МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Голдаева Анна Алексеевна

ТЯЖЕЛЫЕ ХВОСТЫ, ЭКСТРЕМУМЫ И КЛАСТЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2013

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей
механико-математического факультета
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель *кандидат физико-математических наук,
доцент Лебедев Алексей Викторович*

Официальные оппоненты *доктор физико-математических наук,
профессор Маркович Наталья Михайловна,
главный научный сотрудник
Института проблем управления
имени В. А. Трапезникова РАН,*

*доктор физико-математических наук,
профессор Пергаменщиков Сергей Маркович,
профессор механико-математического
факультета Томского государственного
университета*

Ведущая организация *Центральный экономико-математический
институт РАН*

Защита диссертации состоится 11 апреля 2014 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д.1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, этаж 8).

Автореферат разослан

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В последние десятилетия прикладная теория вероятностей и статистика нередко сталкиваются с тем, что нормальное распределение не является хорошей моделью для описания многих явлений в природе, технике и экономике. Как показал опыт, такие явления все чаще требуют рассмотрения так называемых «тяжелых хвостов», которые делают более вероятными большие значения некоторых величин, по сравнению с гауссовской моделью. Более того, структура зависимостей случайных величин не характерна для гауссовских моделей. Например, для экстремальных событий, таких как превышения высокого уровня, характерна кластерность. Т. е. они имеют тенденцию происходить не по одному, а группами — кластерами[1].

Простейшей моделью, в которой наблюдаются эти эффекты, является линейное стохастическое реккурентное уравнение

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n, \quad n \geq 1, \quad Y_0 \geq 0, \tag{1}$$

где (A_n, B_n), $n \geq 1$, — независимые одинаково распределенные пары неотрицательных случайных величин.

Явление кластеризации также возникает и хорошо изучено в ARCH-процессах и ARMA-процессах со степенными хвостами инноваций, имеющих широкое применение в финансовой математике и эконометрике[1].

В диссертации рассматриваются случаи, когда A_n могут принимать значения, большие и меньшие единицы. Случай $A_n < 1$ п.н. рассматривался Лебедевым[2,3], в этом случае наличие тяжелых хвостов и кластеров зависит от распределения B_n.

В общем случае уравнение (1) может описывать динамику некоторой системы, подверженной случайным возмущениям. Если бы коэффициенты A_n были постоянны и равны A, то система была бы устойчивой при $0 < A < 1$ и неустойчивой при $A \geq 1$. Однако в нашем случае система «осциллирует» между этими двумя состояниями, проходя через периоды устойчивости и неустойчивости случайным образом.

В финансовой математике уравнение (1) может описывать динамику некоторого денежного фонда[1], куда через определенные промежутки времени поступают вклады (величины B_n), а в остальное время изменения капитала происходят пропорционально его величине (со случайными коэффициентами A_n), причем учитываются как доходы, так и расходы.

---

[1] *Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosh T.* Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Berlin: Springer, 2003.

[2] *Лебедев А.В.* Максимумы рекуррентных случайных последовательностей. //Вестн. Моск. ун-та, Матем. Механ., 2001, №1, с. 10-14.

[3] *Лебедев А.В.* Максимумы рекуррентных случайных последовательностей. Случай тяжелых хвостов.// Вестн. Моск. ун-та, Матем. Механ., 2001, №3, с. 63-66.

Модель (1) использовалась в работах, связанных с наследственностью растений[4], в теории управления[5], а также при анализе радиоактивного распада[6].

Поведение экстремумов представляет очевидный интерес в области экономики. Например, экстремальные потери могут характеризовать начало банкротства[7] или кризис на валютном рынке[8].

Теория экстремальных событий имеет широкое применение в страховании[1], она играет важную роль в ценообразовании договоров перестрахования, особенно в области контрактов отдельных событий.

