_1} - h'_{i_1}$. Возможны следующие четыре случая:

(a) **"предельный шаг в глубину":** Может случиться, что $h'_{i_1} = 0$, то есть $v_1 = x_1$. Значит, без ограничения общности $x_1 \in H$ (так как $d_X(x_1) = 1$, то элемент $x_1 \in \mathcal{H}$ является линейной комбинацией образующих степени 1, то есть применив некоторое линейное преобразование к H мы получим $x_1, x_{m_1}, \ldots, x_n \in \widetilde{H}$ и множество образующих останется редуцированным множеством) и $x_1 = h_i$ для некоторого i. Следовательно, h_i является линейным слагаемым в представлении $v = (\ldots(h_{i_1}x_{m_1})\ldots)x_n + h_i$, значит элемент v примитивен в $\mathcal{H}$.

(b) **"предельный шаг в ширину":** Предположим, что старшая часть h_i° некоторой образующей из H является линейным слагаемым элемента

v_1°, тогда v зависит от h_i только как от линейного слагаемого, значит h_i не совпадает с другими элементами $h_{i_1}, x_{m_1}, \ldots, x_n$. Следовательно, элемент v является примитивным в $\mathcal{H}$.

(c) **“шаг в глубину”:** Предположим, что элемент $v_1^\circ = (\ldots(h^\circ x_{m_1})\ldots)x_n = u_{m_1,n}(h^\circ)$, где $h^\circ \in \mathcal{H}^\circ$, то есть $h^\circ = f(h_j^\circ \mid j \neq i_1)$, так как $d_X(h_{i_1}) > d_X(h^\circ) = d_X(h'_{i_1})$. Тогда по Лемме 3.27 рассмотрим редуцированное множество образующих $\widetilde{H} = \{\widetilde{h}_{i_1} = h_{i_1} + f(h_j \mid j \neq i_1)\} \cup \{h_j \mid j \neq i_1\}$ и вместо дальнейшего рассмотрения элемента $v_1 = v - (\ldots(h_{i_1}x_{m_1})\ldots)x_n \in \mathcal{H}$, рассмотрим $\widetilde{v}_1 = v - (\ldots(\widetilde{h}_{i_1}x_{m_1})\ldots)x_n = (\ldots(\widetilde{h}'_{i_1}x_{m_1})\ldots)x_n + x_1 = u_{m_1,n}(\widetilde{h}'_{i_1}) \in \mathcal{H}$ с $d_X(v) > d_X(v_1) > d_X(\widetilde{v}_1)$.

(d) **“шаг в ширину”:** Предположим, что ни один из вариантов a)-c) не выполняется и $(h'_{i_1})^\circ \notin \mathcal{H}^\circ$, тогда по Лемме 3.28 существует $m_2 > m_1$, такой что$v_1 = (\ldots(h^\circ x_{m_2})\ldots)x_n$, где $h^\circ = u_{m_1,m_2-1}((h'_{i_1})^\circ) \in \mathcal{H}^\circ$, и, без ограничения общности, существует образующая $h_{i_2} \in H$, такая что $h_{i_2}^\circ = h^\circ = u_{m_1,m_2-1}((h'_{i_1})^\circ)$. Отметим, что h_{i_2} не совпадает ни с каким из элементов $h_{i_1}, x_{m_1}, \ldots, x_n$. Переходим к рассмотрению элемента $v_2 = v_1 - (\ldots(h_{i_2}x_{m_2})\ldots)x_n = (\ldots(h'_{i_2}x_{m_2})\ldots)x_n + x_1 = u_{m_2,n}(h'_{2_1}) + x_1 \in \mathcal{H}$ с $\ell_X(v_2) < \ell_X(v_1)$, $h_{i_2} = h_{i_2}^\circ - h'_{i_2}$.

Далее совершаем шаги шаги “вглубь”(несколько подряд шагов “вглубь” считаем одним шагом “вглубь”, поскольку мы на самом деле модифицируем одну и ту же образующую) или “вширь”, получаем очередной элемент v_s и имеем уменьшение степени $d_X(v_s) \leqslant d_X(v_0) - s$ и сохранение редуцированности множества H, содержащего попарно различные элементы $h_{i_1}, \ldots, h_{i_s}$, $x_{m_1}, \ldots, x_n$, где число s по сути является количеством совершенных шагов “вширь”, добавляющих новую рассматриваемую образующую. Отметим, что после s-го шага “вширь”

$$v = v_0 = \sum_{r=1}^{s} u_{m_r,n}(h_{i_r}) + v_s.$$

Таким образом, за счет уменьшения степени мы совершим, в конце концов, или “предельный вглубь” шаг, или “предельный вширь” шаг, гарантирующий почти примитивность элемента v, кроме одного случая: когда был ровно один ход “вширь” с $m_1 = 2$ (значит $x_2, \ldots, x_n \in H$), а последним ходом был “предельный вглубь” (значит $x_1 \in H$). Но данный случай невозможен, поскольку противоречит собственности подалгебры $\mathcal{H}$. $\square$

3.5 ρ-число однородного элемента свободной алгебры произвольного ранга

Определение 3.30. Пусть $\mathcal{H}^\circ = \mathrm{alg}\{h_1, \ldots, h_k\} \subseteq \mathcal{F}(X)$ — подалгебра $\mathcal{F}(X)$ с редуцированным множеством $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$ однородных свободных образующих. Всякий однородный элемент $u \in \mathcal{H}^\circ$ степени $d_X(u) \geqslant 3$, в представление которого не входит линейно никакая свободная образующая h_i, имеет следующий вид (считаем, что операция умножения в алгебре $\mathcal{F}(X)$ записывается как $a \cdot b$):

$$u = u(h_1, \ldots, h_k) = \Bigg(\sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j A_j B_j\Bigg) + \Bigg(\sum_{\substack{d_X(h_p)=1\\ \gamma_{(l,p)}\neq 0}} \gamma_{(l,p)} h_p C_p + \sum_{\substack{d_X(h_q)=1\\ \gamma_{(r,q)}\neq 0}} \gamma_{(r,q)} D_q h_q\Bigg).$$

