ФГБОУ ВПО
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

На правах рукописи

Галаев Антон Сергеевич

ГРУППЫ ГОЛОНОМИИ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ И СУПЕРМНОГООБРАЗИЙ

специальность 01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена в Отделе алгебры и геометрии Департамента математики и статистики Факультета естественных наук Университета им. Масарика, г. Брно, Чехия

Научный консультант:

Алексеевский Дмитрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ФГБУН «Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН»

Официальные оппоненты:

Базайкин Ярослав Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией римановой геометрии и топологии, ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН»

Кириченко Вадим Федорович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой геометрии ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет»

Онищик Аркадий Львович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова»

Ведущая организация: ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Защита состоится 16 мая 2014 г. в 16:45 на заседании диссертационного совета Д 501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, ауд. 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова» (Москва, Ломоносовский проспект, дом 27, сектор А, 8 этаж).

Автореферат разослан 16 апреля 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84, созданного на базе
ФГБОУ ВПО МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена изучению групп голономии лоренцевых многообразий и супермногообразий, а также связанных с ними геометрических структур.

Понятие группы голономии впервые было введено в работе Э.Картана[1], он использовал группы голономии для классификации римановых симметрических пространств[2]. Группа голономии псевдориманова многообразия является подгруппой Ли группы Ли псевдоортогональных преобразований касательного пространства в некоторой точке многообразия, состоящей из параллельных переносов вдоль кусочно-гладких петель в этой точке. Чаще всего рассматривают связную группу голономии, т.е. компоненту единицы группы голономии, для ее определения нужно рассмотреть параллельные переносы вдоль стягиваемых петель. Алгебра Ли, соответствующая группе голономии, называется алгеброй голономии. Группа голономии псевдориманова многообразия представляет собой инвариант соответствующей связности Леви-Чивита; она дает информацию о тензоре кривизны и о параллельных сечениях векторных расслоений, ассоциированных с многообразием таких, как тензорное расслоение или спинорное расслоение.

Важным результатом является классификация Берже связных неприводимых групп голономии римановых многообразий[3]. Оказывается, что связная группа голономии n-мерного неразложимого, не являющегося локально симметрическим, риманова многообразия содержится в следующем списке: $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(m)$, $\mathrm{SU}(m)$ $(n = 2m)$, $\mathrm{Sp}(m)$, $\mathrm{Sp}(m)\cdot\mathrm{Sp}(1)$ $(n = 4m)$, $\mathrm{Spin}(7)$, $(n = 8)$, G_2 $(n = 7)$. Берже получил лишь список возможных групп голономии, и возникла задача показать, что существуют многообразия с каждой из этих групп голономии. В частности, это привело к знаменитой теореме Калаби-Яу. Только в 1987 году Брайнт[4] построил примеры римановых многообразий с группами голономии $\mathrm{Spin}(7)$ и G_2. Таким образом, на решение этой задачи потребовалось более тридцати лет. Теорема разложения де Рама сводит проблему классификации связных групп голономии римановых многообразий к случаю неприводимых групп голономии[5].

[1] É. Cartan, Les groupes réels simples finis et continus, Ann. Scient. Ecol. Norm. Sup. 31 (1914) 263–355.

[2] É. Cartan, Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, Bull. Soc. math. France 54 (1926) 214–264.

[3] M. Berger, Sur les groupers d'holonomie des variétés àconnexion affine et des variétés riemanniennes, Bull. Soc. Math. France. 83 (1955) 279–330.

[4] R. Bryant, Metrics with exceptional holonomy, Ann. of Math. 126 (2) (1987) 525–576.

[5] G. de Rham, Sur la réductibilitéd'um espace de Riemann, Comm. Math. Helv. 26 (1952) 328–344.

Неразложимые римановы многообразия со специальными (т.е. отличными от $\mathrm{SO}(n)$) группами голономии имеют важные геометрические свойства. Многообразия с большинством из этих групп голономии являются многообразиями Эйнштейна или Риччи-плоскими и допускают параллельные спинорные поля. Благодаря этим свойствам, римановы многообразия со специальными группами голономии получили применения в дифференциальной геометрии и теоретической физике (в теории струн, теории суперсимметрии и M-теории)[6,7,8,9,10,11]. В связи с этим, за последние 20 лет появилось множество конструкций полных и компактных римановых многообразий со специальными группами голономии, например[10,12,13].

Естественно рассмотреть задачу классификации связных групп голономии псевдоримановых многообразий, а в первую очередь, лоренцевых многообразий. Имеется классификация Берже связных неприводимых групп голономии псевдоримановых многообразий[14]. Однако, в случае псевдоримановых многообразий недостаточно рассматривать только неприводимые группы голономии. Теорема разложения Ву[15] позволяет ограничиться рассмотрением связных слабо неприводимых групп голономии. Слабо неприводимая группа голономии не сохраняет никакое невырожденное собственное векторное подпространство касательного пространства. Такая группа голономии может сохранять вырожденное подпространство касательного пространства. В этом случае группа голономии не является редуктивной, в чем и заключается основная сложность.

Долгое время имелись лишь результаты о группах голономии четырех-

[6] Д. В. Алексеевский, Римановы пространства с необычными группами голономии, Функ. ан. прил. 2 (2) (1968) 1–10.

[7] А. Бессе, Многообразия Энштейна. Пер. с англ. Т. 2. М.: Мир, 1990.

[8] S. Cecotti, A Geometric Introduction to F-Theory, Lectures Notes, SISSA, 2010.

[9] S. S. Gubser, Special holonomy in string theory and M-theory, Strings, branes and extra dimensions. TASI 2001, 197–233, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004.

[10] D.Joyce, Riemannian holonomy groups and calibrated geometry. Oxford Uni. Press, 2007.

[11] B. McInnes, Methods of holonomy theory for Ricci-flat Riemannian manifolds, J. Math. Phys. 32 (4) (1991) 888–896.

[12] Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович, Метрики с группой голономии G_2, связанные с 3-сасакиевым многообразием, Сиб. матем. журн. 49 (1) (2008) 3–7.

[13] Д. В. Егоров, QR-подмногообразия и римановы метрики с группой голономии G_2, Матем. заметки 90 (5) (2011) 781–784.

[14] см. сноску 3 на с. 1.

[15] H. Wu, On the de Rham decomposition theorem, Illinois J. Math. 8 (1964) 291–311.

мерных лоренцевых многообразий[16,17,18,19,20]. Только в 1993 году Берард-Бержери и Икемакхен сделали первый шаг к классификации связных групп голономии лоренцевых многообразий произвольной размерности[21]. Они получили классификацию слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми, подалгебр лоренцевой алгебры Ли $\mathfrak{so}(1,n)$. Другой важный шаг к классификации связных групп голономии лоренцевых многообразий сделал Лайстнер[22], а завершает эту классификацию настоящая работа.

Лоренцевы многообразия со слабо неприводимыми, не являющимися неприводимыми, группами голономии допускают параллельные распределения изотропных прямых, такие многообразия называют также многообразиями Волкера[23]. Эти многообразия изучаются в геометрических работах, например[23,24,25], а также в физических работах[26,27,28]. В частности, в работах[29,30,31] выражается надежда, что лоренцевы многообразия со специальными группами голономии найдут применения в теоретической физике, например, в М-теории и теории струн. Это показывает необходимость

---

[16] В. В. Астраханцев, О группах голономии четырехмерных псевдоримановых пространств, Матем. заметки 9 (1) (1971) 59–66.

[17] R. Ghanam, G. Thompson, Two special metrics with R_{14}-type holonomy, Class. Quantum Grav. 18 (2001) 2007–2014.

[18] T. Jacobson, J. D. Romano, The spin holonomy group in general relativity, Comm. Math. Phys. 155 (2) (1993) 261–276.

[19] G. S. Hall, D. P. Lonie, Holonomy groups and spacetimes, Class. Quantum Grav. 17 (6) (2000) 1369–1382.

[20] R. P. Kerr, J. N. Goldberg, Some applications of the infinitesimal-holonomy group to the Petrov classification of Einstein spaces, J. Math. Phys. 2 (1961) 327–332.

[21] L. Berard-Bergery, A. Ikemakhen, On the Holonomy of Lorentzian Manifolds, Proceeding of symposia in pure math. 54 (1993) 27–40.

[22] T. Leistner, On the classification of Lorentzian holonomy groups, J. Differential Geom. 76 (3) (2007) 423–484.

[23] M. Brozos-Vázquez et al, The geometry of Walker manifolds, Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics 5. Williston: Morgan & Claypool Publishers, 2009.

[24] R. Bryant, Pseudo-Riemannian metrics with parallel spinor fields and vanishing Ricci tensor, Sémin. Congr., 4, Soc. Math. France, 2000, 53–94.

[25] R. Schimming, Riemannsche Räume mit ebenfrontiger und mit ebener Symmetrie, Math. Nachr. 59 (1974) 129–162.

[26] J. M. Figueroa-O'Farrill, Breaking the M-waves, Class. Quantum Grav. 17 (15) (2000) 2925–2947.

[27] J. Grover at. al., Gauduchon-Tod structures, Sim holonomy and de Sitter supergravity, J. High Energy Phys. 7 (2009) 069.

[28] K. Sfetsos, D. Zoakos, Supersymmetry and Lorentzian holonomy in various dimensions, J. of High Energy Physics 9 (2004) 10–27.

[29] J. Brannlund, A. Coley, S. Hervik, Supersymmetry, holonomy and Kundt spacetimes, Class. Quantum Grav. 25 (2008) 195007, 10 pp.

