

РОССИЙСКАЯ  
АКАДЕМИЯ НАУК



RUSSIAN  
ACADEMY OF SCIENCES

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
CENTRAL ECONOMICS AND MATHEMATICS INSTITUTE RAS

Россия  
117 418, Москва  
Нахимовский пр., 47

☎ (499) 129 1644  
☎ Fax: (495) 718-9615  
✉ director@cemi.rssi.ru <http://www.cemi.rssi.ru>

47, Nakhimovsky Prospect  
Moscow 117418  
Russia

От 19.03/14 № 14310/7124

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

В Диссертационный совет Д 501.001.85

при Московском государственном университете

имени М.В.Ломоносова

ЦЭМИ РАН как ведущая организация настоящим направляет отзыв о диссертации Голдаевой Анны Алексеевны «Тяжелые хвосты, экстремумы и кластеры линейных стохастических рекуррентных последовательностей», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – «Теория вероятностей и математическая статистика».

Отзыв подготовлен зав. лабораторией ЦЭМИ РАН к.ф.-м.н. Белкиной Т.А. и главным научным сотрудником ЦЭМИ РАН д.ф.-м.н. Пресманом Э.Л.

Приложения: упомянутый отзыв на 5 стр. в 2-х экз.

Ученый секретарь ЦЭМИ РАН

К.Э.Н.



А.И.Ставчиков



«УТВЕРЖДАЮ»  
Директор ЦЭМИ РАН  
академик РАН

*В.Л.Макаров*  
В.Л.Макаров

«15» марта 2014 г.

### Отзыв

ведущей организации – Федерального государственного бюджетного учреждения науки Центральный экономико-математический институт Российской академии наук (ЦЭМИ РАН) –  
о диссертации Голдаевой Анны Алексеевны «Тяжелые хвосты, экстремумы и кластеры линейных стохастических рекуррентных последовательностей», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – «Теория вероятностей и математическая статистика».

### Актуальность темы

Диссертация Голдаевой А.А. относится к такому разделу теории случайных процессов, как теория экстремальных значений. Проблема исследования распределений экстремумов случайных процессов и последовательностей является актуальной во многих областях приложений – при расчете прочности материалов, в метеорологии, экологии, сейсмологии, экономике и др. Поведение экстремумов представляет очевидный интерес в области финансов и страхования, так как экстремальные значения соответствующих процессов естественным образом связаны с описанием таких событий, как банкротство инвестора или фирмы, кризис на валютном рынке, разорение страховой компании и т.д. Если классическая теория экстремальных значений имела дело с изучением распределений для максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин, то в дальнейшем она развивалась по пути исследования последовательностей зависимых величин и стационарных нормальных последовательностей. Однако во многих приложениях на практике выясняется, что структура зависимостей и распределения величин не соответствуют гауссовским моделям, и требуется, в частности, рассмотрение случаев «тяжелых хвостов». В частности, введенный для описания финансовых данных ARCH-процесс оказывается более адекватным по сравнению с обычными линейными моделями с гауссовскими распределениями хвостов. ARCH-процесс рассматривается как один из частных случаев изучаемых в диссертационной работе Голдаевой А.А. линейных стохастических рекуррентных последовательностей, а именно, процессов

авторегрессии первого порядка со случайными коэффициентами. Такие модели могут применяться при описании и исследовании процессов в финансах, страховании, при управлении риском, при анализе радиоактивного распада, изучении наследственности растений и др.

Со свойствами экстремумов последовательностей и процессов тесно связаны свойства превышений растущих уровней. Процессы превышения уровней могут рассматриваться как точечные процессы. Ранее были получены достаточно общие результаты, в которых доказывается сходимость таких процессов к составному пуассоновскому процессу, что позволяет получать интересные результаты об экстремальном поведении. Фундаментальный результат для стационарных процессов рассматриваемого в диссертационной работе типа получен в работе де Хаана. При этом для событий, состоящих в превышении уровней, характерна кластерность, т.е. они имеют тенденцию происходить не по одному, а группами – кластерами, предельное распределение размеров которых и определяет распределение величин скачков составного пуассоновского процесса. Основной характеристикой кластеризации является так называемый экстремальный индекс, являющийся величиной, обратной предельному среднему размеру кластера. Явление кластеризации, в частности, возникает и хорошо изучено в ARCH- и ARMA-процессах со степенными хвостами инноваций, имеющих широкое применение в финансовой математике. Все это позволяет судить об *актуальности* темы диссертационной работы, посвященной изучению экстремумов и кластеров стохастических рекуррентных последовательностей.

### Новизна результатов исследования

Исследованию экстремальных индексов, распределений размеров кластеров экстремальных значений, предельных распределений и индексов хвостов стационарных распределений случайных последовательностей посвящены работы многих авторов: Клоппельберг, Микоша, Лаурини и Тауна, Скотта, Верваата, Кестена, де Хаана, Пергаменщикова, Маркович и др. В частности, Лаурини и Таун исследовали экстремальный индекс GARCH(1,1) – процессов, получив для него аналитическое выражение; для ARCH – процесса первого порядка де Хааном были получены численные значения для хвостового и экстремального индексов, а в более общих предположениях – представление для экстремального индекса и размеров кластеров через распределения случайных множителей в линейной стохастической рекуррентной последовательности (уже упоминавшейся авторегрессии первого порядка со случайными коэффициентами) и доказана пуассоновская сходимость. Явные выражения для экстремальных индексов в таких последовательностях были получены лишь в отдельных случаях (в частности, для случая логлапласовского распределения множителей в работе Новицкой и Яцало). Лебедевым был рассмотрен случай с неотрицательными коэффициентами и множителями, не