Обозначим через

$$u_{AB} = \Bigg(\sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j A_j B_j\Bigg), \quad \widetilde{u} = \Bigg(\sum_{\substack{d_X(h_p)=1\\ \gamma_{(l,p)}\neq 0}} \gamma_{(l,p)} h_p C_p + \sum_{\substack{d_X(h_q)=1\\ \gamma_{(r,q)}\neq 0}} \gamma_{(r,q)} D_q h_q\Bigg), \quad (9)$$

где $(A_j(h_1, \ldots, h_k), B_j(h_1, \ldots, h_k))$ — различные пары регулярных одночленов степени $d_X(A_j) \geqslant 2$, $d_X(B_j) \geqslant 2$, $d_X(A_j) + d_X(B_j) = d_X(u)$, $C_p(h_1, \ldots, h_k)$, $D_q(h_1, \ldots, h_k)$ — однородные элементы степени $d_X(C_p) = d_X(D_q) = d_X(u) - 1$.

Обозначим через J_p множество (возможно пустое) различных свободных образующих h_p степени 1, участвующих в сумме $\widetilde{u}$ в представлении (9), через J_q — аналогичное множество свободных образующих h_q. Определим $J(u) = J_p \cup J_q \subset H$ как множество свободных образующих степени 1, участвующих в представлении элемента u, в качестве множителей некоторых слагаемых "левой" или "правой" скобочной структуры.

Определение 3.31. Если всякая свободная образующая подалгебры $\mathcal{H}^\circ = \mathrm{alg}\{h_1, \ldots, h_k\}$, $u \in \mathcal{H}^\circ$, где $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$ — редуцированное множество однородных образующих, не входит линейно в представление старшей части u°, то определим $\rho_H(u) = |J|$, в противном случае $\rho_H(u) = +\infty$.

Определим $\rho_{\mathcal{H}^\circ}(u)$ как минимальное значение $\rho_H(u)$, где H пробегает все редуцированные множества однородных образующих алгебры $\mathcal{H}^\circ$. Отметим, что $\rho_{\mathcal{H}^\circ}(u), \rho_H(u) \in \{0, 1, \ldots, n, +\infty\}$.

Определение 3.32 (ρ-число)**.** Для однородного элемента $u \in \mathcal{F}(X)$ степени $d_X(u) \geqslant 3$ определим ρ-число в обозначениях предыдущих определений следующим образом:

$$\rho(u) = \min_{u \in \mathcal{H}^\circ \subset F(X)} \rho_{\mathcal{H}^\circ}(u),$$

где минимум берется по всем подалгебрам $\mathcal{H}^\circ \subset F(X)$, имеющим редуцированное множество однородных образующих и содержащим однородный элемент u.

Лемма 3.33. *Для ρ-числа однородного элемента $u \in \mathcal{F}(X)$ степени $d_X(u) \geqslant 3$ выполнены следующие утверждения:*

- $\rho_H(u) = +\infty \iff$ *элемент u является примитивным в* $\mathrm{alg}\{H\}$*;* $\rho_{\mathcal{H}^\circ}(u) = +\infty \iff$ *элемент u является примитивным в $\mathcal{H}^\circ$.*
- $\rho_H(u) = n \Longrightarrow \mathrm{alg}\{H\} = F(X)$*;* $\rho_{\mathcal{H}^\circ}(u) = n \Longrightarrow \mathcal{H}^\circ = F(X)$
- *Если $\rho_{F(X)}(u) < n$, то тогда существует собственная подалгебра $\mathcal{H}^\circ \subsetneq \mathcal{F}(X)$, такая что $\rho_{\mathcal{H}^\circ}(u) \leqslant \rho_{\mathcal{F}(X)}(u)$, и следовательно, элемент u не является примитивным в $\mathcal{H}^\circ$.*
- $\rho(u) \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Доказательство. Если $\rho_H(u) = n$, то существуют n образующих степени 1 в H, являющиеся линейными комбинациями элементом множества X. Следовательно они порождают всю алгебру $\mathcal{F}(X)$ и $\mathrm{alg}\{H\} = \mathcal{F}(X)$.

Если $\rho_{F(X)}(u) < n$, то существует множество Y однородных образующих, такое что $\mathrm{alg}\{Y\} = \mathcal{F}(X)$ и $\rho_Y(u) = \rho_{\mathcal{F}(X)}(u) < n$. Рассмотрим представление (9) элемента u, тогда множество $J \subset Y$ является множеством образующих степени 1, участвующих в представлении (9) элемента u как множители слагаемых "левой" или "правой" скобочной структуры и множество $I = \{A_j, B_j, C_p, D_q\}_{j,p,q}$ всех остальных однородных одночленов степени больше 1. Рассмотрим множество $Z = I \cup J$ и преобразуем его к редуцированному множеству $\widetilde{Z} = \widetilde{I} \cup J$, уничтожив некоторые одночлены степени больше 1. Тогда $u \in \mathrm{alg}\{\widetilde{Z}\}$ и $\rho_{\mathrm{alg}\{\widetilde{Z}\}}(u) \leqslant \rho_{\widetilde{Z}}(u) = |J| = \rho_Y(u) = \rho_{\mathcal{F}(X)} < n$.