[30] G. W. Gibbons, C. N. Pope, Time-Dependent Multi-Centre Solutions from New Metrics with Holonomy Sim$(n-2)$, Class. Quantum Grav. 25 (2008) 125015, 21pp.

[31] См. ссылку 8 на с. 2.

изучения групп голономии лоренцевых многообразий и связанных с ними геометрических структур. Кроме настоящей работы этому посвящены работы[32,33,34,35,36,37,38].

Теория супермногообразий возникла после открытия теоретическими физиками суперсимметрии[39,40]. В последнее время появился интерес к римановым супермногообразиям[41,42,43,44]. В частности к супермногообразиям Калаби-Яу[45], которые, как мы увидим, представляют собой римановы супермногообразия с алгебрами голономии, содержащимися в супералгебре Ли $\mathfrak{su}(p_0, q_0|p_1, q_1)$.

Возникает задача изучения групп голономии связностей на супермногообразиях, а в первую очередь — групп голономии римановых супермногообразий. До настоящей работы отсутствовало определение группы голономии, которое бы было прямым обобщением понятия обычной группы голономии и сохраняло бы ее свойства. Теоретические физики использовали понятие групп голономии супермногообразий[46,47], однако они рассматривали группу голономии как группу параллельных переносов. Категорные соображе-

[32] H. Baum, Holonomy groups of Lorentzian manifolds — a status report, In: Global Differential Geometry, eds. C.Bär, J. Lohkamp and M. Schwarz, 163–200, Springer Proceedings in Mathematics 17, Springer-Verlag, 2012.

[33] H. Baum, O. Müller, Codazzi spinors and globally hyperbolic manifolds with special holonomy, Math. Z. 258 (1) (2008) 185–211.

[34] H. Baum, K. Lärz, T. Leistner, On the full holonomy group of special Lorentzian manifolds, http://arXiv:1204.5657.

[35] Я. В. Базайкин, Глобально гиперболические лоренцевы пространства со специальными группами голономии, Сиб. матем. журн. 50 (4) (2009) 721–736.

[36] Ch. Boubel, On the holonomy of Lorentzian metrics, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 16 (3) (2007) 427–475.

[37] T. Krantz, Kaluza-Klein-type metrics with special Lorentzian holonomy, J. Geom. Phys. 60 (1) (2010) 74–80.

[38] T. Leistner, Lorentzian manifolds with special holonomy and parallel spinors, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 69 (2002) 131–159.

[39] Д. А. Лейтес, Введение в теорию супермногообразий, УМН 35 (1) (1980) 3–57.

[40] Ю. И. Манин, Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.

[41] M. Asorey, P. M. Lavrov, Fedosov and Riemannian supermanifolds, J. Math. Phys. 50 (1) (2009) 013530, 16 pp.

[42] D. V. Alekseevsky, V. Cortés, C. Devchand and U. Semmelmann, Killing spinors are Killing vector fields in Riemannian supergeometry, J. Geom. Phys. 26 (1–2) (1998) 37–50.

[43] O. Goertsches, Riemannian Supergeometry, Math. Z. 260 (3) (2008) 557–593.

[44] D. A. Leites, E. Poletaeva, V. Serganova, On Einstein equations on manifolds and supermanifolds, J. Nonlin. Math.Phys. 9(4) (2002) 394–425.

[45] M. Roček, N. Wadhwa, On Calabi-Yau supermanifolds, Adv. Theor. Math. Phys. 9 (2) (2005) 315–320.

[46] В. П. Акулов, Д. В. Волков, В. А. Сорока, О калибровочных полях на суперпространствах с различными группами голономии, Письма в ЖЭТФ 22 (7) (1975) 396–399.

[47] В. П. Акулов, Д. В. Волков, В. А. Сорока, Об общековариантных теориях калибровочных полей на суперпространствах, Письма в ЖЭТФ 31 (1) (1977) 12–22.

ния подсказывают, что группа голономии связности на супермногообразии должна быть супергруппой Ли, а супергруппа Ли не описывается своими точками. Можно рассмотреть чисто нечетное супермногообразие со связностью. Такое супермногообразие представляет собой одну точку с дополнительной структурой, поэтому имеется только одна (тривиальная) петля, тем не менее, связность может быть неплоской, а значит группа голономии должна быть нетривиальной.

Далее, естественно рассмотреть проблему классификации групп голономии римановых супермногообразий.

В работе[48] авторы пишут: „Вопрос выбора группы голономии пространства является основным моментом для определения физического содержания теории, использующей идею общековариантного рассмотрения." Однако выбирать можно только из списка возможных групп голономии, а для этого нужна классификация.

Цель работы. Целью работы является получение классификации связных групп голономии лоренцевых многообразий и ее применений, а также создание теории групп голономии супермногообразий и получение классификации неприводимых связных групп голономии римановых супермногообразий.

Основные результаты диссертации.

1) Получена геометрическая интерпретация классификации Берарда-Бержери и Икемакхена слабо неприводимых подалгебр лоренцевой алгебры Ли.

2) Получено полное описание тензора кривизны многообразия Волкера.

3) Построены метрики, реализующие всех кандидатов в алгебры голономии лоренцевых многообразий.

4) Получена классификация алгебр голономии лоренцевых многообразий Эйнштейна, найден способ упрощения уравнения Эйнштейна, построены примеры метрик Эйнштейна специального вида.

5) Классифицированы римановы и лоренцевы многообразия, допускающие локальные рекуррентные спинорные поля в терминах их алгебр голономии.

6) Получена локальная классификация конформно плоских лоренцевых многообразий со специальными группами голономии.

7) Получена локальная классификация 2-симметрических лоренцевых многообразий.

8) Определены группы голономии связностей на локально свободных пучках над супермногообразиями; показано, что эти группы обладают боль-

[48] См. ссылку 47 на с. 4.

шинством свойств групп голономии обычных многообразий.
9) Получена классификация одного класса неприводимых групп голономии римановых супермногообразий.

Научная новизна, теоретическое и практическое значение работы. Все основные результаты диссертации являются новыми, снабжены доказательствами и своевременно опубликованы.

Диссертация имеет теоретический характер, ее результаты могут быть применены для дальнейшего исследования геометрии лоренцевых многообразий и супермногообразий с каждой из возможных групп голономии. Результаты работы могут быть применены также в теоретической физике, например, в теории относительности, теории струн, теории супергравитации и M-теории.

Методика исследования. Используются теории представлений простых групп Ли и супергрупп Ли, стандартные методы теории групп голономии, дифференциальной геометрии и супергеометрии, а также метод исследования структуры тензора кривизны, развитый диссертантом.

Апробация работы. Основные результаты докладывались:

На конференциях:

На молодежной школе-конференции „Лобачевские чтения" (Казань, 2002, 2005, 2007 гг.).

На ежегодной научной апрельской конференции механико-математического факультета Саратовского государственного университета (апрель 2003, 2004, 2005 гг.).

На международной конференции „Shimura varieties, lattices and symmetric spaces" (Аскона, Швейцария, май 2004 г.).

На летней школе-конференции „Arithmetic and Geometry" (Корин, Германия, май 2005 г.).

На международной школе-конференции „Geometry and Physics" (Срни, Чехия, январь 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013 гг.).

На международной научной конференции „Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры", посвященной 100-летию со дня рождения профессора В.В. Вагнера (Саратов, ноябрь 2008 г.).

На семинаре „Современные проблемы дифференциальной геометрии", посвященном 80-летию со дня рождения профессора В.В. Вишневского (Казань, ноябрь 2009 г.).

На международной научной конференции „Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation" посвященной 100-летию со дня рождения профессора А.З. Петрова (Казань, ноябрь 2010 г.).

На международной научной конференции „XIII International Conference Geometry, Integrability and Quantization" (Св. Константина и Елены, Болгария, июнь 2011 г.).

На международной научной конференции „IV Congress of the Turkic World Mathematical Society" (Баку, Азербайджан, июль 2011 г.).

На международной научной конференции „Differential geometry and its applications" (Брно, Чехия, август 2010, август 2013 гг.).

На конференциях в качестве приглашенного докладчика:

На международном симпозиуме „Holonomy Groups and Applications in String Theory" (Гамбург, Германия, июль 2008 г.).

На международной научной конференции „Contributions in Differential Geometry: a round table in occasion of the 65th birthday of Lionel Berard Bergery" (Люксембург, Сентябрь 2010 г.).

На международной научной конференции „Symmetries in Differential Geometry and Mathematical Physics" in honor of D.V. Alekseevsky (Люксембург, сентябрь 2012 г.).

На летней школе „Summer school on Differential Geometry and Supersymmetry" (2 лекции, 2 семинара, Гамбург, Германия, сентябрь 2012 г.).

На семинарах:

На семинаре по дифференциальной геометрии в университете им. Гумбольдта под руководством проф. Хельги Баум (Берлин, июнь 2003, декабрь 2003, апрель 2005, июнь 2007, декабрь 2009, июнь 2010 гг.).

В институте Ервина Шредингера (Вена, Австрия, ноябрь 2005 г.).

На заседании кафедры геометрии Казанского государственного университета под руководством проф. Б.Н. Шапукова (декабрь 2005 г.).

На семинаре по дифференциальной геометрии в университете Масарика под руководством проф. Ивана Коларжа (Брно, Чехия, май 2007, май 2008, апрель 2009, декабрь 2010, апрель 2011, октябрь 2012, апрель 2013 гг.).

На „Центрально-Европейском Семинаре" по геометрии (Брно, Тельч, Микулов, Чехия, апрель 2007, ноябрь 2007, февраль 2008, ноябрь 2008, ноябрь 2009, апрель 2010, ноябрь 2010, май 2011, ноябрь 2011, ноябрь 2012 гг.).