Рассмотрим ряд работ в исторической перспективе. Верваат[9] исследовал сходимость по распределению процесса, заданного уравнением (1). Кестен[10] рассмотрел предельное распределение процесса Y_n, заданного матричным уравнением (1). Де Хаан и др. посвятили свою работу[11] изучению предельного распределения (1) и экстремального индекса. Результаты, полученные де Хааном и др., были обобщены Перфектом[12] для случая марковских процессов, а Туркманом и Амаралом Туркманом[13] были выведены экстремальные свойства для билинейных процессов первого порядка. Пергаменщиков и Ширяев[14] занимались статистической оценкой параметров последовательности, удовлетворяющей (1). Теорией экстремальных значений в управлении рисками занималась Клюппельберг [15]. Также Клюппельберг с Пергаменщиковым[16] изучали стационарные процессы авторегрессии порядка $q \geq 1$ со случайными коэффициентами, которые сводятся к решению векторно-матричного разностного уравнения вида (1). Они доказали существование экстремаль-

---

[4] *Cavalli-Sforza L., Feldman M.W.* Models for cultural inheritance, I. Group mean and within group variation. // Theor .Population Biol., 1973, v. 4, №1, p. 42-55.

[5] *Kalman R.E.* Control of randomly varying linear dynamical systems. // Proc. Symp. Appl. Math., 1962, v. 13, p. 287–298.

[6] *Paulson A.S., Uppulury V.R.R.* Limit laws of a sequence determined by a random difference equation governing a one-compartment system. // Math. Biosci., 1972, v. 13, p. 325–333.

[7] *McCulloch J.H.* Interest rate risk and capital adecuacy for tradional bank and financial intermediaries, in: S.J. Maisel, ed., Risk and Capital Adequacy in Commerical Banks, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1981.

[8] *Flood R.P., Garber P.M.* Collapsing exchange-rate regimes: some linear examples. // Internat. Economics, 1984, v. 17, p. 1–13.

[9] *Vervaat W.* On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely divisible random variables. // Adv. Appl. Probab., 1979, v. 11, p. 750–783.

[10] *Kesten H.* Random difference equations and renewal theory for products of random matrixes// Acta Math., 1973, v. 131, p. 207–248.

[11] *Haan L. de, Resnick S., Rootzén H., Vries G. de* Extremal behaviour of solutions to a stochastic difference equation with applications to ARCH processes. // Stoch. Proc. Appl., 1989, v. 32, p. 213–224.

[12] *Perfekt R.* Extremal behavior of stationary Markov chains with applications. // Ann. Appl. Probab.,1994, v. 4, p. 529–548.

[13] *Turkman K.F., Amaral Turkman M.A.* Extremes of bilinear time series models. // Time Ser. Anal., 1997, v. 18, p. 305–319.

[14] *Пергаменщиков С.М., Ширяев А.Н.* О последовательном оценивании параметра стохастического разностного уравнения со случайными коэффициентами. // Теор. вер. и ее прим., 1992, т. 37, №3, с. 482-501.

[15] *Klüppelberg C.* Risk Management and Extreme Value Theory// Extreme Values in Finance, Telecommunication and the Environment. Boca Raton: Clapman and Hall/CRC, 2004, p. 101–168.

[16] *Klüppelberg C., Pergamenchtchikov S.* The tail of the stationary distribution of a random coefficient $AR(q)$ model. // Ann. Appl. Probab., 2004, v. 14, №2, p. 971–1005.

ного индекса[17], но явных формул, позволяющих конструктивно вычислить его, найдено не было. В настоящей диссертации получены результаты для важных частных случаев при более простых условиях. В работе Скотто и Туркмана[18] рассмотрено двумерное уравнение (1) и изучены экстремальные свойства некоторой подпоследовательности процесса, задаваемого этим уравнением, результаты применимы в классе билинейных и ARCH-процессов. Микош и др.[19] исследовали дробные моменты стационарного решения (1). Ими выведены рекуррентные формулы для дробных моментов, рассмотрен частный случай, когда B_n имеют распределение Эрланга. Получены различные приближения для дробных моментов. Лаурини и Таун[20] занимались изучением экстремального индекса GARCH(1,1)-процессов. Ими было получено аналитическое выражение для экстремального индекса и новые результаты для предельного распределения размера кластеров экстремумов. Непосредственно предшествующей работам автора является работа Новицкой и Яцало[21], где найдены хвостовые индексы для логнормального и логлапласовского случаев, найден явный вид экстремального индекса в случае логлапласовского распределения и доказаны свойства индексов в случае логнормального распределения.