Так как любой однородный элемент степени больше 1 не является примитивным элементом в $\mathcal{F}(X)$ по Предложению 2.2, то $\rho(u) \leqslant \rho_{\mathcal{F}(X)}(u) \leqslant n$. $\square$

3.6 Критерии почти примитивности однородного элемента

Теорема 3.34. *Пусть $u \in \mathcal{F}(X)$ — однородный элемент степени $d(u) = m \geqslant 3$. Тогда элемент u является почти примитивным в $\mathcal{F}(X)$, если и только если $\rho(u) = n$.*

Доказательство. Так как любой однородный элемент степени больше 1 не является примитивным элементом $\mathcal{F}(X)$ по Предложению 2.2, то необходимо и достаточно проверить только второе условие — примитивность элемента u в каждой собственной подалгебре, его содержащей. Более того, по Теореме 3.26 необходимо и достаточно рассматривать только собственные подалгебры, порожденные однородными образующими.

Предположим, что $u \in \mathcal{F}(X)$ является однородным элементом, $\rho(u) = n$, и $\mathcal{H}^\circ = \operatorname{alg}\{H\}$ — собственная подалгебра $F(X)$, содержащая элемент u. Тогда $\rho_H(u) \geqslant \rho(u) = n$ и, используя Лемму 3.33, получаем $\rho_H(u) = +\infty$, то есть u примитивный элемент в $\mathcal{H}^\circ$.

Если однородный элемент u является почти примитивным, то для любой собственной подалгебры $\mathcal{H}^\circ$ с редуцированным множеством свободных образующих имеем, что $\rho_{\mathcal{H}^\circ}(u) = +\infty$. Предложим, что $\rho_{F(X)}(u) < n$, тогда по Лемме 3.33 существует подалгебра $\mathcal{H}^\circ$, такая что $\rho_{\mathcal{H}^\circ}(u) \leqslant \rho_{F(X)}(n) < n$. Получаем противоречие. Таким образом, $\rho(u) = \rho_{\mathcal{F}(X)}(u) = n$. $\square$

Сформулируем критерий почти примитивности однородных элементов свободной неассоциативной алгебры $F(X)$.

Теорема 3.35. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле, однородный элемент $u \in F(X)$ степени $d(u) = m \geqslant 3$ имеет представление, аналогичное (1), (9)*

$$u = u\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \Phi_j \Psi_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \Lambda_i + \sum_{i=1}^{n} N_i x_i\right) = u_{\Phi\Psi} + \widetilde{u}, \quad (10)$$

где элемент $\widetilde{u}$ имеет вид

$$\widetilde{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j} \varepsilon_j^{\Lambda_i} M_j\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j} \varepsilon_j^{N_i} M_j\right) x_i,$$

где $\varepsilon_j^{\Lambda_i}, \varepsilon_j^{N_i} \in K$, $(\Phi_j(x_1, \ldots, x_n), \Psi_j(x_1, \ldots, x_n))$ — различные пары одночленов степени $d(\Phi_j) \geqslant 2$, $d(\Psi_j) \geqslant 2$, $d(\Phi_j) + d(\Psi_j) = m$, $\Lambda_x, \Lambda_y, N_x, N_y$ — однородные элементы степени $d(\Lambda_x) = d(\Lambda_y) = d(N_x) = d(N_y) = m - 1$ или нулевые, M_j — упорядоченные одночлены степени $d(M_j) = m - 1$.

Рассмотрим конечно порожденный идеал

$$I = \left(\{F_{i,j}\}_{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}^{i=1,\ldots,n}, \{G_{i,j}\}_{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}^{i=1,\ldots,n}\right)$$

от $2n\mathfrak{L}$ образующих в кольце

$$K\left[\{k_{s,i}\}_{s=1,\ldots,n-1}^{i=1,\ldots,n}, \{a_{s,j}\}_{s=1,\ldots,n-1}^{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}, \{b_{s,j}\}_{s=1,\ldots,n-1}^{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}\right] \cong K\left[y_1, \ldots, y_{(2\mathfrak{L}+n)(n-1)}\right],$$

от $(2\mathfrak{L}+n)(n-1)$ *переменных (где* $\mathfrak{L} = n^{(m-1)C(m-2)}$ *— число различных одночленов степени* $m-1$ *в* $F(X)$, $C(m-2)$ *—* $(m-2)$*-ое число Каталана (число различных расстановок скобок в неассоциативном произведении* $m-1$ *элементов), порожденный многочленами*

$$F_{i,j} = \sum_{s=1}^{n-1} k_{s,i}a_{s,j} - \varepsilon_j^{\Lambda_i}, \quad G_{i,j} = \sum_{s=1}^{n-1} k_{s,i}b_{s,j} - \varepsilon_j^{N_i}, \tag{11}$$

от $2(n-1)$ *переменных степени 2.*

Тогда однородный элемент u является почти примитивным в $F(X)$, *если и только если редуцированный базис Гребнера-Ширшова идеала* I *содержит единицу.*

Доказательство. По Теореме 3.34, однородный элемент u степени $d(u) = m \geqslant 3$ является почти примитивным элементом тогда и только тогда, когда $\rho(u) = n$. Выясним, ρ-число элемента u больше, чем $n-1$ или нет. Рассмотрим для $1 \leqslant s \leqslant n-1$ элементы

$$C_s = \sum_{j=1}^{\mathfrak{L}} a_{s,j}M_j, \quad D_s = \sum_{j=1}^{\mathfrak{L}} b_{s,j}M_j, \quad z_s = \sum_{i=1}^{n} k_{s,i}x_i, \tag{12}$$