На математическом семинаре гамбургского университета (Гамбург, Германия, ноябрь 2007 г.).

На семинаре по геометрии в стокгольмском университете под руководством проф. С.А. Меркулова (Стокгольм, Швеция, ноябрь 2008 г.).

На семинаре по дифференциальной геометрии гамбургского университета под руководством проф. Висентэ Кортеса (Гамбург, Германия, июнь 2010 г.).

На заседании Кафедры теории относительности и гравитации Казанского (Приволжского) Федерального университета под руководством проф. А.В. Аминовой (1 февраля 2012 г.).

На семинаре „Дифференциальная геометрия и приложения" под руководством академика РАН, проф. А.Т. Фоменко, Московский Государственный университет (19 ноября 2012 г., 16 сентября 2013 г.).

На семинаре „Геометрия, топология и их приложения" под руководством академика РАН, проф. И.А. Тайманова, Институт математики Сибирского отделения РАН (18, 21 февраля 2013 г.).

В международном математическом центре им. Штефана Банаха Польской академии наук (Варшава, Польша, 4 октября 2013 г.).

На заседании кафедры дифференциальной геометрии и приложений под руководством академика РАН, проф. А.Т. Фоменко, Московский Государственный университет (9 октября 2013 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1–32]. Работы [1–8] опубликованы в российских журналах из списка ВАК. Работы [9–20] опубликованы в иностранных журналах, цитируемые в базе Scopus, т.е. из списка ВАК. Работы [21,22] представляют собой главы в книгах. Работы [11,13,18,21,22] являются совместными; работы [11,18] получены в процессе неразделимой творческой деятельности авторов; в работе [13] соискателю принадлежат результаты для случая пространств Эйнштейна с ненулевой космологической константой; работы [21,22] носят обзорный характер.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на 13 параграфов, и списка литературы. Параграфы разделены на пункты. Диссертация изложена на 245 страницах текста, библиография содержит 186 наименований.

Содержание работы.

Во введении дается обзор современного состояния теории групп голономии римановых и лоренцевых многообразий, формулируются основные задачи, а также описываются результаты, составляющие основное содержание диссертации.

В главе 1 решается проблема классификации алгебр голономии и тензоров кривизны лоренцевых многообразий.

В параграфе 1.1 излагаются необходимые сведения из теории групп голономии, приводятся определения и основные теоремы, а также результаты Берже о классификации неприводимых групп голономии римановых и псевдоримановых многообразий.

В параграфе 1.2 мы приступаем к изучению алгебр голономии лоренцевых многообразий. Рассмотрим связное лоренцево многообразие (M, g) размерности $n + 2 \geq 4$. Отождествим касательное пространство в некоторой точке многообразия (M, g) с пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,n+1}$. Будем обозначать метрику Минковского на $\mathbb{R}^{1,n+1}$ символом g. Тогда алгебра голономии $\mathfrak{g}$ многообразия (M, g) в этой точке отождествляется с подалгеброй лоренцевой алгебры Ли $\mathfrak{so}(1, n+1)$. Согласно теореме Ву, (M, g) не является локально произведением псевдоримановых многообразий тогда и только тогда, когда его алгебра голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n + 1)$ — слабо неприводима. Поэтому будем предполагать, что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n + 1)$ — слабо неприводима. Известно, что если $\mathfrak{g}$ — неприводима, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, n + 1)$. Итак, мы можем предполагать, что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ — слабо неприводима и не является неприводимой, тогда $\mathfrak{g}$ сохраняет некоторую изотропную прямую $\ell \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$. Зафиксируем произвольный изотропный вектор $p \in \ell$, тогда $\ell = \mathbb{R}p$. Зафиксируем какой-либо изотропный вектор q такой, что $g(p, q) = 1$. Подпространство $E \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$, ортогональное векторам p и q — евклидово; чаще всего будем обозначать это пространство через $\mathbb{R}^n$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Получаем базис Витта $p, e_1, \dots, e_n, q$ пространства $\mathbb{R}^{1,n+1}$.

Обозначим через $\mathfrak{so}(1, n + 1)_{\mathbb{R}p}$ подалгебру в $\mathfrak{so}(1, n + 1)$, сохраняющую изотропную прямую $\mathbb{R}p$. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(1, n + 1)_{\mathbb{R}p}$ может быть отождествлена со следующей матричной алгеброй Ли:

$$\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} a & X^t & 0 \\ 0 & A & -X \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \right| a \in \mathbb{R},\ X \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathfrak{so}(n) \right\}.$$

Отождествим матрицу, приведенную выше, с тройкой (a, A, X). Получаем разложение $\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(n)) \ltimes \mathbb{R}^n$. Пусть $\mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ — связная подгруппа Ли группы Ли $\mathrm{SO}(1, n + 1)$, сохраняющая изотропную прямую $\mathbb{R}p$. Напомним, что для всякой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ имеем разложение $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, где $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ есть коммутант $\mathfrak{h}$, а $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ — центр $\mathfrak{h}$. Следующую теорему доказали Берард-Бержери и Икемакхен[49].

Теорема 1.2.1. *Подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n + 1)_{\mathbb{R}p}$ — слабо неприводима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли одного из следующих типов:*

Тип 1. $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}) \ltimes \mathbb{R}^n$, *где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — подалгебра;*

[49]См. ссылку 21 на с.3

Тип 2. $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n$, *где* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — *подалгебра;*

Тип 3. $\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi} = \{(\varphi(A), A, 0) | A \in \mathfrak{h}\} \ltimes \mathbb{R}^n$, *где* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — *подалгебра с условием* $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \neq \{0\}$ *и* $\varphi : \mathfrak{h} \to \mathbb{R}$ — *ненулевое линейное отображение со свойством* $\varphi|_{\mathfrak{h}'} = 0$*;*

Тип 4. $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi} = \{(0, A, X + \psi(A)) | A \in \mathfrak{h}, X \in \mathbb{R}^m\}$, *где имеет место ортогональное разложение* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ *такое, что* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(m)$, $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \geq n - m$ *и* $\psi : \mathfrak{h} \to \mathbb{R}^{n-m}$ — *сюръективное линейное отображение со свойством* $\psi|_{\mathfrak{h}'} = 0$.

Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ ассоциированная, выше со слабо неприводимой подалгеброй $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$, называется *ортогональной частью* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Первоначальное доказательство этой теоремы – алгебраическое и не дает никакую интерпретацию полученных алгебр. Мы приводим геометрическое доказательство этого результата вместе с наглядной интерпретацией. Этот результат опубликован в [8, 32, 30].

Теорема 1.2.2. *Имеет место изоморфизм групп Ли* $\mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p} \simeq \mathrm{Sim}^0(n)$, *где* $\mathrm{Sim}^0(n)$ *– связная группы Ли преобразований подобия евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$. *При этом изоморфизме, слабо неприводимые подгруппы Ли в* $\mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ *соответствуют транзитивным подгруппам Ли в* $\mathrm{Sim}^0(n)$.

Используя результаты из[50], можно легко классифицировать связные транзитивные подгруппы в $\mathrm{Sim}^0(n)$. Далее будем обозначать алгебру Ли $\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ через $\mathfrak{sim}(n)$.

В параграфе 1.3 мы изучаем тензоры кривизны рассматриваемых лоренцевых многообразий, вместе с результатом Лайстнера это приводит к классификации возможных алгебр голономии лоренцевых многообразий. Результаты этого параграфа опубликованы в [1, 20, 22].

Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ — подалгебра. Пространство тензоров кривизны $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ определяется как пространство 2-форм на $\mathbb{R}^{1,n+1}$ со значениями в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющих тождеству Бьянки

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0, \quad X, Y, Z \in \mathbb{R}^{1,n+1}.$$

Такие пространства рассматривал Берже. Если $\mathfrak{g}$ линейно порождается образами элементов пространства $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, то $\mathfrak{g}$ называется алгеброй Берже. Алгебры голономии псевдоримановых многообразий являются алгебрами Берже, поэтому алгебры Берже являются кандидатами в алгебры голономии.

[50] Д. В. Алексеевский, Однородные римановы многообразия отрицательной кривизны, Мат. сборн. 96 (1) (1975) 93–117.

Для подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ определим пространством слабых тензоров кривизны $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ как множество линейных отображений $P : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{h}$, удовлетворяющих тождеству $g(P(X)Y, Z) + g(P(Y)Z, X) + g(P(Z)X, Y) = 0$, $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$. Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ называется слабой алгеброй Берже, если она линейно порождается образами элементов пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Следующая теорема дает структуру пространств тензоров кривизны для слабо неприводимых подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$.

Теорема 1.3.1. *Каждый тензор кривизны $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}})$ однозначно определен элементами $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $R_0 \in \mathcal{R}(\mathfrak{h})$, $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$, $T \in \odot^2\mathbb{R}^n$ следующим образом:*

$$\begin{aligned} R(p,q) =&(\lambda, 0, \vec{v}), \quad R(X,Y) = (0, R_0(X,Y), P(Y)X - P(X)Y), \\ R(X,q) =&(g(\vec{v}, X), P(X), T(X)), \quad R(p,X) = 0, \quad X, Y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

В частности, имеем изоморфизм $\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n \oplus \odot^2\mathbb{R}^n \oplus \mathcal{R}(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ $\mathfrak{h}$-модулей. Далее,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}) &= \{R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}) | \lambda = 0, \vec{v} = 0\}, \\ \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}) &= \{R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}) | \lambda = 0,\ R_0 \in \mathcal{R}(\ker\varphi),\ g(\vec{v}, \cdot) = \varphi(P(\cdot))\}, \\ \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}) &= \{R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}) | R_0 \in \mathcal{R}(\ker\psi),\ \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{n-m}} \circ T = \psi \circ P\}. \end{aligned}$$

Следствие 1.3.1. *Всякая слабо неприводимая подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ является алгеброй Берже тогда и только тогда, когда ее ортогональная часть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ является слабой алгеброй Берже.*

Следствие 1.3.2. *Всякая слабо неприводимая подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ такая, что ее ортогональная часть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ является алгеброй голономии риманова многообразия, является алгеброй Берже.*

Следствие 1.3.1 сводит проблему классификации алгебр Берже для лоренцевых многообразий к проблеме классификации слабых алгебр Берже.