В теории случайных процессов часто бывает удобнее рассматривать процессы с непрерывным временем, чем с дискретным. В диссертации использован новый подход, связанный с рассмотрением рекуррентной последовательности как последовательности наблюдений процесса, описываемого некоторым стохастическим дифференциальным уравнением, через случайные промежутки времени. Белкина и др.[22] рассмотрели проблему использования финансовых инструментов в целях уменьшения рисков страхования. При этом возникает сходное уравнение.

Изучением кластеров экстремальных значений временных рядов занималась Маркович[23]. Она показала, что предельное распределение размера кластера и расстояния между кластерами для стационарных последовательностей при определенных условиях перемешивания является геометрическим. Показано применение полученных результатов в телекоммуникациях, сейсмо-

[17] *Klüppelberg C., Pergamenchtchikov S.* Extremal behaviour of models with multivariate random recurrence representation // Stochastic Processes and their Applications, 2007, № 117, p. 432–456.

[18] *Scotto M.G., Turkman K.F.* On the extremal behavior of sub-sampled solutions of stochastic difference equations. // Portugaliae Math., 2002, v. 59, №3, p. 267–282.

[19] *Mikosch T., Samorodnitsky G., Tafakori L.* Fractional moments of solutions to stochastic reccurence equation, Preprint, March 13, 2012, http://legacy.orie.cornell.edu/gennady/techreports/FractionalMoments.pdf

[20] *Laurini F., Tawn J.A.* The extremal index for GARCH(1,1) processes. // Extremes, 2012, №15, p. 511–529.

[21] *Новицкая О.С., Яцало Е.Б.* Экстремальное поведение рекуррентных случайных последовательностей. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2008, №5, с. 6-10.

[22] *Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Куркина А.О.* О проблеме оптимального управления инвестициями в динамических моделях страхования. I.Различные инвестиционные стратегии и вероятность разорения. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009, т. 16, №6, с. 961-981.

[23] *Markovich N.M.* Modeling clusters of extreme values. // Extremes, 2013, http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10687-013-0176-3.

логии и климатологии. Также Маркович[24] исследовала качество транспортировки пакетов для мультимедийных услуг в оверлейных сетях, где превышение уровня u (пропускная способность канала) процессом R_t (скорости передачи пакетов) является одной из причин потерь пакетов при передаче их по Интернету. Способ выбора пробных пакетов, с помощью которых производятся исследования эффективности работы Интернета, следуя пуассоновскому потоку, т. е. с экспоненциальными временными промежутками между запуском пробных пакетов, описан в статье Бачелли и др.[25] Статья Робинсона и Тауна[26] посвящена выбору масштаба для измерений и его влиянию на экстремальный индекс.

С учетом всего вышеизложенного, исследования, проведенные в диссертации, представляются весьма актуальными.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование экстремального и хвостового индексов и распределений размеров кластеров превышения высокого уровня решений линейных стохастических рекуррентных уравнений.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Введен новый класс распределений, называемых броуновскими смесями, и изучены их свойства. Найдены различные границы экстремального индекса для случая броуновских смесей. Получены точные результаты в случае троичного и обобщенного лапласовского распределений.
2. Предложен новый подход к линейным стохастическим рекуррентным последовательностям, связанный с рассмотрением процесса, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению, наблюдаемого через случайные промежутки времени.
3. Доказана теорема о непрерывной зависимости хвостового и экстремального индексов, а также распределений размеров кластеров от распределений коэффициентов.
4. Рассмотрено обобщение хвостового и экстремального индексов на многомерный случай с приложениями к векторно-матричным стохастическим уравнениям.

[24] *Markovich N.M.* Quality assessment of the packet transport of peer-to-peer video traffic in high-speed networks. // Perform. Evaluation, 2013, v. 70, №1, p. 28–44.

[25] *Baccelli F., Machiraju S., Veitch D., Bolot J.* The role of PASTA in network measurment. // Networking, IEEE/ACM Transactions on, 2009, v. 17, №4, p. 1340 - 1353.