где коэффициенты перед одночленами M_j и образующими x_i содержатся в поле K. Будем решать уравнение в неопределенных коэффициентах

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\Lambda_i + \sum_{i=1}^{n} N_i x_i = \sum_{s=1}^{n-1} z_c C_s + \sum_{s=1}^{n-1} D_s z_s. \tag{13}$$

Подставляя в (13) представления элементов из (12), имеем, что

$$\sum_{s=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} k_{s,i}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\mathfrak{L}} a_{s,j}M_j\right) + \sum_{s=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{\mathfrak{L}} b_{s,j}M_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} k_{s,i}x_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{\mathfrak{L}} \varepsilon_j^{\Lambda_i}M_j\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\mathfrak{L}} \varepsilon_j^{N_i}M_j\right)x_i \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{\mathfrak{L}}\sum_{i=1}^{n} x_iM_j\left(\sum_{s=1}^{n-1} k_{s,i}a_{s,j} - \varepsilon_j^{\Lambda_i}\right) + \sum_{j=1}^{\mathfrak{L}}\sum_{i=1}^{n} M_jx_i\left(\sum_{s=1}^{n-1} k_{s,i}b_{s,j} - \varepsilon_j^{N_i}\right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \{F_{i,j} \overset{def}{=} \sum_{s=1}^{n-1} k_{s,i}a_{s,j} - \varepsilon_j^{\Lambda_i} = 0\}_{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}^{i=1,\ldots,n} \\ \{G_{i,j} \overset{def}{=} \sum_{s=1}^{n-1} k_{s,i}b_{s,j} - \varepsilon_j^{N_i} = 0\}_{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}^{i=1,\ldots,n} \end{cases} \tag{14}$$

Мы получили, что система (14) имеет решение тогда и только тогда, когда $\rho(u) \leqslant n-1$. Так как поле K — алгебраически замкнутое, то эта система имеет решение тогда и только тогда, когда

$$1 \notin \mathrm{RedGr}\left(\{F_{i,j}\}_{j=1,\dots,\mathfrak{L}}^{i=1,\dots,n}, \{G_{i,j}\}_{j=1,\dots,\mathfrak{L}}^{i=1,\dots,n}\right)$$

□

Замечание 3.36. Уравнение (13) имеет вид

$$\widetilde{u} = z_1C_1 + \ldots + z_{n-1}C_{n-1} + D_1z_1 + \ldots + D_{n-1}z_{n-1}. \tag{15}$$

Значит элемент u является почти примитивным тогда и только тогда, когда уравнение (15) с неизвестными однородными элементами $\{C_s, D_s, z_s\}_{s=1}^{n-1} \subset F(X)$ степени $d_X(C_s) = d_X(D_s) = d_X(u) - 1$, $d_X(z_s) = 1$, не имеет решений.

Следствие 3.37. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле. Тогда существует алгоритм распознавания почти примитивности однородного элемента u степени $d(u) = m \geqslant 3$ в свободной неассоциативной алгебре $F(X)$ над полем K.*

Доказательство. Согласно Теореме 3.35, необходимым и достаточным условием почти примитивности однородного элемента u является принадлежность единицы редуцированному базису Гребнера-Ширшова идеала, порожденного многочленами с коэффициентами, получаемыми из представления (10) элемента u. Используя коэффициенты $\{\varepsilon_j^{\Lambda_i}, \varepsilon_j^{N_i}\}_{j=1,\dots,\mathfrak{L}}^{i=1,\dots,n}$ мы строим многочлены $\{F_{i,j}, G_{i,j}\}_{j=1,\dots,\mathfrak{L}}^{i=1,\dots,n}$ согласно (11) и запускаем алгоритм Бухбергера построения редуцированного базиса идеала, порожденного этими многочленами в кольце многочленов от $(2\mathfrak{L}+n)(n-1)$ переменных. Если единица содержится в редуцированном базисе, то элемент u является почти примитивным в $F(X)$, иначе нет. □

Замечание 3.38. В Теореме 3.35 алгебраическая замкнутость поля K необходима только в случае, когда $1 \notin \mathrm{RedGr}(I) = \{f_1, \ldots, f_d\}$ для существования решения системы алгебраических уравнений

$$\{f_i = 0\}_{i=1}^d \text{ от переменных } \{k_{s,i}\}_{s=1,\dots,n-1}^{i=1,\dots,n}, \{a_{s,j}\}_{s=1,\dots,n-1}^{j=1,\dots,\mathfrak{L}}, \{b_{s,j}\}_{s=1,\dots,n-1}^{j=1,\dots,\mathfrak{L}}. \tag{16}$$

В общем случае, если $1 \in \mathrm{RedGr}(I)$, то однородный элемент u степени $d(u) = m \geqslant 3$ является почти примитивным в $F(X)$.

Замечание 3.39. В случае $1 \notin \mathrm{RedGr}(I)$, ρ-число однородного элемента u степени $d(u) \geqslant 3$ равно минимальному рангу системы векторов $z_1, \ldots, z_{n-1}$, где $z_s = \sum_{i=1}^{n} k_{s,i} x_i$, среди всех решений системы (16).