Далее показано, что для всякой слабой алгебры Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ существует ортогональное разложение

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^{n_s} \oplus \mathbb{R}^{n_{s+1}} \tag{1.5}$$

и соответствующее разложение $\mathfrak{h}$ в прямую сумму идеалов

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_s \oplus \{0\}, \tag{1.6}$$

при этом $\mathfrak{h}_i(\mathbb{R}^{n_j}) = 0$ при $i \neq j$, $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ и представление $\mathfrak{h}_i$ неприводимо в $\mathbb{R}^{n_i}$. При этом $\mathfrak{h}$ является слабой алгеброй Берже тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{h}_i$ является слабой алгеброй Берже при всех $i = 1, ..., s$.

Итак, достаточно рассматривать неприводимые слабые алгебры Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Оказывается, что эти алгебры представляют собой неприводимые алгебры голономии римановых многообразий. Это далеко нетривиальное утверждение получил Лайстнер[51].

Теорема 1.3.3. *Всякая неприводимая подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ является слабой алгеброй Берже тогда и только тогда, когда она является алгеброй голономии риманова многообразия.*

Ниже мы еще обсудим доказательство этой теоремы. Из следствия 1.3.1 и теоремы 1.3.3 получаем классификацию слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми, алгебр Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$.

Теорема 1.3.4. *Подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ является слабо неприводимой, не являющейся неприводимой, алгеброй Берже тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной из подалгебр $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}$, $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi} \subset \mathfrak{sim}(n)$, где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — алгебра голономии риманова многообразия.*

Всякое лоренцево многообразие (M, g) с алгеброй голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ (локально) допускает распределение ℓ изотропных прямых. Эти многообразия называются многообразиями Волкера[52]. На таком многообразии (M, g) существуют локальные координаты $v, x^1, ..., x^n, u$ такие, что метрика g имеет вид

$$g = 2dvdu + h + 2Adu + H(du)^2, \tag{1.12}$$

где $h = h_{ij}(x^1, ..., x^n, u)dx^i dx^j$ – семейство римановых метрик, зависящих от параметра u, $A = A_i(x^1, \dots, x^n, u)dx^i$ – семейство 1-форм, зависящих от u, а H – локальная функция на M. В пункте 1.3.2 мы приводим формулы для нахождения тензора кривизны и тензора Риччи метрики Волкера.

В параграфе 1.4 мы вычисляем пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$, что дает полную структуру пространств тензоров кривизны для алгебр голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$. Этот результат опубликован [14].

Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — неприводимая подалгебра. Рассмотрим $\mathfrak{h}$-эквивариантное отображение $\widetilde{\mathrm{Ric}} : \mathcal{P}(\mathfrak{h}) \to \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\mathrm{Ric}}(P) = \sum_{i=1}^n P(e_i)e_i$. Обозначим за $\mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$ ядро отображения $\widetilde{\mathrm{Ric}}$. Пусть $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$ — ортогональное дополнение этого пространства в $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Таким образом, $\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}_0(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$. Пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}(\frac{n}{2})$ найдены в[53]. В пункте 1.4.3 найдены пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для остальных алгебр голономии римановых многообразий. Для этого мы рассматриваем все возможные неприводимые алгебры голономии римановых многообразий $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ (включая алгебры голономии симметри-

[51]См. ссылку 21 на с. 3.
[52]См. ссылку 22 на с. 3.
[53]См. ссылку 21 на с. 3.

ческих римановых пространств) и проводим вычисления в терминах весов представлений. Главным результатом является таблица 1.4.1 (для компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ выражение V_Λ обозначает неприводимое представление $\mathfrak{h}$, определяемое неприводимым представлением алгебры Ли $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}$ со старшим весом Λ; $((\odot^2(\mathbb{C}^m)^*\otimes\mathbb{C}^m)_0$ обозначает подпространство в $\odot^2(\mathbb{C}^m)^*\otimes\mathbb{C}^m$, состоящее из тензоров таких, что свертка верхнего индекса с любым нижним индексом дает ноль).

Таблица 1.4.1. *Пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для неприводимых алгебр голономии римановых многообразий $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$.*

$\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$	$\mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$	$\mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$	$\dim\mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$
$\mathfrak{so}(2)$	$\mathbb{R}^2$	0	0
$\mathfrak{so}(3)$	$\mathbb{R}^3$	$V_{4\pi_1}$	5
$\mathfrak{so}(4)$	$\mathbb{R}^4$	$V_{3\pi_1+\pi_1'}\oplus V_{\pi_1+3\pi_1'}$	16
$\mathfrak{so}(n)$, $n\geq 5$	$\mathbb{R}^n$	$V_{\pi_1+\pi_2}$	$\frac{(n-2)n(n+2)}{3}$
$\mathfrak{u}(m)$, $n=2m\geq 4$	$\mathbb{R}^n$	$(\odot^2(\mathbb{C}^m)^*\otimes\mathbb{C}^m)_0$	$m^2(m-1)$
$\mathfrak{su}(m)$, $n=2m\geq 4$	0	$(\odot^2(\mathbb{C}^m)^*\otimes\mathbb{C}^m)_0$	$m^2(m-1)$
$\mathfrak{sp}(m)\oplus\mathfrak{sp}(1)$, $n=4m\geq 8$	$\mathbb{R}^n$	$\odot^3(\mathbb{C}^{2m})^*$	$\frac{m(m+1)(m+2)}{3}$
$\mathfrak{sp}(m)$, $n=4m\geq 8$	0	$\odot^3(\mathbb{C}^{2m})^*$	$\frac{m(m+1)(m+2)}{3}$
$G_2\subset\mathfrak{so}(7)$	0	$V_{\pi_1+\pi_2}$	64
$\mathfrak{spin}(7)\subset\mathfrak{so}(8)$	0	$V_{\pi_2+\pi_3}$	112
$\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$, $n\geq 4$, — *симметрич. алгебра Берже*	$\mathbb{R}^n$	0	0

В параграфе 1.5 мы даем простое доказательства теоремы Лайстнера 1.3.3 для случая неприводимых полупростых, не являющихся простыми, алгебр Ли $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$. Этот результат опубликован в [3]. Для доказательства мы находим связь пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ с продолжением Танака некоторой алгебры Ли.

Выше мы получили классификацию слабо неприводимых алгебр Берже, содержащихся в $\mathfrak{sim}(n)$. **В параграфе 1.6** мы показываем, что все эти алгебры могут быть реализованы как алгебры голономии лоренцевых многообразий. Этим мы завершаем классификацию алгебр голономии лоренцевых многообразий. Результаты этого параграфа опубликованы в [19, 22, 21].

Рассмотрим произвольную алгебру голономии $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ риманова многообразия. Мы показываем, что существует $P\in\mathcal{P}(\mathfrak{h})$, чей образ порождает $\mathfrak{h}$. Напомним, что для $\mathfrak{h}$ имеют место разложения (1.5) и (1.6). Пусть $m_0=n-n_{s+1}$. Имеем $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(m_0)$. Определим числа P^k_{ji} такие, что $P(e_i)e_j=P^k_{ji}e_k$. Рассмотрим на $\mathbb{R}^{n+2}$ следующую метрику:

$$g=2dvdu+\sum_{i=1}^n(dx^i)^2+2A_idx^idu+H\cdot(du)^2, \qquad (1.25)$$

где $A_i=\frac{1}{3}(P^i_{jk}+P^i_{kj})x^jx^k$, а H — функция, которая будет зависеть от типа алгебры голономии, которую мы хотим получить. Для алгебры Ли $\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}$ определим числа $\varphi_i=\varphi(P(e_i))$. Для алгебры Ли $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$ определим числа ψ_{ij}, $j=m+1,...,n$, такие, что $\psi(P(e_i))=-\sum_{j=m+1}^n\psi_{ij}e_j$.

Теорема 1.6.2. *Алгебра голономии $\mathfrak{g}$ метрики g в точке 0 зависит от функции H следующим образом:*

H	$\mathfrak{g}$
$v^2+\sum_{i=m_0+1}^n(x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}$
$\sum_{i=m_0+1}^n(x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}$
$2v\varphi_ix^i+\sum_{i=m_0+1}^n(x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}$
$2\sum_{j=m+1}^n\psi_{ij}x^ix^j+\sum_{i=m_0+1}^m(x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$

Получаем основную классификационную теорему.

Теорема 1.6.2. *Подалгебра $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(1,n+1)$ является слабо неприводимой, не являющейся неприводимой, алгеброй голономии лоренцева многообразия тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной из подалгебр $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}},\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}},\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi},\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}\subset\mathfrak{sim}(n)$, где $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ — алгебра голономии риманова многообразия.*

Далее мы строим явные примеры метрик с алгебрами голономии $\mathfrak{g}^{2,G_2}\subset\mathfrak{so}(1,8)$ и $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{spin}(7)}\subset\mathfrak{so}(1,9)$.