превосходящем единицы почти наверное. В диссертационной работе А.А.Голдаевой в случае, когда отсутствует сверху ограничение на множители, получен ряд явных выражений для экстремального индекса а также его верхние и нижние оценки для случая распределений множителей, принадлежащих введеному автором классу распределений – так называемых броуновских смесей и геометрических броуновских смесей. В частности, одним из соответствующих примеров является предложенное автором обобщение ARCH-модели, в которой распределение множителя может быть представлено как геометрическая броуновская смесь. Другими примерами распределений, представимых в виде геометрической броуновской смеси, являются логнормальное, логлапласовское, гамма, а в виде броуновской смеси представимо гиперболическое распределение. Удобство такого представления многих распределений объясняется применением нового, предложенного А.А.Голдаевой, подхода к изучению линейных стохастических рекуррентных последовательностей с помощью рассмотрения некоторого процесса диффузионного типа, наблюдаемого через случайные промежутки времени. Получен также новый результат о непрерывной зависимости хвостового и экстремального индексов, а также распределений размеров кластеров от распределений коэффициентов, с помощью которого установлены, в частности, явные выражения для всех этих показателей с случае трехточечного распределения. Отдельно рассмотрен также случай обобщенного лапласовского распределения, в котором также все указанные величины определяются полученными в работе явными формулами. Кроме того, получены некоторые новые результаты для индексов многомерных последовательностей.

### **Достоверность и значимость результатов**

Все результаты, полученные в работе, строго доказаны с использованием методов теории вероятностей, теории случайных процессов, а также методов математического анализа, дифференциальных уравнений, линейной алгебры. Для построения численных примеров применяются вычислительные методы.

Результаты работы имеют теоретическую ценность и могут применяться при исследовании случайных последовательностей и при изучении экстремальных явлений в экономике, технике и природе. Они могут быть использованы при проведении дальнейших исследований в МГУ, НИУ ВШЭ, РУДН, ЦЭМИ РАН, ИПУ РАН, ИППИ РАН и др.

### **Замечания по содержанию и оформлению диссертации**

К работе имеются следующие замечания.

1. Во введении на стр. 4 после того, как сообщается о том, для какого случая в работе исследуются рекуррентные стохастические последовательности,

говорится, что «в литературе рассматривался более общий случай... Кроме того, рассматривалось многомерное ...обобщение..., которому в данной диссертации посвящена глава 4». Непонятно при этом, как соотносятся результаты для этих более общего и многомерного случаев с результатами диссертации.

2. При описании результата Кестена во введении приводится вид стационарного решения, в котором участвуют не вводившиеся до этого коэффициенты с отрицательными номерами, при описании результата Скотто не поясняется, что значит «периодическая последовательность случайных пар».
3. Приводя формулировку теоремы А (теоремы де Хаана), автор не дает точное определение нормализованного по времени точечного процесса превышений уровня, кроме того, в автореферате уровни указаны с опечаткой: должно быть  $u_n = xn^{1/k}$ , а не  $u_n = xn^{-1/k}$ . В результате для понимания утверждения необходимо обращаться к первоисточнику.
4. В определении процесса, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению (1.9), предполагается, что коэффициент  $d$  строго положителен, параметр  $a$  распределения броуновской смеси отрицателен. Однако в этом случае равенство, устанавливающее связь между этими двумя параметрами в теореме 1.4.1, не выполняется при  $a \geq -\sigma^2/2$ . Кроме того, в этой теореме утверждается, что построенная по наблюдениям процесса с непрерывным временем через случайные промежутки времени последовательность  $Y_n$  удовлетворяет всем условиям теоремы А. Но теорема А касается  $Y_n$ , удовлетворяющих рекуррентному соотношению, включающему коэффициенты  $B_n$ , и содержит условия на эти коэффициенты. Поэтому следовало бы добавить, по-видимому, что найдутся такие  $B_n$ , что условия теоремы А будут выполнены для построенной последовательности.
5. В формулировке теоремы 3.3.2 необходимо было напомнить, о каких  $T_k$  идет речь.
6. В формулировке теоремы 4.2.1 ничего не говорится о значениях коэффициентов  $c^j$ .

### Общее заключение по работе

Данные замечания не уменьшают значимость полученных результатов. Автореферат и публикации (в том числе, в журналах, входящих в утвержденный ВАК перечень ведущих рецензируемых научных изданий) правильно и полно отражают содержание работы. Работа является законченным исследованием и вносит существенный вклад в развитие современной теории случайных

процессов и ее приложений в исследованиях экстремальных событий в природе, технике и экономике.

В целом диссертация Голдаевой Анны Алексеевны «Тяжелые хвосты, экстремумы и кластеры линейных стохастических рекуррентных последовательностей» является самостоятельной научной работой, содержащей решение важной для теории новой задачи, удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» ВАК и может служить достаточным основанием для присуждения ее автору, А.А.Голдаевой, ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – «Теория вероятностей и математическая статистика»

Отзыв обсужден и одобрен на заседании семинара «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании», руководители – к.ф.-м.н. Аркин В.И., д.ф.-м.н. Пресман Э.Л., ученый секретарь – к.ф.-м.н. Белкина Т.А., 18 марта 2014 г.

Зав. Лабораторией ЦЭМИ РАН  
к.ф.-м.н.

Белкина Т.А.

Главный научный сотрудник ЦЭМИ РАН  
д.ф.-м.н.

Пресман Э.Л.