Замечание 3.40. В случае свободной (анти-) коммутативной алгебры $A(X)$ уравнение (15) принимает вид

$$\widetilde{u} = \Lambda_1 x_1 + \ldots + \Lambda_n x_n = D_1 z_1 + \ldots + D_{n-1} z_{n-1} \tag{17}$$

и элемент u является почти примитивным тогда и только тогда, когда уравнение (17) с неизвестными однородными элементами $\{D_s = \sum_{j=1}^{\mathfrak{L}} a_{s,j} M_j; z_s = \sum_{i=1}^{n} k_{s,i} x_i\}_{s=1}^{n-1} \subset F(X)$ степени $d_X(D_s) = d_X(u) - 1$, $d_X(z_s) = 1$, не имеет решений, где $\mathfrak{L}$ — количество различных регулярных одночленов M_j степени $m-1$. Идеал I тогда имеет вид

$$I = \left(\{F_{i,j}\}_{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}^{i=1,\ldots,n}\right) = \left(\sum_{s=1}^{n-1} k_{s,i} a_{s,j} - \varepsilon_j^{\Lambda_i}\right)$$

Замечание 3.41. В случае свободной алгебры Ли $L(X)$ уравнение (15) принимает вид

$$\widetilde{u} = [\Lambda_1, x_1] + \ldots + [\Lambda_n, x_n] = \Big([D_1, z_1] + \ldots + [D_{n-1}, z_{n-1}]\Big)\Big|_{W_X^m} \tag{18}$$

и элемент u является почти примитивным тогда и только тогда, когда уравнение (18) с неизвестными однородными элементами $\{D_s = \sum_{j=1}^{\mathfrak{L}} a_{s,j} M_j; z_s = \sum_{i=1}^{n} k_{s,i} x_i\}_{s=1}^{n-1} \subset F(X)$ степени $d_X(D_s) = d_X(u) - 1$, $d_X(z_s) = 1$, не имеет решений, где $\mathfrak{L} = |W^{m-1}|$, $M_j \in W^{m-1}$.

Теорема 3.42. *Однородный элемент $u \in \mathcal{F}(X)$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, степени $d(u) = 2$ является почти примитивным тогда и только тогда, когда элемент u имеет максимальный ранг, то есть* $\mathrm{rank}(u) = n$.

Доказательство. Предположим, что такая существует собственная подалгебра $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{F}(X)$ с редуцированным множеством $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$ однородных образующих, что $u \in \mathcal{F}(X)$ и $u \in \mathcal{H}$ не является примитивным в этой подалгебре. Тогда все h_j, участвующие в представлении элемента u, имеют степень $d(h_j) = 1$, так как иначе h_j является линейным слагаемым степени 2 в представлении элемента $u = u(h_1, \ldots, h_k)$, и следовательно, элемент u примитивен по Предложению 2.1. Так как $\mathcal{H}$ — собственная подалгебра $\mathcal{F}(X)$, то число образующих степени 1 меньше чем n. Значит $\mathrm{rank}(u) < n$.

С другой стороны, если $\mathrm{rank}(u) < n$, то существуют свободные образующие $y_1, \ldots, y_n$ степени 1 в алгебре (X), такие что $u = u(y_1, \ldots, y_{\mathrm{rank}(u)})$. Таким образом $\mathcal{H} = \mathrm{alg}\{y_1, \ldots, y_{\mathrm{rank}(u)}\} \subsetneq \mathcal{F}(X)$ является собственной подалгеброй $\mathcal{F}(X)$ и содержит однородный элемент u степени 2, не являющийся примитивным в $\mathcal{H}$ по Предложению 2.1. □

Следствие 3.43. *Существует алгоритм распознавания почти примитивности однородного элемента u степени $d(u) = m = 2$ в $\mathcal{F}(X)$.*

Доказательство. Согласно Теореме 3.42, необходим и достаточным условием почти примитивности является равенство $\mathrm{rank}(u) = n$. Алгоритм вычисления ранга элемента свободных алгебр шрайеровых многообразий был получен и построен в [16, 42, 43, 48]. □

Замечание 3.44. Отметим, что если скорректировать Определение 3.32 ρ-числа для однородных элементов степени 2, сказав, что всякое слагаемое вида h_pC_p или D_qh_q степени 2 в представлении (9) на самом деле является слагаемым вида $h_{p_1}h_{p_2}$, т.е. правые (левые) сомножители C_p (D_q) являются образующими подалгебры и учитываются в J_p (J_q), то условие $\mathrm{rank}(u) = n$ в точности совпадет с условием $\rho(u) = n$. Тем самым Теорема 3.42 является частным случаем Теоремы 3.34.

Замечание 3.45. В обозначениях Теоремы 3.35

$$I = (\{F_{i,j}, G_{i,j}\}_{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}^{i=1,\ldots,n}) \lhd K\left[\{k_{s,i}\}_{s=1,\ldots,n-1}^{i=1,\ldots,n}, \{a_{s,j}\}_{s=1,\ldots,n-1}^{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}, \{b_{s,j}\}_{s=1,\ldots,n-1}^{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}\right]$$

a) Число порождающих идеала I равно

$$2\mathfrak{L}n \sim n^{\left(\frac{2^{2m-4}}{\sqrt{\pi m}}+1\right)}$$

b) Число переменных кольца равно

$$(2\mathfrak{L} + n)(n-1) \lesssim 2\mathfrak{L}n \sim n^{\left(\frac{2^{2m-4}}{\sqrt{\pi m}}+1\right)}$$

c) Разница между ними равна

$$2\mathfrak{L} - n^2 + n \sim 2\mathfrak{L} \sim n^{\left(\frac{2^{2m-4}}{\sqrt{\pi m}}\right)}.$$

Доказательство. Из асимптотической оценки для m-го числа Каталана следует, что $C(m) \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi} m^{3/2}}$. Следовательно, в виду $\mathfrak{L} = n^{(m-1)C(m-2)}$, получаем заявленные значения. □

3.7 Почти примитивные элементы свободного произведения свободных алгебр

Почти примитивные элементы свободного произведения свободных алгебр изучались в работе [46] и было доказано следующее утверждение для свободной алгебры $\mathcal{F}(X)$ одного из рассматриваемых в данной работе типов.