В главе 2 мы получаем применения результатов главы 1.

В параграфе 2.1 мы рассматриваем связь алгебр голономии и уравнения Эйнштейна. Сначала мы находим слабо неприводимые алгебры голономии лоренцевых многообразий Эйнштейна.

Теорема 2.1.2. *Пусть (M,g) — локально неразложимое $n+2$-мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если (M,g) — Риччи-плоское многообразие, то имеет место одно из утверждений:*

1) Алгебра голономии $\mathfrak{g}$ многообразия (M,g) — типа 1 и в разложении (1.6) для $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ по крайней мере одна подалгебра $\mathfrak{h}_i\subset\mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из следующих алгебр Ли: $\mathfrak{so}(n_i)$, $\mathfrak{u}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4})\oplus\mathfrak{sp}(1)$ или с симметрической алгеброй Берже.

2) Алгебра голономии $\mathfrak{g}$ многообразия (M,g) — типа 2 и в разложении (1.6) для $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ каждая подалгебра $\mathfrak{h}_i\subset\mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из следующих алгебр Ли: $\mathfrak{so}(n_i)$, $\mathfrak{su}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4})$, $G_2\subset\mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7)\subset\mathfrak{so}(8)$.

Теорема 2.1.3. *Если (M,g) — многообразие Эйнштейна, не являющееся Риччи-плоским, то алгебра голономии $\mathfrak{g}$ многообразия (M,g) — типа*

1 и в разложении (1.6) для $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *каждая подалгебра* $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ *совпадает с одной из следующих алгебр Ли:* $\mathfrak{so}(n_i)$, $\mathfrak{u}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4}) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ *или с симметрической алгеброй Берже. Более того,* $n_{s+1} = 0$.

В пункте 2.1.2 мы строим метрики Эйнштейна (соответственно, Риччи-плоские метрики) с каждой из алгебр голономии, полученных в приведенных теоремах.

В отличии от случая римановых многообразий, лоренцевы многообразия ни с какими из алгебр голономии не являются автоматически Риччи-плоскими или многообразиями Эйнштейна. В пункте 2.1.3 мы показываем, что лоренцевы многообразия с некоторыми алгебрами голономии автоматически удовлетворяют некоторому более слабому условию на тензор Риччи. Лоренцево многообразие (M, g) называется *тотально Риччи-изотропным*, если образ оператора Риччи этого многообразия — изотропный.

Теорема 2.1.5. *Пусть* (M, g) *— локально неразложимое* $n+2$*-мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если* (M, g) *— тотально Риччи-изотропное, то его алгебра голономии — та же, что в теореме 2.1.2.*

Теорема 2.1.6. *Если алгебра голономии многообразия* (M, g) *— типа 2 и в разложении (1.6) алгебры* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *каждая подалгебра* $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ *совпадает а одной из алгебр Ли* $\mathfrak{su}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4})$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$, *то многообразие* (M, g) *— тотально Риччи-изотропное.*

В пункте 2.1.4 мы занимаемся упрощением уравнения Эйнштейна для метрик Волкера. Уравнение Эйнштейна для метрик Волкера рассмотрели недавно теоретические физики Гиббонс и Поп[54]. Главная теорема пункта 2.1.4 дает возможность существенно упростить уравнение Эйнштейна для случая ненулевой космологической константы Λ.

Теорема 2.1.7. *Пусть* (M, g) *— локально неразложимое* $n+2$*-мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если* (M, g) *— многообразие Эйнштейна с ненулевой космологической константой* Λ*, то в окрестности каждой точки существуют координаты* $v, x^1, \dots, x^n, u$ *такие, что метрика* g *имеет вид*

$$g = 2dvdu + h + (\Lambda v^2 + H_0)(du)^2,$$

где $\partial_v H_0 = 0$, h *— u-семейство римановых метрик Эйнштейна с космологической константой* Λ*, удовлетворяющее* $\Delta H_0 + \frac{1}{2} h^{ij} \partial_u^2 h_{ij} = 0$, $\nabla^j \partial_u h_{ij} = 0$, $h^{ij} \partial_u h_{ij} = 0$, $\mathrm{Ric}_{ij} = \Lambda h_{ij}$. *Обратно, каждая такая метрика является метрикой Эйнштейна.*

[54]См. ссылку 30 на с. 3.

Таким образом, мы свели уравнение Эйнштейна для лоренцевых метрик с $\Lambda \neq 0$ к проблеме нахождения семейств римановых метрик Эйнштейна, удовлетворяющих некоторым уравнениям. В пункте 2.1.5 мы приводим примеры метрик Эйнштейна в размерности 4.

В параграфе 2.2 мы изучаем псевдоримановы многообразия с рекуррентными спинорными полями в терминах их алгебр голономии. Результаты этого параграфа опубликованы в [2]. Пусть (M,g) — спинорное псевдориманово многообразие сигнатуры (r,s), а S — соответствующее комплексное спинорное расслоение с индуцированной связностью ∇^S. Спинорное поле $s \in \Gamma(S)$ называется *рекуррентным*, если $\nabla^S_X s = \theta(X)s$ для всех векторных полей $X \in \Gamma(TM)$, здесь θ — комплекснозначная 1-форма. Если $\theta = 0$, то s — *параллельное* спинорное поле. Ванг охарактеризовал односвязные спинорные римановы многообразия, допускающие параллельные спинорные поля, в терминах групп голономии этих многообразий[55]. Аналогичные результаты получили Лайстнер для лоренцевых многообразий[56], Баум и Кас для псевдоримановых многообразий с неприводимыми группами голономии[57].

Спинорное расслоение S псевдориманова многообразия (M,g) допускает параллельное комплексное подрасслоение размерности 1 тогда и только тогда, когда в окрестности каждой точки многообразия (M,g) существует не обращающееся в ноль рекуррентное спинорное поле.

В пункте 2.2.1 приводятся необходимые сведения о спинорных представлениях. В пункте 2.2.2 мы рассматриваем Римановы многообразия. Приведем основные результаты.

Теорема 2.2.1. *Пусть (M,g) — локально неразложимое n-мерное односвязное спинорное риманово многообразие. Тогда спинорное расслоение S этого многообразия допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда алгебра голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ многообразия (M,g) — одна из $\mathfrak{u}(\frac{n}{2})$, $\mathfrak{su}(\frac{n}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n}{4})$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$, или (M,g) — локально симметрическое кэлерово многообразие.*

Следствие 2.2.1. *Пусть (M,g) — односвязное спинорное риманово многообразие с неприводимой алгеброй голономии и без ненулевых параллельных спинорных полей. Тогда спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда (M,g) — кэлерово многообразие не являющееся Риччи-плоским.*

[55]M. Y. Wang, Parallel spinors and parallel forms, Ann. Global Anal. Geom. 7 (1) (1989) 59–68.

[56]См. ссылку 38 на с. 4.

[57]H. Baum, I. Kath, Parallel spinors and holonomy groups on pseudo-Riemannian spin manifolds, Ann. Glob. Anal. Geom. 17 (1) (1999) 1–17.

Теорема 2.2.2. *Пусть (M, g) — локально неразложимое n-мерное односвязное спинорное кэлерово многообразие, не являющееся Риччи-плоским. Тогда его спинорное расслоение S допускает в точности два параллельных одномерных комплексных подрасслоения.*

В пункте 2.2.3 рассмотрены лоренцевы многообразия.

Теорема 2.2.4. *Пусть (M, g) — односвязное локально неразложимое $(n+2)$-мерное спинорное лоренцево многообразие. Тогда спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда (M, g) допускает параллельное распределение изотропных прямых (т.е. его алгебра голономии $\mathfrak{g}$ содержится в $\mathfrak{sim}(n)$), а в разложении (1.6) для подалгебры $\mathfrak{h} = \mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(n)}\mathfrak{g}$ каждая из подалгебр $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из алгебр Ли $\mathfrak{u}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{su}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4})$, G_2, $\mathfrak{spin}(7)$ или с алгеброй голономии неразложимого симметрического кэлерова пространства. Число параллельных одномерных комплексных подрасслоений расслоения S равно числу одномерных комплексных подпространств модуля Δ_n, сохраняемых алгеброй $\mathfrak{h}$.*

В пункте 2.2.4 мы рассматриваем псевдоримановы многообразия с неприводимыми алгебрами, для них мы доказываем утверждения, аналогичные утверждениям пункта 2.2.2 для римановых многообразий.

В параграфе 2.3 мы получаем локальную классификацию конформно плоских лоренцевых многообразий со специальными группами голономии. Эти результаты опубликованы в [1, 10].

Теорема 2.3.1. *Пусть (M, g) – конформно плоское многообразие Волкера размерности $n+2 \geq 4$. Тогда в некоторой окрестности каждой точки M существуют координаты $v, x^1, ..., x^n,$ и такие, что*

$$g = 2dvdu + \Psi \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 + 2Adu + (\lambda(u)v^2 + vH_1 + H_0)(du)^2,$$

$$\Psi = \frac{4}{\left(1 - \lambda(u)\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2\right)^2}, \quad H_1 = -4C_k(u)x^k\sqrt{\Psi} - \partial_u \ln \Psi + K(u),$$

$$A = A_i dx^i, \quad A_i = \Psi \left(-4C_k(u)x^k x^i + 2C_i(u)\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2\right),$$

$$H_0(x^1,...,x^n,u)$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\lambda^2(u)}\Psi \sum_{k=1}^n C_k^2(u) + \sqrt{\Psi}\left(a(u)\sum_{k=1}^n (x^k)^2 + D_k(u)x^k + D(u)\right), \\ \text{\textit{если} } \lambda(u)\neq 0, \\ 16\left(\sum_{k=1}^n (x^k)^2\right)^2 \sum_{k=1}^n C_k^2(u) + \tilde a(u)\sum_{k=1}^n (x^k)^2 + \tilde D_k(u)x^k + \tilde D(u), \\ \text{\textit{если} } \lambda(u) = 0 \end{cases}$$

для некоторых функций $\lambda(u)$, $a(u)$, $\tilde a(u)$, $C_i(u)$, $D_i(u)$, $D(u)$, $\tilde D_i(u)$, $\tilde D(u)$.