[26] *Robinson M.E., Tawn J.A.* Extremal analysis of processes sampled at different frequencies. // Statist. Soc., 2000, v. 62, №1, p. 117–135.

Методы исследования. В диссертации применяются методы теории вероятностей, теории случайных процессов, а также методы математического анализа, дифференциальных уравнений, линейной алгебры и вычислительные методы.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут использоваться при исследовании случайных последовательностей, а в приложении — для изучения различных явлений в экономике, технике, природе. Теоремы из глав 2 и 3 могут применяться для оценки экстремального индекса случайных последовательностей в тех случаях, когда в явном виде его найти затруднительно.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на:

- Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ под руководством академика РАН, проф. А. Н. Ширяева (Москва, 2012-2013).
- Семинаре «Непараметрическая статистика и временные ряды» под руководством проф. Ю. Н. Тюрина, проф. В. Н. Тутубалина и доц. М. В. Болдина в МГУ (Москва, 2010).
- Семинаре «Статистика экстремальных событий» под руководством проф. Н. М. Маркович в Институте проблем управления РАН (Москва, 2013).
- Семинаре «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании» под руководством к. ф.-м. н. В. И. Аркина и д. ф.-м. н. Э. Л. Пресмана в Центральном экономико-математическом институте РАН (Москва, 2013).
- Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» в МГУ (Москва, 2010, 2012).
- XX Всероссийской Школе-коллоквиуме по стохастическим методам (Йошкар-Ола, 2013).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 9 печатных работах автора, из них 3 — в журналах из перечня ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы, насчитывающего 54 наименования. Объем диссертации составляет 94 страницы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приведен краткий исторический обзор по тематике работы, обоснована актуальность и сформулированы цели исследования, описана структура и взаимосвязь различных глав, а также изложены основные результаты.

Глава 1 диссертации посвящена основным свойствам индексов.

Стационарные процессы вида (1) при некоторых дополнительных условиях обладают двумя важными свойствами.[11] Во-первых, их стационарное распределение имеет степенной хвост, т.е. существуют постоянные $c, \kappa > 0$, такие, что $\mathrm{P}(Y_n > x) \sim cx^{-\kappa}$ при $x \to \infty$, а во-вторых, максимум $M_n = \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ при $n \to \infty$ растет асимптотически, как максимум $[\theta n]$ независимых случайных величин с тем же распределением, где $\theta \in (0, 1)$ является экстремальным индексом процесса Y_n. Средний размер кластера при этом оказывается равным $1/\theta > 1$.

Определение 1.1.1.[27] *Стационарная случайная последовательность Y_n с маргинальной функцией распределения $G(x)$ имеет экстремальный индекс θ, если для любого $\tau > 0$ существует такая последовательность $u_n(\tau)$, что:*

1) $n\bar{G}(u_n(\tau)) \to \tau$ при $n \to \infty$;

2) $\mathrm{P}(M_n \leq u_n(\tau)) \to \exp(-\theta\tau)$, $n \to \infty$.

В параграфе 1 главы 1 изложены предшествующие результаты и доказаны соотношения между индексами в случае, когда имеются процессы типа (1) Y_n и $\tilde{Y}_n$ с коэффициентами A_n и $\tilde{A}_n$, связанными соотношениями типа равенств или неравенств по распределению. Одним из фундаментальных результатов, на который опирается автор, является следующая теорема, доказанная в работе де Хаана и др.[11]

Теорема А. *Пусть процесс Y_n, $n \geq 1$, удовлетворяет уравнению* (1) *и пусть*

1) существует такое число $\kappa > 0$, что $\mathrm{E}A_1^\kappa = 1$, $\mathrm{E}A_1^\kappa \ln^+ A_1 < \infty$, $0 < \mathrm{E}B_1^\kappa < \infty$;

2) распределение $B_1/(1 - A_1)$ невырожденное, а распределение $\ln A_1$ при условии, что $A_1 \neq 0$, не решетчатое.

Тогда

1. Уравнение $Y_\infty \stackrel{d}{=} A_1 Y_\infty + B_1$, где Y_∞ и (A_1, B_1) независимы, имеет единственное решение $Y_\infty \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\infty} B_j \prod_{i=1}^{j-1} A_i$.

2. Если в (1) *положить $Y_0 \stackrel{d}{=} Y_\infty$, то процесс $\{Y_n\}$ стационарный.*

3. При любом начальном условии процесса $\{Y_n\}$ выполнено $Y_n \xrightarrow{d} Y_\infty$, $n \to \infty$.

4. Существует постоянная $c > 0$, такая, что $\mathrm{P}(Y_\infty > x) \sim cx^{-\kappa}$, $x \to \infty$.

---

[27] *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

5. Процесс Y_n имеет экстремальный индекс θ, вычисляемый по формуле $\theta = \int_1^\infty \mathrm{P}(\bigvee_{j=1}^\infty \prod_{i=1}^j A_i \le y^{-1})\kappa y^{-\kappa-1}\,dy$.

Причем для всех $x > 0$ имеем $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(n^{-1/\kappa} M_n \le x) = \exp(-c\theta\, x^{-\kappa})$.

Далее, если N_n — нормализованный по времени точечный процесс превышений уровня $u_n = xn^{-1/\kappa}$, $x > 0$, и N — сложный пуассоновский процесс с интенсивностью $c\theta x^{-\kappa}$ и распределением кратности точек, заданном вероятностями $\pi_k = (\theta_k - \theta_{k+1})/\theta$, $k \ge 1$, где

$$\theta_k = \int_1^{+\infty} \mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{I}\left\{\Pi_{i=1}^j A_i > y^{-1}\right\} = k-1\right)\kappa y^{-\kappa-1}\,dy,$$

в частности $\theta_1 = \theta$, то $N_n \xrightarrow{d} N$, $n \to \infty$.

Замечание 1.1.2. Поведение процесса (1) в достаточно общем случае определяется только величинами A_n. Другими словами, если два процесса вида (1) заданы парами случайных величин (A_n, B_n) и $(A_n, \tilde{B}_n)$, $n \ge 1$, соответственно, причем эти пары удовлетворяют условиям 1, 2 теоремы А, то оба процесса имеют одинаковые индексы хвоста κ и одинаковые экстремальные индексы θ, а также одинаковые θ_k и π_k, $k \ge 1$.

В диссертации вводится новый класс распределений, называемых броуновскими смесями, и доказываются их свойства.

Определение 1.2.1. *Будем говорить, что случайная величина Z имеет распределение $BM(a, \sigma, F_\Delta)$ и называть это распределение броуновской смесью, если $Z \stackrel{d}{=} W_\Delta^{(a,\sigma)}$, где $W_t^{(a,\sigma)} = at + \sigma W_t$, W_t — стандартное броуновское движение, случайная величина Δ с функцией распределения F_Δ неотрицательна и не зависит от $W_t^{(a,\sigma)}$.*

Определение 1.2.2. *Будем говорить, что случайная величина A имеет распределение $GBM(a, \sigma, F_\Delta)$ и называть это распределение геометрической броуновской смесью, если $\ln A$ имеет распределение $BM(a, \sigma, F_\Delta)$.*

В параграфе 3 главы 1 приведены примеры распределений, принадлежащих классу броуновских смесей (асимметричного лапласовского, обобщенных гиперболических и др.).

В параграфе 4 главы 1 вводится новый подход, связанный с рассмотрением процесса (1) как процесса, удовлетворяющего некоторому стохастическому дифференциальному уравнению, наблюдаемого через случайные моменты времени. Основным результатом главы 1 является следующая теорема.

Теорема 1.4.1. *Пусть $A \sim GBM(a, \sigma, F_\Delta)$, где случайная величина $\Delta \ge 0$ и $\mathrm{E}\Delta^{-\frac{2a}{\sigma^2}+1} < \infty$, $a < 0$, $\sigma > 0$. Рассмотрим процесс $(X_t)_{t\ge0}$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению*

$$dX_t = (c + (a + \sigma^2/2) \cdot X_t)\,dt + \sigma X_t dW_t, \qquad X_0 = x \ge 0, \tag{2}$$

где W — стандартное броуновское движение, $c > 0$, $a + \sigma^2/2 < 0$, $\sigma > 0$;

$\Delta_n \overset{d}{=} \Delta$ *независимы в совокупности и не зависят от процесса* W; $T_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$, $Y_n = X_{T_n}$, $n \geq 1$.

Тогда последовательность Y_n *удовлетворяет всем условиям теоремы* А *с* $A_n \overset{d}{=} A$, $n \geq 1$, *и индекс* $\kappa = -\frac{2a}{\sigma^2}$.

Замечание 1.4.1. Если есть процесс Y_n, удовлетворяющий (1) и условиям теоремы А, с $A_n \sim GBM(a, \sigma, F_\Delta)$, то можно построить процесс $\tilde{Y}_n$ с теми же A_n, представляющий собой последовательность наблюдений процесса (2) через случайные промежутки времени $\Delta_n \overset{d}{=} \Delta$, и имеющий те же κ, θ, θ_k и π_k, $k = 1, 2, \ldots$

Глава 2 посвящена нахождению границ экстремального индекса процесса, заданного уравнением (1), в случае броуновских смесей в качестве распределений $Z_1 = \ln A_1$. Чтобы найти равномерную границу экстремального индекса, автор применила подход, который использовала Клюппельберг[15]. Для стохастического дифференциального уравнения (2) введена масштабная функция и мера скорости, с помощью которых оценивается максимум процесса с непрерывным временем, удовлетворяющего уравнению (2). Основным результатами второй главы являются следующие теоремы.

Теорема 2.1.1. *В предположениях теоремы 1.4.1 имеет место следующая оценка:* $\theta \leq \mu \cdot \frac{2a^2}{\sigma^2}$, *где* $\mu = \mathrm{E}\Delta_1$.

Теорема 2.2.1. *Если* $\Delta \overset{d}{=} \mu\Delta_0$, *где* $\mathrm{E}\Delta_0 = 1$, *то* θ *зависит только от* $\frac{a}{\sigma}\sqrt{\mu}$.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $Z_1 \sim BM(a, \sigma, F_\Delta)$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\check{\theta} \leq \theta \leq \hat{\theta},$$

где $\check{\theta} = 1 - \mathrm{E}e^{\kappa \min(Z_1 + T_{\sup}, 0)}$, $\hat{\theta} = 1 - \mathrm{E}e^{\kappa \min(Z_1, 0)}$, $T_{\sup} = \sup_{t \in [0;+\infty)} W_t^{(a,\sigma)}$, $W_t^{(a,\sigma)} = \sigma W_t + at$, W_t — *стандартное броуновское движение,* $a < 0$, $\sigma > 0$.

Теорема 2.5.1. *Пусть* $Z_1 \sim BM(a, \sigma, F_\Delta)$. *Тогда верно следующее неравенство*

$$\theta \leq 1 - 2\Phi\Big(\frac{a}{\sigma}\sqrt{\mu}\Big),$$

где $\mu = \mathrm{E}\Delta$.

Глава 3 посвящена вопросу непрерывности зависимости хвостового и экстремального индексов, а также распределений размеров кластеров от распределений коэффициентов A_n и получению точных результатов в некоторых случаях.

В параграфе 1 главы 3 вводится новый вид сходимости случайных величин, основанный на сходимости их преобразований Меллина-Стилтьеса на отрезке. Пусть даны с. в. A и последовательность с. в. $A^{(m)}$, $m \geq 1$. Пусть на $[0; K]$, $K > 0$, определены и конечны $\psi(s) = \mathrm{E}A^s$ и $\psi_m(s) = \mathrm{E}(A^{(m)})^s$, $m > M$. Будем говорить, что последовательность случайных величин $A^{(m)}$ сходится к случайной величине A в смысле $*$, и обозначать эту сходимость

$A^{(m)} \xrightarrow{*} A$, если $\psi_m(s) \to \psi(s)$, $m \to \infty$, $s \in [0; K]$.

Лемма 3.1.1. *Пусть существует* $\kappa \in (0, K)$ *такое, что* $\psi(\kappa) = 1$. *Тогда если* $A^{(m)} \xrightarrow{*} A$, $m \to \infty$, $s \in [0, K]$, *то уравнение* $\psi_m(s) = 1$ *при достаточно больших* m *имеет единственное решение* $\kappa_m \in (0, K)$ *и* $\kappa_m \to \kappa$, $m \to \infty$.

Доказана основная теорема о непрерывности для хвостового и экстремального индексов, а также распределения размеров кластеров π_k, $k = 1, 2, \ldots$

Теорема 3.1.1. *Пусть последовательности независимых одинаково распределенных пар случайных величин* $(A_n^{(m)}, B_n^{(m)})$, $n \geq 1$, *удовлетворяют условиям теоремы A при каждом* $m \geq 1$. *Пусть существует последовательность независмых одинаково распределенных случайных величин* $\{A_n\}$ *такая, что* $A_1^{(m)} \xrightarrow{*} A_1$, $m \to \infty$, *и существует* $\kappa \in (0, K)$, $K > 0$, *такая, что* $\psi(\kappa) = 1$, *где* $\psi(\kappa) = \mathrm{E}A_1^\kappa$. *Тогда если*

$$\theta_k^{(m)} = \int_1^{+\infty} \mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{I}\left\{\Pi_{i=1}^j A_i^{(m)} > y^{-1}\right\} = k - 1\right) \kappa_m y^{-\kappa_m - 1}\, dy$$

и

$$\theta_k = \int_1^{+\infty} \mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{I}\left\{\Pi_{i=1}^j A_i > y^{-1}\right\} = k - 1\right) \kappa y^{-\kappa - 1}\, dy,$$

то

$$\theta_k^{(m)} \to \theta_k \quad \text{и} \quad \pi_k^{(m)} \to \pi_k, \qquad m \to \infty,$$

где

$$\pi_k^{(m)} = \frac{\theta_k^{(m)} - \theta_{k+1}^{(m)}}{\theta^{(m)}}, \quad \pi_k = \frac{\theta_k - \theta_{k+1}}{\theta}, \qquad k, m \geq 1.$$

Параграф 2 главы 3 посвящен примеру применения теоремы о непрерывности. Рассматривается случай, когда Z_1 имеет троичное распределение, формально не удовлетворяющее условиям теоремы A из работы де Хаана и др.[11]

В параграфе 3 главы 3 рассмотрен случай обобщенного лапласовского распределения, для него найдены хвостовой и экстремальный индексы, а также посчитано распределение размеров кластеров.

Величина Z_1 имеет обобщенное лапласовское распределение, если ее плотность равна

$$g(x) = \begin{cases} r\alpha e^{\alpha x}, & x < 0, \\ (1-r)\beta e^{-\beta x}, & x \geq 0. \end{cases} \qquad \alpha, \beta > 0,\ 0 < r < 1. \tag{3}$$

Теорема 3.3.1. *Пусть величина* Z_1 *имеет распределение с плотно-*

стью (3). Тогда при $r > \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

$$\kappa = r(\alpha+\beta) - \alpha, \qquad \theta = \frac{\kappa^2}{r\beta(\alpha+\beta)}.$$

Для "граничного" случая $\alpha = 0$, $\beta > 0$ распределение размеров кластеров оказывается в точности геометрическим с параметром r.

Глава 4 посвящена обобщению хвостового и экстремального индекса на многомерные рекуррентные последовательности со степенными хвостами маргинальных распределений. Рассматриваются линейные комбинации компонент векторов, и задача сводится к одномерной, при этом индексы превращаются в функции от коэффициентов. Подобный подход в отношении хвостового индекса был применен в работе Кестена[10], а в отношении экстремального индекса — в работе Клюппельберг и Пергаменщикова[16].

Рассмотрим последовательности неотрицательных случайных величин $Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, \ldots, Y_n^{(l)}$, $n \geq 1$, $l \geq 1$, имеющие стационарные распределения с индексами хвостов $\kappa_1, \ldots, \kappa_l$ соответственно, т.е.

$$\mathrm{P}(Y_n^{(i)} > x) \sim c^{(i)} x^{-\kappa_i}, \quad x \to \infty,$$

где $c^{(i)}$ — некоторые постоянные, $i = 1, \ldots, l$. Пусть θ_i — экстремальные индексы для последовательностей $Y_n^{(i)}$, $i = 1, \ldots, l$, соответственно. Рассмотрим последовательность

$$Y_n(z) = z_1 Y_n^{(1)} + \ldots z_l Y_n^{(l)}, \quad z_1, \ldots, z_l > 0.$$

Обозначим $\kappa(z)$ и $\theta(z)$ — ее хвостовой и экстремальный индексы соответственно.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $\kappa_1 < \kappa_i$, $i = 2, \ldots, l$. *Тогда*

$$\kappa(z) = \kappa_1 \qquad \text{и} \qquad \theta(z) = \theta_1.$$

Предположим, что последовательности $Y_n^{(1)}, \ldots, Y_n^{(l)}$ независимы, имеют одинаковые хвостовые индексы $\kappa_1 = \ldots = \kappa_l = \kappa$ и экстремальные индексы $\theta_1, \ldots, \theta_l$. Рассмотрим последовательности $Y_n^*(z) = \max(z_1 Y_n^{(1)}, \ldots, z_l Y_n^{(l)})$ и $Y_n(z) = z_1 Y_n^{(1)} + \ldots + z_l Y_n^{(l)}$, $z_1, \ldots, z_l > 0$.

Теорема 4.2.1. *Экстремальные индексы последовательностей* $Y_n^*(z)$ *и* $Y_n(z)$ *совпадают и равны*

$$\theta(z) = \frac{c^{(1)} z_1^{\kappa}}{c^{(1)} z_1^{\kappa} + \ldots + c^{(l)} z_l^{\kappa}} \theta_1 + \ldots + \frac{c^{(l)} z_l^{\kappa}}{c^{(1)} z_1^{\kappa} + \ldots + c^{(l)} z_l^{\kappa}} \theta_l.$$

Полученные результаты используются для определения хвостового и экстремального индексов стохастических последовательностей, заданных векторно-матричным обобщением уравнения (1).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, кандидату физико-математических наук, доценту А. В. Лебедеву за постановку задачи, постоянное внимание и поддержку при работе над диссертацией.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Голдаева А.А.* Использование процессов с непрерывным временем в исследовании стохастических рекуррентных последовательностей. // Вестник Моск. ун-та. Матем. Механ., 2010, №6, с. 13–18.
2. *Голдаева А.А.* Равномерная оценка экстремального индекса стохастических рекуррентных последовательностей. // Вестник Моск. ун-та. Матем. Механ., 2012, № 2, с. 51–55.
3. *Голдаева А.А.* Экстремальные индексы и кластеры в линейных стохастических рекуррентных последовательностях. // Теор. вер. и ее прим., 2013, т.58, №4, с. 793-802.
4. *Голдаева А.А.* Границы, пределы и точные результаты для экстремальных индексов линейных стохастических рекуррентных последовательностей. // Деп. в ВИНИТИ РАН 28.11.2013, № 334-В2013, 24 с.
5. *Голдаева А.А.* Исследование индексов рекуррентных случайных последовательностей с помощью процессов с непрерывным временем. // Современные проблемы математики и механики, 2011, том 7, № 1, с. 22–28.
6. *Голдаева А.А.* Индексы многомерных рекуррентных стохастических последовательностей. // Современные проблемы математики и механики, 2013, т. 8, №3, с. 42–51.
7. *Голдаева А.А.* Континуальный подход к исследованию стохастических рекуррентных последовательностей. // XVII Международная научная конференция молодых ученых «Ломоносов-2010», секция «Математика», 2010, http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2010/14-1.rar (45_982_14430.pdf).
8. *Голдаева А.А.* Индексы некоторых стохастических рекуррентных последовательностей. // XIX Международная научная конференция молодых ученых «Ломоносов-2012», секция «Математика», 2012, http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2012/1797/14430_561e.pdf
9. *Голдаева А.А.* Тяжелые хвосты, экстремумы и кластеры стохастических рекуррентных последовательностей. // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2013, т. 20, №3, http://www.tvp.ru/conferen/vsppm14/novio010.pdf.