Предложение 3.46 ([46]). *Пусть $\mathcal{F}(X)$ является свободным произведением двух собственных подалгебр A и B, $\mathcal{F} = A * B$. Пусть также a и b являются однородными почти примитивными элементами A и B, относительно некоторых весовых функций μ_1 и μ_2 на A и B, соответственно (μ_1 и μ_2 могут быть различными). Тогда $a+b$ является почти примитивным элементом в $\mathcal{F}$.*

Техника изучения ранга примитивности позволяет усилить данное утверждение, избавившись от условия однородности элементов a и b.

Теорема 3.47. *Пусть $\mathcal{F}(X)$ является свободным произведением двух собственных подалгебр A и B, $\mathcal{F} = A*B$. Пусть также a и b являются почти примитивными элементами A и B, соответственно. Тогда элемент $a+b$ является почти примитивным элементом $\mathcal{F}(X)$.*

Доказательство. Из Леммы 2.17 следует, что элементы $a, b \in \mathcal{H}$, как только подалгебра $H \subset \mathcal{F}(X)$ содержит элемент $a+b$. Далее можно воспользоваться [46, Лемма 3.8] или повторить доказательство Леммы 2.19 и, на этот раз пользуюсь почти примитивностью элементов a, b, показать, что элемент $a+b$ будет примитивным в $\mathcal{H}$. Наконец, Лемма 2.4 завершает доказательство. $\square$

Таким образом, мы получили возможность строить новые серии почти примитивных элементов, используя любые почти примитивные элементы (а не только однородные) при свободном произведении свободных алгебр одного типа. Например, ясно, что для элементов $u_{1,n_1}(a) \in F(X)$ и $u_{1,n_2}(b) \in F(Y)$ свободных неассоциативных алгебр $F(X)$ и $F(Y)$ ранга n_1 и n_2, соответственно, элемент

$$u = u_{1,n_1}(a) + u_{1,n_2}(b) = (\ldots((ax_1)x_2)\ldots)x_{n_1} + x_1 + (\ldots((by_1)y_2)\ldots)y_{n_2} + y_1$$

будет почти примитивным в свободной неассоциативной алгебре $F(X \sqcup Y)$ для любых $a \in F(X)$ и $b \in F(Y)$.

Отметим еще одно полезное применение Теоремы 3.47.

Предложение 3.48. *Ранг примитивности $\pi(w)$ достигает всех значений $\{1, \ldots, n, \infty\}$ на элементах свободной неассоциативной алгебры, свободной коммутативной алгебры ранга n и $\{2, \ldots, n, \infty\}$ на элементах свободной антикоммутативной алгебры и алгебры Ли ранга n.*

Доказательство. Действительно, у нас есть набор примеров почти примитивных элементов свободных алгебр малых рангов, значит, свободно умножая свободную алгебру малого ранга сколько нужно раз на свои же копии, мы можем получить почти примитивный элемент u для любой $\mathcal{F}_0(x_1, \ldots, x_{n_0}) \subset \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$, где $1 < x_{n_0} \leqslant x_n$. Тогда $\pi_{\mathcal{F}}(u) = \pi_{\mathcal{F}_0}(u) = n_0$ по Следствию 2.16.

Достижимость рангом примитивности значения 1, согласно Предложению 2.14, напрямую зависит от существования степеней элементов в свободных алгебрах. Значение ∞ достигается на примитивных элементах (например свободных образующих). $\square$

Замечание 3.49. Если свободная группа F конечного ранга является произведением двух собственных подгрупп A и B, $F = A * B$, элементы a и b являются почти примитивными в A и B, соответственно, тогда ab является почти примитивным элементом в F, см. [28, 34, 35].

Заключение

В диссертации рассмотрены примитивные и почти примитивные элементы свободных алгебр шрайеровых многообразий: свободной неассоциативной алгебры, свободной (анти-) коммутативной алгебры, свободной алгебры Ли. Введено понятие ранга примитивности элемента в свободных алгебрах шрайеровых многообразий, доказаны его комбинаторные свойства. Исследованы почти примитивные элементы свободной неассоциативной алгебры, свободной (анти-) коммутативной алгебры и свободной алгебры Ли малых рангов, сформулированы критерии и построены алгоритмы проверки почти примитивности однородных элементов в этих алгебрах. Исследована связь почти примитивности элемента и его старшей части, построены новые важные примеры почти примитивных элементах в свободных алгебрах произвольного ранга. Введено понятие ρ-числа однородного элемента свободной алгебры шрайерова многообразия, в терминах ρ-числа доказан критерий почти примитивности однородного элемента степени больше 2 и построен алгоритм проверки почти примитивности. Критерий почти примитивности однородного элемента степени 2 сформулирован и доказан в терминах ранга элемента. Наконец, рассмотрены свободные произведения свободных алгебр шрайеровых многообразий, доказаны утверждения для ранга примитивности и почти примитивности элементов свободных произведений.

Диссертация имеет как теоретический, так и прикладной характер. Результаты работы могут быть использованы в научных исследованиях, а так же для реализации алгоритмов проверки почти примитивности однородных элементов свободных алгебр шрайеровых многообразий и включения их в системы символьных вычислений в этих алгебрах.

Список литературы

[1] В. А. Артамонов, М. С. Бургин, *Некоторые свойства подалгебр в многообразиях линейных Ω-алгебр*. Мат. сб. **87** (1972), № 1, 67–82.