Если функция λ равна нулю на некотором открытом множестве, или не обращается в ноль, то метрика, полученная выше, может быть упрощена. Мы показываем, что алгебра голономии полученной метрики совпадает либо с $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$, либо с $\mathfrak{sim}(n)$.

В пункте 2.3.3 приводятся выражения для тензора кривизны и конформного тензора кривизны Вейля W метрики Волкера. Для доказательства теоремы 2.3.1 мы записываем уравнение $W = 0$ в виде системы дифференциальных уравнений с частными производными и находим подходящие системы координат, так, что возможно получить полное решение этой системы. В пункте 2.3.7 найден оператор Риччи полученных метрик.

В пункте 2.3.8 рассмотрен случай многообразий размерности 4. Возможные алгебры голономии конформно плоских лоренцевых многообразий размерности 4 найдены в[58], где была сформулирована проблема построения примера конформно плоской метрики с алгеброй голономии $\mathfrak{sim}(2)$. Попытка построить такую метрику была сделана в[59]. Мы показываем, что построенная метрика в действительности является разложимой, а ее алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{so}(1,1)\oplus\mathfrak{so}(2)$. Таким образом, в настоящей работе мы впервые получаем конформно плоскую метрику с алгеброй голономии $\mathfrak{sim}(n)$, и более того, мы находим все такие метрики. Это показывает преимущество нашего подхода.

В параграфе 2.4 мы получаем классификацию 2-симметрических лоренцевых многообразий. Этот результат опубликован в [11].

Симметрические псевдоримановы многообразия представляют собой важный класс пространств. Прямым обобщением этих многообразий являются 2-симметрические псевдоримановы пространства (M,g), удовлетворяющие условию $\nabla^2 R = 0, \quad R\neq 0$. В случае римановых многообразий, условие $\nabla^2 R = 0$ влечет $\nabla R = 0$. 2-симметрические пространства изучались

[58]См. ссылку 19 на с. 3.
[59]См. ссылку 17 на с. 3.

в[60,61,62]. Мы получаем локальную классификацию таких пространств.

Теорема 2.4.1. *Пусть* (M, g) *— локально неразложимое лоренцево многообразие размерности* $n + 2$. *Тогда многообразие* (M, g) *— 2-симметрическое тогда и только тогда, когда локально существуют координаты* $v, x^1, ..., x^n,$ *и такие, что*

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + (H_{ij}u + F_{ij})x^i x^j (du)^2,$$

где H_{ij} *— ненулевая диагональная вещественная матрица с диагональными элементами* $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, *а* F_{ij} *— симметрическая вещественная матрица.*

В доказательстве мы используем главным образом, то, что тензор ∇R является параллельным, а потому его аннулирует алгебра голономии. Это позволяет нам найти явный вид ∇R, а затем и метрики.

Этот результат был передоказан в[63] с помощью рассмотрения уравнения $\nabla^2 R = 0$ в локальных координатах и громоздких вычислений. Это показывает значительное преимущество методов теории групп голономии.

В главе 3 мы развиваем теорию групп голономии супермногообразий.

В параграфе 3.1 мы даем определение группы голономии связностей на локально свободных пучках над супермногообразиями, а также обсуждаем их свойства. Эти результаты опубликованы в [17].

В пунктах 3.1.1 и 3.1.2 даны необходимые сведения о супералгебрах Ли и супермногообразиях. Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ — супермногообразие размерности $n|m$. Обозначим через $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ касательный пучок, т.е. пучок векторных полей на $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-супермодулей на $\mathcal{M}$, например $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$. Слоем пучка $\mathcal{E}$ в точке $x \in M$ называется векторное суперпространство $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}(V)/(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(V)_x \mathcal{E}(V))$, где $V \subset M$ — открытое подмножество, содержащее точку x, а $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(V)_x$ — идеал в $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(V)$, состоящий из функций, обращающихся в ноль в точке x. Определим векторное расслоение E над многообразием M, слои которого совпадают со слоями $\mathcal{E}$.

Связность ∇ и тензор кривизны R на пучке $\mathcal{E}$ определяется по аналогии со связностью в векторном расслоении над гладким многообразием. В

[60] В. Р. Кайгородов, Структура кривизны пространства-времени, Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. 14, ВИНИТИ, М., 1983, 177—204.

[61] J. M. Senovilla, Second-order symmetric Lorentzian manifolds. I. Characterization and general results, Classical Quantum Gravity 25 (24) (2008) 245011, 25 pp.

[62] O. F. Blanco, M. Sánchez, J. M. Senovilla, Complete classifcation of second-order symmetric spacetimes, Journal of Physics: Conference Series 229 (2010) 012021, 5pp.

[63] O. F. Blanco, M. Sánchez, J. M. Senovilla, Structure of second-order symmetric Lorentzian manifolds, J. Eur. Math. Soc. 15 (2) (2013) 595–634.

пункте 3.1.3 мы определяем алгебру и группу голономии связности на локально свободном пучке над супермногообразием. Связность ∇ определяет связность $\tilde{\nabla}$ в векторном расслоении E. Соответствующий параллельный перенос $\tau_\gamma : E_{\gamma(a)} \to E_{\gamma(b)}$ вдоль произвольной кусочно-гладкой кривой $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to M$ определяет изоморфизм $\tau_\gamma : \mathcal{E}_{\gamma(a)} \to \mathcal{E}_{\gamma(b)}$ векторных суперпространств.

Определение 3.1.1. *Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_\mathcal{M})$ — супермногообразие, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_\mathcal{M}$-супермодулей на $\mathcal{M}$, а ∇ — связность на $\mathcal{E}$. Алгебра голономии $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ связности ∇ в точке $x \in M$ – это суперподалгебра супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(\mathcal{E}_x)$, порожденная операторами вида*

$$\tau_\gamma^{-1} \circ \bar{\nabla}^r_{Y_r,\dots,Y_1} R_y(Y,Z) \circ \tau_\gamma : \mathcal{E}_x \to \mathcal{E}_x,$$

где γ — кусочно-гладкая кривая в M с началом в точке x; $y \in M$ — конечная точка кривой γ; $r \geq 0$, $Y, Z, Y_1, \dots, Y_r \in T_y\mathcal{M}$; $\bar{\nabla}$ — связность на $\mathcal{T}_\mathcal{M}|_U$ для некоторой открытой окрестности $U \subset M$ точки y.

Определение алгебры голономии $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ не зависит от выбора связностей $\bar{\nabla}$. Далее мы определяем группу голономии связности ∇, как супергруппу Ли, задаваемую парой Хариша-Чандра $(\mathrm{Hol}(\nabla)_x, \mathfrak{hol}(\nabla)_x)$, где $\mathrm{Hol}(\nabla)_x \subset \mathrm{GL}((\mathcal{E}_x)_{\bar 0}) \times \mathrm{GL}((\mathcal{E}_x)_{\bar 1})$ —группа Ли, порожденная группой голономии $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})_x$ связности $\tilde{\nabla}$ и связной подгруппой Ли группы Ли $\mathrm{GL}((\mathcal{E}_x)_{\bar 0}) \times \mathrm{GL}((\mathcal{E}_x)_{\bar 1})$, соответствующей подалгебре Ли $(\mathfrak{hol}(\nabla)_x)_{\bar 0} \subset \mathfrak{gl}((\mathcal{E}_x)_{\bar 0}) \times \mathfrak{gl}((\mathcal{E}_x)_{\bar 1})$.

В пункте 3.1.4 мы показываем, что определенная нами группа голономии обладает основным свойством обычных групп голономии: она содержит информацию о параллельных сечениях пучка $\mathcal{E}$. Напомним, что сечения пучка $\mathcal{E}$ вообще говоря не определяются своими значениями во всех точках M.

Предложение 3.1.2. *Параллельное сечение $X \in \mathcal{E}(M)$ однозначно определяется своим значением в произвольной точке $x \in M$.*

Теорема 3.1.1. *Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_\mathcal{M})$ — супермногообразие, $x \in M$, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_\mathcal{M}$-супермодулей на $\mathcal{M}$, а ∇ — связность на $\mathcal{E}$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между параллельными сечениями $X \in \mathcal{E}(M)$ и векторами $X_x \in \mathcal{E}_x$, аннулируемыми алгеброй голономии $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ и сохраняемыми группой $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})_x$.*

Следствие 3.1.1. *Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_\mathcal{M})$ — супермногообразие, $x \in M$, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_\mathcal{M}$-супермодулей на $\mathcal{M}$, а ∇ — связность на $\mathcal{E}$. Тогда следующие условия эквивалентны: (i) связность ∇ — плоская; (ii) $R = 0$; (iii) $\mathfrak{hol}(\nabla)_x = 0$.*

В пункте 3.1.3 мы рассматриваем случай линейных связностей на супермногообразии, т.е. связностей на касательном пучке.

Теорема 3.1.3. *Пусть* $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ *— супермногообразие,* $x \in M$*, а* ∇ *— связность на* $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$*. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между параллельными тензорными полями* $P \in \mathcal{T}^{r,s}_{\mathcal{M}}(M)$ *и тензорами* $P_x \in T^{r,s}_x\mathcal{M}$*, аннулируемыми алгеброй* $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ *и сохраняемыми группой* $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})_x$*.*

Далее мы приводим примеры параллельных тензорных полей на $\mathcal{M}$ и соответствующих групп голономии. Например, римановым супермногообразием $(\mathcal{M}, g)$ называется супермногообразие $\mathcal{M}$ размерности $n|m$, $m = 2k$, снабженное четной невырожденный суперсимметрической метрикой g. В этом случае $\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, g) \subset \mathfrak{osp}(p_0, q_0|2k)$ и $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla}) \subset \mathrm{O}(p_0, q_0) \times \mathrm{Sp}(2k, \mathbb{R})$, где (p_0, q_0) — сигнатура псевдоримановой метрики $\tilde{g}$, получаемой как ограничение g на касательные пространства к M. Мы также рассматриваем случаи четных и нечетных комплексных структур и различных билинейных форм.

В пункте 3.1.6 мы определяем супералагебры Берже. Пусть V — вещественное или комплексное векторное супервпространство, а $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — суперподалгебра. Пространством алгебраических тензоров кривизны типа $\mathfrak{g}$ называется векторное суперпространство

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \left\{ R \in \wedge^2 V^* \otimes \mathfrak{g} \,\middle|\, \begin{array}{c} R(X,Y)Z + (-1)^{|X|(|Y|+|Z|)} R(Y,Z)X \\ +(-1)^{|Z|(|X|+|Y|)} R(Z,X)Y = 0, \ X, Y, Z \in V \end{array} \right\}.$$

Мы называем суперподалгебру $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ супералагеброй Берже если она порождается образами элементов пространства $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$. Различные примеры супералагебр Берже даны в [17].

Предложение 3.1.3. *Пусть* $\mathcal{M}$ *— супермногообразие размерности* $n|m$ *с линейной связностью без кручения. Тогда алгебра голономии* ∇ *является супералагеброй Берже.*

В пункте 3.1.7 мы рассматриваем группы голономии симметрических супермногообразий. И определяем симметрические супералагебры Берже. Если алгебра голономии некоторого супермногообразия с линейной связностью без кручения является симметрической супералагеброй Берже, то связность является локально симметрической.

В параграфе 3.2 мы рассматриваем нечетные суперногообразия, т.е. супермногообразия размерности $0|m$. Эти результаты опубликованы в [6, 16]. В пункте 3.2.1 мы классифицируем неприводимые подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с нетривиальными косыми продолжениями

$$\mathfrak{g}^{[1]} = \{\varphi \in (\mathbb{F}^n)^* \otimes \mathfrak{g} | \varphi(X)Y = -\varphi(Y)X \text{ для всех } X, Y \in \mathbb{F}^n\}.$$

Результаты этого пункта мы будем использовать позже. Они также имеют независимый интерес[64].

В пункте 3.2.2 мы получаем взаимно однозначное соответствие между связными симметрическими нечетными супепространствами и супералгебрами Ли. В пункте 3.2.3 мы классифицируем неприводимые комплексные супералгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(0|2m,\mathbb{C})$. Заметим, что имеет место изоморфизм $\mathfrak{osp}(0|2m,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$. Соответствующие подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$ мы называем косыми алгебрами Берже. Мы используем методы и результаты из[65], в то же время некоторые представления требуют дополнительных рассмотрений. В пункте 3.2.4 мы получаем классификацию возможных неприводимых алгебр голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$ несимметрических нечетных римановых супермногообразий.

В параграфе 3.3 мы изучаем группы голономии римановых супермногообразий. Эти результаты опубликованы в [9, 17].

В пункте 3.3.1 мы получаем обобщение теоремы Ву на случай римановых супермногообразий.

Теорема 3.3.1. *Пусть $(\mathcal{M}, g)$ — риманово супермногообразие такое, что псевдориманово многообразие $(M, \tilde{g})$ — односвязно и геодезически полно. Тогда существуют римановы супермногообразия $(\mathcal{M}_0, g_0)$, $(\mathcal{M}_1, g_1)$,...,$(\mathcal{M}_r, g_r)$ такие, что*

$$(\mathcal{M}, g) = (\mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_1 \times \cdots \times \mathcal{M}_r, g_0 + g_1 + \cdots + g_r), \tag{3.25}$$

супермногообразие $(\mathcal{M}_0, g_0)$ — плоское, а алгебры голономии супермногообразий $(\mathcal{M}_1, g_1)$,...,$(\mathcal{M}_r, g_r)$ — слабо неприводимы. В частности,

$$\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, g) = \mathfrak{hol}(\mathcal{M}_1, g_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{hol}(\mathcal{M}_r, g_r).$$

Для произвольного $(\mathcal{M}, g)$ разложение (3.25) имеет место локально.

В пункте 3.3.2 мы получаем классификацию одного класса алгебр голономии римановых супермногообразий. Точнее, мы классифицируем неприводимые несимметрические супералгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p,q|2m)$ $(p+q>0)$ вида

$$\mathfrak{g} = (\oplus_i \mathfrak{g}_i) \oplus \mathfrak{z}, \tag{3.27}$$

где $\mathfrak{g}_i$ — простая супералгебра Ли классического типа, а $\mathfrak{z}$ – тривиальный или одномерный центр. Эта классификация обобщает классификацию Бер-

[64] P.-A. Nagy, Skew-symmetric prolongations of Lie algebras and applications, J. Lie Theory 23 (1) (2013) 1–33.

[65] L. J. Schwachhöfer, Connections with irreducible holonomy representations, Adv. Math. 160 (1) (2001) 1–80.

же возможных неприводимых алгебр голономии псевдоримановых многообразий, в то же время, мы не получаем аналоги важных алгебр голономии G_2 и $\mathfrak{spin}(7)$. Для неприводимых подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(p,q)$ свойство (3.27) выполняется автоматически, поэтому наше предположение является вполне естественным.

В[66] классифицированы односвязные симметрические суперпространства простых супергрупп Ли. В частности, этот результат влечет классификацию неприводимых алгебр голономии римановых симметрических супермногообразий. Поэтому мы предполагаем, что рассматриваемые супермногообразия не являются локально симметрическими.

Теорема 3.3.2. *Пусть $(\mathcal{M},g)$ — не являющееся локально симметрическим римановo супермногообразие размерности $p+q|2m$ $(p+q>0)$ с неприводимой алгеброй голономии $\mathfrak{hol}(\mathcal{M},g) \subset \mathfrak{osp}(p,q|2m)$ вида (3.27), тогда $\mathfrak{hol}(\mathcal{M},g) \subset \mathfrak{osp}(p,q|2m)$ совпадает с одной из супералгебр Ли из таблицы 3.3.1.*

Таблица 3.3.1. *Неприводимые несимметрические супералгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p,q|2m)$ $(p+q>0)$ вида (3.27) и связные суперподгруппы Ли $G \subset \mathrm{SO}(p,q) \times \mathrm{Sp}(2m,\mathbb{R})$, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{g}_{\bar 0} \subset \mathfrak{so}(p,q) \oplus \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$.*

$\mathfrak{g}$	G	$(p,q\|2m)$
$\mathfrak{osp}(p,q\|2m)$	$\mathrm{SO}(p,q)\times\mathrm{Sp}(2m,\mathbb{R})$	$(p,q\|2m)$
$\mathfrak{osp}(p\|2k,\mathbb{C})$	$\mathrm{SO}(p,\mathbb{C})\times\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{R})$	$(p,p\|4k)$
$\mathfrak{u}(p_0,q_0\|p_1,q_1)$	$\mathrm{U}(p_0,q_0)\times\mathrm{U}(p_1,q_1)$	$(2p_0,2q_0\|2p_1+2q_1)$
$\mathfrak{su}(p_0,q_0\|p_1,q_1)$	$\mathrm{U}(1)(\mathrm{SU}(p_0,q_0)\times\mathrm{SU}(p_1,q_1))$	$(2p_0,2q_0\|2p_1+2q_1)$
$\mathfrak{hosp}(r,s\|k)$	$\mathrm{Sp}(p_0,q_0)\times\mathrm{SO}^*(k)$	$(4r,4s\|4k)$
$\mathfrak{hosp}(r,s\|k)\oplus\mathfrak{sp}(1)$	$\mathrm{Sp}(1)(\mathrm{Sp}(p_0,q_0)\times\mathrm{SO}^*(k))$	$(4r,4s\|4k)$
$\mathfrak{osp}^{sk}(2k\|r,s)\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$	$\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{R})\times\mathrm{SO}(r,s)\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$	$(2k,2k\|2r+2s)$
$\mathfrak{osp}^{sk}(2k\|r,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{C})\times\mathrm{SO}(r,\mathbb{C})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$	$(4k,4k\|4r)$

Определения супермногообразий, которые мы рассматриваем аналогичны определениям соответствующих псевдоримановых многообразий [17]. Например, римановo супермногообразие $(\mathcal{M},g)$ называется *кэлеровым супермногообразием*, если оно допускает четную параллельную g-ортогональную комплексную структуру. Алгебра голономии такого многообразия содержится в $\mathfrak{u}(p_0,q_0|p_1,q_1)$. По определению, *специальным кэлеровым супермногообразием или супермногообразием Калаби-Яу* называется Риччи-плоское кэлерово супермногообразие.

Предложение 3.3.1. *Пусть $(\mathcal{M},g)$ — кэлерово супермногообразие, тогда $\mathrm{Ric}=0$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{hol}(\mathcal{M},g) \subset \mathfrak{su}(p_0,q_0|p_1,q_1)$.*

[66] В. В. Серганова, Классификация простых вещественных супералгебр Ли и симметрических пространств, Функ. ан. прил. 17 (3) (1983) 200–207.