[2] В. А. Артамонов, А. А. Михалев, А. В. Михалев, *Автоморфизмы свободных алгебр шрайеровых многообразий*. Современные проблемы математики и механики, изд. Моск. ун. **4** (2009), № 3, 39–57.

[3] Т. М. Баранович, М. С. Бургин, *Линейные Ω-алгебры*. Усп. мат. наук, **30** (1975), № 4, 61–106

[4] М. С. Бургин, *Шрайеровы многообразия линейных Ω-алгебр*. Мат. сб. **93** (1974), № 135, 554–572.

[5] А. И. Жуков *Приведенные системы определяющих соотношений в неассоциативных алгебрах* Мат. сб. **27**(1950), № 2, 267–280.

[6] А. А. Золотых, А. А. Михалев, *Ранг элемента свободной (р-) супералгебры Ли*. Доклады АН, **334** (1994), № 6, 690–693.

[7] А. А. Золотых, А. А. Михалев, У. У. Умирбаев, *Пример несвободной алгебры Ли когомологической размерности 1*. Усп. мат. наук **49** (1994), № 1, 203–204.

[8] Ю. А. Кашина, *Шрайеровы многообразия n-лиевых алгебр*. Сиб. мат. журн., **32** (1991), № 2, 197–199.

[9] А. И. Корепанов, *Свободные неассоциативные суперкоммутативные алгебры*. Фунд. и прикл. мат. **9** (2003), № 3, 103–109.

[10] Г. П. Кукин, *Примитивные элементы свободных алгебр Ли*. Алг. и лог. **9** (1970), № 4, 458–472.

[11] А. Г. Курош, *Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр*. Мат. сб. **20** (1947), 239–262.

[12] Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп*. Изд. Мир, Москва (1980).

[13] А. А. Михалев, *Подалгебры свободных цветных супералгебр Ли*. Мат. зам. **37**, № 4, (1985), 653–661

[14] А. А. Михалев, *Подалгебры свободных p-суперaлгебр Ли*. Мат. зам. **43**, № 2, (1988), 178–191.

[15] А. А. Михалев, А. В. Михалев, А. А. Чеповский, *Примитивные элементы свободных коммутативных и антикоммутативных неассоциативных алгебр*. Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер.: Мат., мех., инфор. **10** (2010), № 4, 62–81.

[16] А. А. Михалев, А. В. Михалев, А. А. Чеповский, К. Шампаньер, *Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр*. Фундамент. и прикл. мат. **13** (2007), № 5, 171–192.

[17] У. У. Умирбаев, *О шрайреровых многообразиях алгебр*. Алг. и Лог. **33** (1994), № 3, 317–340.

[18] К. Шампаньер, *Алгоритмы реализации ранга и примитивности систем элементов свободных неассоциативных алгебр*. Фундамент. и прикл. мат. **6** (2000), № 4, 1229–1238.

[19] А. И. Ширшов, *Некоторые алгоритмические вопросы для ϵ-алгебр*. Сиб. мат. журн. **3** (1954), № 1, 132–137.

[20] А. И. Ширшов, *Некоторые алгоритмические вопросы для алгебр Ли*. Сиб. мат. журн. **3** (1954), № 2, 292–296.

[21] А. И. Ширшов, *Подалгебры свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр*. Мат. сб. **34** (1954), № 1, 81–88.

[22] А. И. Ширшов, *Подалгебры свободных лиевых алгебр*. Мат. сб. **33** (1953), № 2, 441–452.

[23] А. С. Штерн, *Свободные суперaлгебры Ли*. Сиб. мат. журн. **27** (1886), № 1, 170–174.

[24] V. A. Artamonov, A. A. Mikhalev, A. V. Mikhalev, *Combinatorial properties of free algebras of Schreier varieties of algebras* . In A. Giambruno, A. Regev, M. Zaicev (editors) Polynomial Identities and Combinatorial Methods. Marcel Dekker (2003), 47-99.

[25] C. Aust, *Primitive elements and one relation algebras*. trans. Amer. Math. Soc. **193** (1974), 375–387.

[26] Yu. A. Bahturin, A. A. Mikhalev, M. V. Zaicev, and V. M. Petrogradsky, *Infinite Dimensional Lie Superalgebras*. Walter de Gruyter Publ., Berlin–New York, 1992.

[27] L. A. Bokut, G. P. Kukin, *Algorithmic and Combinatorial Algebra* Kluwer, Dordrecht, 1994.

[28] A. M. Brunner, R. G. Burns, and S. Oates-Williams, *On almost primitive elements of free groups with an application to Fuchsian groups*. Can. J. Math. **45** (1993), 225–254.

[29] P. M. Cohn, *Free ideal rings*. J. Algebra **1** (1964), 47–69.

[30] P. M. Cohn, *Free Rings and Their Relations*. 2nd Ed. Acad. Press (1985).

[31] P. M. Cohn, *On a generalization of the Euclidean algorithm*. Proc. Cambridge Philos. Soc. **57** (1961), 18–30.

[32] P. M. Cohn, *Subalgebras of free associative algebras*. Proc. London Math. Soc. **14** (1964), № 3, 618–632.

[33] L. P. Comerford, *Generic elements of free groups*. Arch. Math. (Basel) **65** (1995), № 3, 185–195.

[34] B. Fine, G. Rosenberger, D. Spellman, and M. Stille. *Test, generic and almost primitive elements in free groups*. Mat. Contemp. **14** (1998), 45–59.

[35] B. Fine, G. Rosenberger, D. Spellman, and M. Stille, *Test words, generic elements and almost primitivity*. Pacific J. Math. **190** (1999), 277–297.

[36] V. K. Kharchenko, *Braided version of Shirshov-Witt theorem*. J. Algebra **294** (2005), № 1, 196–225.

[37] J. Lewin, *On Schreier varieties of linear algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968), 553–562.

[38] J. Lewin, *Free modules over free algebras and free group algebras: the Schreier technique*. Trans. Amer. Math. Soc. **145** (1969), 455–465.

[39] W. Magnus, *Uber diskontinuierliche Gruppen mit einer definierden Relation (Der Freiheitssatz)*. J. Reine Andew. Math. **163** (1930), 141–165.

[40] L. G. Makar-Limanov, *Algebraically closed skew fields*. J. Algebra **93** (1985), 117–135.

[41] A. A. Mikhalev, I. P. Shestakov, *PBW-pairs of varieties of linear algebras*. Comm. in. Algebra **42** (2014), 667–687.

[42] A. A. Mikhalev, V. Shpilrain, J.-T. Yu, *Combinatorial Methods. Free Groups, Polynomials, and Free algebras*. Springer, 2004.

[43] A. A. Mikhalev, U. U. Umirbaev, J.-T. Yu, *Automorphic orbits of elements of free non-associative algebras*. J. Algebra **243** (2001), 198–223.

[44] A. A. Mikhalev, U. U. Umirbaev, J.-T. Yu, *Generic, Almost primitive and test elements of free Lie algebras*. Proc. AMS **130** (2002), № 5, 1303–1310.

[45] A. A. Mikhalev, U. U. Umirbaev, A. A. Zolotykh, *A Lie algebra with cohomological dimension one over field of prime characteristic is not necessary free*. In First International Tainan-Moscow Algebra Workshop Walter de Gruyter Publ., Berlin (1996), 257–264.

[46] A. A. Mikhalev, J.-T. Yu, *Primitive, almost primitive, test, and Δ-primitive elements of free algebras with the Nielsen-Schreier property*. J. Algebra **228** (2000), 603–623.

[47] A. A. Mikhalev, A. A. Zolotykh, *Algorithms for primitive elements of free Lie algebras and superalgebras*. Proc. ISSAC-96, ACM Press, 1996, 161–169.

[48] A. A. Mikhalev, A. A. Zolotykh, *Combinatorial Aspects of Lie Superalgebras*. CRC Press, Boca Raton, 1995.

[49] A. A. Mikhalev, A. A. Zolotykh, *Rank and primitivity of elements of free color Lie (p-)superalgebras*. Intern. J. Algebra Comput. **4** (1994), 617–656.

[50] J. Nilsen, *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppe*. Math. Ann. **91** (1924), 161–183.

[51] D. Puder, *Primitive words, free factors and measure preservation*. Israel J. of Math. (2014), 1–49.

[52] G. Rosenberger, *Alternierende Produkte in freien Gruppen*, Pacific J. Math. **78** (1978), 243–250.

[53] G. Rosenberger, *Uber Darstellungen von Elementen und Untergruppen in freien Produkten*, Springer Lect. Notes Math. **1098** (1984), 142–160.

[54] G. Rosenberger, *A property of subgroups of free groups*. Bull. Austral. Math. Soc. **43** (1991), 269–272.

[55] O. Schreier, *Die Untergruppen den freien Gruppen*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg bf 5 (1927), 161–183.

[56] I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, *Free Akivis algebras, primitive elements, and hyperalgebras*. J. Algebra **250** (2002), 533–548.

[57] U. U. Umirbaev, *Defining relations for automorphism groups of free algebras*. J. Algebra **314** (2007), № 1, 209–225.

[58] U. U. Umirbaev, *Universal derivations and subalgebras of free algebras*. Algebra(Krasnoyarsk, 1993). Berlin: Walter de Gruyter, 1996, pp. 255–271.

[59] J. H. C. Whitehead, *On equivalent sets of elements in a free group*. Ann. Math. **37** (1936), 782–800

[60] E. Witt, *Die Unterringe der freien Lieschen Ringe*. Math. Z. **64** (1956), 195–216.

Публикации автора по теме диссертации

[61] А. В. Климаков, *Почти примитивные элементы свободных неассоциативных (анти)коммутативных алгебр малых рангов*. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, матем. мех. **5** (2012), 19–24. Перевод: *Almost primitive elements of free nonassociative (anti)commutative algebras of small rank*. Moscow Univ. Math. Bulletin **67** (2012), № 5-6, 206–210.

[62] А. В. Климаков, *Однородные почти примитивные элементы свободных неассоциативных (анти)коммутативных алгебр*. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, матем. мех. **6** (2013), 50–54.

[63] А. В. Климаков, А. А. Михалев, *Почти примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр малых рангов*. Фундамент. и прикл. мат. **17** (2012), № 1, 127–141. Перевод: *Almost primitive elements of free nonassociative algebras of small ranks*. J. Math. Sci. **185** (2012), № 3, 430–439. *А. В. Климакову принадлежат основные результаты работы. А. А. Михалёву принадлежит введение и общая редакция работы.*

[64] А. В. Климаков, *Почти примитивные элементы свободных алгебр Ли малых рангов*. Фундамент. и прикл. мат. **18** (2013), № 1, 63–74.

[65] A. V. Klimakov, *Almost primitive elements of free Lie algebras of small ranks*. International Mathematical Conference On occasion the 70th year anniversary of Professor Vladimir Kirichenko, June 13-19, 2012, Mykolayiv, Ukraine, pp. 103-104 (2012).

[66] A. V. Klimakov, *Homogeneous almost primitive elements of free nonassociative algebras*. Международная конференция, посвященная памяти В. П. Шункова "Алгебра и Логика: Теория и Приложения", 21-27 Июля, 2013, Красноярск, Россия, с. 161-163 (2013).