Римановы супермногообразия с алгебрами голономии $\mathfrak{osp}(p,q|2m)$ представляют собой случай „общего положения". Приведем геометрические характеристики односвязных супермногообразий с алгебрами голономии $\mathfrak{g}$, отличными от $\mathfrak{osp}(p,q|2m)$:
$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p|2k,\mathbb{C})$: голоморфные римановы супермногообразия;
$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(p_0,q_0|p_1,q_1)$: кэлеровы супермногообразия;
$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{su}(p_0,q_0|p_1,q_1)$: специальные кэлеровы супермногообразия или супермногообразия Калаби-Яу;
$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{hosp}(r,s|k)$: гиперкэлеровы супермногообразия;
$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{hosp}(r,s|k) \oplus \mathfrak{sp}(1)$: кватернионнокэлеровы супермногообразия;
$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}^{sk}(2k|r,s) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$: паракэлеровы супермногообразия;
$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}^{sk}(2k|r,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$: голоморфные паракэлеровы супермногообразия.

Предложение 3.3.1. *Пусть* $(\mathcal{M},g)$ *— кватернионнокэлерово супермногообразие, тогда* $\mathrm{Ric} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{hol}(\mathcal{M},g) \subset \mathfrak{hosp}(p_0,q_0|p_1,q_1)$. *В частности, если* $(\mathcal{M},g)$ *— гиперкэлерово супермногообразие, тогда* $\mathrm{Ric} = 0$. *Если* M *— односвязно, а* $(\mathcal{M},g)$ *— кватернионнокэлерово, и* $\mathrm{Ric} = 0$, *то* $(\mathcal{M},g)$ *— гиперкэлерово.*

Естественной проблемой является проблема построения примеров супермногообразий с каждой из полученных алгебр голономии. Примеры супермногообразий Калаби-Яу построены в[67]. Примеры кватернионнокэлеровых супермногообразий построены в[68].

Оставшаяся часть параграфа 3.3 просвещена доказательству теоремы 3.3.2. Мы показываем, что если $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p,q|2m)$ — супералгебра Берже, то, как правило, $\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(p,q)}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(p,q)$ является алгеброй Берже, а $\mathrm{pr}_{\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$ — косой алгеброй Берже. Далее мы используем теорию представлений простых комплексных супералгебр Ли классического типа.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из списка ВАК

[1] А. С. Галаев, Конформно плоские лоренцевы многообразия со специальными группами голономии, Матем. сборник 204 (9) (2013) 29–50.

[67] M. Roček, N. Wadhwa, On Calabi-Yau supermanifolds, Adv. Theor. Math. Phys. 9 (2) (2005) 315–320.

[68] V. Cortés, A new construction of homogeneous quaternionic manifolds and related geometric structures, Mem. Amer. Math. Soc. 147 (2000) 700, viii+63 pp.

[2] А. С. Галаев, Псевдоримановы многообразия с рекуррентными спинорными полями, Сиб. матем. журн. 54 (4) (2013) 604–613.

[3] А. С. Галаев, О классификации алгебр голономии лоренцевых многообразий, Сиб. матем. журн. 54 (5) (2013) 1000–1008.

[4] А. С. Галаев, Заметка о группах голономии псевдоримановых многообразий, Матем. заметки 9 (6) (2013) 821–827.

[5] A. S. Galaev, On the Einstein equation on Lorentzian manifolds with parallel distributions of isotropic lines, Учёные записки Казанского университета. Серия Физ.-Матем. науки. 153 (3) (2011) 165–174.

[6] A. S. Galaev, Irreducible holonomy algebras of odd Riemannian supermanifolds, Lobachevskii J. Math. 32 (2) (2011) 163–173.

[7] А. С. Галаев, Алгебры голономии лоренцевых многообразий, Вестник Сарат. гос. техн. ун-та 3 (1) (2006) 5–9.

[8] А. С. Галаев, Группы движений пространств Лобачевского, группы преобразования подобия евклидовых пространств и группы голономии лоренцевых многообразий, Известия Сарат. ун-та: Математика. Механика. Информатика 5 (1) (2005) 3–12.

[9] A. S. Galaev, Irreducible holonomy algebras of Riemannian supermanifolds, Annals of Glob. Anal. Geom. 42 (1) (2012) 1–27.

[10] A. S. Galaev, Some applications of the Lorentzian holonomy algebras, Journal of Geometry and Symmetry in Physics 26 (2012) 13–31.

[11] D. V. Alekseevsky, A. S. Galaev, Two-symmetric Lorentzian manifolds, Journal of Geometry and Physics 61 (12) (2011) 2331–2340.

[12] A. S. Galaev, Examples of Einstein spacetimes with recurrent null vector fields, Class. Quantum Grav. 28 (2011) 175022, 6pp.

[13] A. S. Galaev, T. Leistner, On the local structure of Lorentzian Einstein manifolds with parallel distribution of null lines, Class. Quantum Grav. 27 (2010) 225003, 16pp.

[14] A. S. Galaev, One component of the curvature tensor of a Lorentzian manifold, J. Geom. Phys. 60 (2010) 962–971.

[15] A. S. Galaev, Holonomy of Einstein Lorentzian manifolds, Classical Quantum Gravity 27 (2010) 075008, 13 pp.

[16] A. S. Galaev, Irreducible complex skew-Berger algebras, Differential Geom. Appl. 27 (6) (2009) 743–754.

[17] A. S. Galaev, Holonomy of supermanifolds, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 79 (1) (2009) 47–78.

[18] D. V. Alekseevsky, V. Cortés, A. S. Galaev, T. Leistner, Cones over pseudo-Riemannian manifolds and their holonomy, J. Reine Angew. Math. 635 (2009) 23–69.

[19] A. S. Galaev, Metrics that realize all Lorentzian holonomy algebras, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 3 (5–6) (2006) 1025–1045.

[20] A. S. Galaev, The spaces of curvature tensors for holonomy algebras of Lorentzian manifolds, Differential Geom. Appl. 22 (1) (2005) 1–18.

Главы в книгах

[21] A. S. Galaev, T. Leistner, Recent developments in pseudo-Riemannian holonomy theory, Cortes, Vicente (ed.), Handbook of pseudo-Riemannian geometry and supersymmetry, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 16, 581–627, Zürich: Eur. Math. Soc., 2010.

[22] A. S. Galaev, T. Leistner, Holonomy groups of Lorentzian manifolds: classification, examples, and applications, Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, 53–96, ESI Lect. Math. Phys., Zürich: Eur. Math. Soc., 2008.

Труды конференций

[23] A. S. Galaev, Some applications of the Lorentzian holonomy algebras, Thirteenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, June 3–8, 2011, Varna, Bulgaria, Avangard Prima, Sofia (2012) 132–149.

[24] A. S. Galaev, Lorentzian holonomy algebras and their applications, Abstracts of the IV Congress of the Turkic World Mathematical Society, 1–3 July, 2011, 534 p., p. 14.

[25] A. S. Galaev, On the Einstein equation on Lorentzian manifolds with parallel distributions of isotropic lines. Тория относительности, гравитация, геометрия. Международная конференция "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation."Труды. Казань, 1–6 Ноября, 2010. Казань: Казанский федеральный университет, 2010, 91–100.

[26] А. С. Галаев, Алгебры голономии лоренцевых многообразий Эйнштейна, Труды матем. центра имени Н. И. Лобачевского. Т.39: Материалы Восьмой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения-2009", 1–6 ноября 2009 года, Казань: Каз.мат.общ-во, 2009. С. 19–23.

[27] А. С. Галаев, Об алгебрах голономии линейных связностей на супермногообразиях, Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры, Труды международнеой конференции посвященной 100 летия со дня рождения В.В. Вагнера. Саратов: Саратовский государственный университет, 2008, 76–78.

[28] А. С. Галаев, О голономии супермногообразий, Труды матем. центра имени Н. И. Лобачевского. Т.38: Материалы Шестой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения-2007", 14–16 декабря 2007 года. Казань: Каз.мат.общ-во, 2007, 51–53.

[29] А. С. Галаев, О классификации алгебр голономии лоренцевых многообразий, Труды матем. центра имени Н. И. Лобачевского. Т.31: Материалы Четвертой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения — 2005", 16–18 декабря 2005 года. Казань: Каз. мат. общ-во, 2005, 36–38.

[30] А. С. Галаев, О группах голономии лоренцевых многообразий, Труды матем. центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 18: Материалы международной молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения-2002", 28 ноября – 1 декабря 2002 г. Казань: Каз. мат. общ-во, 2002, С. 28.

Прочее

[31] А. С. Галаев, Слабо неприводимые подгруппы в $SU(1, n+1)$, Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004, Вып. 6, 27–30.

[32] A. S. Galaev, Isometry groups of Lobachevskian spaces, similarity transformation groups of Euclidean spaces and Lorentzian holonomy groups, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 79 (2006) 87–97.

[33] A. S. Galaev, Holonomy groups and special geometric structures of pseudo-Kählerian manifolds of index 2. PhD thesis, Humbold University, Berlin. http://arXiv:math/0612392.

[34] A. S. Galaev, Holonomy algebras of Einstein pseudo-Riemannian manifolds, http://arXiv:1206.6623.

Галаев Антон Сергеевич

ГРУППЫ ГОЛОНОМИИ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ И СУПЕРМНОГООБРАЗИЙ

специальность 01.01.04 — геометрия и топология

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук