УНИВЕРСИТЕТ им. МАСАРИКА

На правах рукописи

ГАЛАЕВ АНТОН СЕРГЕЕВИЧ

ГРУППЫ ГОЛОНОМИИ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ И СУПЕРМНОГООБРАЗИЙ

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
проф., д.ф.-м.н. Д. В. Алексеевский

Брно — 2013

Оглавление

3. Теория групп голономии супермногообразий 156

Введение

Актуальность темы. Диссертация посвящена изучению групп голономии лоренцевых многообразий и супермногообразий, а также связанных с ними геометрических структур.

Понятие группы голономии впервые было введено в работах Э.Картана [50] и [52], в [51] он использовал группы голономии для классификации римановых симметрических пространств. Группа голономии псевдориманова многообразия является подгруппой Ли группы Ли псевдоортогональных преобразований касательного пространства в некоторой точке многообразия, состоящей из параллельных переносов вдоль кусочно-гладких петель в этой точке. Чаще всего рассматривают связную группу голономии, т.е. компоненту единицы группы голономии, для ее определения нужно рассмотреть параллельные переносы вдоль стягиваемых петель. Алгебра Ли, соответствующая группе голономии, называется алгеброй голономии. Группа голономии псевдориманова многообразия представляет собой инвариант соответствующей связности Леви-Чивита; она дает информацию о тензоре кривизны и о параллельных сечениях векторных расслоений, ассоциированных с многообразием таких, как тензорное расслоение или спинорное расслоение.

Важным результатом является классификация Берже связных неприводимых групп голономии римановых многообразий [28]. Оказывается, что связная группа голономии n-мерного неразложимого, не являющегося локально симметрическим, риманова многообразия содержится в следующем списке: $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(m)$, $\mathrm{SU}(m)$ $(n = 2m)$, $\mathrm{Sp}(m)$, $\mathrm{Sp}(m)\cdot\mathrm{Sp}(1)$ $(n = 4m)$, $\mathrm{Spin}(7)$, $(n = 8)$, G_2 $(n = 7)$. Берже получил лишь список возможных групп голономии, и возникла задача показать, что существуют многообразия с каждой из этих групп голономии. В частности, это привело к знаменитой теореме Калаби-Яу [151]. Лишь в 1987 году Брайнт [42] построил примеры римановых многообразий с группами голономии $\mathrm{Spin}(7)$ и G_2. Таким образом, на решение этой задачи потребовалось более тридцати лет. Теорема разложения де Рама [131] сводит проблему классификации связных групп голономии римановых многообразий к случаю неприводимых групп голономии.

Неразложимые римановы многообразия со специальными (т.е. отличными от $\mathrm{SO}(n)$) группами голономии имеют важные геометрические свойства. Многообразия с большинством из этих групп голономии являются многообразиями Эйнштейна или Риччи-плоскими и допускают параллельные спинорные поля. Благодаря этим свойствам, римановы многообразия со специальными группами голономии получили применения в теоретической физике (в теории струн, теории суперсимметрии и М-теории) [25, 53, 76, 96, 97, 120]. В связи с этим, за последние 20 лет появилось множество конструкций полных и компактных римановых многообразий со специальными группами голономии, приведем лишь некоторые из них [22, 23, 64, 70, 96, 97].

Естественно рассмотреть задачу классификации связных групп голономии псевдоримановых многообразий, а в первую очередь, лоренцевых многообразий.

Имеется классификация Берже связных неприводимых групп голономии псевдоримановых многообразий [28]. Однако, в случае псевдоримановых многообразий недостаточно рассматривать только неприводимые группы голономии. Теорема разложения Ву [149] позволяет ограничиться рассмотрением связных слабо неприводимых групп голономии. Слабо неприводимая группа голономии не сохраняет никакое невырожденное собственное векторное подпространство касательного пространства. Такая группа голономии может сохранять вырожденное подпространство касательного пространства. В этом случае группа голономии не является редуктивной, в чем и заключается основная сложность.

Долгое время имелись лишь результаты о группах голономии четырехмерных лоренцевых многообразий [14, 71, 78, 79, 104, 105, 135].

Лишь в 1993 году Берард-Бержери и Икемакхен сделали первый шаг к классификации связных групп голономии лоренцевых многообразий произвольной размерности [26]. Они получили классификацию слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми, подалгебр лоренцевой алгебры Ли $\mathfrak{so}(1,n)$. Другой важный шаг к классификации связных групп голономии лоренцевых многообразий сделал Лайстнер [116], а завершает эту классификацию настоящая работа.

Лоренцевы многообразия со слабо неприводимыми, не являющимися неприводимыми, группами голономии допускают параллельные распределения изотропных прямых, такие многообразия называют также многообразиями Волкера [147]. Эти многообразия изучаются в геометрических работах, например, [45, 46, 136], а также в физических работах [40, 41, 57, 58, 59, 66, 72, 73, 75, 133]. В частности, в работах [40, 41, 73] выражается надежда, что лоренцевы многообразия со специальными группами голономии найдут применения в теоретической физике, например, в М-теории и теории струн. В последнее время в связи с теорией 11-мерной супергравитации имеются физические работы, в которых изучаются 11-мерные лоренцевы многообразия, допускающие некоторые киллинговы спинорные поля. При этом используются группы голономии [16, 67, 133]. Все это показывает необходимость изучения групп голономии лоренцевых многообразий и связанных с ними геометрических структур. Кроме настоящей работы этому посвящены работы [17, 18, 20, 21, 24, 37, 90, 100, 115, 102].

В случае псевдоримановых многообразий сигнатур, отличных от римановой и лоренцевой имеют место только частные результаты [156, 173, 185, 186, 30, 31, 39, 27, 91].

Теория супермногообразий возникла после открытия теоретическими физиками суперсимметрии [61, 107, 119, 146]. В последнее время появился интерес к римановым супермногообразиям [13, 6, 32, 54, 55, 56, 74, 109]. В частности к супермногообразиям Калаби-Яу [8, 132, 152], которые, как мы увидим, представляют собой римановы супермногообразия с алгебрами голономии, содержащимися в супералгебре Ли $\mathfrak{su}(p_0, q_0|p_1, q_1)$.

Возникает задача изучения групп голономии связностей на супермногообразиях, а в первую очередь — групп голономии римановых супермногообразий. До настоящей работы отсутствовало определение группы голономии, которое бы было прямым обобщением понятия обычной группы голономии и сохраняло бы ее свойства. Теоретические физики использовали понятие групп голономии супермногообразий [1, 2], однако они рассматривали группу голономии как группу параллельных переносов. Категорные соображения подсказывают, что группа голономии связности на супермногообразии должна быть супергруппой Ли, а супергруппа Ли не описывается своими точками. Можно рассмотреть чисто нечетное супермногообразие со связностью. Такое супермногообразие представляет собой одну точку с дополнительной структурой, поэтому имеется только одна (тривиальная) петля, тем не менее, связность может быть неплоской, а значит группа голономии должна быть нетривиальной.

Далее, естественно рассмотреть проблему классификации групп голономии римановых супермногообразий.

В работе [2] авторы пишут: „Вопрос выбора группы голономии пространства является основным моментом для определения физического содержания теории, использующей идею общековариантного рассмотрения." Однако выбирать можно только из списка возможных групп голономии, а для этого нужна классификация.

Цель работы. Целью работы является получение классификации связных групп голономии лоренцевых многообразий и ее применений, а также создание теории групп голономии супермногообразий и получение классификации неприводимых связных групп голономии римановых супермногообразий.

Основные результаты диссертации.

1) Получена геометрическая интерпретация классификации Берарда-Бержери и Икемакхена слабо неприводимых подалгебр лоренцевой алгебры Ли.

2) Получено полное описание тензора кривизны многообразия Волкера

3) Построены метрики, реализующие всех кандидатов в алгебры голономии лоренцевых многообразий.

4) Получена классификация алгебр голономии лоренцевых многообразий Эйнштейна, найден способ упрощения уравнения Эйнштейна, построены примеры метрик Эйнштейна специального вида.

5) Классифицированы римановы и лоренцевы многообразия, допускающие локальные рекуррентные спинорные поля в терминах их алгебр голономии.

6) Получена локальная классификация конформно плоских лоренцевых многообразий со специальными группами голономии.

7) Получена локальная классификация 2-симметрических лоренцевых многообразий.

8) Определены группы голономии связностей на локально свободных пучках над супермногообразиями; показано, что эти группы обладают большинством свойств групп голономии обычных многообразий.

9) Получена классификация одного класса неприводимых групп голономии римановых супермногообразий.

Научная новизна, теоретическое и практическое значение работы. Все основные результаты диссертации являются новыми, снабжены доказательствами и своевременно опубликованы.

Диссертация имеет теоретический характер, ее результаты могут быть применены для дальнейшего исследования геометрии лоренцевых многообразий и супермногообразий с каждой из возможных групп голономии. Результаты работы могут быть применены также в теоретической физике, например, в теории относительности, теории струн, теории супергравитации и М-теории.

Методика исследования. Используются теории представлений простых групп Ли и супергрупп Ли, стандартные методы теории групп голономии, дифференциальной геометрии и супергеометрии, а также метод исследования структуры тензора кривизны, развитый диссертантом.

Апробация работы. Основные результаты докладывались:

На конференциях:

На молодежной школе-конференции „Лобачевские чтения" (Казань, 2002, 2005, 2007 гг.).

На ежегодной научной апрельской конференции механико-математического факультета Саратовского государственного университета (апрель 2003, 2004, 2005 гг.).

На международной конференции „Shimura varieties, lattices and symmetric spaces" (Аскона, Швейцария, май 2004 г.).

На летней школе-конференции „Arithmetic and Geometry" (Корин, Германия, май 2005 г.).

На международной школе-конференции „Geometry and Physics" (Срни, Чехия, январь 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013 гг.).

На международной научной конференции „Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры", посвященной 100-летию со дня рождения профессора В.В. Вагнера (Саратов, ноябрь 2008 г.).

На семинаре „Современные проблемы дифференциальной геометрии", посвященном 80-летию со дня рождения профессора В.В. Вишневского (Казань, ноябрь 2009 г.).

На международной научной конференции „Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation" посвященной 100-летию со дня рождения профессора А.З. Петрова (Казань, ноябрь 2010 г.).

На международной научной конференции „XIII International Conference Geometry, Integrability and Quantization" (Св. Константина и Елены, Болгария, июнь 2011 г.).

На международной научной конференции „IV Congress of the Turkic World Mathematical Society" (Баку, Азербайджан, июль 2011 г.).

На международной научной конференции „Differential geometry and its applications" (Брно, Чехия, август 2010, август 2013 гг.).

На конференциях в качестве приглашенного докладчика:

На международном симпозиуме „Holonomy Groups and Applications in String Theory" (Гамбург, Германия, июль 2008 г.).

На международной научной конференции „Contributions in Differential Geometry: a round table in occasion of the 65th birthday of Lionel Berard Bergery" (Люксембург, Сентябрь 2010 г.).

На международной научной конференции „Symmetries in Differential Geometry and Mathematical Physics" in honor of D.V. Alekseevsky (Люксембург, сентябрь 2012 г.).

На летней школе „Summer school on Differential Geometry and Supersymmetry" (2 лекции, 2 семинара, Гамбург, Германия, сентябрь 2012 г.).

На семинарах:

На семинаре по дифференциальной геометрии в университете им. Гумбольдта под руководством проф. Хельги Баум (Берлин, июнь 2003, декабрь 2003, апрель 2005, июнь 2007, декабрь 2009, июнь 2010 гг.).

В институте Ервина Шредингера (Вена, Австрия, ноябрь 2005 г.).

На заседании кафедры геометрии Казанского государственного университета под руководством проф. Б.Н. Шапукова (декабрь 2005 г.).

На семинаре по дифференциальной геометрии в университете Масарика под руководством проф. Ивана Коларжа (Брно, Чехия, май 2007, май 2008, апрель 2009, декабрь 2010, апрель 2011, октябрь 2012, апрель 2013 гг.).

На „Центрально-Европейском Семинаре” по геометрии (Брно, Тельч, Микулов, Чехия, апрель 2007, ноябрь 2007, февраль 2008, ноябрь 2008, ноябрь 2009, апрель 2010, ноябрь 2010, май 2011, ноябрь 2011, ноябрь 2012 гг.).

На математическом семинаре гамбургского университета (Гамбург, Германия, ноябрь 2007 г.).

На семинаре по геометрии в стокгольмском университете под руководством проф. С.А. Меркулова (Стокгольм, Швеция, ноябрь 2008 г.).

На семинаре по дифференциальной геометрии гамбургского университета под руководством проф. Висентэ Кортеса (Гамбург, Германия, июнь 2010 г.).

На заседании Кафедры теории относительности и гравитации Казанского (Приволжского) Федерального университета под руководством проф. А.В. Аминовой (1 февраля 2012 г.).

На семинаре „Дифференциальная геометрия и приложения” под руководством академика РАН, проф. А.Т. Фоменко, Московский Государственный университет (19 ноября 2012 г., 16 сентября 2013 г.).

На семинаре „Геометрия, топология и их приложения” под руководством академика РАН, проф. И.А. Тайманова, Институт математики Сибирского отделения РАН (18, 21 февраля 2013 г.).

В международном математическом центре им. Штефана Банаха Польской академии наук (Варшава, Польша, 4 октября 2013 г.).

На заседании кафедры дифференциальной геометрии и приложений под руководством академика РАН, проф. А.Т. Фоменко, Московский Государственный университет (9 октября 2013 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [153–186]. Работы [153–160] опубликованы в российских журналах из списка ВАК. Работы [161–172] опубликованы в иностранных журналах, цитируемые в базе Scopus, т.е. из списка ВАК. Работы [173,174] представляют собой главы в книгах. Работы [163,165,170,173,174] являются совместными; работы [163,170] получены в процессе неразделимой творческой деятельности авторов; в работе

[165] соискателю принадлежат результаты для случая пространств Эйнштейна с ненулевой космологической константой; работы [173,174] носят обзорный характер.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на 13 параграфов, и списка литературы. Параграфы разделены на пункты. Диссертация изложена на 245 страницах текста, библиография содержит 186 наименование.

Содержание работы.

Во введении дается обзор современного состояния теории групп голономии римановых и лоренцевых многообразий, формулируются основные задачи, а также описываются результаты, составляющие основное содержание диссертации.

В главе 1 решается проблема классификации алгебр голономии и тензоров кривизны лоренцевых многообразий.

В параграфе 1.1 излагаются необходимые сведения из теории групп голономии, приводятся определения и основные теоремы, а также результаты Берже о классификации неприводимых групп голономии римановых и псевдоримановых многообразий.

В параграфе 1.2 мы приступаем к изучению алгебр голономии лоренцевых многообразий. Рассмотрим связное лоренцево многообразие (M, g) размерности $n + 2 \geq 4$. Отождествим касательное пространство в некоторой точке многообразия (M, g) с пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,n+1}$. Будем обозначать метрику Минковского на $\mathbb{R}^{1,n+1}$ символом g. Тогда алгебра голономии $\mathfrak{g}$ многообразия (M, g) в этой точке отождествляется с подалгеброй лоренцевой алгебры Ли $\mathfrak{so}(1, n + 1)$. Согласно теореме Ву, (M, g) не является локально произведением псевдоримановых многообразий тогда и только тогда, когда его алгебра голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n + 1)$ — слабо неприводима. Поэтому будем предполагать, что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n + 1)$ — слабо неприводима. Известно, что если $\mathfrak{g}$ — неприводима, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, n + 1)$. Итак, мы можем предполагать, что

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ — слабо неприводима и не является неприводимой, тогда $\mathfrak{g}$ сохраняет некоторую изотропную прямую $\ell \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$. Зафиксируем произвольный изотропный вектор $p \in \ell$, тогда $\ell = \mathbb{R}p$. Зафиксируем какой-либо изотропный вектор q такой, что $g(p, q) = 1$. Подпространство $E \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$, ортогональное векторам p и q — евклидово; чаще всего будем обозначать это пространство через $\mathbb{R}^n$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Получаем базис Витта $p, e_1, \dots, e_n, q$ пространства $\mathbb{R}^{1,n+1}$.

Обозначим через $\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ подалгебру в $\mathfrak{so}(1, n+1)$, сохраняющую изотропную прямую $\mathbb{R}p$. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ может быть отождествлена со следующей матричной алгеброй Ли:

$$\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} a & X^t & 0 \\ 0 & A & -X \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \right| a \in \mathbb{R},\, X \in \mathbb{R}^n,\, A \in \mathfrak{so}(n) \right\}.$$

Отождествим матрицу, приведенную выше, с тройкой (a, A, X). Получаем разложение

$$\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(n)) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ — связная подгруппа Ли группы Ли $\mathrm{SO}(1, n+1)$, сохраняющая изотропную прямую $\mathbb{R}p$.

Напомним, что для всякой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ имеем разложение $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, где $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ есть коммутант $\mathfrak{h}$, а $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ — центр $\mathfrak{h}$ [48].

Следующую теорему доказали Берард-Бержери и Икемакхен [26].

Теорема 1.2.1. *Подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ — слабо неприводима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли одного из следующих типов:*

Тип 1. $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}) \ltimes \mathbb{R}^n$, *где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — подалгебра;*

Тип 2. $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n$, *где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — подалгебра;*

Тип 3. $\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi} = \{(\varphi(A), A, 0) | A \in \mathfrak{h}\} \ltimes \mathbb{R}^n$, *где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — подалгебра с условием $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \neq \{0\}$ и $\varphi : \mathfrak{h} \to \mathbb{R}$ — ненулевое линейное отображение со свойством $\varphi|_{\mathfrak{h}'} = 0$;*

Тип 4. $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi} = \{(0, A, X + \psi(A)) | A \in \mathfrak{h}, X \in \mathbb{R}^m\}$*, где имеет место ортогональное разложение* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ *такое, что* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(m)$, $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \geq n - m$ *и* $\psi : \mathfrak{h} \to \mathbb{R}^{n-m}$ *— сюръективное линейное отображение со свойством* $\psi|_{\mathfrak{h}'} = 0$.

Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ ассоциированная, выше со слабо неприводимой подалгеброй $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$, называется *ортогональной частью* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Доказательство этой теоремы из [26] – алгебраическое и не дает никакую интерпретацию полученных алгебр. Мы приводим геометрическое доказательство этого результата вместе с наглядной интерпретацией. Этот результат опубликован в [160, 184, 182].

Теорема 1.2.2. *Имеет место изоморфизм групп Ли*

$$\mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p} \simeq \mathrm{Sim}^0(n),$$

где $\mathrm{Sim}^0(n)$ *– связная группы Ли преобразований подобия евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$*. При этом изоморфизме, слабо неприводимые подгруппы Ли в* $\mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ *соответствуют транзитивным подгруппам Ли в* $\mathrm{Sim}^0(n)$.

Используя результаты из [4, 5], можно легко классифицировать связные транзитивные подгруппы в $\mathrm{Sim}^0(n)$.

Далее будем обозначать алгебру Ли $\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ через $\mathfrak{sim}(n)$.

В параграфе 1.3 мы изучаем тензоры кривизны рассматриваемых лоренцевых многообразий, вместе с результатом Лайстнера это приводит к классификации возможных алгебр голономии лоренцевых многообразий. Результаты этого параграфа опубликованы в [153, 172, 174].

Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ — подалгебра. Пространство тензоров кривизны $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ определяется как пространство 2-форм на $\mathbb{R}^{1,n+1}$ со значениями в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющих тождеству Бьянки

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0, \quad X, Y, Z \in \mathbb{R}^{1,n+1}.$$

Такие пространства рассматривал Берже. Если $\mathfrak{g}$ линейно порождается образами элементов пространства $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, то $\mathfrak{g}$ называется алгеброй Берже. Алгебры голономии псевдоримановых многообразий являются алгебрами Берже, поэтому алгебры Берже являются кандидатами в алгебры голономии.

Для подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ определим пространством слабых тензоров кривизны $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ как множество линейных отображений $P : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{h}$, удовлетворяющих тождеству

$$g(P(X)Y,Z) + g(P(Y)Z,X) + g(P(Z)X,Y) = 0,\ X,Y,Z \in \mathbb{R}^n.$$

Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ называется слабой алгеброй Берже, если она линейно порождается образами элементов пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Удобно отождествить алгебру Ли $\mathfrak{so}(1,n+1)$ с пространством бивекторов $\wedge^2\mathbb{R}^{1,n+1}$, таким образом, что $(X \wedge Y)Z = g(X,Z)Y - g(Y,Z)X$, $X,Y,Z \in \mathbb{R}^{1,n+1}$. Тогда элемент $(a,A,X) \in \mathfrak{sim}(n)$ соответствует бивектору $-ap \wedge q + A - p \wedge X$, где $A \in \mathfrak{so}(n) \simeq \wedge^2\mathbb{R}^n$.

Следующая теорема дает структуру пространств тензоров кривизны для слабо неприводимых подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$.

Теорема 1.3.1. *Каждый тензор кривизны $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}})$ однозначно определен элементами $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $R_0 \in \mathcal{R}(\mathfrak{h})$, $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$, $T \in \odot^2\mathbb{R}^n$ следующим образом:*

$$R(p,q) = -\lambda p \wedge q - p \wedge \vec{v}, \quad R(X,Y) = R_0(X,Y) + p \wedge (P(X)Y - P(Y)X),$$
$$R(X,q) = -g(\vec{v},X)p \wedge q + P(X) - p \wedge T(X), \quad R(p,X) = 0, \quad X,Y \in \mathbb{R}^n.$$

В частности, имеем изоморфизм $\mathfrak{h}$-модулей

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n \oplus \odot^2\mathbb{R}^n \oplus \mathcal{R}(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{P}(\mathfrak{h}).$$

Далее,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}) &= \{R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}) | \lambda = 0, \vec{v} = 0\},\\ \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}) &= \{R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}) | \lambda = 0,\ R_0 \in \mathcal{R}(\ker\varphi),\ g(\vec{v},\cdot) = \varphi(P(\cdot))\},\\ \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}) &= \{R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}) | R_0 \in \mathcal{R}(\ker\psi),\ \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{n-m}} \circ T = \psi \circ P\}.\end{aligned}$$

Следствие 1.3.1. *Всякая слабо неприводимая подалгебра* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ *является алгеброй Берже тогда и только тогда, когда ее ортогональная часть* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *является слабой алгеброй Берже.*

Следствие 1.3.2. *Всякая слабо неприводимая подалгебра* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ *такая, что ее ортогональная часть* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *является алгеброй голономии риманова многообразия, является алгеброй Берже.*

Следствие 1.3.1 сводит проблему классификации алгебр Берже для лоренцевых многообразий к проблеме классификации слабых алгебр Берже.

Далее показано, что для всякой слабой алгебры Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ существует ортогональное разложение

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^{n_s} \oplus \mathbb{R}^{n_{s+1}} \tag{1.5}$$

и соответствующее разложение $\mathfrak{h}$ в прямую сумму идеалов

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_s \oplus \{0\}, \tag{1.6}$$

при этом $\mathfrak{h}_i(\mathbb{R}^{n_j}) = 0$ при $i \neq j$, $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ и представление $\mathfrak{h}_i$ неприводимо в $\mathbb{R}^{n_i}$. При этом $\mathfrak{h}$ является слабой алгеброй Берже тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{h}_i$ является слабой алгеброй Берже при всех $i = 1, ..., s$.

Итак, достаточно рассматривать неприводимые слабые алгебры Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Оказывается, что эти алгебры представляют собой неприводимые алгебры голономии римановых многообразий. Это далеко нетривиальное утверждение получил Лайстнер [116].

Теорема 1.3.3. *Всякая неприводимая подалгебра* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *является слабой алгеброй Берже тогда и только тогда, когда она является алгеброй голономии риманова многообразия.*

Ниже мы еще обсудим доказательство этой теоремы. Из следствия 1.3.1 и теоремы 1.3.3 получаем классификацию слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми, алгебр Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$.

Теорема 1.3.4. *Подалгебра* $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(1,n+1)$ *является слабо неприводимой, не являющейся неприводимой, алгеброй Берже тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{g}$ *сопряжена одной из подалгебр* $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}$, $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}\subset\mathfrak{sim}(n)$, *где* $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ *— алгебра голономии риманова многообразия.*

Всякое лоренцево многообразие (M,g) с алгеброй голономии $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{sim}(n)$ (локально) допускает распределение ℓ изотропных прямых. Эти многообразия называются многообразиями Волкера [46, 147]. На таком многообразии (M,g) существуют локальные координаты $v,x^1,...,x^n,u$ такие, что метрика g имеет вид

$$g=2dvdu+h+2Adu+H(du)^2, \tag{1.12}$$

где $h=h_{ij}(x^1,...,x^n,u)dx^idx^j$ – семейство римановых метрик, зависящих от параметра u, $A=A_i(x^1,\dots,x^n,u)dx^i$ – семейство 1-форм, зависящих от u, а H – локальная функция на M. В пункте 1.3.2 мы приводим формулы для нахождения тензора кривизны и тензора Риччи метрики Волкера.

В параграфе 1.4 мы вычисляем пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$, что дает полную структуру пространств тензоров кривизны для алгебр голономии $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{sim}(n)$. Этот результат опубликован [166].

Пусть $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ — неприводимая подалгебра. Рассмотрим $\mathfrak{h}$-эквивариантное отображение $\widetilde{\mathrm{Ric}}:\mathcal{P}(\mathfrak{h})\to\mathbb{R}^n$, $\widetilde{\mathrm{Ric}}(P)=\sum_{i=1}^n P(e_i)e_i$. Обозначим за $\mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$ ядро отображения $\widetilde{\mathrm{Ric}}$. Пусть $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$ — ортогональное дополнение этого пространства в $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Таким образом, $\mathcal{P}(\mathfrak{h})=\mathcal{P}_0(\mathfrak{h})\oplus\mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$. Пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{u}(\frac{n}{2})$ найдены в [116]. В пункте 1.4.3 найдены пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для остальных алгебр голономии римановых многообразий. Для этого мы рассматриваем все возможные неприводимые алгебры голономии римановых многообразий $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ (включая алгебры голономии симметрических римановых пространств) и проводим вычисления в терминах весов представлений. Главным результатом является таблица 1.4.1 (для компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ выражение V_Λ обозначает неприводимое представление $\mathfrak{h}$, определяемое неприводимым представлением алгебры Ли $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}$ со старшим весом Λ; $((\odot^2(\mathbb{C}^m)^*\otimes\mathbb{C}^m)_0$ обозначает подпространство в $\odot^2(\mathbb{C}^m)^*\otimes\mathbb{C}^m$, состоящее из тензоров таких, что свертка верхнего индекса с любым нижним индексом дает ноль).

Таблица 1.4.1. *Пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для неприводимых алгебр голономии римановых многообразий $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$.*

$\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$	$\mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$	$\mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$	$\dim\mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$
$\mathfrak{so}(2)$	$\mathbb{R}^2$	0	0
$\mathfrak{so}(3)$	$\mathbb{R}^3$	$V_{4\pi_1}$	5
$\mathfrak{so}(4)$	$\mathbb{R}^4$	$V_{3\pi_1+\pi_1'}\oplus V_{\pi_1+3\pi_1'}$	16
$\mathfrak{so}(n)$, $n\geq 5$	$\mathbb{R}^n$	$V_{\pi_1+\pi_2}$	$\frac{(n-2)n(n+2)}{3}$
$\mathfrak{u}(m)$, $n=2m\geq 4$	$\mathbb{R}^n$	$(\odot^2(\mathbb{C}^m)^*\otimes\mathbb{C}^m)_0$	$m^2(m-1)$
$\mathfrak{su}(m)$, $n=2m\geq 4$	0	$(\odot^2(\mathbb{C}^m)^*\otimes\mathbb{C}^m)_0$	$m^2(m-1)$
$\mathfrak{sp}(m)\oplus\mathfrak{sp}(1)$, $n=4m\geq 8$	$\mathbb{R}^n$	$\odot^3(\mathbb{C}^{2m})^*$	$\frac{m(m+1)(m+2)}{3}$
$\mathfrak{sp}(m)$, $n=4m\geq 8$	0	$\odot^3(\mathbb{C}^{2m})^*$	$\frac{m(m+1)(m+2)}{3}$
$G_2\subset\mathfrak{so}(7)$	0	$V_{\pi_1+\pi_2}$	64
$\mathfrak{spin}(7)\subset\mathfrak{so}(8)$	0	$V_{\pi_2+\pi_3}$	112
$\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$, $n\geq 4$, — *симметрич. алгебра Берже*	$\mathbb{R}^n$	0	0

В параграфе 1.5 мы даем простое доказательства теоремы Лайстнера 1.3.3 для случая неприводимых полупростых, не являющихся простыми, алгебр Ли $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$. Этот результат опубликован в [155]. Простым способом мы показываем, что достаточно рассматривать случай $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{k}\subset\mathfrak{so}(4m,\mathbb{C})$, где $\mathfrak{k}\subsetneq\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$ — неприводимая подалгебра. Мы показываем, что в этом случае пространство $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ совпадает с $\mathbb{C}^2\otimes\mathfrak{g}_1$, где $\mathfrak{g}_1$ — первое продолжение Танака алгебры Ли $\mathfrak{g}_{-2}\oplus\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0$, где $\mathfrak{g}_{-2}=\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_{-1}=\mathbb{C}^{2m}$, $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{2m}}$. Если $\mathcal{P}(\mathfrak{h})\neq 0$, то рассматривая полное продолжение Танака, мы получаем, что $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ является алгеброй голономии кватернионнокэлерова симметрическое пространства.

Выше мы получили классификацию слабо неприводимых алгебр Берже, содержащихся в $\mathfrak{sim}(n)$. **В параграфе 1.6** мы показываем, что все эти алгебры могут быть реализованы как алгебры голономии лоренцевых многообразий. Этим мы завершаем классификацию алгебр голономии лоренцевых многообразий. Результаты этого параграфа опубликованы в [171, 174, 173].

Рассмотрим произвольную алгебру голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ риманова многообразия. Мы показываем, что существует $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$, чей образ порождает $\mathfrak{h}$. Напомним, что для $\mathfrak{h}$ имеют место разложения (1.5) и (1.6). Пусть $m_0 = n - n_{s+1}$. Имеем $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(m_0)$. Определим числа P^k_{ji} такие, что $P(e_i)e_j = P^k_{ji}e_k$. Рассмотрим на $\mathbb{R}^{n+2}$ следующую метрику:

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + 2A_i dx^i du + H \cdot (du)^2,$$

где $A_i = \frac{1}{3}(P^i_{jk} + P^i_{kj})x^j x^k$, а H — функция, которая будет зависеть от типа алгебры голономии, которую мы хотим получить. Для алгебры Ли $\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}$ определим числа $\varphi_i = \varphi(P(e_i))$. Для алгебры Ли $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$ определим числа ψ_{ij}, $j = m+1, ..., n$, такие, что $\psi(P(e_i)) = -\sum_{j=m+1}^n \psi_{ij}e_j$.

Теорема 1.6.2. *Алгебра голономии $\mathfrak{g}$ метрики g в точке 0 зависит от функции H следующим образом:*

H	$\mathfrak{g}$
$v^2 + \sum_{i=m_0+1}^n (x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}$
$\sum_{i=m_0+1}^n (x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}$
$2v\varphi_i x^i + \sum_{i=m_0+1}^n (x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}$
$2\sum_{j=m+1}^n \psi_{ij}x^i x^j + \sum_{i=m_0+1}^m (x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$

Получаем основную классификационную теорему.

Теорема 1.6.2. *Подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ является слабо неприводимой, не являющейся неприводимой, алгеброй голономии лоренцева многообразия тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной из подалгебр $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}, \mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}, \mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}, \mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi} \subset \mathfrak{sim}(n)$, где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — алгебра голономии риманова многообразия.*

Далее мы строим явные примеры метрик с алгебрами голономии $\mathfrak{g}^{2,G_2} \subset \mathfrak{so}(1,8)$ и $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{spin}(7)} \subset \mathfrak{so}(1,9)$.

В главе 2 мы получаем применения результатов главы 1.

В параграфе 2.1 мы рассматриваем связь алгебр голономии и уравнения Эйнштейна.

Сначала мы находим слабо неприводимые алгебры голономии лоренцевых многообразий Эйнштейна.

Теорема 2.1.2. *Пусть (M, g) — локально неразложимое $n+2$-мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если (M, g) — Риччи-плоское многообразие, то имеет место одно из утверждений:*

1) Алгебра голономии $\mathfrak{g}$ многообразия (M, g) — типа 1 и в разложении (1.6) для $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ по крайней мере одна подалгебра $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из следующих алгебр Ли: $\mathfrak{so}(n_i)$, $\mathfrak{u}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4}) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ или с симметрической алгеброй Берже.

2) Алгебра голономии $\mathfrak{g}$ многообразия (M, g) — типа 2 и в разложении (1.6) для $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ каждая подалгебра $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из следующих алгебр Ли: $\mathfrak{so}(n_i)$, $\mathfrak{su}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4})$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$.

Теорема 2.1.3. *Если (M, g) — многообразие Эйнштейна, не являющееся Риччи-плоским, то алгебра голономии $\mathfrak{g}$ многообразия (M, g) — типа 1 и в разложении (1.6) для $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ каждая подалгебра $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из следующих алгебр Ли: $\mathfrak{so}(n_i)$, $\mathfrak{u}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4}) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ или с симметрической алгеброй Берже. Более того, $n_{s+1} = 0$.*

В пункте 2.1.2 мы покажем существование метрик Эйнштейна (соответственно, Риччи-плоских метрик) с каждой из алгебр голономии, полученных в приведенных теоремах.

В отличии от случая римановых многообразий, лоренцевы многообразия ни с какими из алгебр голономии не являются автоматически Риччи-плоскими или многообразиями Эйнштейна. В пункте 2.1.3 мы показываем, что лоренцевы многообразия с некоторыми алгебрами голономии автоматически удовлетворяют некоторому более слабому условию на тензор Риччи. Лоренцево многообразие (M, g) называется *тотально Риччи-изотропным*, если образ оператора Риччи этого многообразия — изотропный. Если (M, g) — спинорное многообразие, допускающие параллельное спинорное поле, то это многообразие является тотально Риччи-изотропным [45, 66].

Теорема 2.1.5. *Пусть (M, g) — локально неразложимое $n+2$-мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если (M, g) — тотально Риччи-изотропное, то его алгебра голономии — та же, что в теореме 2.1.2.*

Теорема 2.1.6. *Если алгебра голономии многообразия (M, g) — типа 2 и в разложении (1.6) алгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ каждая подалгебра $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает а одной из алгебр Ли $\mathfrak{su}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4})$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$, то многообразие (M, g) — тотально Риччи-изотропное.*

В пункте 2.1.4 мы занимаемся упрощением уравнения Эйнштейна для метрик Волкера. Уравнение Эйнштейна для метрик Волкера рассмотрели недавно теоретические физики Гиббонс и Поп в [72]. Главная теорема пункта 2.1.4 дает возможность существенно упростить уравнение Эйнштейна для случая ненулевой космологической константы Λ.

Теорема 2.1.7. *Пусть (M, g) — локально неразложимое $n+2$-мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если (M, g) — многообразие Эйнштейна с ненулевой космологической константой Λ, то в окрестности каждой точки существуют координаты $v, x^1, \dots, x^n, u$ такие, что метрика g имеет вид*

$$g = 2dvdu + h + (\Lambda v^2 + H_0)(du)^2,$$

где $\partial_v H_0 = 0$, h — u-семейство римановых метрик Эйнштейна с космологической константой Λ, удовлетворяющее

$$\Delta H_0 + \frac{1}{2} h^{ij} \partial_u^2 h_{ij} = 0, \quad \nabla^j \partial_u h_{ij} = 0, \quad h^{ij} \partial_u h_{ij} = 0, \quad \mathrm{Ric}_{ij} = \Lambda h_{ij}.$$

Обратно, каждая такая метрика является метрикой Эйнштейна.

Таким образом, мы свели уравнение Эйнштейна для лоренцевых метрик с $\Lambda \neq 0$ к проблеме нахождения семейств римановых метрик Эйнштейна, удовлетворяющих некоторым уравнениям. В пункте 2.1.5 мы приводим примеры метрик Эйнштейна в размерности 4.

В параграфе 2.2 мы изучаем псевдоримановы многообразия с рекуррентными спинорными полями в терминах их алгебр голономии. Результаты этого параграфа опубликованы в [154].

Пусть (M, g) — спинорное псевдориманово многообразие сигнатуры (r, s), а S — соответствующее комплексное спинорное расслоение с индуцированной связностью ∇^S. Спинорное поле $s \in \Gamma(S)$ называется *рекуррентным*, если $\nabla^S_X s = \theta(X)s$ для всех векторных полей $X \in \Gamma(TM)$, здесь θ — комплекснозначная 1-форма. Если $\theta = 0$, то s — *параллельное* спинорное поле. Ванг охарактеризовал односвязные спинорные римановы многообразия, допускающие параллельные спинорные поля, в терминах групп голономии этих многообразий [148]. Аналогичные результаты получили Лайстнер для лоренцевых многообразий [115, 114], Баум и Кас для псевдоримановых многообразий с неприводимыми группами голономии [19].

Спинорное расслоение S псевдориманова многообразия (M, g) допускает параллельное комплексное подрасслоение размерности 1 тогда и только тогда, когда в окрестности каждой точки многообразия (M, g) существует не обращающееся в ноль рекуррентное спинорное поле; эти поля должны быть пропорциональны в пересечениях областей их определения. Мы изучаем некоторые классы спинорных псевдоримановых многообразий (M, g), чьи спинорные расслоения допускают одномерные комплексные подрасслоения.

В пункте 2.2.1 приводятся необходимые сведения о спинорных представлениях. В пункте 2.2.2 мы рассматриваем Римановы многообразия. Приведем основные результаты.

Теорема 2.2.1. *Пусть (M, g) — локально неразложимое n-мерное од-*

носвязное спинорное риманово многообразие. Тогда спинорное расслоение S этого многообразия допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда алгебра голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ многообразия (M, g) — одна из $\mathfrak{u}(\frac{n}{2})$, $\mathfrak{su}(\frac{n}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n}{4})$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$, или (M, g) — локально симметрическое кэлерово многообразие.

Следствие 2.2.1. *Пусть (M, g) — односвязное спинорное риманово многообразие с неприводимой алгеброй голономии и без ненулевых параллельных спинорных полей. Тогда спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда (M, g) — кэлерово многообразие не являющееся Риччи-плоским.*

Теорема 2.2.2. *Пусть (M, g) — локально неразложимое n-мерное односвязное спинорное кэлерово многообразие, не являющееся Риччи-плоским. Тогда его спинорное расслоение S допускает в точности два параллельных одномерных комплексных подрасслоения.*

В пункте 2.2.3 рассмотрены лоренцевы многообразия.

Теорема 2.2.4. *Пусть (M, g) — односвязное локально неразложимое $(n+2)$-мерное спинорное лоренцево многообразие. Тогда спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда (M, g) допускает параллельное распределение изотропных прямых (т.е. его алгебра голономии $\mathfrak{g}$ содержится в $\mathfrak{sim}(n)$), а в разложении (1.6) для подалгебры $\mathfrak{h} = \mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(n)}\mathfrak{g}$ каждая из подалгебр $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из алгебр Ли $\mathfrak{u}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{su}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4})$, G_2, $\mathfrak{spin}(7)$ или с алгеброй голономии неразложимого симметрического кэлерова пространства. Число параллельных одномерных комплексных подрасслоений расслоения S равно числу одномерных комплексных подпространств модуля Δ_n, сохраняемых алгеброй $\mathfrak{h}$.*

В пункте 2.2.4 мы рассматриваем псевдоримановы многообразия с неприводимыми алгебрами, для них мы доказываем утверждения, аналогичные утверждениям пункта 2.2.2 для римановых многообразий.

В параграфе 2.3 мы получаем локальную классификацию конформно плоских лоренцевых многообразий со специальными группами голономии. Эти результаты опубликованы в [153, 162].

Известно [106], что конформно плоское риманово многообразие либо является произведением двух пространств постоянной секционной кривизны, либо произведением пространства постоянной секционной кривизны и интервала, либо ограниченная группа голономии этого многообразия совпадает с компонентой связности единицы ортогональной группы. Ясно, что не существует конформно плоских римановых многообразий со специальными группами голономии. Мы доказываем аналогичную теорему для псевдоримановых многообразий, в этом случае группа голономии может является также слабо неприводимой и не является неприводимой. Далее мы рассматриваем лоренцевы многообразия.

Теорема 2.3.1. *Пусть (M, g) – конформно плоское многообразие Волкера (т.е. с нулевым тензором кривизны Вейля) размерности $n + 2 \geq 4$. Тогда в некоторой окрестности каждой точки M существуют координаты $v, x^1, ..., x^n, u$ такие, что*

$$g = 2dvdu + \Psi \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 + 2Adu + (\lambda(u)v^2 + vH_1 + H_0)(du)^2,$$

где

$$\Psi = \frac{4}{\left(1 - \lambda(u) \sum_{k=1}^{n} (x^k)^2\right)^2}, \quad H_1 = -4C_k(u)x^k\sqrt{\Psi} - \partial_u \ln \Psi + K(u),$$

$$A = A_i dx^i, \quad A_i = \Psi \left(-4C_k(u)x^k x^i + 2C_i(u) \sum_{k=1}^{n} (x^k)^2 \right),$$

$H_0(x^1, ..., x^n, u)$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\lambda^2(u)} \Psi \sum_{k=1}^{n} C_k^2(u) + \sqrt{\Psi} \left(a(u) \sum_{k=1}^{n} (x^k)^2 + D_k(u)x^k + D(u) \right), \\ \text{\textit{если} } \lambda(u) \neq 0, \\ 16 \left(\sum_{k=1}^{n} (x^k)^2 \right)^2 \sum_{k=1}^{n} C_k^2(u) + \tilde{a}(u) \sum_{k=1}^{n} (x^k)^2 + \tilde{D}_k(u)x^k + \tilde{D}(u), \\ \text{\textit{если} } \lambda(u) = 0 \end{cases}$$

для некоторых функций $\lambda(u)$, $a(u)$, $\tilde{a}(u)$, $C_i(u)$, $D_i(u)$, $D(u)$, $\tilde{D}_i(u)$, $\tilde{D}(u)$.

Если функция λ равна нулю на некотором открытом множестве, или не обращается в ноль, то метрика, полученная выше, может быть упрощена. Мы показываем, что алгебра голономии полученной метрики совпадает либо с $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$, либо с $\mathfrak{sim}(n)$.

В пункте 2.3.3 приводятся выражения для тензора кривизны и конформного тензора кривизны Вейля W метрики Волкера. Для доказательства теоремы 2.3.1 мы записываем уравнение $W = 0$ в виде системы дифференциальных уравнений с частными производными и находим подходящие системы координат, так, что возможно получить полное решение этой системы. В пункте 2.3.7 найден оператор Риччи полученных метрик.

В пункте 2.3.8 рассмотрен случай многообразий размерности 4. Возможные алгебры голономии конформно плоских лоренцевых многообразий размерности 4 найдены в [79]. В статье [79] была сформулирована проблема построения примера конформно плоской метрики с алгеброй голономии $\mathfrak{sim}(2)$. Попытка построить такую метрику была сделана в [71]. Мы показываем, что метрика, построенная в [71], в действительности является разложимой, а ее алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{so}(1,1) \oplus \mathfrak{so}(2)$. Таким образом, в настоящей работе мы впервые получаем конформно плоскую метрику с алгеброй голономии $\mathfrak{sim}(n)$, и более того, мы находим все такие метрики. Это показывает преимущество нашего подхода.

В параграфе 2.4 мы получаем классификацию 2-симметрических лоренцевых многообразий. Этот результат опубликован в [163].

Симметрические псевдоримановы многообразия представляют собой важный класс пространств. Прямым обобщением этих многообразий являются 2-симметрические псевдоримановы пространства (M, g), удовлетворяющие условию $\nabla^2 R = 0, \quad R \neq 0$. В случае римановых многообразий, условие $\nabla^2 R = 0$ влечет $\nabla R = 0$ [145]. 2-симметрические пространства изучались в [100, 140, 33]. Мы получаем локальную классификацию таких пространств.

Теорема 2.4.1. *Пусть* (M, g) *— локально неразложимое лоренцево многообразие размерности* $n + 2$. *Тогда многообразие* (M, g) *— 2-симметрическое тогда и только тогда, когда локально существуют координаты* $v, x^1, ..., x^n,$ *и такие, что*

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + (H_{ij}u + F_{ij})x^i x^j (du)^2,$$

где H_{ij} *— ненулевая диагональная вещественная матрица с диагональными элементами* $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, *а* F_{ij} *— симметрическая вещественная матрица.*

В доказательстве мы используем главным образом, то, что тензор ∇R является параллельным, а потому его аннулирует алгебра голономии. Это позволяет нам найти явный вид ∇R, а затем и метрики.

Этот результат был передоказан в [34] с помощью рассмотрения уравнения $\nabla^2 R = 0$ в локальных координатах и громоздких вычислений. Это показывает значительное преимущество методов теории групп голономии.

В главе 3 мы развиваем теорию групп голономии супермногообразий.

В параграфе 3.1 мы даем определение группы голономии связностей на локально свободных пучках над супермногообразиями, а также обсуждаем их свойства. Эти результаты опубликованы в [169].

В пунктах 3.1.1 и 3.1.2 даны необходимые сведения о супералгебрах Ли и супермногообразиях.

Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_\mathcal{M})$ — супермногообразие размерности $n|m$. Обозначим через $\mathcal{T}_\mathcal{M}$ касательный пучок, т.е. пучок векторных полей на $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_\mathcal{M}$-супермодулей на $\mathcal{M}$, например $\mathcal{T}_\mathcal{M}$. Слоем пучка $\mathcal{E}$ в точке $x \in M$ называется векторное суперпространство $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}(V)/(\mathcal{O}_\mathcal{M}(V)_x\mathcal{E}(V))$, где $V \subset M$ — открытое подмножество, содержащее точку x, а $\mathcal{O}_\mathcal{M}(V)_x$ — идеал в $\mathcal{O}_\mathcal{M}(V)$, состоящий из функций, обращающихся в ноль в точке x. Определим векторное расслоение E над многообразием M, слои которого совпадают со слоями пучка $\mathcal{E}$.

Связность ∇ и тензор кривизны R на пучке $\mathcal{E}$ определяется по аналогии со связностью в векторном расслоении над гладким многообразием. В пункте 3.1.3 мы определяем алгебру и группу голономии связности на локально свободном пучке над супермногообразием. Связность ∇ определяет связность $\tilde{\nabla}$ в векторном расслоении E. Соответствующий параллельный перенос $\tau_\gamma : E_{\gamma(a)} \to E_{\gamma(b)}$ вдоль произвольной кусочно-гладкой кривой $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to M$ определяет изоморфизм $\tau_\gamma : \mathcal{E}_{\gamma(a)} \to \mathcal{E}_{\gamma(b)}$ векторных суперпространств.

Определение 3.1.1. *Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_\mathcal{M})$ — супермногообразие, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_\mathcal{M}$-супермодулей на $\mathcal{M}$, а ∇ — связность на $\mathcal{E}$. Алгебра голономии $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ связности ∇ в точке $x \in M$ – это суперподалгебра супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(\mathcal{E}_x)$, порожденная операторами вида*

$$\tau_\gamma^{-1} \circ \bar{\nabla}^r_{Y_r,\dots,Y_1} R_y(Y,Z) \circ \tau_\gamma : \mathcal{E}_x \to \mathcal{E}_x,$$

где γ — кусочно-гладкая кривая в M с началом в точке x; $y \in M$ — конечная точка кривой γ; $r \geq 0$, $Y, Z, Y_1, \dots, Y_r \in T_y\mathcal{M}$; $\bar{\nabla}$ — связность на $\mathcal{T}_\mathcal{M}|_U$ для некоторой открытой окрестности $U \subset M$ точки y.

Мы показываем, что определение алгебры голономии $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ не зависит от выбора связностей $\bar{\nabla}$.

Далее мы определяем группу голономии связности ∇, как супергруппу Ли, задаваемую парой Хариша-Чандра $(\mathrm{Hol}(\nabla)_x, \mathfrak{hol}(\nabla)_x)$, где $\mathrm{Hol}(\nabla)_x \subset \mathrm{GL}((\mathcal{E}_x)_{\bar{0}}) \times \mathrm{GL}((\mathcal{E}_x)_{\bar{1}})$ —группа Ли, порожденная группой голономии $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})_x$ связности $\tilde{\nabla}$ и связной подгруппой Ли группы Ли $\mathrm{GL}((\mathcal{E}_x)_{\bar{0}}) \times \mathrm{GL}((\mathcal{E}_x)_{\bar{1}})$, соответствующей подалгебре Ли $(\mathfrak{hol}(\nabla)_x)_{\bar{0}} \subset \mathfrak{gl}((\mathcal{E}_x)_{\bar{0}}) \times \mathfrak{gl}((\mathcal{E}_x)_{\bar{1}})$.

В пункте 3.1.4 мы показываем, что определенная нами группа голономии обладает основным свойством обычных групп голономии: она содержит информацию о параллельных сечениях пучка $\mathcal{E}$.

Напомним, что сечения пучка $\mathcal{E}$ вообще говоря не определяются своими значениями во всех точках M, однако

Предложение 3.1.2. *Параллельное сечение $X \in \mathcal{E}(M)$ однозначно определяется своим значением в произвольной точке $x \in M$.*

Теорема 3.1.1. *Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ — супермногообразие, $x \in M$, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-супермодулей на $\mathcal{M}$, а ∇ — связность на $\mathcal{E}$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между параллельными сечениями $X \in \mathcal{E}(M)$ и векторами $X_x \in \mathcal{E}_x$, аннулируемыми алгеброй голономии $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ и сохраняемыми группой $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})_x$.*

Следствие 3.1.1. *Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ — супермногообразие, $x \in M$, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-супермодулей на $\mathcal{M}$, а ∇ — связность на $\mathcal{E}$. Тогда следующие условия эквивалентны: (i) связность ∇ — плоская; (ii) $R = 0$; (iii) $\mathfrak{hol}(\nabla)_x = 0$.*

В пункте 3.1.3 мы рассматриваем случай линейных связностей на супермногообразии, т.е. связностей на касательном пучке. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 3.1.3. *Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ — супермногообразие, $x \in M$, а ∇ — связность на $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между параллельными тензорными полями $P \in \mathcal{T}^{r,s}_{\mathcal{M}}(M)$ и тензорами $P_x \in T^{r,s}_x\mathcal{M}$, аннулируемыми алгеброй $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ и сохраняемыми группой $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})_x$.*

Далее мы приводим примеры параллельных тензорных полей на $\mathcal{M}$ и соответствующих групп голономии. Например, римановым супермногообразием $(\mathcal{M}, g)$ называется супермногообразие $\mathcal{M}$ размерности $n|m$, $m = 2k$, снабженное четной невырожденный суперсимметрической метрикой g. В этом случае $\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, g) \subset \mathfrak{osp}(p_0, q_0|2k)$ и $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla}) \subset \mathrm{O}(p_0, q_0) \times \mathrm{Sp}(2k, \mathbb{R})$, где (p_0, q_0) — сигнатура псевдоримановой метрики $\tilde{g}$, получаемой как ограничение g на касательные пространства к M. Мы также рассматриваем случаи четных и нечетных комплексных структур и различных билинейных форм.

В пункте 3.1.6 мы определяем супералгебры Берже. Пусть V — вещественное или комплексное векторное суперпространство, а $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — суперподалгебра. Пространством алгебраических тензоров кривизны типа $\mathfrak{g}$ называется векторное суперпространство

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \left\{ R \in \wedge^2 V^* \otimes \mathfrak{g} \,\middle|\, \begin{array}{c} R(X,Y)Z + (-1)^{|X|(|Y|+|Z|)} R(Y,Z)X \\ +(-1)^{|Z|(|X|+|Y|)} R(Z,X)Y = 0, \ X,Y,Z \in V \end{array} \right\}.$$

Мы называем суперподалгебру $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ суперлагеброй Берже если она порождается образами элементов пространства $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$.

Предложение 3.1.3. *Пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие размерности $n|m$ с линейной связностью без кручения. Тогда алгебра голономии ∇ является суперлагеброй Берже.*

Различные примеры суперлагебр Берже даны в [169].

В пункте 3.1.7 мы рассматриваем группы голономии симметрических супермногообразий. И определяем симметрические суперлагебры Берже. Если алгебра голономии некоторого супермногообразия с линейной связностью без кручения является симметрической суперлагеброй Берже, то связность является локально симметрической.

В параграфе 3.2 мы рассматриваем нечетные суперногообразия, т.е. супермногообразия размерности $0|m$. Эти результаты опубликованы в [158, 168].

В пункте 3.2.1 мы классифицируем неприводимые подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с нетривиальными косыми продолжениями

$$\mathfrak{g}^{[1]} = \{\varphi \in (\mathbb{F}^n)^* \otimes \mathfrak{g} | \varphi(X)Y = -\varphi(Y)X \text{ для всех } X, Y \in \mathbb{F}^n\}.$$

Для доказательства мы использовали классификацию Каца простых комплексных неприводимых транзитивных $\mathbb{Z}$-градуированых глубины 1 алгебр Ли. Результаты этого пункта мы будем использовать позже. Они также имеют независимый интерес [10, 124].

В пункте 3.2.2 мы получаем взаимно однозначное соответствие между связными симметрическими нечетными супепространствами и суперлагебрами Ли.

В пункте 3.2.3 мы классифицируем неприводимые комплексные супералгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(0|2m, \mathbb{C})$. Заметим, что имеет место изоморфизм $\mathfrak{osp}(0|2m, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$. Соответствующие подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$ мы называем косыми алгебрами Берже. Мы используем методы и результаты из [137], в то же время некоторые представления требуют дополнительных рассмотрений.

В пункте 3.2.4 мы получаем следующий результат:

Таблица 3.2.8. *Возможные неприводимые алгебры голономии* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(V)$ *несимметрических нечетных римановых супермногообразий.*

$\mathfrak{g}$	V	*ограничение*
$\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{2m}$	$m \geq 1$
$\mathfrak{u}(p, q)$	$\mathbb{C}^{p,q}$	$p + q \geq 2$
$\mathfrak{su}(p, q)$	$\mathbb{C}^{p,q}$	$p + q \geq 2$
$\mathfrak{so}(n, \mathbb{H})$	$\mathbb{H}^n$	$n \geq 2$
$\mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{so}(n, \mathbb{H})$	$\mathbb{H}^n$	$n \geq 2$
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(p, q)$	$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{p,q}$	$p + q \geq 3$
$\mathfrak{spin}(2, 10)$	$\Delta^+_{2,10} = \mathbb{R}^{32}$	
$\mathfrak{spin}(6, 6)$	$\Delta^+_{6,6} = \mathbb{R}^{32}$	
$\mathfrak{so}(6, \mathbb{H})$	$\Delta^{\mathbb{H}}_6 = \mathbb{H}^8$	
$\mathfrak{sl}(6, \mathbb{R})$	$\Lambda^3\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^{20}$	
$\mathfrak{su}(1, 5)$	$\{\omega \in \Lambda^3\mathbb{C}^6 \| * w = w\}$	
$\mathfrak{su}(3, 3)$	$\{\omega \in \Lambda^3\mathbb{C}^6 \| * w = w\}$	
$\mathfrak{sp}(6, \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{14} \subset \Lambda^3\mathbb{R}^6$	
$\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{2m}$	$m \geq 1$
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(m, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^m$	$m \geq 3$
$\mathfrak{spin}(12, \mathbb{C})$	$\Delta^+_{12} = \mathbb{C}^{32}$	
$\mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$	$\Lambda^3\mathbb{C}^6 = \mathbb{C}^{20}$	
$\mathfrak{sp}(6, \mathbb{C})$	$V_{\pi_3} = \mathbb{C}^{14}$	

В параграфе 3.3 мы изучаем группы голономии римановых супермногообразий. Эти результаты опубликованы в [161, 169].

В пункте 3.3.1 мы получаем обобщение теоремы Ву на случай римановых супермногообразий.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $(\mathcal{M}, g)$ *— риманово супермногообразие такое, что псевдориманово многообразие* $(M, \tilde{g})$ *— односвязно и геодезически полно. Тогда существуют римановы супермногообразия* $(\mathcal{M}_0, g_0)$, $(\mathcal{M}_1, g_1)$,...,$(\mathcal{M}_r, g_r)$ *такие, что*

$$(\mathcal{M}, g) = (\mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_1 \times \cdots \times \mathcal{M}_r, g_0 + g_1 + \cdots + g_r), \tag{3.25}$$

супермногообразие $(\mathcal{M}_0, g_0)$ *— плоское, а алгебры голономии супермногообразий* $(\mathcal{M}_1, g_1)$,...,$(\mathcal{M}_r, g_r)$ *— слабо неприводимы. В частности,*

$$\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, g) = \mathfrak{hol}(\mathcal{M}_1, g_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{hol}(\mathcal{M}_r, g_r).$$

Для произвольного $(\mathcal{M}, g)$ *разложение (3.25) имеет место локально.*

В пункте 3.3.2 мы получаем классификацию одного класса алгебр голономии римановых супермногообразий. Точнее, мы классифицируем неприводимые несимметрические суперилгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p, q|2m)$ $(p + q > 0)$ вида

$$\mathfrak{g} = (\oplus_i \mathfrak{g}_i) \oplus \mathfrak{z}, \tag{3.27}$$

где $\mathfrak{g}_i$ — простая супералгебра Ли классического типа, а $\mathfrak{z}$ – тривиальный или одномерный центр. Эта классификация обобщает классификацию Берже возможных неприводимых алгебр голономии псевдоримановых многообразий, в то же время, мы не получаем аналоги важных алгебр голономии G_2 и $\mathfrak{spin}(7)$. Заметим, что в общем случае полупростая супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид $\mathfrak{g} = \oplus_i(\mathfrak{g}_i \otimes \Lambda(n_i))$, где $\mathfrak{g}_i$ — простая супералгебра Ли, а $\Lambda(n_i)$ — супералгебра Грассманна [98]. Более того, существуют неприводимые представления разрешимых супералгебр Ли в суперпространствах размерностей больших, чем один [98]. Таким образом, мы рассматриваем только часть неприводимых подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p, q|2m)$. С другой стороны, для неприводимых подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(p, q)$ свойство (3.27) выполняется автоматически, поэтому наше предположение является вполне естественным.

В [141] классифицированы односвязные симметрические суперпространства простых супергрупп Ли. В частности, этот результат влечет классификацию неприводимых алгебр голономии римановых симметрических супермногообразий. Поэтому мы предполагаем, что рассматриваемые супермногообразия не являются локально симметрическими.

Теорема 3.3.2. *Пусть* $(\mathcal{M}, g)$ *— не являющееся локально симметрическим римановo супермногообразие размерности* $p+q|2m$ $(p+q>0)$ *с неприводимой алгеброй голономии* $\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, g) \subset \mathfrak{osp}(p,q|2m)$ *вида (3.27), тогда* $\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, g) \subset \mathfrak{osp}(p,q|2m)$ *совпадает с одной из супералгебр Ли из таблицы 3.3.1.*

Таблица 3.3.1 *Неприводимые несимметрические супералгебры Берже* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p,q|2m)$ $(p+q>0)$ *вида (3.27) и связные суперподгруппы Ли* $G \subset \mathrm{SO}(p,q) \times \mathrm{Sp}(2m,\mathbb{R})$, *соответствующие подалгебрам* $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \subset \mathfrak{so}(p,q) \oplus \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$.

$\mathfrak{g}$	G	$(p,q\|2m)$
$\mathfrak{osp}(p,q\|2m)$	$\mathrm{SO}(p,q) \times \mathrm{Sp}(2m,\mathbb{R})$	$(p,q\|2m)$
$\mathfrak{osp}(p\|2k,\mathbb{C})$	$\mathrm{SO}(p,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(2k,\mathbb{R})$	$(p,p\|4k)$
$\mathfrak{u}(p_0,q_0\|p_1,q_1)$	$\mathrm{U}(p_0,q_0) \times \mathrm{U}(p_1,q_1)$	$(2p_0,2q_0\|2p_1+2q_1)$
$\mathfrak{su}(p_0,q_0\|p_1,q_1)$	$\mathrm{U}(1)(\mathrm{SU}(p_0,q_0) \times \mathrm{SU}(p_1,q_1))$	$(2p_0,2q_0\|2p_1+2q_1)$
$\mathfrak{hosp}(r,s\|k)$	$\mathrm{Sp}(p_0,q_0) \times \mathrm{SO}^*(k)$	$(4r,4s\|4k)$
$\mathfrak{hosp}(r,s\|k) \oplus \mathfrak{sp}(1)$	$\mathrm{Sp}(1)(\mathrm{Sp}(p_0,q_0) \times \mathrm{SO}^*(k))$	$(4r,4s\|4k)$
$\mathfrak{osp}^{sk}(2k\|r,s) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$	$\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(r,s) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$	$(2k,2k\|2r+2s)$
$\mathfrak{osp}^{sk}(2k\|r,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{C}) \times \mathrm{SO}(r,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$	$(4k,4k\|4r)$

Тензор Риччи супермногообразия $(\mathcal{M}, g)$ определяется формулой

$$\mathrm{Ric}(Y,Z) = \mathrm{str}(X \mapsto (-1)^{|X||Z|} R(Y,X)Z),$$

где $U \subset M$ – открытое подмножество, а $X, Y, Z \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(U)$ — однородные векторные поля.

Определения супермногообразий, которые мы рассматриваем аналогичны определениям соответствующих псевдоримановых многообразий [55, 169]. Например, римановo супермногообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется *кэлеровым супермногообразием*, если оно допускает четную параллельную g-ортогональную комплексную структуру. Алгебра голономии такого многообразия содержится в $\mathfrak{u}(p_0,q_0|p_1,q_1)$. По определению, *специальным кэлеровым супермногообразием или супермногообразием Калаби-Яу* называется Риччи-плоское кэлерово супермногообразие.

Предложение 3.3.1 *Пусть* $(\mathcal{M},g)$ *— кэлерово супермногообразие, тогда* $\mathrm{Ric}=0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{hol}(\mathcal{M},g)\subset\mathfrak{su}(p_0,q_0|p_1,q_1)$.

Римановы супермногообразия с алгебрами голономии $\mathfrak{osp}(p,q|2m)$ представляют собой случай „общего положения". Приведем геометрические характеристики односвязных супермногообразий с алгебрами голономии $\mathfrak{g}$, отличными от $\mathfrak{osp}(p,q|2m)$:

$\mathfrak{g}\subset\mathfrak{osp}(p|2k,\mathbb{C})$: голоморфные римановы супермногообразия;

$\mathfrak{g}\subset\mathfrak{u}(p_0,q_0|p_1,q_1)$: кэлеровы супермногообразия;

$\mathfrak{g}\subset\mathfrak{su}(p_0,q_0|p_1,q_1)$: специальные кэлеровы супермногообразия или супермногообразия Калаби-Яу;

$\mathfrak{g}\subset\mathfrak{hosp}(r,s|k)$: гиперкэлеровы супермногообразия;

$\mathfrak{g}\subset\mathfrak{hosp}(r,s|k)\oplus\mathfrak{sp}(1)$: кватернионнокэлеровы супермногообразия;

$\mathfrak{g}\subset\mathfrak{osp}^{sk}(2k|r,s)\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$: паракэлеровы супермногообразия;

$\mathfrak{g}\subset\mathfrak{osp}^{sk}(2k|r,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$: голоморфные паракэлеровы супермногообразия.

Предложение 3.3.1 *Пусть* $(\mathcal{M},g)$ *— кватернионнокэлерово супермногообразие, тогда* $\mathrm{Ric}=0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{hol}(\mathcal{M},g)\subset\mathfrak{hosp}(p_0,q_0|p_1,q_1)$. *В частности, если* $(\mathcal{M},g)$ *— гиперкэлерово супермногообразие, тогда* $\mathrm{Ric}=0$. *Если* M *— односвязно, а* $(\mathcal{M},g)$ *— кватернионнокэлерово, и* $\mathrm{Ric}=0$, *то* $(\mathcal{M},g)$ *— гиперкэлерово.*

Естественной проблемой является проблема построения примеров супермногообразий с каждой из полученных алгебр голономии. Примеры супермногообразий Калаби-Яу построены в [8]. Примеры кватернионнокэлеровых супермногообразий построены в [55].

Оставшаяся часть параграфа 3.3 просвещена доказательству теоремы 3.3.2. Мы показываем, что если $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p,q|2m)$ — супералгебра Берже, то, как правило, $\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(p,q)}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(p,q)$ является алгеброй Берже, а $\mathrm{pr}_{\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$ — косой алгеброй Берже. Далее мы используем теорию представлений простых комплексных супералгебр Ли классического типа.

Глава 1.

Классификация алгебр голономии и тензоров кривизны лоренцевых многообразий

1.1. Группы и алгебры голономии: определения и факты

В этом параграфе излагаются определения и некоторые известные результаты о группах голономии псевдоримановых многообразий [25, 96, 97, 103]. Все многообразия предполагаются связными.

1.1.1. Группы голономии связностей в векторных расслоениях

Пусть M — гладкое многообразие, а E — векторное расслоение над M со связностью ∇. Связность определяет параллельный перенос: для произвольной кусочно-гладкой кривой $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to M$ определен изоморфизм векторных пространств

$$\tau_\gamma : E_{\gamma(a)} \to E_{\gamma(b)}.$$

Зафиксируем точку $x \in M$. Группой голономии G_x связности ∇ в точке x называется группа, состоящая из параллельных переносов вдоль всех кусочно-гладких петель в точке x. Рассматривая только петли, гомотопные постоянной петле, получим ограниченную группу голономии G^0_x. Если многообразие M односвязно, то $G^0_x = G_x$. Известно, что группа G_x является подгруппой Ли группы Ли $\mathrm{GL}(E_x)$; группа G_x^0 является связной компонентой единицы группы Ли G_x. Пусть $\mathfrak{g}_x \subset \mathfrak{gl}(E_x)$ — соответствующая алгебра Ли; эта алгебра называется алгеброй голономии связности ∇ в точке x. Группы голономии в различных точках связного многообразия изоморфны и можно говорить о группе голономии $G \subset \mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ или об алгебре голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$ связности ∇ (здесь m — ранг расслоения E). В случае односвязного многообразия алгебра голономии однозначно определяет группу голономии.

Напомним, что сечение $X \in \Gamma(E)$ называется параллельным, если $\nabla X = 0$. Это равносильно тому, что для любой кусочно-гладкой кривой $\gamma : [a,b] \to M$ имеем $\tau_\gamma X_{\gamma(a)} = X_{\gamma(b)}$. Аналогично, подрасслоение $F \subset E$ называется параллельным, если для любого сечения X подрасслоения F, и любого векторного поля Y на M, сечение $\nabla_Y X$ снова принадлежит F. Это равносильно тому, что для любой кусочно-гладкой кривой $\gamma : [a,b] \to M$ выполнено $\tau_\gamma F_{\gamma(a)} = F_{\gamma(b)}$.

Важность групп голономии показывает следующий фундаментальный принцип.

Теорема 1.1.1. *Существует взаимно однозначное соответствие между параллельными сечениями X расслоения E и векторами $X_x \in E_x$, инвариантными относительно G_x.*

Опишем это соответствие. Для параллельного сечения X нужно взять значение X_x в точке $x \in M$. Так как X инвариантно относительно параллельных переносов, то вектор X_x инвариантен относительно группы голономии. Обратно, имея X_x, определим поле X. Для всякой точки $y \in M$ положим $X_y = \tau_\gamma X_x$, где γ — любая кривая с началом в точке x и концом в точке y. Значение X_y не зависит от выбора кривой γ.

Схожий результат имеет место для подрасслоений.

Теорема 1.1.2. *Существует взаимно однозначное соответствие между параллельными подрасслоениями $F \subset E$ и векторными подпространствами $F_x \subset E_x$, инвариантными относительно G_x.*

Следующая теорема, доказанная Амброзом и Зингером [11], показывает связь алгебры голономии и тензора кривизны R связности ∇.

Теорема 1.1.3. *Пусть $x \in M$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_x$ линейно порождается операторами следующего вида*

$$\tau_\gamma^{-1} \circ R_y(X, Y) \circ \tau_\gamma \in \mathfrak{gl}(E_x),$$

где γ — произвольная кусочно-гладкая кривая с началом в точке x, y — конец кривой γ, а $X, Y \in T_yM$.

1.1.2. Группы голономии псевдоримановых многообразий

Обратимся к псевдоримановым многообразиям. Напомним, что псевдоримановым многообразием сигнатуры (r, s) называется гладкое многообразие M, на котором задано гладкое поле g симметрических невырожденных билинейных форм сигнатуры (r, s) (r — число минусов) в каждой точке. Если $r = 0$, то такое псевдориманово многообразие называется римановым. Если $r = 1$, то (M, g) называется лоренцевым. В этом случае будем для удобства полагать $s = n + 1$, $n \geq 0$.

На касательном расслоении TM псевдориманова многообразия M канонически задается связность Леви-Чивита ∇, определяемая двумя условиями: поле форм g параллельно ($\nabla g = 0$) и кручение равно нулю ($Tor = 0$). Обозначим через $\mathrm{O}(T_xM, g_x)$ группу линейных преобразований пространства T_xM, сохраняющих форму g_x. Так как метрика g параллельна, то $G_x \subset \mathrm{O}(T_x, Mg_x)$. Касательное пространство (T_xM, g_x) можно отождествить с псевдоевклидовым пространством $\mathbb{R}^{r,s}$, метрику этого пространства будем обозначать символом g. Тогда можем отождествить группу голономии G_x с подгруппой Ли в $\mathrm{O}(r, s)$, а алгебру голономии $\mathfrak{g}_x$ с подалгеброй в $\mathfrak{so}(r, s)$.

Связность ∇ естественным образом продолжается до связности в тензорном расслоении $\otimes_q^p TM$, группа голономии этой связности совпадает с естественным представлениями группы G_x в пространстве тензоров $\otimes_q^p T_xM$. Из теоремы 1.1.1 вытекает

Теорема 1.1.4. *Существует взаимно однозначное соответствие между тензорными полями A типа (p,q) и тензорами $A_x \in \otimes^p_q T_xM$, инвариантными относительно G_x.*

Итак, если мы знаем группу голономии многообразия, то геометрическую задачу нахождения параллельных тензорных полей на многообразии можно свести к более простой алгебраической задаче нахождения инвариантных элементов группы голономии. Приведем несколько примеров применения этого принципа.

Напомним, что псевдориманово многообразие (M,g) называется плоским, если (M,g) допускает локальные параллельные поля реперов. Получаем, что (M,g) является плоским тогда и только тогда, когда $G^0=\{\mathrm{id}\}$ (или $\mathfrak{g}=\{0\}$). Более того, из теоремы Амброза-Зингера следует, что последнее условие равносильно равенству нулю тензора кривизны.

Далее, псевдориманово многообразие (M,g) называется *псевдокэлеровым*, если на M существует параллельное поле эндоморфизмов J со свойствами $J^2=-\mathrm{id}$ и $g(JX,Y)+g(X,JY)=0$ для всех векторных полей X и Y на M. Очевидно, что псевдориманово многообразие (M,g) сигнатуры $(2r,2s)$ является псевдокэлеровым тогда и только тогда, когда $G\subset \mathrm{U}(r,s)$.

Для произвольной подалгебры $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(r,s)$ положим

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g})=\{R\in \mathrm{Hom}(\wedge^2\mathbb{R}^{r,s},\mathfrak{g})|R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$$

$$\text{для всех } X,Y,Z\in\mathbb{R}^{r,s}\}.$$

Множество $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ называется пространством тензоров кривизны типа $\mathfrak{g}$. Будем обозначать через $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g}))$ линейное подпространство пространства $\mathfrak{g}$, порожденное элементами вида $R(X,Y)$ для всех $R\in\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, $X,Y\in\mathbb{R}^{r,s}$. Из теоремы Амброза-Зингера и первого тождества Бьянки следует, что если $\mathfrak{g}$ — алгебра голономии псевдориманова пространства (M,g) в точке $x\in M$, то $R_x \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})$, т.е. знание алгебры голономии позволяет получить ограничение на тензор кривизны, это будет многократно применяться ниже. Более того, имеет место равенство $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$. Подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r,s)$ называется алгеброй Берже, если выполнено равенство $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$. Алгебры Берже естественно считать кандидатами в алгебры голономии псевдоримановых многообразий. Каждый элемент $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{so}(r,s))$ обладает свойством

$$(R(X,Y)Z,W) = (R(Z,W)X,Y) \tag{1.1}$$

for all $X, Y, Z, W \in V$.

Теорема 1.1.3 не дает хорошей возможности найти алгебру голономии. Иногда удобно использовать следующую теорему.

Теорема 1.1.5. *Если псевдориманово многообразие (M,g) аналитично, то алгебра голономии $\mathfrak{g}_x$ порождается следующими операторами*

$$R(X,Y)_x, \nabla_{Z_1} R(X,Y)_x, \nabla_{Z_2}\nabla_{Z_1} R(X,Y)_x, ... \in \mathfrak{so}(T_xM, g_x),$$

где X, Y, Z_1, $Z_2, ... \in T_xM$.

Подпространство $U \subset \mathbb{R}^{r,s}$ называется невырожденным, если ограничение формы g на это подпространство невырождено. Подгруппа Ли $G \subset \mathrm{O}(r,s)$ (или подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r,s)$) называется неприводимой, если она не имеет собственных инвариантных подпространств в $\mathbb{R}^{r,s}$; G (или $\mathfrak{g}$) называется слабо неприводимой, если она не имеет собственных инвариантных невырожденных подпространств в $\mathbb{R}^{r,s}$.

Ясно, что подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r,s)$ неприводима (слабо неприводима) тогда и только тогда, когда соответствующая связная подгруппа Ли $G^0 \subset \mathrm{SO}(r,s)$ неприводима (слабо неприводима). Если подгруппа $G \subset \mathrm{O}(r,s)$ неприводима, то она слабо неприводима. Обратное верно только, если форма g положительно или отрицательно определена.

Рассмотрим два псевдоримановых многообразия (M,g) и (N,h). Пусть $x \in M$, а $y \in N$, и G_x, H_y обозначают соответствующие группы голономии.

Прямое произведение многообразий $M \times N$ является псевдоримановым многообразием относительно метрики $g+h$. Псевдориманово многообразие называется (локально) неразложимым, если оно не является (локальным) прямым произведением псевдоримановых многообразий. Обозначим через $F_{(x,y)}$ группу голономии многообразия $M \times N$ в точке (x, y). Имеем $F_{(x,y)} = G_x \times H_y$. Это утверждение имеет следующее обращение.

Теорема 1.1.6. *Пусть (M, g) — псевдориманово многообразие, $x \in M$. Предположим, что суженная группа голономии G^0_x не является слабо неприводимой. Тогда для пространства T_xM имеем разложение в ортогональную (относительно g_x) прямую сумму невырожденных линейных подпространств*

$$T_xM = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_t,$$

при этом G^0_x действует тривиально на E_0, $G^0_x(E_i) \subset E_i$ $(i = 1, ..., t)$ и G^0_x действует слабо неприводимо на E_i $(i = 1, ..., t)$. Существует плоское псевдориманово подмногообразие $N_0 \subset M$ и локально неразложимые псевдоримановы подмногообразия $N_1, ..., N_t \subset M$, содержащие точку x, такие, что $T_xN_i = E_i$ $(i = 0, ..., t)$. Существуют открытые подмножества $U \subset M$, $U_i \subset N_i$ $(i = 0, ..., t)$, содержащие точку x, при этом

$$U = U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_t, \quad g_{|TU\times TU} = g_{|TU_0\times TU_0} + g_{|TU_1\times TU_1} + \cdots + g_{|TU_t\times TU_t}.$$

Кроме того, имеем разложение

$$G^0_x = \{\mathrm{id}\} \times H_1 \times \cdots \times H_t,$$

где $H_i = G^0_x|_{E_i}$ — нормальные подгруппы Ли в G^0_x $(i = 1, ..., t)$.

Более того, если многообразие M односвязно и полно, то имеем глобальное разложение

$$M = N_0 \times N_1 \times \cdots \times N_t.$$

Локальное утверждение этой теоремы для случая римановых многообразий доказали Борель и Лихнерович [35]. Глобальное утверждение для случая римановых многообразий доказал де Рам [131]. Утверждение этой теоремы для случая псевдоримановых многообразий доказал Ву [149].

Из теоремы 1.1.6 следует, что псевдориманово многообразие является локально неразложимым тогда и только тогда, когда его ограниченная группа голономии слабо неприводима.

Важно отметить, что алгебры Ли групп H_i из теоремы 1.1.6 являются алгебрами Берже. Следующая теорема является алгебраической версии теоремы 1.1.6.

Теорема 1.1.7. *Пусть* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(p,q)$ *— подалгебра Берже, не являющаяся неприводимой, тогда существует ортогональное разложение*

$$\mathbb{R}^{p,q} = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

и разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$$

в прямую сумму идеалов такое, что $\mathfrak{g}_i$ *аннулирует* V_j *при* $i \neq j$, *и* $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{so}(V_i)$ *является слабо неприводимой подалгеброй Берже.*

1.1.3. Связные неприводимые группы голономии римановых и псевдоримановых многообразий

В предыдущем пункте мы видели, что задачу классификации подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r,s)$ со свойством $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$ можно свести к задаче классификации слабо неприводимых подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r,s)$, удовлетворяющих этому свойству. Для подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$ слабая неприводимость равносильна неприводимости. Напомним, что псевдориманово многообразие (M,g) называется локально симметрическим, если для его тензора кривизны выполнено $\nabla R = 0$. По всякому локально симметрическому псевдориманову многообразию можно построить односвязное псевдориманово симметрическое многообразие с той же алгеброй голономии. Имеется классификация Э. Картана односвязных симметрических римановых многообразий [51, 25, 83]. Если группа голономии такого пространства неприводима, то она совпадает с подгруппой изотропии. Итак, связные неприводимые группы голономии локально симметрических римановых многообразий известны.

Важно заметить, что имеет место взаимно однозначное соответствие между односвязными неразложимыми симметрическими римановыми многообразиями (M,g) и простыми $\mathbb{Z}_2$-градуированными алгебрами Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathbb{R}^n$, такими что $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$. Подалгебра $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ совпадает с алгеброй голономии многообразия (M,g). Пространство (M,g) можно восстановить, используя его алгебру голономии $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ и значение $R\in\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ тензора кривизны пространства (M,g) в некоторой точке. Для этого определим структуру алгебры Ли на векторном пространстве $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$[A,B]=[A,B]_{\mathfrak{h}},\quad [A,X]=AX,\quad [X,Y]=R(X,Y),\quad A,B\in\mathfrak{h},\ X,Y\in\mathbb{R}^n.$$

Тогда $M=G/H$, где G — односвязная группа Ли, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а $H\subset G$ — связная подгруппа Ли, соответствующая подалгебре $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$.

В 1955 году Берже получил список возможных связных неприводимых групп голономии римановых многообразий [28].

Теорема 1.1.8. *Если $G\subset\mathrm{SO}(n)$ — связная неприводимая подгруппа Ли, алгебра Ли $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(n)$ которой удовлетворяет условию $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g}))=\mathfrak{g}$, то либо G является группой голономии локально симметрического риманова пространства, либо G является одной из следующих групп:*
$\mathrm{SO}(n)$;
$\mathrm{U}(m)$, $\mathrm{SU}(m)$, *$n=2m$;*
$\mathrm{Sp}(m)$, $\mathrm{Sp}(m)\cdot\mathrm{Sp}(1)$, *$n=4m$;*
$\mathrm{Spin}(7)$, *$n=8$;*
G_2, *$n=7$.*

Первоначально в списке Берже присутствовала также группа $\mathrm{Spin}(9)\subset\mathrm{SO}(16)$. В [3] Алексеевский показал, что римановы многообразия с группой голономии $\mathrm{Spin}(9)$ являются локально симметрическими. Список всех возможных связных неприводимых групп голономии римановых многообразий, не являющихся локально симметрическими, из теоремы 1.1.8 совпадает со списком связных подгрупп Ли $G \subset \mathrm{SO}(n)$, действующих транзитивно на единичной сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ (из которого нужно исключить группы $\mathrm{Spin}(9)$ и $\mathrm{Sp}(m) \cdot T$, где T-окружность). Заметив это, в 1962 году Саймонс получил в [142] прямое доказательство результата Берже. Более простое и геометрическое доказательство получил совсем недавно Олмос [126].

Доказательство теоремы 1.1.8 Берже основано на классификации неприводимых вещественных линейных представлений вещественных компактных алгебр Ли. Каждое такое представление можно получить из фундаментальных представлений с помощью тензорных произведений и разложения последних на неприводимые компоненты. Доказательство Берже сводится к проверке того, что такие представления (за небольшим числом исключений) не могут являться представлениями голономии: из тождества Бьянки следует, что $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, если представление содержит больше одного тензорного сомножителя. Остается исследовать только фундаментальные представления, явно описанные Э. Картаном. С помощью сложных вычислений для них также удается показать, что из тождества Бьянки вытекает, что либо $\nabla R = 0$, либо $R = 0$, за небольшим числом исключений, указанных в теореме 1.1.8.

Примеры римановых многообразий с группами голономии $\mathrm{U}(\frac{n}{2})$, $\mathrm{SU}(\frac{n}{2})$, $\mathrm{Sp}(\frac{n}{4})$ и $\mathrm{Sp}(\frac{n}{4}) \cdot \mathrm{Sp}(1)$ построили Калаби, Яу и Алексеевский. В 1987 году Брайнт [45] построил примеры римановых многообразий с группами голономии $\mathrm{Spin}(7)$ и G_2. Это завершает классификацию связных групп голономии римановых многообразий.

Дадим описание геометрических структур на римановых многообразиях с группами голономии из теоремы 1.1.8.

$\mathrm{SO}(n)$: Эта группа голономии риманова многообразия общего положения. На таком многообразии не возникает никаких дополнительных геометрических структур, связанных с группой голономии.

$\mathrm{U}(m)$ $(n = 2m)$: Многообразия с этой группой голономии являются кэлеровыми, на каждом из этих многообразий существует параллельная комплексная структура.

$\mathrm{SU}(m)$ $(n = 2m)$: Каждое из многообразий с этой группой голономии является кэлеровым и Риччи-плоским. Они называются специальными кэлеровыми многообразиями или многообразиями Калаби-Яу.

$\mathrm{Sp}(m)$ $(n = 4m)$: На каждом из многообразий с этой группой голономии существует параллельная кватернионная структура, т.е. параллельные комплексные структуры I, J, K, связанные соотношениями $IJ = -JI = K$. Эти многообразия называются гиперкэлеровыми.

$\mathrm{Sp}(m) \cdot \mathrm{Sp}(1)$ $(n = 4m)$: На каждом из многообразий с этой группой голономии существует параллельное трехмерное подрасслоение расслоения эндоморфизмов касательных пространств, которое локально порождается параллельной кватернионной структурой.

$\mathrm{Spin}(7)$ $(n = 8)$, G_2 $(n = 7)$: Многообразия с этими группами голономии являются Риччи-плоскими. На многообрази с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$ имеется параллельная 4-форма, на многообразии с группой голономии G_2 имеется параллельная 3-форма.

Таким образом, неразложимые римановы многообразия со специальными (т.е. отличными от $\mathrm{SO}(n)$) группами голономии имеют важные геометрические свойства. Благодаря этим свойствам, римановы многообразия со специальными группами голономии получили применения в теоретической физике (в теории струн и М-теории) [53, 76, 97]. За последние 20 лет появилось множество конструкция полных и компактных римановых многообразий со специальными группами голономии, приведем лишь ссылки на некоторые из них [22, 23, 64, 70, 96, 97].

Пространства $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ для неприводимых алгебр голономии римановых многообразий $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$ вычислил Алексеевский [3]. Для $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ определим соответствующий тензор Риччи, полагая

$$\mathrm{Ric}(R)(X, Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R(Z, X)Y),$$

$X, Y \in \mathbb{R}^n$. Пространство $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ допускает следующее разложение в прямую сумму $\mathfrak{g}$-модулей:

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathcal{R}_0(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{R}_1(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{R}'(\mathfrak{g}),$$

где $\mathcal{R}_0(\mathfrak{g})$ состоит из тензоров кривизны с нулевым тензором Риччи, $\mathcal{R}_1(\mathfrak{g})$ состоит из тензоров, обнуляемых алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (это пространство тривиально или одномерно), а $\mathcal{R}'(\mathfrak{g})$ — дополнение к этим двум пространствам. Если $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathcal{R}_1(\mathfrak{g})$, то каждое риманово многообразие с алгеброй голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$ — локально симметрическое. Такие подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$ называются *симметрическими алгебрами Берже.* Алгебры голономии неприводимых римановых симметрических пространств исчерпываются алгебрами $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{u}(\frac{n}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n}{4}) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ и симметрическими алгебрами Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$. Для алгебр голономии $\mathfrak{su}(m)$, $\mathfrak{sp}(m)$, G_2 и $\mathfrak{spin}(7)$ имеем $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathcal{R}_0(\mathfrak{g})$, что и показывает, что многообразия с такими алгебрами голономии являются Риччи-плоскими. Далее, для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(m) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ имеем $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathcal{R}_0(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{R}_1(\mathfrak{g})$, поэтому соответствующие многообразия являются многообразиями Эйнштейна.

Следующая теорема, доказанная в 1955 году Берже, дает классификацию возможных связных неприводимых групп голономии псевдоримановых многообразий [28].

Теорема 1.1.9. *Если $G \subset \mathrm{SO}(r, s)$ — связная неприводимая подгруппа Ли, алгебра Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ которой удовлетворяет условию $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$, то либо G является группой голономии локально симметрического псевдориманова пространства, либо G является одной из следующих групп:*

$\mathrm{SO}(r, s)$;

$\mathrm{U}(p, q)$, $\mathrm{SU}(p, q)$, $r = 2p$, $s = 2q$;

$\mathrm{Sp}(p,q)$, $\mathrm{Sp}(p,q)\cdot\mathrm{Sp}(1)$, $r=4p$, $s=4q$;

$\mathrm{SO}(r,\mathbb{C})$, $s=r$;

$\mathrm{Sp}(p,\mathbb{R})\cdot\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $r=s=2p$;

$\mathrm{Sp}(p,\mathbb{C})\cdot\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, $r=s=4p$;

$\mathrm{Spin}(7)$, $r=0$, $s=8$;

$\mathrm{Spin}(4,3)$, $r=s=4$;

$\mathrm{Spin}(7)^{\mathbb{C}}$, $r=s=8$;

G_2, $r=0$, $s=7$;

$G^*_{2(2)}$, $r=4$, $s=3$;

$G_2^{\mathbb{C}}$, $r=s=7$.

Доказательство теоремы 1.1.9 основано на том, что подалгебра $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(r,s)$ удовлетворяет условию $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g}))=\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда ее комплексификация $\mathfrak{g}(\mathbb{C})\subset\mathfrak{so}(r+s,\mathbb{C})$ удовлетворяет условию $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g}(\mathbb{C})))=\mathfrak{g}(\mathbb{C})$. Иными словами, в теореме 1.1.9 перечислены связные вещественные группы Ли, алгебры Ли которых исчерпывают вещественные формы комплексификаций алгебр Ли групп Ли из теоремы 1.1.8.

В 1957 году в [29] Берже получил список связных неприводимых групп голономии псевдоримановых симметрических пространств (мы не приводим этот список здесь в силу его громоздкости).

1.2. Слабо неприводимые подалгебры в $\mathfrak{so}(1,n+1)$

В этом параграфе мы дадим геометрическую интерпретацию классификации Берарда-Бержери и Икемакхена [26] слабо неприводимых подалгебр в $\mathfrak{so}(1,n+1)$. Этот результат опубликован в [160, 184].

Приступим к изучению алгебр голономии лоренцевых многообразий. Рассмотрим связное лоренцево многообразие (M,g) размерности $n+2\geq 4$. Отождествим касательное пространство в некоторой точке многообразия (M,g) с пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,n+1}$. Будем обозначать метрику Минковского на $\mathbb{R}^{1,n+1}$ символом g. Тогда алгебра голономии $\mathfrak{g}$ многообразия (M, g) в этой точке отождествляется с подалгеброй лоренцевой алгебры Ли $\mathfrak{so}(1, n+1)$. Согласно теореме 1.1.6, (M, g) не является локально произведением псевдоримановых многообразий тогда и только тогда, когда его алгебра голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ слабо неприводима. Поэтому будем предполагать, что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ — слабо неприводима. Если $\mathfrak{g}$ — неприводима, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, n+1)$. Это следует из результатов Берже. В действительности, $\mathfrak{so}(1, n+1)$ не содержит никакую собственную неприводимую подалгебру, прямые геометрические доказательства этого утверждения можно найти в [60] и [38]. Итак, мы можем предполагать, что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ — слабо неприводима и не является неприводимой, тогда $\mathfrak{g}$ сохраняет некоторое вырожденное подпространство $U \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$, а вместе с ним и изотропную прямую $\ell = U \cap U^\perp \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$. Зафиксируем произвольный изотропный вектор $p \in \ell$, тогда $\ell = \mathbb{R}p$. Зафиксируем какой-либо изотропный вектор q такой, что $g(p, q) = 1$. Подпространство $E \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$, ортогональное векторам p и q — евклидово; чаще всего будем обозначать это пространство через $\mathbb{R}^n$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Получаем базис Витта $p, e_1, \dots, e_n, q$ пространства $\mathbb{R}^{1,n+1}$.

Обозначим через $\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ подалгебру в $\mathfrak{so}(1, n+1)$, сохраняющую изотропную прямую $\mathbb{R}p$. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ может быть отождествлена со следующей матричной алгеброй Ли:

$$\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} a & X^t & 0 \\ 0 & A & -X \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \right| a \in \mathbb{R},\ X \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathfrak{so}(n) \right\}.$$

Отождествим матрицу, приведенную выше, с тройкой (a, A, X). Естественно выделяются подалгебры $\mathbb{R}$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathbb{R}^n$ в $\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$. Ясно, что $\mathbb{R}$ коммутирует с $\mathfrak{so}(n)$, а $\mathbb{R}^n$ является идеалом, также имеем

$$[(a, A, 0), (0, 0, X)] = (0, 0, aX + AX).$$

Получаем разложение[1]

$$\mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(n)) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

Каждая слабо неприводимая, не являющаяся неприводимой, подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1,n+1)$ сопряжена некоторой слабо неприводимой подалгебре в $\mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$.

Пусть $\mathrm{SO}^0(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$ — связная подгруппа Ли группы Ли $\mathrm{SO}(1,n+1)$, сохраняющая изотропную прямую $\mathbb{R}p$. Подалгебры $\mathbb{R}$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$ соответствуют следующим связным подгруппам Ли

$$\left\{ \left. \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \right| a \in \mathbb{R},\, a > 0 \right\}, \quad \left\{ \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| f \in \mathrm{SO}(n) \right\},$$

$$\left\{ \left. \begin{pmatrix} 1 & X^t & -\frac{1}{2}X^tX \\ 0 & \mathrm{id} & -X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| X \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathrm{SO}^0(1,n+1)_{\mathbb{R}p}.$$

Получаем разложение

$$\mathrm{SO}^0(1,n+1)_{\mathbb{R}p} = (\mathbb{R}^+ \times \mathrm{SO}(n)) \rightthreetimes \mathbb{R}^n.$$

Напомним, что всякая подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — компактна, и имеем разложение

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h}),$$

где $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ есть коммутант $\mathfrak{h}$, а $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ — центр $\mathfrak{h}$ [48].

Следующий результат принадлежит Берарду-Бержери и Икемакхену [26].

Теорема 1.2.1. *Подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$ — слабо неприводима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли одного из следующих типов:*

---

[1] Пусть $\mathfrak{h}$ — некоторая алгебра Ли. Будем писать $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, если $\mathfrak{h}$ раскладывается в прямую сумму идеалов $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{h}$. Будем писать $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{h}_2$, если $\mathfrak{h}$ раскладывается в прямую сумму подалгебры $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$ и идеала $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{h}$. В соответствующих ситуациях для групп Ли используем $\times$ и $\rightthreetimes$.

Тип 1. $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}) \ltimes \mathbb{R}^n = \left\{ \left. \begin{pmatrix} a & X^t & 0 \\ 0 & A & -X \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \right| a \in \mathbb{R},\, X \in \mathbb{R}^n,\, A \in \mathfrak{h} \right\}$, *где* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *— подалгебра;*

Тип 2. $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & X^t & 0 \\ 0 & A & -X \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| X \in \mathbb{R}^n,\, A \in \mathfrak{h} \right\}$, *где* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *— подалгебра;*

Тип 3. $\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi} = \{(\varphi(A), A, 0) | A \in \mathfrak{h}\} \ltimes \mathbb{R}^n$ $= \left\{ \left. \begin{pmatrix} \varphi(A) & X^t & 0 \\ 0 & A & -X \\ 0 & 0 & -\varphi(A) \end{pmatrix} \right| X \in \mathbb{R}^n,\, A \in \mathfrak{h} \right\}$, *где* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *— подалгебра с условием* $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \neq \{0\}$ *и* $\varphi : \mathfrak{h} \to \mathbb{R}$ *— ненулевое линейное отображение со свойством* $\varphi|_{\mathfrak{h}'} = 0$*;*

Тип 4. $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi} = \{(0, A, X + \psi(A)) | A \in \mathfrak{h},\, X \in \mathbb{R}^m\}$ $= \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & X^t & \psi(A)^t & 0 \\ 0 & A & 0 & -X \\ 0 & 0 & 0 & -\psi(A) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| X \in \mathbb{R}^m,\, A \in \mathfrak{h} \right\}$, *где имеет место ортогональное разложение* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ *такое, что* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(m)$, $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \geq n-m$ *и* $\psi : \mathfrak{h} \to \mathbb{R}^{n-m}$ *— сюръективное линейное отображение со свойством* $\psi|_{\mathfrak{h}'} = 0$.

Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ ассоциированная, выше со слабо неприводимой подалгеброй $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$, называется *ортогональной частью* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Доказательство этой теоремы из [26] – алгебраическое и не дает никакую интерпретацию полученных алгебр. Приведем геометрическое доказательство этого результата вместе с наглядной интерпретацией.

Теорема 1.2.2. *Имеет место изоморфизм групп Ли*

$$\mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p} \simeq \mathrm{Sim}^0(n),$$

где $\mathrm{Sim}^0(n)$ *— связная группы Ли преобразований подобия евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$*. При этом изоморфизме, слабо неприводимые подгруппы Ли в* $\mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ *соответствуют транзитивным подгруппам Ли в* $\mathrm{Sim}^0(n)$.

Доказательство. Рассмотрим границу ∂L^{n+1} пространства Лобачевского,

$$\partial L^{n+1} = \{\mathbb{R}X | X \in \mathbb{R}^{1,n+1},\, g(X, X) = 0,\, X \neq 0\}$$

как множество прямых изотропного конуса

$$C = \{X \in \mathbb{R}^{1,n+1} |\ g(X, X) = 0\}.$$

Отождествим ∂L^{n+1} с n-мерной единичной сферой S^n следующим образом. Рассмотрим базис $e_0, e_1, ..., e_n, e_{n+1}$ пространства $\mathbb{R}^{1,n+1}$, где

$$e_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(p - q), \quad e_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(p + q).$$

Рассмотрим векторное подпространство $E_1 = E \oplus \mathbb{R}e_{n+1} \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$. Каждая изотропная прямая пересекает аффинное подпространство $e_0 + E_1$ в единственной точке. Пересечение $(e_0 + E_1) \cap C$ представляет собой множество

$$\{X \in \mathbb{R}^{1,n+1} | x_0 = 1,\ x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\},$$

которое является n-мерной сферой S^n. Это дает нам отождествление $\partial L^{n+1} \simeq S^n$.

Группа $\mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ действует на ∂L^{n+1} (как группа конформных преобразований) и сохраняет точку $\mathbb{R}p \in \partial L^{n+1}$, т.е. $\mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ действует в евклодовом пространстве $\mathbb{R}^n \simeq \partial L^{n+1} \backslash \{\mathbb{R}p\}$ как группа преобразований подобия. Действительно, вычисления показывают, что элементы

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & X^t & -\frac{1}{2}X^tX \\ 0 & \mathrm{id} & -X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$$

действуют в $\mathbb{R}^n$ как гомотетия $Y \mapsto aY$, специальное ортогональное преобразование $f \in \mathrm{SO}(n)$ и сдвиг $Y \mapsto Y + X$, соответственно. Такие преобразования порождают группу $\mathrm{Sim}^0(n)$. Это и дает изоморфизм $\mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p} \simeq \mathrm{Sim}^0(n)$. Далее, легко установить, что подгруппа $G \subset \mathrm{SO}^0(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ сохраняет собственное невырожденное подпространство в $\mathbb{R}^{1,n+1}$ тогда и только тогда, когда соответствующая подгруппа $G \subset \mathrm{Sim}^0(n)$ сохраняет собственное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$. А последнее условие равносильно транзитивности действия G в $\mathbb{R}^n$ [4, 5].

Остается классифицировать связные транзитивные подгруппы в $\mathrm{Sim}^0(n)$. Это легко сделать, используя результаты из [4, 5], см. [160, 184].

Теорема 1.2.3. *Связная подгруппа* $G \subset \mathrm{Sim}^0(n)$ *транзитивна тогда и только тогда, когда* G *сопряжена группе одного из следующих типов:*

Тип 1. $G = (\mathbb{R}^+ \times H) \leftthreetimes \mathbb{R}^n$, *где* $H \subset \mathrm{SO}(n)$ *– связная подгруппа Ли;*

Тип 2. $G = H \leftthreetimes \mathbb{R}^n$*;*

Тип 3. $G = (\mathbb{R}^\Phi \times H) \leftthreetimes \mathbb{R}^n$, *где* $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{SO}(n)$ *есть гомоморфизм и*

$$\mathbb{R}^\Phi = \{a \cdot \Phi(a) | a \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathrm{SO}(n)$$

– группа винтовых гомотетий $\mathbb{R}^n$*;*

Тип 4. $G = (H \times U^\Psi) \leftthreetimes W$, *где имеем ортогональное разложение* $\mathbb{R}^n = U \oplus W$, $H \subset \mathrm{SO}(W)$, $\Psi : U \to \mathrm{SO}(W)$ *– инъективный гомоморфизм, и*

$$U^\Psi = \{\Psi(u) \cdot u | u \in U\} \subset \mathrm{SO}(W) \times U$$

– группа винтовых движений $\mathbb{R}^n$*.*

Нетрудно установить, что подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$, соответствующие подгруппам $G \subset \mathrm{Sim}^0(n)$ из последней теоремы исчерпывают алгебры Ли теоремы 1.2.1. Далее будем обозначать алгебру Ли $\mathfrak{so}(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ через $\mathfrak{sim}(n)$.

1.3. Тензоры кривизны и классификация алгебр Берже

В этом параграфе мы рассмотрим структуру пространств тензоров кривизны $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ для подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$. Вместе с результатом Лайстнера о классификации слабых алгебр Берже это даст классификацию подалгебр Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$. Далее, мы найдем тензор кривизны многообразий Волкера, т.е. многообразий с алгебрами голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$. Результаты этого параграфа опубликованы в [153, 172].

1.3.1. Алгебраические тензоры кривизны и классификация алгебр Берже

При изучении пространства $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ для подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ возникает пространство

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \{&P \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{h})| \\ &g(P(X)Y, Z) + g(P(Y)Z, X) + g(P(Z)X, Y) = 0,\ X, Y, Z \in \mathbb{R}^n\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — подалгебра. Пространство $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ называется пространством слабых тензоров кривизны для $\mathfrak{h}$. Через $L(\mathcal{P}(\mathfrak{h}))$ будем обозначать линейное подпространство в $\mathfrak{h}$, порожденное элементами вида $P(X)$ для всех $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ и $X \in \mathbb{R}^n$. Легко установить [172, 116], что если $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{h})$, то для всякого $Z \in \mathbb{R}^n$ имеем $P(\cdot) = R(\cdot, Z) \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$. По этой причине алгебра $\mathfrak{h}$ называется слабой алгеброй Берже, если выполнено равенство $L(\mathcal{P}(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}$. Естественным образом вводится структура $\mathfrak{h}$-модуля в пространстве $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$,

$$P_\xi(X) = [\xi, P(X)] - P(\xi X),$$

где $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$, $\xi \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathbb{R}^n$. Это влечет, что подпространство $L(\mathcal{P}(\mathfrak{h})) \subset \mathfrak{h}$ является идеалом в $\mathfrak{h}$.

Удобно отождествить алгебру Ли $\mathfrak{so}(1, n+1)$ с пространством бивекторов $\wedge^2\mathbb{R}^{1,n+1}$, таким образом, что

$$(X \wedge Y)Z = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X, \quad X, Y, Z \in \mathbb{R}^{1,n+1}.$$

Тогда элемент $(a, A, X) \in \mathfrak{sim}(n)$ соответствует бивектору $-ap\wedge q + A - p\wedge X$, где $A \in \mathfrak{so}(n) \simeq \wedge^2\mathbb{R}^n$.

Следующая теорема из [172] дает структуру пространств тензоров кривизны для слабо неприводимых подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$.

Теорема 1.3.1. *Каждый тензор кривизны $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}})$ однозначно определен элементами*

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad R_0 \in \mathcal{R}(\mathfrak{h}), \quad P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}), \quad T \in \odot^2\mathbb{R}^n$$

следующим образом:

$$R(p,q) = -\lambda p\wedge q - p\wedge\vec{v},\ R(X,Y) = R_0(X,Y) + p\wedge(P(X)Y - P(Y)X), \tag{1.3}$$

$$R(X,q) = -g(\vec{v},X)p\wedge q + P(X) - p\wedge T(X),\ R(p,X)=0,\ X,Y\in\mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

В частности, имеем изоморфизм $\mathfrak{h}$*-модулей*

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}) \simeq \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^n\oplus\odot^2\mathbb{R}^n\oplus\mathcal{R}(\mathfrak{h})\oplus\mathcal{P}(\mathfrak{h}).$$

Далее,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}) &= \{R\in\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}})|\lambda=0,\vec{v}=0\},\\ \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}) &= \{R\in\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}})|\lambda=0,\ R_0\in\mathcal{R}(\ker\varphi),\ g(\vec{v},\cdot)=\varphi(P(\cdot))\},\\ \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}) &= \{R\in\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}})|R_0\in\mathcal{R}(\ker\psi),\ \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{n-m}}\circ T=\psi\circ P\}.\end{aligned}$$

Следствие 1.3.1. *[172] Всякая слабо неприводимая подалгебра* $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{sim}(n)$ *является алгеброй Берже тогда и только тогда, когда ее ортогональная часть* $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ *является слабой алгеброй Берже.*

Следствие 1.3.2. *[172] Всякая слабо неприводимая подалгебра* $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{sim}(n)$ *такая, что ее ортогональная часть* $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ *является алгеброй голономии риманова многообразия, является алгеброй Берже.*

Следствие 1.3.1 сводит проблему классификации алгебр Берже для лоренцевых многообразий к проблеме классификации слабых алгебр Берже.

Теорема 1.3.2. *[172]* (I) *Для всякой слабой алгебры Берже* $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ *существует ортогональное разложение*

$$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{n_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}^{n_s}\oplus\mathbb{R}^{n_{s+1}} \tag{1.5}$$

и соответствующее разложение $\mathfrak{h}$ *в прямую сумму идеалов*

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{h}_s\oplus\{0\}, \tag{1.6}$$

при этом $\mathfrak{h}_i(\mathbb{R}^{n_j}) = 0$ *при* $i \neq j$, $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ *и представление* $\mathfrak{h}_i$ *неприводимо в* $\mathbb{R}^{n_i}$.

(II) *Предположим, что дана подалгебра* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, *для которой существуют разложения пункта* (I). *Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}(\mathfrak{h}_s).$$

Берард-Бержери и Икемакхен [26] показали, что ортогональная часть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ алгебры голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ допускает разложение части (I) теоремы 1.3.2.

Следствие 1.3.3. *[172] Предположим, что дана подалгебра* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, *для которой существуют разложения пункта* (I) *теоремы 1.3.2, тогда* $\mathfrak{h}$ *является слабой алгеброй Берже тогда и только тогда, когда алгебра* $\mathfrak{h}_i$ *является слабой алгеброй Берже при всех* $i = 1, ..., s$.

Итак, достаточно рассматривать неприводимые слабые алгебры Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Оказывается, что эти алгебры представляют собой неприводимые алгебры голономии римановых многообразий. Это далеко нетривиальное утверждение получил Лайстнер [116].

Теорема 1.3.3. *[116] Всякая неприводимая подалгебра* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *является слабой алгеброй Берже тогда и только тогда, когда она является алгеброй голономии риманова многообразия.*

Ниже мы еще обсудим доказательство этой теоремы. Из следствия 1.3.1 и теоремы 1.3.3 получаем классификацию слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми алгебр, Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$.

Теорема 1.3.4. *Подалгебра* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ *является слабо неприводимой, не являющейся неприводимой, алгеброй Берже тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{g}$ *сопряжена одной из подалгебр* $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}, \mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}, \mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}, \mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi} \subset \mathfrak{sim}(n)$, *где* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *— алгебра голономии риманова многообразия.*

Вернемся к утверждению теоремы 1.3.1. Заметим, что элементы, определяющие $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}})$ из теоремы 1.3.1, зависят от выбора векторов $p, q \in \mathbb{R}^{1,n+1}$. Рассмотрим вещественное число $\mu \neq 0$, вектор $p' = \mu p$, и произвольный изотропный вектор q' такой, что $g(p', q') = 1$. Существует единственный вектор $W \in E$ такой, что

$$q' = \frac{1}{\mu}(-\frac{1}{2}g(W,W)p + W + q).$$

Соответствующее пространство E' имеет вид

$$E' = \{-g(X,W)p + X | X \in E\}.$$

Будем рассматривать отображение

$$X \in E \mapsto X' = -g(X,W)p + X \in E'.$$

Легко получить, что тензор R определяется элементами $\tilde{\lambda}, \tilde{v}, \tilde{R}_0, \tilde{P}, \tilde{T}$, где, например, имеем

$$\tilde{\lambda} = \lambda, \quad \tilde{v} = \frac{1}{\mu}(\vec{v} - \lambda W)', \quad \tilde{P}(X') = \frac{1}{\mu}(P(X) + R_0(X,W))',$$
$$\tilde{R}_0(X',Y')Z' = (R_0(X,Y)Z)'. \quad (1.7)$$

Это наблюдение будет многократно использовано ниже.

Пусть $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}})$. Соответствующий тензор Риччи имеет следующий вид:

$$\mathrm{Ric}(p,q) = \lambda, \quad \mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(R_0)(X,Y), \quad (1.8)$$

$$\mathrm{Ric}(X,q) = g(X, \vec{v} - \widetilde{\mathrm{Ric}}(P)), \quad \mathrm{Ric}(q,q) = -\mathrm{tr}T, \quad (1.9)$$

где $\widetilde{\mathrm{Ric}}\, P = \sum_{i=1}^{n} P(e_i)e_i$. Для скалярной кривизны имеем

$$s = 2\lambda + s_0,$$

где s_0 – скалярная кривизна тензора R_0.

Оператор Риччи имеет следующий вид:

$$\mathrm{Ric}(p) = \lambda p, \quad \mathrm{Ric}(X) = g(X, \vec{v} - \widetilde{\mathrm{Ric}}\, P)p + \mathrm{Ric}(R_0)(X), \quad (1.10)$$

$$\mathrm{Ric}(q) = -(\mathrm{tr}\, T)p - \widetilde{\mathrm{Ric}}(P) + \vec{v} + \lambda q. \quad (1.11)$$

1.3.2. Тензор кривизны многообразий Волкера

Всякое лоренцево многообразие (M, g) с алгеброй голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ (локально) допускает распределение ℓ изотропных прямых. Эти многообразия называются многообразиями Волкера [46, 147]. На всяком таком многообразии (M, g) существуют локальные координаты $v, x^1, ..., x^n, u$ такие, что метрика g имеет вид

$$g = 2dvdu + h + 2Adu + H(du)^2, \tag{1.12}$$

где $h = h_{ij}(x^1, ..., x^n, u)dx^i dx^j$ – семейство римановых метрик, зависящих от параметра u, $A = A_i(x^1, \dots, x^n, u)dx^i$ – семейство 1-форм, зависящих от u, а H – локальная функция на M. Векторное поле ∂_v определяет параллельное распределение изотропных прямых и является рекуррентным, т.е.

$$\nabla \partial_v = \frac{1}{2} \partial_v H du \otimes \partial_v.$$

Поэтому, векторное поле ∂_v пропорционально параллельному векторному полю тогда и только тогда, когда $d(\partial_v H du) = 0$, что равносильно равенствам

$$\partial_v \partial_i H = \partial_v^2 H = 0.$$

В этом случае координаты можно выбрать так, что $\nabla \partial_v = 0$ и $\partial_v H = 0$. Алгебры голономии типа 2 и 4 обнуляют вектор p, поэтому соответствующие многообразия допускают (локальные) параллельные изотропные векторные поля, а локальные координаты можно выбрать так, что $\partial_v H = 0$. Напротив, алгебры голономии типа 1 и 3 не обнуляют этот вектор, и поэтому соответствующие многообразия допускают только рекуррентные изотропные векторные поля, имеем $d(\partial_v H du) \neq 0$.

Важный класс многообразий Волкера представляют плоские гравитационные волны, которые локально определяются с помощью (1.12) с $A = 0$, $h = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$ и $\partial_v H = 0$, см. [117]. Плоские гравитационные волны – это в точности многообразия Волкера с коммутативными алгебрами голономии $\mathfrak{g} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$.

Бобель [37] построил координаты

$$v,\, x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^{n_1}), \ldots, x_{s+1} = (x_{s+1}^1, ..., x_{s+1}^{n_{s+1}}),\, u, \tag{1.13}$$

соответствующие разложению (1.5). Это означает, что

$$h = h_1 + \cdots + h_{s+1}, \quad h_\alpha = \sum_{i,j=1}^{n_\alpha} h_{\alpha ij} dx_\alpha^i dx_\alpha^j, \quad h_{s+1} = \sum_{i=1}^{n_{s+1}} (dx_{s+1}^i)^2, \tag{1.14}$$

$$\begin{gathered} A = \sum_{\alpha=1}^{s+1} A_\alpha, \quad A_\alpha = \sum_{k=1}^{n_\alpha} A_k^\alpha dx_\alpha^k, \quad A_{s+1} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta^k} h_{\alpha ij} = \frac{\partial}{\partial x_\beta^k} A_i^\alpha = 0, \quad \text{if } \beta \neq \alpha. \end{gathered} \tag{1.15}$$

Рассмотрим поле реперов

$$p = \partial_v, \quad X_i = \partial_i - A_i \partial_v, \quad q = \partial_u - \frac{1}{2} H \partial_v. \tag{1.16}$$

Рассмотрим распределение E, порожденное векторными полями $X_1, ..., X_n$. Слои этого распределения можно отождествить с касательными пространствами римановых многообразий с римановыми метриками $h(u)$. Пусть R_0 — тензор, соответствующий семейству тензоров кривизны метрик $h(u)$ при этом отождествлении. Аналогично, обозначим через $\mathrm{Ric}(h)$ соответствующий эндоморфизм Риччи, действующий на сечениях распределения E. Теперь тензор кривизны R метрики g однозначно определен функцией λ, сечением $\vec{v} \in \Gamma(E)$, симметрическим полем эндоморфизмов $T \in \Gamma(\mathrm{End}(E))$, $T^* = T$, тензором кривизны $R_0 = R(h)$, а тензором $P \in \Gamma(E^* \otimes \mathfrak{so}(E))$. Эти тензоры могут быть выражены в терминах коэффициентов метрики (1.12). Пусть $P(X_k)X_j = P_{jk}^i X_i$ и $T(X_j) = \sum_i T_{ij} X_j$. Тогда

$$h_{il} P_{jk}^l = g(R(X_k, q)X_j, X_i), \quad T_{ij} = -g(R(X_i, q)q, X_j).$$

Прямые вычисления показывают, что

$$
\begin{aligned}
\lambda =&\frac{1}{2}\partial_v^2 H, \quad \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\partial_i\partial_v H - A_i\partial_v^2 H\right) h^{ij}X_j, && (1.17)\\
h_{il}P^l_{jk} =& -\frac{1}{2}\nabla_k F_{ij} + \frac{1}{2}\nabla_k \dot{h}_{ij} - \dot{\Gamma}^l_{kj}h_{li}, && (1.18)\\
T_{ij} =&\frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j H - \frac{1}{4}(F_{ik}+\dot{h}_{ik})(F_{jl}+\dot{h}_{jl})h^{kl} - \frac{1}{4}(\partial_v H)(\nabla_i A_j + \nabla_j A_i) && (1.19)\\
&-\frac{1}{2}(A_i\partial_j\partial_v H + A_j\partial_i\partial_v H) - \frac{1}{2}(\nabla_i\dot{A}_j + \nabla_j\dot{A}_i)\\
&+\frac{1}{2}A_iA_j\partial_v^2 H + \frac{1}{2}\ddot{h}_{ij} + \frac{1}{4}\dot{h}_{ij}\partial_v H,
\end{aligned}
$$

где

$$F = dA, \quad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

– дифференциал 1-формы A, а ковариантные производные берутся относительно метрики h, точка означает частную производную по переменной u. В случае, когда h, A и H не завися от u, тензор кривизны метрики (1.12) найден в [72]. В [72] найден также тензор Риччи для произвольной метрики (1.12).

Важно заметить, что координаты Волкера не определены канонически, например, мы часто будем использовать наблюдение из [72], показывающее, что если

$$H = \lambda v^2 + vH_1 + H_0, \quad \lambda\in\mathbb{R}, \quad \partial_v H_1 = \partial_v H_0 = 0,$$

то преобразование координат

$$v\mapsto v - f(x^1,...,x^n,u), \quad x^i\mapsto x^i, \quad u\mapsto u$$

меняет метрику (1.12) следующим образом:

$$A_i\mapsto A_i + \partial_i f, \quad H_1\mapsto H_1 + 2\lambda f, \quad H_0\mapsto H_0 + H_1 f + \lambda f^2 + 2\dot{f}. \qquad (1.20)$$

1.4. Пространства слабых тензоров кривизны

Хотя Лайстнер показал, что подалгебры $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$, порождаемые образами пространств $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$, исчерпываются алгебрами голономии римановых пространств, он не нашел сами пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Сейчас мы найдем эти пространства, что даст полную структуру пространств тензоров кривизны для алгебр голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$. Эти результаты опубликованы в [166].

1.4.1. Результаты

Приступим к изучению пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$, где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ – неприводимая подалгебра. Рассмотрим $\mathfrak{h}$ — эквивариантное отображение

$$\widetilde{\mathrm{Ric}} : \mathcal{P}(\mathfrak{h}) \to \mathbb{R}^n, \qquad \widetilde{\mathrm{Ric}}(P) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i)e_i.$$

Определение этого отображения не зависит от выбора ортогонального базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим за $\mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$ ядро отображения $\widetilde{\mathrm{Ric}}$. Пусть $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$ — ортогональное дополнение этого пространства в $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Таким образом,

$$\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}_0(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{P}_1(\mathfrak{h}).$$

Так как подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — неприводима, а отображение $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ — $\mathfrak{h}$-эквивариантное, то пространство $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$ — либо тривиально, либо изоморфно $\mathbb{R}^n$. Пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}(\frac{n}{2})$ найдены в [116]. В пункте 1.4.3 мы вычисляем пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для остальных алгебр голономии римановых многообразий. Главным результатом является таблица 1.4.1, где даны пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для всех неприводимых алгебр голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ римановых многообразий (для компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ выражение V_Λ обозначает неприводимое представление $\mathfrak{h}$, определяемое неприводимым представлением алгебры Ли $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ со старшим весом Λ; $((\odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m)_0$ обозначает подпространство в $\odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m$, состоящее из тензоров таких, что свертка верхнего индекса с любым нижним индексом дает ноль).

Рассмотрим натуральное $\mathfrak{h}$ - эквивариантное отображение

$$\tau : \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{R}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h}), \qquad \tau(u \otimes R) = R(\cdot, u).$$

Следующая теорема будет использована для получения явного вида некото-

Таблица 1.4.1. Пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для неприводимых алгебр голономии римановых многообразий $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$.

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$	$\mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$	$\mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$	$\dim \mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$
$\mathfrak{so}(2)$	$\mathbb{R}^2$	0	0
$\mathfrak{so}(3)$	$\mathbb{R}^3$	$V_{4\pi_1}$	5
$\mathfrak{so}(4)$	$\mathbb{R}^4$	$V_{3\pi_1+\pi_1'} \oplus V_{\pi_1+3\pi_1'}$	16
$\mathfrak{so}(n)$, $n \geq 5$	$\mathbb{R}^n$	$V_{\pi_1+\pi_2}$	$\frac{(n-2)n(n+2)}{3}$
$\mathfrak{u}(m)$, $n = 2m \geq 4$	$\mathbb{R}^n$	$(\odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m)_0$	$m^2(m-1)$
$\mathfrak{su}(m)$, $n = 2m \geq 4$	0	$(\odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m)_0$	$m^2(m-1)$
$\mathfrak{sp}(m) \oplus \mathfrak{sp}(1)$, $n = 4m \geq 8$	$\mathbb{R}^n$	$\odot^3(\mathbb{C}^{2m})^*$	$\frac{m(m+1)(m+2)}{3}$
$\mathfrak{sp}(m)$, $n = 4m \geq 8$	0	$\odot^3(\mathbb{C}^{2m})^*$	$\frac{m(m+1)(m+2)}{3}$
$G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$	0	$V_{\pi_1+\pi_2}$	64
$\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$	0	$V_{\pi_2+\pi_3}$	112
$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, $n \geq 4$, — симметрическая алгебра Берже	$\mathbb{R}^n$	0	0

рых $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Доказательство теоремы следует из результатов [3, 116] и таблицы 1.4.1.

Теорема 1.4.1. *Для произвольной неприводимой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, $n \geq 4$, $\mathfrak{h}$-эквивариантное отображение $\tau : \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{R}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ является сюрьективным. Более того, $\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathcal{R}_0(\mathfrak{h})) = \mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$ и $\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathcal{R}_1(\mathfrak{h})) = \mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$.*

Пусть $n \geq 4$ и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — неприводимая подалгебра. Из теоремы 1.4.1 следует, что произвольный $P \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$ можно записать в виде $R(\cdot, x)$, где $R \in \mathcal{R}_0(\mathfrak{h})$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Аналогично, произвольный $P \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$ может быть представлен в виде $\sum_i R_i(\cdot, x_i)$ для некоторых $R_i \in \mathcal{R}_1(\mathfrak{h})$ и $x_i \in \mathbb{R}^n$.

1.4.2. Явный вид некоторых $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$

Используя полученные выше результаты и результаты из [3], можно получить явный вид пространств $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Из результатов [116] следует, что

$$\mathcal{P}(\mathfrak{u}(m)) \simeq \odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m.$$

Дадим явное описание этого изоморфизма. Пусть

$$S \in \odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m \subset (\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}).$$

Рассмотрим отождествление

$$\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^m \oplus i\mathbb{R}^m$$

и выберем базис $e_1, \dots, e_m$ пространства $\mathbb{R}^m$. Определим комплексные числа S_{abc}, $a, b, c = 1, \dots, m$ так, что

$$S(e_a)e_b = \sum_c S_{acb} e_c.$$

Имеем $S_{abc} = S_{cba}$. Определим отображение $S_1 : \mathbb{R}^{2m} \to \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$ условиями

$$S_1(e_a)e_b = \sum_c \overline{S_{abc}} e_c, \;\; S_1(ie_a) = -iS_1(e_a), \;\; S_1(e_a)ie_b = iS_1(e_a)e_b.$$

Легко проверить, что

$$P = S - S_1 : \mathbb{R}^{2m} \to \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$$

принадлежит $\mathcal{P}(\mathfrak{u}(n))$, и каждый элемент пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{u}(n))$ имеет такой вид. Полученный элемент принадлежит пространству $\mathcal{P}(\mathfrak{su}(n))$ тогда и только тогда, когда $\sum_b S_{abb} = 0$ для всех $a = 1, \dots, m$, т.е. $S \in (\odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m)_0$. Если $m = 2k$, т.е. $n = 4k$, то P принадлежит $\mathcal{P}(\mathfrak{sp}(k))$ тогда и только тогда, когда $S(e_a) \in \mathfrak{sp}(2k, \mathbb{C})$, $a = 1, \dots, m$, т.е.

$$S \in (\mathfrak{sp}(2k, \mathbb{C}))^{(1)} \simeq \odot^3(\mathbb{C}^{2k})^*.$$

В [174] показано, что каждый $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{u}(m))$ удовлетворяет

$$g(\widetilde{\mathrm{Ric}}(P), X) = -\operatorname{tr}_{\mathbb{C}} P(JX), \quad X \in \mathbb{R}^{2m}.$$

В [3] показано, что произвольный $R \in \mathcal{R}_1(\mathfrak{so}(n)) \oplus \mathcal{R}'(\mathfrak{so}(n))$ имеет вид $R = R_S$, где $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — симметрическое линейное отображение и

$$R_S(X,Y) = SX \wedge Y + X \wedge SY. \tag{1.21}$$

Легко проверить, что

$$\tau(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}_1(\mathfrak{so}(n)) \oplus \mathcal{R}'(\mathfrak{so}(n))) = \mathcal{P}(\mathfrak{so}(n)).$$

Это и (1.21) показывают, что пространство $\mathcal{P}(\mathfrak{so}(n))$ линейно порождается элементами P вида

$$P(y) = Sy \wedge x + y \wedge Sx,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $S \in \odot^2\mathbb{R}^n$ — фиксированы, а $y \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. Для таких P имеем $\widetilde{\mathrm{Ric}}(P) = (\operatorname{tr} S - S)x$. Это означает, что пространство $\mathcal{P}_0(\mathfrak{so}(n))$ линейно порождается элементами P вида

$$P(y) = Sy \wedge x,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $S \in \odot^2\mathbb{R}^n$ удовлетворяют $\operatorname{tr} S = 0$, $Sx = 0$, а $y \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор.

Изоморфизм $\mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n)) \simeq \mathbb{R}^n$ определяется следующим образом: $x \in \mathbb{R}^n$ соответствует элементу $P = x \wedge \cdot \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n))$, т.е. $P(y) = x \wedge y$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$.

Каждый $P \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{u}(m))$ имеет вид

$$P(y) = -\frac{1}{2}g(Jx,y)J + \frac{1}{4}(x \wedge y + Jx \wedge Jy),$$

где J — комплексная структура на $\mathbb{R}^{2m}$, $x \in \mathbb{R}^{2m}$ — фиксированный, а $y \in \mathbb{R}^{2m}$ — произвольный вектор.

Каждый $P \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{sp}(m) \oplus \mathfrak{sp}(1))$ имеет вид

$$P(y) = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3} g(J_\alpha x, y)J_\alpha + \frac{1}{4}\big(x \wedge y + \sum_{\alpha=1}^{3} J_\alpha x \wedge J_\alpha y\big),$$

где (J_1, J_2, J_3) — кватернионная структура на $\mathbb{R}^{4m}$, $x \in \mathbb{R}^{4m}$ — фиксированный, а $y \in \mathbb{R}^{4m}$ — произвольный вектор.

Мы покажем, что для присоединенного представления $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{h})$ простой компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$, отличной от $\mathfrak{so}(3)$, произвольный элемент $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$ имеет вид

$$P(y) = [x, y].$$

Если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — симметрическая алгебра Берже, то

$$\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) = \{R(\cdot, x) |\, x \in \mathbb{R}^n\},$$

где R — образующий элемент пространства $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{R}$.

В общем случае, пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — неприводимая подалгебра и $P \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$. Тогда $\widetilde{\mathrm{Ric}}(P) \wedge \cdot \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n))$. Более того, легко проверить, что

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}\left(P + \frac{1}{n-1}\widetilde{\mathrm{Ric}}(P) \wedge \cdot\right) = 0,$$

т.е.

$$P + \frac{1}{n-1}\widetilde{\mathrm{Ric}}(P) \wedge \cdot \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{so}(n)).$$

Таким образом, включение

$$\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \subset \mathcal{P}(\mathfrak{so}(n)) = \mathcal{P}_0(\mathfrak{so}(n)) \oplus \mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n))$$

имеет вид

$$P \in P_1(\mathfrak{h}) \mapsto \left(P + \frac{1}{n-1}\widetilde{\mathrm{Ric}}(P) \wedge \cdot, -\frac{1}{n-1}\widetilde{\mathrm{Ric}}(P) \wedge \cdot\right) \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{so}(n)) \oplus \mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n)).$$

Эта конструкция определяет тензор $W = P + \frac{1}{n-1}\widetilde{\mathrm{Ric}}(P) \wedge \cdot$, являющийся аналогом тензора Вейля для $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ и этот тензор представляет собой некоторую компоненту тензора Вейля лоренцева многообразия.

1.4.3. Вычисление пространств $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$

Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — неприводимая алгебра голономии некоторого риманова многообразия. Так как для подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}(\frac{n}{2})$ пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ найдены [116], будем предполагать, что $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{u}(\frac{n}{2})$, тогда подалгебра $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ —

неприводима, и достаточно найти пространство $\mathcal{P}(\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C})$, которое совпадает с $\mathcal{P}(\mathfrak{h})\otimes\mathbb{C}$.

Вычислим пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для всех неприводимых подалгебр Берже $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$. Несимметрическими подалгебрами Берже $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ (т.е. подалгебрами с $\mathcal{R}(\mathfrak{h})\neq\mathcal{R}_1(\mathfrak{h})$) являются $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})\subset\mathfrak{so}(4m,\mathbb{C})$ $(m\geq 2)$, $\mathfrak{spin}(7,\mathbb{C})\subset\mathfrak{so}(8,\mathbb{C})$ и $G_2^{\mathbb{C}}\subset\mathfrak{so}(7,\mathbb{C})$. Симметрические подалгебры Берже $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$ (т.е. подалгебры с $\mathcal{R}(\mathfrak{h})=\mathcal{R}_1(\mathfrak{h})$) даны в таблице 1.4.2, взятой из [137].

Таблица 1.4.2. Неприводимые симметрические подалгебры Берже $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})=\mathfrak{so}(V)$.

No.	$\mathfrak{h}$	V
1	$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$, $n\geq 3$	$V_{\pi_2}=\Lambda^2\mathbb{C}^{2n}/\mathbb{C}\omega$
2	$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, $n\geq 3$, $n\neq 4$	$V_{2\pi_1}=\odot^2\mathbb{C}^n/\mathbb{C}g$
3	$\mathfrak{h}$ is a simple Lie algebra	$\mathfrak{h}$
4	$\mathfrak{so}(9,\mathbb{C})$	$(\Delta_9)^{\mathbb{C}}$
5	$\mathfrak{sp}(8,\mathbb{C})$	$V_{\pi_4}=\Lambda^4\mathbb{C}^8/(\omega\wedge\Lambda^2\mathbb{C}^8)$
6	$F_4^{\mathbb{C}}$	$V_{\pi_1}=\mathbb{C}^{26}$
7	$\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})$	$V_{\pi_4}=\Lambda^4\mathbb{C}^8$
8	$\mathfrak{so}(16,\mathbb{C})$	$(\Delta_{16}^+)^{\mathbb{C}}$
9	$\mathfrak{so}(p,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(q,\mathbb{C})$, $p,q\geq 3$	$\mathbb{C}^p\otimes\mathbb{C}^q$
10	$\mathfrak{sp}(2p,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sp}(2q,\mathbb{C})$, $p,q\geq 2$	$\mathbb{C}^{2p}\otimes\mathbb{C}^{2q}$
11	$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^2\otimes\odot^3\mathbb{C}^2$
12	$\mathfrak{sp}(6,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$V_{\pi_3}\otimes\mathbb{C}^2=(\Lambda^3\mathbb{C}^6/(\omega\wedge\mathbb{C}^6))\otimes\mathbb{C}^2$
13	$\mathfrak{sl}(6,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$V_{\pi_3}\otimes\mathbb{C}^2=\Lambda^3\mathbb{C}^6\otimes\mathbb{C}^2$
14	$\mathfrak{so}(12,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$(\Delta_{12}^+)^{\mathbb{C}}\otimes\mathbb{C}^2$
15	$E_7^{\mathbb{C}}\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$V_{\pi_1}\otimes\mathbb{C}^2=\mathbb{C}^{56}\otimes\mathbb{C}^2$

Лемма 1.4.1. *Пусть V — вещественное или комплексное векторное пространство и $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(V)$. Тогда линейное отображение $R:\Lambda^2V\to\mathfrak{h}$ принадлежит пространству $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ тогда и только тогда, когда для каждого $x\in V$ выполнено $R(\cdot,x)\in\mathcal{P}(\mathfrak{h})$.*

Доказательство. Если $R\in\mathcal{R}(\mathfrak{h})$, то принадлежность $R(\cdot,x)\in\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ следует из (1.1) и тождества Бьянки. Обратно, если $R(\cdot, x) \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ для всех $x \in V$, то легко показать, что R удовлетворяет (1.1), а это влечет $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{h})$. □

Отметим, что эту лемму можно применять также к неприводимым подмодулям $U \subset \mathcal{R}(\mathfrak{h})$.

Лемма 1.4.2. *Пусть* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{so}(V)$ *— неприводимая подалгебра. Тогда разложение тензорного произведения* $V \otimes \mathfrak{h}$ *в прямую сумму неприводимых* $\mathfrak{h}$*-модулей имеет вид*

$$V \otimes \mathfrak{h} = kV \oplus (\oplus_\lambda V_\lambda),$$

где k *— число ненулевых отметок на схеме Дынкина представления* $\mathfrak{h}$ *в пространстве* V*, а* V_λ *— попарно неизоморфные неприводимые* $\mathfrak{h}$*-модули, неизоморфные модулю* V*.*

Доказательство. Кратность модуля V_λ в произведении $V \otimes \mathfrak{h}$ равна

$$\dim\{v \in \mathfrak{h}_{\lambda-\Lambda} | (\mathrm{ad}_{A_i})^{\Lambda_i+1} v = 0, \; i = 1, \dots, l\},$$

где Λ — старший вес модуля V, l — ранг $\mathfrak{h}$, A_i — канонические генераторы $\mathfrak{h}$, соответствующие простым положительным корням, а Λ_i — отметки на диаграмме Дынкина, определяющие Λ [48]. Если $\Lambda \neq \lambda$, то $\dim \mathfrak{h}_{\lambda-\Lambda}$ равна 0 или 1. Это показывает, что все V_λ — попарно неизоморфны. Далее,

$$k = \dim\{v \in \mathfrak{h}_0 | (\mathrm{ad}_{A_i})^{\Lambda_i+1} v = 0, \; i = 1, \dots, l\},$$

где $\mathfrak{h}_0$ — подалгебра Картана $\mathfrak{h}$. Если $\Lambda_i > 0$, то $(\mathrm{ad}_{A_i})^{\Lambda_i+1} v = 0$. Следовательно,

$$k = \dim\{v \in \mathfrak{h}_0 | [A_i, v] = 0 \text{ всякий раз, когда } \Lambda_i = 0\}.$$

Матрица полученной однородной системы уравнений состоит из строк матрицы Картана алгебры Ли $\mathfrak{h}$, соответствующих i с $\Lambda_i = 0$. Теперь доказательство леммы следует из того, что матрица Картана — невырождена. □

Предложение 1.4.1. *Пусть V — вещественное или комплексное векторное пространство, а $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(V)$ — неприводимая подалгебра. Если $V \otimes \mathfrak{h}$ содержит только один неприводимый подмодуль, изоморфный V, то $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \simeq V$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}_1(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{F}$, где соответственно $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Hom}_0(V, \mathfrak{h}) \subset \mathrm{Hom}(V, \mathfrak{h})$ — подпространство, состоящее из отображений $\varphi : V \to \mathfrak{h}$ таких, что $\sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i = 0$. Обозначим через $\mathrm{Hom}_1(V, \mathfrak{h})$ его ортогональное дополнение, тогда

$$\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{h}) = \mathrm{Hom}_0(V, \mathfrak{h}) \oplus \mathrm{Hom}_1(V, \mathfrak{h}).$$

Легко видеть, что $\mathrm{Hom}_1(V, \mathfrak{h}) \simeq V$. Заметим, что $\mathrm{Hom}_1(V, \mathfrak{so}(n)) = \mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n))$.

Лемма 1.4.3. $\mathrm{Hom}_1(V, \mathfrak{h}) = \{\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \circ P | P \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n))\}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_0(V, \mathfrak{h})$ и $P \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n))$, тогда

$$(\varphi, \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \circ P) = \sum_{i,j=1}^{n} (e_i \otimes \varphi(e_i), e_j \otimes \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \circ P(e_j)) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi(e_i), \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \circ P(e_i)) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(e_i), P(e_i)) = (\varphi, P) = 0,$$

где мы использовали скалярные произведения на разных тензорных пространствах и факт, что $\mathrm{Hom}_0(V, \mathfrak{h}) \subset \mathrm{Hom}_0(V, \mathfrak{so}(n))$ – ортогонально $\mathrm{Hom}_1(V, \mathfrak{so}(n))$. С другой стороны, предположим, что $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \circ P = 0$. Напомним, что P имеет вид $x_0 \wedge \cdot$ для некоторого $x_0 \in V$. Тогда $\mathfrak{h}$ аннулирует x_0 и имеем $x_0 = 0$. Лемма верна. ☐

Заметим, что $\odot^2 \mathfrak{h}$ содержит $\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$. Более того, либо $\mathcal{R}_1(\mathfrak{h}) = 0$, либо $\mathcal{R}_1(\mathfrak{h}) = \mathbb{F}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$. Пусть $R : \Lambda^2 V \to \mathfrak{h}$ — продолжение $\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$ такое, что $R|_{\mathfrak{h}^\perp} = 0$, тогда $R(x, y) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}(x \wedge y)$ для всех $x, y \in V$. Ясно, что либо $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) = 0$, либо $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) = \mathrm{Hom}_1(V, \mathfrak{h})$. Лемма 1.4.1 показывает, что $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) = \mathrm{Hom}_1(V, \mathfrak{h})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}_1(\mathfrak{h}) = \mathbb{F}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$. ☐

Предложение 1.4.2. *Пусть* $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{gl}(V_1)$ *и* $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{gl}(V_2)$ *— неприводимые комплексные подалгебры, и*

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{so}(V_1 \otimes V_2) = \mathfrak{so}(V).$$

Если $\mathfrak{h}$ *отлична от* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$, *то* $\mathcal{P}_0(\mathfrak{h}) = 0$. *Следовательно, если* $\mathfrak{h}$ *— симметрическая алгебра Берже, то* $\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \simeq V$. *Более того,*

$$\mathcal{P}_1(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})) \simeq V$$

и

$$\mathcal{P}_0(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})) = (\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C}))^{(1)} \oplus (\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C}))^{(1)},$$

где $(\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C}))^{(1)} \simeq \odot^3(\mathbb{C}^{2m})^*$ *— первое продолжение подалгебры* $\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2m,\mathbb{C})$.

Доказательство. Сначала предположим, что размерности пространств V_1 и V_2 — больше чем 2. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{h}$ – одна из следующих: $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(V_1) \oplus \mathfrak{so}(V_2)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(V_1) \oplus \mathfrak{sp}(V_2)$.

Мы утверждаем, что не существует ненулевых $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$, принимающих значения только в $\mathfrak{h}_1$ или в $\mathfrak{h}_2$, т.е.

$$\mathcal{P}(\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{so}(V)) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{so}(V)) = 0.$$

В самом деле, поскольку размерности пространств V_1 и V_2 — больше чем 2, каждая из алгебр $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ сохраняет более двух векторных подпространств в V и действует в этих подпространствах одновременно. Из этого следует, что

$$\mathcal{P}(\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{so}(V)) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{so}(V)) = 0.$$

Утверждение доказано.

Заметим, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(V)$ — симметрическая алгебра Берже и на диаграмме Дынкина $\mathfrak{h}$, определяющей представление V, в точности две ненулевые отметки. Одна из этих отметок — на диаграмме Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{h}_1$, а другая — на диаграмме Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{h}_2$. Следовательно, $V \otimes \mathfrak{h}$ содержит две неприводимые компоненты, изоморфные V. Далее,

$$V \otimes \mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_1 \otimes V_1 \otimes V_2) \oplus (\mathfrak{h}_2 \otimes V_1 \otimes V_2).$$

Это показывает, что одна неприводимая компонента $V \subset V \otimes \mathfrak{h}$ принадлежит $\mathfrak{h}_1 \otimes V_1 \otimes V_2$, а другая — принадлежит $\mathfrak{h}_2 \otimes V_1 \otimes V_2$. Следовательно, никакая из них не принадлежит пространству $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$. С другой стороны, $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ содержит $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \simeq V$. Итак,

$$(V \oplus V) \cap \mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \simeq V.$$

Если $V_\lambda \subset V \otimes \mathfrak{h}$ — неприводимый $\mathfrak{h}$-подмодуль, не изоморфный V, то V_λ содержится либо в $\mathfrak{h}_1 \otimes V_1 \otimes V_2$, либо в $\mathfrak{h}_2 \otimes V_1 \otimes V_2$, т.е. он не содержится в $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Если $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{so}(V_1 \otimes V_2) = \mathfrak{so}(V)$ — неприводимая подалгебра, отличная от только что рассмотренных, то она содержится либо в $\mathfrak{f} = \mathfrak{so}(V_1) \oplus \mathfrak{so}(V_2)$, либо в $\mathfrak{f} = \mathfrak{sp}(V_1) \oplus \mathfrak{sp}(V_2)$. Далее, $\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = (V \otimes \mathfrak{h}) \cap \mathcal{P}(\mathfrak{f})$. Так как $\mathcal{P}(\mathfrak{f}) \simeq V$ — неприводимый $\mathfrak{h}$-модуль, а образы элементов из $\mathcal{P}(\mathfrak{f})$ порождают $\mathfrak{f}$, то $\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = 0$.

Если $\dim V_1 = 2$, то $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$ – неприводимая подалгебра, $m \geq 2$. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$. Легко заметить, что

$$\mathcal{P}(\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(V)) = (\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C}))^{(1)} \oplus (\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C}))^{(1)}.$$

Используя это и предыдущие аргументы, получаем $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \simeq V$ и

$$\mathcal{P}_0(\mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C}))^{(1)} \oplus (\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C}))^{(1)}.$$

Если $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$ — собственная подалгебра, то

$$\mathcal{P}_0(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{h}_2) = (V \otimes (\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{h}_2)) \cap \mathcal{P}_0(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C}))$$

и это пересечение тривиально, поскольку $(\mathfrak{h}_2)^{(1)} = 0$ [137]. Предложение доказано. ☐

Предположим, что $\mathfrak{h}$ — простая алгебра Ли, а δ — ее старший корень. Пусть $V = V_\Lambda$. Тензорное произведение $V \otimes \mathfrak{h}$ содержит $\mathfrak{h}$-подмодуль $V_{\Lambda+\delta}$. Пусть $A_\delta \in \mathfrak{h}$ и $v_\Lambda \in V$ — соответственно старший корень и старший вектор. Тогда $v_\Lambda \otimes A_\delta \in V_{\Lambda+\delta} \subset V \otimes \mathfrak{h}$ и включение $V_{\Lambda+\delta} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ равносильно $v_\Lambda \otimes A_\delta \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Условие $v_\Lambda \otimes A_\delta \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ эквивалентно тому, что A_δ — ранга два и $A_\delta v_{-\Lambda} \neq 0$, где $v_{-\Lambda}$ — младший вектор в V (заметим, что векторы v_Λ и $v_{-\Lambda}$ — изотропные и $(v_\Lambda, v_{-\Lambda}) \neq 0$). Если A_δ – ранга два, то $A_\delta \odot A_\delta \in \mathcal{R}(\mathfrak{h})$ и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(V)$ — несимметрическая алгебра Берже. Мы доказали, что если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(V)$ — симметрическая алгебра Берже или $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = 0$, то $V_{\Lambda+\delta} \cap \mathcal{P}(\mathfrak{h}) = 0$. Поэтому остается рассмотреть неприводимые подмодули $V_\lambda \subset V \otimes \mathfrak{h}$ неизоморфные $V_{\Lambda+\delta}$ и V (если представление дано диаграммой Дынкина с одной ненулевой отметкой). Мы увидим, что такие подмодули не содержатся в $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Легко установить, что

$$\mathbb{C}^n \otimes \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \oplus V_{\pi_1 \oplus \pi_2} \oplus V_{\pi_3}, \ (n \geq 5),$$

$$\mathbb{C}^7 \otimes G_2^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^7 \oplus V_{\pi_1+\pi_2} \oplus V_{2\pi_2}, \quad \mathbb{C}^8 \otimes \mathfrak{so}(7) = \mathbb{C}^8 \oplus V_{\pi_2+\pi_3} \oplus V_{\pi_1+\pi_3}.$$

Лемма 1.4.4. *Имеем* $\mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})) \simeq \mathbb{C}^n$, $\mathcal{P}_0(\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})) = V_{\pi_1 \oplus \pi_2}$ $(n \geq 5)$, $\mathcal{P}(G_2^{\mathbb{C}}) = \mathcal{P}_0(G_2^{\mathbb{C}}) = V_{\pi_1+\pi_2}$ *и* $\mathcal{P}(\mathfrak{spin}(7, \mathbb{C})) = \mathcal{P}_0(\mathfrak{spin}(7, \mathbb{C})) = V_{\pi_2+\pi_3}$.

Доказательство. Из предложения 1.4.1 следует, что $\mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})) \simeq \mathbb{C}^n$, а для подалгебр $G_2^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{so}(7, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{spin}(7, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(8, \mathbb{C})$ имеем $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) = 0$, т.е. $\mathcal{P}(\mathfrak{h}) \cap V = 0$.

Пусть $\mathfrak{h} = G_2^{\mathbb{C}}$. Имеем $\Lambda = \pi_1 = \epsilon_1$ и $\delta = \pi_2 = \epsilon_1 - \epsilon_3$. Легко видеть, что $v_\Lambda \otimes A_\delta \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$, т.е. $V_{\Lambda+\delta} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Далее, $V \otimes \mathfrak{h}$ содержит 3-мерное векторное подпространство веса $2\pi_2$. Это подпространство порождается векторами $v_{\epsilon_1} \otimes A_{\epsilon_1}$, $v_{-\epsilon_2} \otimes A_{\epsilon_1-\epsilon_3}$ и $v_{-\epsilon_3} \otimes A_{\epsilon_1-\epsilon_2}$, где A_μ обозначает некоторый ненулевой корневой вектор в $\mathfrak{h}$ веса μ. Более того, это подпространство имеет одномерное пересечение с $V_{2\pi_2}$ и двумерное пересечение с $V_{\pi_1+\pi_2}$. Это показывает, что $V_{2\pi_2} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ тогда и только тогда, когда все эти три вектора принадлежат

$\mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Чтобы показать, что $v_{\epsilon_1} \otimes A_{\epsilon_1} \notin \mathcal{P}(\mathfrak{h})$, достаточно рассмотреть уравнение $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ на векторах $v_{-\epsilon_1}$, v_{ϵ_2} и v_{ϵ_3}.

Алгебры Ли $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{spin}(7, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(8, \mathbb{C})$ могут быть рассмотрены аналогично. □

Лемма 1.4.5. *Пусть* $\mathfrak{h}$ *— простая комплексная алгебра Ли, отличная от* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. *Тогда для присоединенного представления* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{h})$ *имеем* $\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \simeq \mathfrak{h}$.

Доказательство. Так как пространство $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ — одномерно и оно порождается скобкой Ли алгебры Ли $\mathfrak{h}$ [137], то каждый элемент $P \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$ имеет вид $P(\cdot) = [\cdot, x]$ для некоторого $x \in \mathfrak{h}$.

Пусть $(\cdot, \cdot)$ — форма Киллинга на $\mathfrak{h}$. Пусть $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$, тогда для всех $x, y, z \in \mathfrak{h}$ имеем

$$\begin{aligned}([P(x), y], z) + ([x, P(y)], z) &= -([P(y), z], x) - ([P(z), x], y) + ([x, P(y)], z) \\ &= -([P(z), x], y) = -(P(z), [x, y]).\end{aligned}$$

Так как $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} = \odot^2\mathfrak{h} \oplus \Lambda^2\mathfrak{h}$ и присоединенное представление каждой простой алгебры Ли $\mathfrak{h}$, отличной от $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, определяется диаграммой Дынкина с одной ненулевой отметкой, то согласно лемме 1.4.2, можем предполагать, что P содержится либо в $\odot^2\mathfrak{h}$, либо в $\Lambda^2\mathfrak{h}$. Это утверждение верно также для $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, так как диаграмма Дынкина присоединенного представления этой алгебры Ли имеет две ненулевые отметки, т.е. $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ содержит два неприводимых $\mathfrak{h}$-модуля, изоморфных $\mathfrak{h}$, один из них совпадает с $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$, и нам нужно исследовать второй из них.

Если $P \in \Lambda^2\mathfrak{h}$, то $P([x, y]) = [P(x), y] + [x, P(y)]$, т.е. P – дифференцирование $\mathfrak{h}$. Так как $\mathfrak{h}$ — простая алгебра Ли, то P имеет вид $P(\cdot) = [\cdot, x]$ для некоторого $x \in \mathfrak{h}$, т.е. $P \in \mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$.

Пусть $P \in \odot^2\mathfrak{h}$, тогда $P([x,y]) = -[P(x),y] - [x,P(y)]$. Имеем

$$\begin{aligned}0 =&P([[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y])\\ =&-[P([x,y]),z] - [[x,y],P(z)] - [P([y,z]),x]\\ &-[[y,z],P(x)] - [P([z,x]),y] - [[z,x],P(y)]\\ =&[[P(x),y],z] + [[x,P(y)],z] - [[x,y],P(z)] + [[P(y),z],x]\\ &+[[y,P(z)],x] - [[y,z],P(x)]\\ &+[[P(z),x],y] + [[z,P(x)],y] - [[z,x],P(y)]\\ =&-2([[x,y],P(z)] + [[y,z],P(x)] + [[z,x],P(y)]).\end{aligned}$$

Последнее равенство влечет

$$[[P(x),y],z] + [[x,P(y)],z] + [[P(y),z],x] \\ + [[y,P(z)],x] + [[P(z),x],y] + [[z,P(x)],y] = 0.$$

Следовательно,

$$[P([x,y]),z] + [P([y,z]),x] + [P([z,x]),y] = 0,$$

т.е. $P([\cdot,\cdot]) \in \mathcal{R}(\mathfrak{h})$. Это показывает, что $P([x,y]) = c[x,y]$ для всех $x,y \in \mathfrak{h}$ и некоторой константы $c \in \mathbb{C}$. Получаем, что $P = c\,\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$. Ясно, что $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ тогда и только тогда, когда $c = 0$. Лемма доказана. ☐

Осталось рассмотреть представления 1, 2, 4–8 из таблицы 1.4.2.

Для представлений 4, 5 и 8 мы докажем, что $\mathcal{P}_0(\mathfrak{h}) = 0$, используя лемму 1.4.1. Для каждого неприводимого подмодуля $V_\lambda \subset V \otimes \mathfrak{h}$, отличного от старшего подмодуля и от V, мы найдем подмодуль $U \subset \Lambda^2 V \otimes \mathfrak{h}$ такой, что естественное отображение τ из $(\Lambda^2 V \otimes \mathfrak{h}) \otimes V$ в $V \otimes \mathfrak{h}$, отображающее $R \otimes x$ в $R(\cdot,x)$, отображает $U \otimes V$ на V_λ. Так как $U \not\subset \mathcal{R}(\mathfrak{h})$, то получим $V_\lambda \not\subset \mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Подалгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(9,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}((\Delta_9)^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{so}(16,\mathbb{C})$. Имеем

$$V \otimes \mathfrak{h} = V \oplus V_{\pi_2+\pi_4} \oplus V_{\pi_1+\pi_4}.$$

Подмодуль$V_{\pi_2+\pi_4} \subset V \otimes \mathfrak{h}$ — старший, остается рассмотреть подмодуль $V_{\pi_1+\pi_4}$. $\mathfrak{h}$-модуль $\odot^2\mathfrak{h} \subset \Lambda^2 V \otimes \mathfrak{h}$ содержит подмодуль $V_{2\pi_1}$. Имеем

$V_{2\pi_1}\otimes V = V_{2\pi_1+\pi_4}\oplus V_{\pi_1+\pi_4}$. Так как $V_{2\pi_1+\pi_4}\not\subset V\otimes\mathfrak{h}$ и $\tau(V_{2\pi_1}\otimes V)\neq 0$, получаем $\tau(V_{2\pi_1}\otimes V) = V_{\pi_1+\pi_4}$. Так как $V_{2\pi_1}\not\subset\mathcal{R}(\mathfrak{h})$, заключаем, что $V_{\pi_1+\pi_4}\not\subset\mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Подалгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(16,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}((\Delta_{16}^{+})^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{so}(128,\mathbb{C})$. Имеем $V\otimes\mathfrak{h} = V\oplus V_{\pi_2+\pi_8}\oplus V_{\pi_1+\pi_7}$. Подмодуль $V_{\pi_2+\pi_8}\subset V\otimes\mathfrak{h}$ — старший. $\mathfrak{h}$-модуль $\odot^2\mathfrak{h}\subset\Lambda^2V\otimes\mathfrak{h}$ содержит подмодуль $V_{2\pi_1}$. Имеем $V_{2\pi_1}\otimes V = V_{\pi_1+\pi_7}\oplus V_{2\pi_1+\pi_8}$, поэтому $V_{\pi_1+\pi_7}\not\subset\mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Подалгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(8,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(V_{\pi_4}) = \mathfrak{so}(42,\mathbb{C})$. Имеем $V\otimes\mathfrak{h} = V\oplus V_{2\pi_1+\pi_4}\oplus V_{\pi_1+\pi_3}$. Подмодуль $V_{2\pi_1+\pi_4}\subset V\otimes\mathfrak{h}$ — старший. $\mathfrak{h}$-модуль $\odot^2\mathfrak{h}\subset\Lambda^2V\otimes\mathfrak{h}$ содержит подмодуль V_{π_2}. Имеем $V_{\pi_2}\otimes V = V_{\pi_2+\pi_4}\oplus V_{\pi_1+\pi_3}\oplus V_{\pi_2}$, поэтому $V_{\pi_1+\pi_3}\not\subset\mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Только что использованный трюк не проходит с представлениями 1, 2, 6, 7 из таблицы 1.4.2, и нам приходится использовать прямые вычисления.

Подалгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})\subset\mathfrak{so}(V_{\pi_2})$. Имеем

$$V\otimes\mathfrak{h} = V\oplus V_{2\pi_1+\pi_2}\oplus V_{\pi_1+\pi_3}\oplus V_{2\pi_1}.$$

Подмодуль $V_{2\pi_1+\pi_2}\subset V\otimes\mathfrak{h}$ — старший, и нам остается рассмотреть подмодули $V_{\pi_1+\pi_3}$ и $V_{2\pi_1}$. $\mathfrak{h}$-модуль $\Lambda^2V\otimes\mathfrak{h}$ содержит подмодуль $V_{\pi_2+\pi_4}$, в то же время, $V_{\pi_2+\pi_4}\otimes V$ содержит подмодуль $V_{\pi_1+\pi_3}$, и не содержит никакой из подмодулей $V_{2\pi_1+\pi_2}$, $V_{2\pi_1}$. Поэтому, $V_{\pi_1+\pi_3}\not\subset\mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Рассмотрим подмодуль $V_{2\pi_1}$. Пусть $e_1,\dots,e_n,e_{-1},\dots,e_{-n}$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^{2n}$ (такой, что $\omega(e_i,e_{-i})=1$). Старший вектор модуля $V_{2\pi_1}$ равен

$$\varphi = \sum_{i=2}^{n} e_1\wedge e_i\otimes(E_{1,i}-E_{n+i,n+1}),$$

где $E_{a,b}$ — матрица с единицей на месте (a,b) и нулями на остальных местах. Пусть $x = e_{-1}\wedge e_{-2}$, $y = e_2\wedge e_3$ и $z = e_{-1}\wedge e_{-3}$. Тогда, $(\varphi(x)y,z)+(\varphi(y)z,x)+(\varphi(z)x,y) = 2$. Таким образом, $\varphi\notin\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ и $V_{\pi_2}\not\subset\mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Подалгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(n,\mathbb{C})\subset\mathfrak{so}(V_{2\pi_1})$. Имеем

$$V\otimes\mathfrak{h} = V\oplus V_{2\pi_1+\pi_2}\oplus V_{\pi_1+\pi_3}\oplus V_{\pi_2}.$$

Подмодуль $V_{2\pi_1+\pi_2}\subset V\otimes\mathfrak{h}$ — старший, и нам остается рассмотреть подмодули $V_{\pi_1+\pi_3}$ и V_{π_2}. $\mathfrak{h}$-модуль $\odot^2\mathfrak{h}\subset\Lambda^2V\otimes\mathfrak{h}$ содержит подмодуль V_{π_4}, а $V_{\pi_4}\otimes V$

содержит $V_{\pi_1+\pi_3}$ и не содержит никакой из подмодулей $V_{2\pi_1+\pi_2}$ и V_{π_2}. Поэтому $V_{\pi_1+\pi_3} \not\subset \mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Рассмотрим подмодуль V_{π_2}. Пусть $e_1, \dots, e_m, e_{-1}, \dots, e_{-m}$ и $e_1, \dots, e_m, e_{-1}, \dots, e_{-m}, e_0$ — стандартные базисы пространств $\mathbb{C}^{2m}$ и $\mathbb{C}^{2m+1}$ такие, что $g(e_i, e_{-i}) = 1$ и $g(e_0, e_0) = 1$. Старший вектор модуля V_{π_2} равен

$$\varphi = \sum_{i=3}^{m} e_1 \odot e_i \otimes (E_{2,i} - E_{m+i,m+2}) - \sum_{i=3}^{m} e_2 \odot e_i \otimes (E_{1,i} - E_{m+i,m+1}),$$

если $n = 2m$, и

$$\begin{aligned}\varphi = e_1 \odot e_0 \otimes (E_{2,2m+1} - E_{2m+1,m+2}) - e_2 \odot e_0 \otimes (E_{1,2m+1} - E_{2m+1,m+1}) \\ + \sum_{i=3}^{m} e_1 \odot e_i \otimes (E_{2,i} - E_{m+i,m+2}) - \sum_{i=3}^{m} e_2 \odot e_i \otimes (E_{1,i} - E_{m+i,m+1}),\end{aligned}$$

если $n = 2m + 1$. Рассматривая в обоих случаях $x = e_{-1} \odot e_{-3}$, $y = e_1 \odot e_3$ и $z = e_{-1} \odot e_{-2}$, получаем

$$(\varphi(x)y, z) + (\varphi(y)z, x) + (\varphi(z)x, y) = 1.$$

Таким образом, $\varphi \notin \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ и $V_{\pi_2} \not\subset \mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Подалгебра $\mathfrak{sl}(8, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(\Lambda^4\mathbb{C}^8)$. Имеем

$$V \otimes \mathfrak{g} = V \oplus V_{\pi_1+\pi_4+\pi_7} \oplus V_{\pi_1+\pi_3} \oplus V_{\pi_5+\pi_7}.$$

Подмодуль $V_{\pi_1+\pi_4+\pi_7} \subset V \otimes \mathfrak{h}$ — старший, и нам остается рассмотреть подмодули $V_{\pi_1+\pi_3}$ и $V_{\pi_5+\pi_7}$. Пусть $e_1, \dots, e_8$ — стандартный базис пространства $\mathbb{C}^8$. Метрика на $V = \Lambda^4\mathbb{C}^8$ определяется внешним произведением

$$(\omega, \theta) = \omega \wedge \theta = \theta \wedge \omega \in \Lambda^8\mathbb{C}^8 \simeq \mathbb{C},$$

мы предполагаем, что

$$(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, e_5 \wedge e_6 \wedge e_7 \wedge e_8) = 1.$$

Старший вектор подмодуля $V_{\pi_1+\pi_3} \subset V \otimes \mathfrak{h}$ равен

$$\varphi = \sum_{i=1}^{5} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_i \otimes E_{1,i}.$$

Рассмотрев

$$x = e_5 \wedge e_6 \wedge e_7 \wedge e_8,\ y = e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6,\ z = e_3 \wedge e_4 \wedge e_7 \wedge e_8,$$

получим

$$(\varphi(x)y, z) + (\varphi(y)z, x) + (\varphi(z)x, y) = -1.$$

Следовательно, $V_{\pi_1+\pi_3} \not\subset \mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Из симметричности диаграммы Дынкина для $\mathfrak{sl}(8, \mathbb{C})$ следует, что $V_{\pi_5+\pi_7} \not\subset \mathcal{P}(\mathfrak{h})$.

Подалгебра $\mathfrak{h} = F_4^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{so}(26, \mathbb{C})$. Воспользуемся следующим описанием этой подалгебры из [9]. Алгебра Ли $F_4^{\mathbb{C}}$ допускает следующую $\mathbb{Z}_2$-градуировку:

$$F_4^{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(9, \mathbb{C}) \oplus (\Delta_9)^{\mathbb{C}}.$$

Пространство представления $\mathbb{C}^{26}$ разложимо в прямую сумму

$$\mathbb{C}^{26} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^9 \oplus (\Delta_9)^{\mathbb{C}}.$$

Элементы подалгебры $\mathfrak{so}(9, \mathbb{C}) \subset F_4^{\mathbb{C}}$ сохраняют это разложение, обнуляют $\mathbb{C}$ и действуют естественным образом в $\mathbb{C}^9$ и $(\Delta_9)^{\mathbb{C}}$. Элементы $(\Delta_9)^{\mathbb{C}} \subset F_4^{\mathbb{C}}$ переводят $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^9$ в $(\Delta_9)^{\mathbb{C}}$ (умножения на константы и умножение Клиффорда) и переводят $(\Delta_9)^{\mathbb{C}}$ в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^9$ (это отображение определяется сопряжением зарядов и естественным отображением, сопоставляющим вектор паре спиноров). Пусть $P \in \mathcal{P}(F_4^{\mathbb{C}})$. Разложим это отображение в сумму $P = \varphi + \psi$, где φ и ψ соответственно принимают значения в $\mathfrak{so}(9, \mathbb{C})$ и в $(\Delta_9)^{\mathbb{C}}$. Условие $P \in \mathcal{P}(F_4^{\mathbb{C}})$ влечет

$$\varphi|_{\mathbb{C}^9} \in \mathcal{P}(\mathfrak{so}(9, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(9, \mathbb{C})), \quad \varphi|_{(\Delta_9)^{\mathbb{C}}} \in \mathcal{P}(\mathfrak{so}(9, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}((\Delta_9)^{\mathbb{C}})),$$
$$\varphi(a) = 0, \quad (\psi(a)x, s) + (\psi(x)s, a) = 0$$
$$(\psi(x)y - \psi(y)x, s) + (\varphi(s)x, y) = 0, \quad (\psi(r)s - \psi(s)r, x) + (\varphi(x)r, s) = 0$$

для всех $a \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{C}^9$ и $s, r \in (\Delta_9)^{\mathbb{C}}$.

Будем обозначать $\mathfrak{h}$-модули через $V_\lambda^{\mathfrak{h}}$, а $\mathfrak{so}(9, \mathbb{C})$-модули через V_λ. Имеем

$$V \otimes \mathfrak{h} = V \oplus V_{\pi_1+\pi_4}^{\mathfrak{h}} \oplus V_{\pi_2}^{\mathfrak{h}}.$$

Подмодуль $V^{\mathfrak{h}}_{\pi_1+\pi_4} \subset V \otimes \mathfrak{h}$ — старший, и остается рассмотреть модуль $V^{\mathfrak{h}}_{\pi_2}$. Заметим, что $\dim V^{\mathfrak{h}}_{\pi_2} = 273$. Только что рассмотренные уравнения показывают, что P однозначно определяется элементом $\psi|_{\mathbb{C}^9 \oplus (\Delta_9)^{\mathbb{C}}}$. В частности,

$$\psi|_{(\Delta_9)^{\mathbb{C}}} \in (\Delta_9)^{\mathbb{C}} \otimes (\Delta_9)^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \oplus V_{2\pi_4} \oplus V_{\pi_3} \oplus V_{\pi_2} \oplus V_{\pi_1}$$

определяет

$$\varphi|_{\mathbb{C}^9} \in \mathcal{P}(\mathfrak{so}(9,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(9,\mathbb{C})) = V_{\pi_1} \oplus V_{\pi_1+\pi_2}.$$

Следовательно,

$$\varphi|_{\mathbb{C}^9} \in V_{\pi_1} = \mathcal{P}_1(\mathfrak{so}(9,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(9,\mathbb{C})).$$

Далее,

$$\psi|_{\mathbb{C}^9} \in \mathbb{C}^9 \otimes (\Delta_9)^{\mathbb{C}} = V_{\pi_4} \oplus V_{\pi_1+\pi_4}$$

определяет $\varphi|_{(\Delta_9)^{\mathbb{C}}} \in \mathcal{P}(\mathfrak{so}(9,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}((\Delta_9)^{\mathbb{C}}) = V_{\pi_4}$. Ясно, что пространство $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$ определяется подпространствами $\mathbb{C} \oplus V_{\pi_1} \subset (\Delta_9)^{\mathbb{C}} \otimes (\Delta_9)^{\mathbb{C}}$ и $V_{\pi_4} \subset \mathbb{C}^9 \otimes (\Delta_9)^{\mathbb{C}}$ (напомним, что $\mathbb{C} \oplus V_{\pi_1} \oplus V_{\pi_4} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^9 \oplus (\Delta_9)^{\mathbb{C}} = V$). Размерности $\mathfrak{so}(9,\mathbb{C})$-модулей $V_{2\pi_4}$, V_{π_3}, V_{π_2}, V_{π_1} и $V_{\pi_1+\pi_4}$ соответственно равны 126, 84, 206, 9 и 128. Число $\dim V^{\mathfrak{h}}_{\pi_2} = 273$ нельзя получить в виде суммы некоторых из этих чисел, поэтому $V^{\mathfrak{h}}_{\pi_2} \not\subset \mathcal{P}(\mathfrak{h})$. □

1.5. О классификации слабых алгебр Берже

Одним из ключевых моментов классификации алгебр голономии лоренцевых многообразий является результат Лайстнера о классификации неприводимых слабых алгебр Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Лайстнер классифицировал все такие подалгебры, и оказалось, что полученный список совпадает со списком неприводимых алгебр голономии римановых многообразий. Возникает естественная проблема получить простое прямое доказательство этого факта. В [155] мы даем такое доказательство для случая полупростых, не являющихся простыми, алгебр Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$.

В работе [172], первый вариант которой был опубликован на сайте www.arxiv.org 25 апреля 2003 года, была доказана теорема Лайстнера 1.3.3

для $n \leq 9$. Для этого были перечислены неприводимые подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ для $n \leq 9$, таблица 1.5.1. Второй столбец таблицы содержит алгебры голономии неприводимых римановых многообразий. В третьем столбце содержатся алгебры, не являющиеся алгебрами голономии римановых многообразий.

Для полупростой компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ через $\pi^{\mathbb{K}}_{\Lambda_1,\dots\Lambda_l}(\mathfrak{h})$ обозначаем образ представления $\pi^{\mathbb{K}}_{\Lambda_1,\dots\Lambda_l} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{so}(n)$, которое однозначно определяется комплексным представлением $\rho_{\Lambda_1,\dots\Lambda_l} : \mathfrak{h}(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(U)$, задаваемым числовыми отметками $\Lambda_1, \dots\Lambda_l$ на схеме Дынкина (здесь $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ — комплексификация алгебры $\mathfrak{h}$, U — некоторое комплексное линейное пространство), $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{H}$ или $\mathbb{C}$, если для $\rho_{\Lambda_1,\dots\Lambda_l}$ является соответственно вещественным, кватернионным или комплексным. Символ $\mathfrak{t}$ обозначаем одномерный центр.

Таблица 1.5.1. Неприводимые подалгебры в $\mathfrak{so}(n)$ ($n \leq 9$).

n	неприводимые алгебры голономии n-мерных римановых многообразий	другие неприводимые подалгебры в $\mathfrak{so}(n)$
$n = 1$		
$n = 2$	$\mathfrak{so}(2)$	
$n = 3$	$\pi^{\mathbb{R}}_{2}(\mathfrak{so}(3))$	
$n = 4$	$\pi^{\mathbb{R}}_{1,1}(\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3))$, $\pi^{\mathbb{C}}_{1}(\mathfrak{su}(2))$, $\pi^{\mathbb{C}}_{1}(\mathfrak{su}(2)) \oplus \mathfrak{t}$	
$n = 5$	$\pi^{\mathbb{R}}_{1,0}(\mathfrak{so}(5))$, $\pi^{\mathbb{R}}_{4}(\mathfrak{so}(3))$	
$n = 6$	$\pi^{\mathbb{R}}_{1,0,0}(\mathfrak{so}(6))$, $\pi^{\mathbb{C}}_{1,0}(\mathfrak{su}(3))$, $\pi^{\mathbb{C}}_{1,0}(\mathfrak{su}(3)) \oplus \mathfrak{t}$	
$n = 7$	$\pi^{\mathbb{R}}_{1,0,0}(\mathfrak{so}(7))$, $\pi^{\mathbb{R}}_{1,0}(\mathfrak{g}_2)$	$\pi^{\mathbb{R}}_{6}(\mathfrak{so}(3))$
$n = 8$	$\pi^{\mathbb{R}}_{1,0,0,0}(\mathfrak{so}(8))$, $\pi^{\mathbb{C}}_{1,0}(\mathfrak{su}(4))$, $\pi^{\mathbb{C}}_{1,0}(\mathfrak{su}(4)) \oplus \mathfrak{t}$, $\pi^{\mathbb{H}}_{1,0}(\mathfrak{sp}(2))$, $\pi^{\mathbb{R}}_{1,0,1}(\mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(1))$, $\pi^{\mathbb{R}}_{0,0,1}(\mathfrak{so}(7))$, $\pi^{\mathbb{R}}_{1,3}(\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3))$, $\pi^{\mathbb{R}}_{1,1}(\mathfrak{su}(3))$	$\pi^{\mathbb{C}}_{3}(\mathfrak{so}(3))$, $\pi^{\mathbb{C}}_{3}(\mathfrak{so}(3)) \oplus \mathfrak{t}$, $\pi^{\mathbb{H}}_{1,0}(\mathfrak{sp}(2)) \oplus \mathfrak{t}$
$n = 9$	$\pi^{\mathbb{R}}_{1,0,0,0}(\mathfrak{so}(9))$, $\pi^{\mathbb{R}}_{2,2}(\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3))$	$\pi^{\mathbb{R}}_{8}(\mathfrak{so}(3))$

Для алгебр, на являющихся алгебрами голономии римановых многообразий, с компьютерной программы были найдены пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ как решения соответствующих систем линейных уравнений. Оказалось, что

$$\mathcal{P}(\pi^{\mathbb{H}}_{1,0}(\mathfrak{sp}(2))) = \mathcal{P}(\pi^{\mathbb{H}}_{1,0}(\mathfrak{sp}(2)) \oplus \mathfrak{t}),$$

т.е. $L(\mathcal{P}(\pi^{\mathbb{H}}_{1,0}(\mathfrak{sp}(2)) \oplus \mathfrak{t})) = \pi^{\mathbb{H}}_{1,0}(\mathfrak{sp}(2))$ и $\mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{t}$ не является слабой алгеброй

Берже. Для остальных алгебр третьего столбца таблицы имеем $\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = 0$. Значит алгебры Ли из третьего столбца таблицы 1.5.1 не являются слабыми алгебрами Берже.

Оказалось, что к этому времени Лайстнер уже доказал теорему 1.3.3 в [111] в случае если n — четно, и представление $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — комплексного типа, т.е. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}(\frac{n}{2})$. В этом случае $\mathcal{P}(\mathfrak{h}) \simeq (\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C})^{(1)}$, где $(\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C})^{(1)}$ — первое продолжение подалгебры $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{gl}(\frac{n}{2}, \mathbb{C})$. Используя этот факт и классификацию неприводимых представлений с нетривиальными продолжениями, Лайстнер доказал, что каждая слабая алгебра Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}(\frac{n}{2})$ является алгеброй голономии некоторого риманова многообразия.

Случай подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ вещественного типа (т.е. некомплексного типа) является куда более сложным. В этом случае Лайстнер рассмотрел комплексифицированное представление $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, являющееся неприводимым. Используя классификацию неприводимых представлений комплексных полупростых алгебр Ли, он нашел критерий в терминах весов этих представлений того, что представление $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ является слабой алгеброй Берже. Далее Лайстнер рассмотрел, случай за случаем, простые алгебры Ли $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ [112], а затем и полупростые алгебры (проблема сводится к случаю полупростых алгебр Ли вида $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k}$ где $\mathfrak{k}$ — простая, и снова различные возможности для $\mathfrak{k}$ были рассмотрены) [113]. Полное доказательство опубликовано в [116].

Мы рассматриваем случай полупростых, не являющихся простыми, неприводимых подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ с неприводимой комплексификацией $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$. Простым способом мы показываем, что достаточно рассматривать случай $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})\oplus\mathfrak{k}$, где $\mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$ — простая неприводимая подалгебра, а пространством представления является тензорное произведение $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2m}$. В этом случае пространство $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ совпадает с $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{g}_1$, где $\mathfrak{g}_1$ — первое продолжение Танака неположительно градуированной алгебры Ли

$$\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0,$$

где $\mathfrak{g}_{-2} = \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{C}^{2m}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{2m}}$, а градуировка определяется элементом $-\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{2m}}$. Мы показываем, что если $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ — нетривиально, то $\mathfrak{g}_1$ изоморфно $\mathbb{C}^{2m}$, второе продолжение Танака $\mathfrak{g}_2$ изоморфно $\mathbb{C}$, и $\mathfrak{g}_3 = 0$. Тогда полное продолжение Танака определяет простую $|2|$-градуированную комплексную алгебру Ли

$$\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

Хорошо известно, что имеет место взаимно однозначное соответствие между односвязными неразложимыми симметрическими римановыми многообразиями (M, g) и простыми $\mathbb{Z}_2$-градуированными алгебрами Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}^n$ такими, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Если симметрическое пространство является кватернионнокэлеровым, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{f} \subset \mathfrak{so}(4k)$, где $n = 4k$ и $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{sp}(k)$. Комплексификация алгебры $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}^{4k}$ совпадает с $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k}) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2k})$, где $\mathfrak{k} = \mathfrak{f} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{sp}(2k, \mathbb{C})$. Пусть e_1, e_2 — стандартный базис пространства $\mathbb{C}^2$, и пусть

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Получаем следующую $\mathbb{Z}$-градуировку алгебры Ли $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$:

$$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 = \mathbb{C}F \oplus e_2 \otimes \mathbb{C}^{2k} \oplus (\mathfrak{k} \oplus \mathbb{C}H) \oplus e_1 \otimes \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}E.$$

Обратно, каждая такая простая $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли определяет, с точностью до двойственности, односвязное кватернионнокэлерово симметрическое пространство. В этом и заключается доказательство.

1.5.1. Продолжения Танака

Рассмотрим $\mathbb{Z}$-градуированную алгебру Ли вида

$$\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0.$$

Для $k \geq 1$, k-ое продолжение Танака определяется с помощью индукции,

$$\mathfrak{g}_k = \{u \in (\mathfrak{g}_{-2}^* \otimes \mathfrak{g}_{k-2}) \oplus (\mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_{k-1})| \\ u([X,Y]) = [u(X),Y] + [X,u(Y)],\ X,Y \in \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1}\}. \quad (1.22)$$

Пусть $k \geq 1$ и $l \geq 0$. Для $u \in \mathfrak{g}_k$ и $v \in \mathfrak{g}_l$ определим скобку Ли $[u,v] \in \mathfrak{g}_{k+l}$ условием

$$[u,v]X = [[u,X],v] + [u,[v,X]], \quad X \in \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1};$$

скобка Ли элементов $u \in \mathfrak{g}_k$ и $X \in \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ определена равенством $[u,X] = Xu$. Тем самым мы получаем структуру алгебры Ли на векторном пространстве $\oplus_{k=-2}^{\infty}\mathfrak{g}_k$.

Для $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$, $m \geq 2$ рассмотрим подалгебру

$$\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0, \quad \mathfrak{g}_{-2} = \mathbb{C}F, \quad \mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{C}^{2m}, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{C}H$$

с ненулевыми скобками Ли

$$[X,Y] = \Omega(X,Y)F, \quad [A,X] = AX, \quad [A,B] = [A,B]_{\mathfrak{k}}, \\ [H,X] = -X, \quad [H,F] = -2F, \quad (1.23)$$

где $X,Y \in \mathbb{C}^{2m}$, $A,B \in \mathfrak{k}$, а Ω — симплектическая форма на $\mathbb{C}^{2m}$.

Лемма 1.5.1. *Имеем*

$$\mathfrak{g}_1 = \{\varphi \in \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_0 | \exists A \in \mathfrak{g}_{-1},\, \varphi(X)Y - \varphi(Y)X = \Omega(X,Y)A,\, X,Y \in \mathfrak{g}_{-1}\}.$$

Если $\mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$ *— собственная неприводимая подалгебра и* $\mathfrak{g}_1 \neq 0$, *то* $\mathfrak{g}_1 \simeq \mathbb{C}^{2m}$, $\mathfrak{g}_2 \simeq \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_3 = 0$, *а алгебра Ли*

$$\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$$

— простая.

Доказательство. Пусть $u = \psi + \varphi$, где $\psi \in \mathfrak{g}_{-2}^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}$, и $\varphi \in \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_0$. Условие $u \in \mathfrak{g}_1$ равносильно уравнениям

$$[\varphi(X), F] = \Omega(\psi(F), Y)F, \quad \varphi(X)Y - \varphi(Y)X = \Omega(X,Y)\psi(F).$$

Первое утверждение леммы состоит в том, что второе уравнение влечет первое.

Будем обозначать $\mathbb{C}^{2m}$ через V. Предположим сначала, что $\mathfrak{k} = \mathfrak{sp}(V)$. Найдем $\mathfrak{g}_1$. Имеем следующие изоморфизмы $\mathfrak{sp}(V)$-модулей: $\mathfrak{g}^*_{-2} \otimes \mathfrak{g}_{-1} \simeq V$ и

$$\mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_0 \simeq V \otimes (\mathfrak{sp}(V) \oplus \mathbb{C}) = V \oplus (V \oplus V_{3\pi_1} \oplus V_{\pi_1+\pi_2}),$$

где V_Λ обозначает неприводимый $\mathfrak{sp}(V)$-модуль со старшим весом Λ. По определению, пересечение $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_0$ совпадает с

$$(\mathfrak{sp}(V) \oplus \mathbb{C}H)^{(1)} = (\mathfrak{sp}(V))^{(1)} = \odot^3 V \simeq V_{3\pi_1}.$$

Ясно, что пересечение $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}^*_{-2} \otimes \mathfrak{g}_{-1}$ — тривиально. Следовательно, если $\mathfrak{g}_1$ отлично от $\mathfrak{sp}(V)^{(1)}$, то $\mathfrak{g}_1$ содержит подмодуль, изоморфный V. Всякое $\mathfrak{sp}(V)$-эквивариантное отображение из V в $(\mathfrak{g}^*_{-2} \otimes \mathfrak{g}_{-1}) \oplus (\mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_0)$ имеет вид

$$Z \mapsto \psi^Z + \varphi^Z, \quad \psi^Z(F) = aZ, \quad \varphi^Z(Y) = b\Omega(Z,Y)H + cZ \odot Y,$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, а элемент $Z \odot Y \in \mathfrak{sp}(V)$ определен равенством

$$(Z \odot Y)X = \Omega(Z,X)Y + \Omega(Y,X)Z.$$

Второе уравнение для $\mathfrak{g}_1$ принимает вид

$$-b\Omega(Z,X)Y + b\Omega(Z,Y)X + c(\Omega(Y,Z)X - \Omega(X,Z)Y + 2\Omega(Y,X)Z) = a\Omega(X,Y)Z.$$

Это уравнение должно выполняться для всех $X, Y, Z \in V$, и оно эквивалентно равенствам $b = -c = -\frac{1}{2}a$ (так как $\dim V \geq 4$). Второе уравнение для $\mathfrak{g}_1$ имеет вид

$$-2b\Omega(Z,Y) = a\Omega(Z,Y)$$

и следует из первого. Таким образом, ортогональное дополнение к $(\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C}))^{(1)}$ в $\mathfrak{g}_1$ изоморфно V, и изоморфизм имеет вид

$$Z \in V \mapsto \psi^Z + \varphi^Z, \quad \psi^Z(F) = 2Z, \quad \varphi^Z(Y) = -\Omega(Z,Y)H + Z \odot Y, \quad Y \in V.$$

Пусть $\mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{sp}(V)$ — собственная неприводимая подалгебра. Ясно, что

$$\mathfrak{g}_1 = ((\mathfrak{g}^*_{-2} \otimes \mathfrak{g}_{-1}) \oplus (\mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_0)) \cap (\mathfrak{sp}(V) \oplus \mathbb{C}H)_1,$$

и $\mathfrak{h}^{(1)} = (\mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_0) \cap \mathfrak{sp}(V)^{(1)}$. Известно, что $\mathfrak{h}^{(1)} = 0$. Следовательно, если $\mathfrak{g}_1 \neq 0$, то $\mathfrak{g}_1$ изоморфно V и диагонально вложено в $V \oplus \mathfrak{sp}(V)^{(1)}$.

Рассмотрим полное продолжение Танака $\mathfrak{g} = \oplus_{i=-2}^{\infty} \mathfrak{g}_i$. Пусть $\mathfrak{g}^0 = \oplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}$. Мы утверждаем, что $\mathfrak{g}$ — примитивная $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли, т.е. $\mathfrak{g}^0 \subset \mathfrak{g}$ — максимальная градуированная подалгебра, и $\mathfrak{g}^0$ не содержит никакие градуированные идеалы в $\mathfrak{g}$ кроме $\{0\}$. В самом деле, предположим, что существует подалгебра $\tilde{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}$ такая, что $\mathfrak{g}^0 \subsetneq \tilde{\mathfrak{g}}$. Тогда $aF + X \in \tilde{\mathfrak{g}}$ для некоторых $a \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}_{-1}$. Если $a \neq 0$, то, рассматривая $u \in \mathfrak{g}_1$, получим $0 \neq u(F) \in \tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{g}_{-1}$, т.е. можно предполагать, что существует ненулевой $X \in \mathfrak{g}_{-1}$ такой, что $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Так как $\mathfrak{g}_0$ действует на $\mathfrak{g}_{-1}$ неприводимо, имеем $\mathfrak{g}_{-1} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$. Окончательно, $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}] = \mathfrak{g}_{-2}$, т.е. $\mathfrak{g}_{-2} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ и $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$. Предположим теперь, что $\tilde{\mathfrak{g}} = \oplus_{i=0}^{\infty} \tilde{\mathfrak{g}}_i \subset \mathfrak{g}^0$ — градуированный идеал. Для $X \in \mathfrak{g}_{-1}$и $\xi \in \tilde{\mathfrak{g}}_0$ имеем $[\xi, X] \in \mathfrak{g}_{-1}$. С другой стороны, $[\xi, X] \in \tilde{\mathfrak{g}}$, и получаем $[\xi, X] = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}_{-1}$. Это влечет $\tilde{\mathfrak{g}}_0 = 0$. Таким же образом можно показать, что $\tilde{\mathfrak{g}}_k = 0$ для всех $k \geq 2$. Итак, $\mathfrak{g}$ — примитивная $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли. Если $\mathfrak{g}$ — бесконечномерна, то из теоремы 6.1 из [77] следует, что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(V) \oplus \mathbb{C}H$, это дает противоречие, поскольку мы предполагали, что $\mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{sp}(V)$ — собственная подалгебра. Таким образом, $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли. Так как элемент $H \in \mathfrak{g}_0$ определяет $\mathbb{Z}$-градуировку алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то каждый идеал $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ — градуированный. Как в утверждении выше, можно показать, что либо $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}$, либо $\mathfrak{t} = 0$, т.е. $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли. Форма Киллинга $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры Ли обладает свойством $b(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l) = 0$ для $k \neq -l$. Это показывает, что $\mathfrak{g}_2 \simeq \mathbb{C}$ и $\mathfrak{g}_3 = 0$. Лемма доказана. □

1.5.2. Полупростые, не являющиеся простыми, слабые алгебры Берже

Теорема 1.5.1. *Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — полупростая, не являющаяся простой, неприводимая подалгебра вещественного типа. Если $\mathcal{P}(\mathfrak{h}) \neq 0$, то $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ является алгеброй голономии симметрического риманова пространства.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что комплексификация $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}\subset\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ является неприводимой. Так как алгебра Ли $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}$ — полупростая и не является простой, то она может быть разложена в прямую сумму двух своих идеалов, $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}=\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{h}_2$. Представление $\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{h}_2$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ должно иметь форму тензорного произведения $\mathbb{C}^n=\mathbb{C}^{n_1}\otimes\mathbb{C}^{n_2}$, где $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{gl}(n_1,\mathbb{C})$, $\mathfrak{h}_2\subset\mathfrak{gl}(n_2,\mathbb{C})$ — неприводимые подалгебры. Так как $\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{h}_2\subset\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, то либо $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{so}(n_1,\mathbb{C})$, $\mathfrak{h}_2\subset\mathfrak{so}(n_2,\mathbb{C})$, $n_1,n_2\geq 3$, либо $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{sp}(n_1,\mathbb{C})$, $\mathfrak{h}_2\subset\mathfrak{sp}(n_2,\mathbb{C})$, $n_1,n_2\geq 2$. В [166] доказано простым способом, что $\mathcal{P}(\mathfrak{so}(n_1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(n_2,\mathbb{C}))\simeq\mathbb{C}^n$, и, если $n_1,n_2\geq 3$, то $\mathcal{P}(\mathfrak{sp}(n_1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sp}(n_2,\mathbb{C}))\simeq\mathbb{C}^n$. Это показывает, что для собственных неприводимых подалгебр $\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{h}_2$ алгебр Ли $\mathfrak{so}(n_1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(n_2,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{sp}(n_1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sp}(n_2,\mathbb{C})$ с $n_1,n_2\geq 3$ имеем $\mathcal{P}(\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{h}_2)=0$. Заметим, что алгебры голономии симметрических римановых пространств

$$\mathrm{SO}(n_1+n_2)/(\mathrm{SO}(n_1)\times\mathrm{SO}(n_2)),\ n_1,n_2\geq 3,$$

$$\mathrm{Sp}(n_1+n_2)/(\mathrm{Sp}(n_1)\times\mathrm{Sp}(n_2)),\ n_1,n_2\geq 1$$

равны соответственно $\mathfrak{so}(n_1)\oplus\mathfrak{so}(n_2)$ и $\mathfrak{sp}(n_1)\oplus\mathfrak{sp}(n_2)$ [25].

Остается рассмотреть случай $n_1=2$, $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{h}_2\subsetneq\mathfrak{sp}(n_2,\mathbb{C})$. Пусть $\mathfrak{k}=\mathfrak{h}_2$. Из предложения 1.5.1, которое мы сейчас докажем и леммы 1.5.1 следует, что $\mathfrak{h}=\mathfrak{sp}(1)\oplus\mathfrak{f}\subset\mathfrak{sp}(1)\oplus\mathfrak{sp}(k)\subset\mathfrak{so}(4k)$ — алгебра голономии некоторого кватернионнокэлерова симметрического пространства. Теорема верна. ☐

Предложение 1.5.1. *Пусть* $\mathfrak{k}\subset\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$ *— неприводимая подалгебра,* $m\geq 2$. *Тогда*

$$\mathcal{P}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{k})\simeq\mathbb{C}^2\otimes\mathfrak{g}_1,$$

где $\mathfrak{g}_1$ *— первое продолжение Танака алгебры Ли*

$$\mathfrak{g}_{-2}\oplus\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0=\mathbb{C}F\oplus\mathbb{C}^{2m}\oplus(\mathfrak{k}\oplus\mathbb{C}H).$$

Доказательство. Пусть $V=\mathbb{C}^{2m}$, а Ω, ω — симплектические формы на V и $\mathbb{C}^2$. Пусть e_1,e_2 — базис пространства $\mathbb{C}^2$ такой, что $\omega(e_1,e_2)=1$. Пусть F,H,E — базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, как выше. Для линейного отображения

$$P:\mathbb{C}^2\otimes V\to\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{k}$$

и $X\in V$ будем писать

$$P(e_i\otimes X)=\alpha(e_i\otimes X)E+\beta(e_i\otimes X)F+\gamma(e_i\otimes X)H+T(e_i\otimes X),$$
$$T(e_i\otimes X)\in\mathfrak{k},\quad i=1,2.\quad(1.24)$$

Рассмотрим условие $P\in\mathcal{P}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{k})$. Пусть $X,Y,Z\in V$. Рассматривая векторы $e_1\otimes X$, $e_1\otimes Y$, $e_1\otimes Z$, получим

$$\beta(e_1\otimes X)\Omega(Y,Z)+\beta(e_1\otimes Y)\Omega(Z,X)+\beta(e_1\otimes Z)\Omega(X,Y)=0.$$

Так как $\dim V\geq 4$, то это влечет $\beta(e_1\otimes X)=0$ для всех $X\in V$. Аналогично, рассматривая векторы $e_2\otimes X$, $e_2\otimes Y$, $e_2\otimes Z$, получим $\alpha(e_2\otimes X)=0$.

Взяв векторы $e_1\otimes X$, $e_1\otimes Y$, $e_2\otimes Z$, установим

$$\gamma(e_1\otimes X)\Omega(Y,Z)+\Omega(T(e_1\otimes X)Y,Z)-\gamma(e_1\otimes Y)\Omega(X,Z)-\Omega(T(e_1\otimes Y)X,Z)$$
$$-\beta(e_2\otimes Z)\Omega(Y,X)=0.$$

Пусть $A\in V$ — двойственный вектор к $\beta|_{e_2\otimes V}$, т.е. $\beta(e_2\otimes Z)=\Omega(A,Z)$ для всех $Z\in V$. Тогда,

$$\gamma(e_1\otimes X)Y+T(e_1\otimes X)Y-\gamma(e_1\otimes Y)X-T(e_1\otimes Y)X+\Omega(X,Y)A=0.$$

Последнее уравнение на P может быть получено тем же путем и оно имеет вид

$$\gamma(e_2\otimes X)Y-T(e_2\otimes X)Y-\gamma(e_2\otimes Y)X+T(e_2\otimes Y)X+\Omega(X,Y)B=0,$$

где вектор $B\in V$ определен равенством $\beta(e_1\otimes Z)=\Omega(B,Z)$, $Z\in V$. Итак, $P\in\mathcal{P}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{k})$ тогда и только тогда, когда отображения

$$\gamma(e_1\otimes\cdot)H+T(e_1\otimes\cdot),\quad\gamma(e_2\otimes\cdot)H-T(e_2\otimes\cdot):V\to\mathfrak{k}\oplus\mathbb{C}H$$

принадлежат $\mathfrak{g}_1$. Таким образом,

$$\mathcal{P}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k}) \simeq \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{g}_1,$$

что представляет собой изоморфизм $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{k}$-модулей. ☐

1.5.3. Дальнейшие замечания

Остается открытая проблема получить прямое доказательство следующего факта: если для вещественного неприводимого представления $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ простой алгебры Ли $\mathfrak{h}$ имеем $\mathcal{P}(\mathfrak{h}) \neq 0$, то $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — алгебра голономии некоторого риманова многообразия. Следует рассмотреть два случая: $\mathcal{P}_0(\mathfrak{h}) \neq 0$ и $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$. Необходимо доказать, что первое условие влечет, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — алгебра голономии некоторого риманова многообразия, не являющегося локально симметрическим; второе условие влечет, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — алгебра голономии некоторого симметрического риманова многообразия. Было бы полезным получить прямое доказательство следующего утверждения:

Если связная подгруппа Ли $H \subset \mathrm{SO}(n)$, соответствующая неприводимой подалгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, не действует транзитивно на единичной сфере, то $\mathcal{P}_0(\mathfrak{h}) = 0$.

Пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ и $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ связаны соотношением

$$\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = \{S \in \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathcal{P}(\mathfrak{h}) | S(X)(Y) = -S(Y)(X)\}.$$

Рассмотрим естественное отображение

$$\tau : \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{R}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{h}), \quad \tau(X \otimes R) = R(X, \cdot) \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}).$$

Используя результаты [116] в работе [166] показано, что

$$\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathcal{R}_0(\mathfrak{h})) = \mathcal{P}_0(\mathfrak{h}) \text{ (если } n \geq 4), \quad \tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathcal{R}_1(\mathfrak{h})) = \mathcal{P}_1(\mathfrak{h}).$$

Хотелось бы получить прямое доказательство этих утверждений для произвольной неприводимой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$.

Предположим, что $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$, т.е. $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{R}^n$. Тогда существует $\mathfrak{h}$-эквивариантный линейный изоморфизм $S : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$, определенный с точностью до постоянного множителя. Следует доказать, что $S(X)(Y) = -S(Y)(X)$, т.е. $S \in \mathcal{R}_1(\mathfrak{h})$.

Пространство $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ содержится в тензорном произведении $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$. Результаты работы [166] показывают, что разложение $\mathfrak{h}$-модуля $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$ в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{h}$-модулей имеет вид

$$\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h} = k\mathbb{R}^n \oplus (\oplus_\lambda V_\lambda),$$

где k — количество ненулевых отметок на схеме Дынкина, задающей представление алгебры Ли $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}$ в пространстве $\mathbb{C}^n$, а V_λ — попарно неизоморфные неприводимые $\mathfrak{h}$-модули, которые неизоморфны $\mathbb{R}^n$. Если $\mathcal{P}_0(\mathfrak{h}) \neq 0$, то это пространство совпадает со старшей неприводимой компонентой в $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$.

Пространство $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ содержится в $\odot^2\mathfrak{h}$ [3]. Если $\mathcal{R}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$, то это пространство натянуто на отображение $\mathrm{id}_\mathfrak{h} \in \odot^2\mathfrak{h} \subset \wedge^2\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$. Заметим, что $\mathrm{id}_\mathfrak{h}(X,Y) = \mathrm{pr}_\mathfrak{h}(X \wedge Y)$. Следовательно, если $\mathcal{R}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$, то

$$\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) = \tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathrm{id}_\mathfrak{h}) = \{\mathrm{pr}_\mathfrak{h}(X \wedge \cdot) | X \in \mathbb{R}^n\}.$$

Но совершенно неясно, почему если $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$, то это пространство должно совпадать с $\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathrm{id}_\mathfrak{h})$ (это утверждение влекло бы $\mathcal{R}_1(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{R}$).

Прямая проверка показывает справедливость следующей леммы.

Лемма 1.5.2. *Пусть $S : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ — линейное отображение. Рассмотрим отображение*

$$T : \wedge^2\mathbb{R}^n \to \mathfrak{h}, \quad T(X,Y) = S(X)(Y) - S(Y)(X).$$

Тогда $T + T^* \in \mathcal{R}(\mathfrak{so}(n))$, где $T^* : \mathfrak{so}(n) \to \mathfrak{so}(n)$ определено равенством

$$(T^*(X,Y)Z,W) = (T(Z,W)X,Y).$$

Мы можем доказать, что условие $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$ влечет $\mathcal{R}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$ только при дополнительном условии на $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$.

Предложение 1.5.2. *Пусть* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *— неприводимое представление вещественного типа простой алгебры Ли* $\mathfrak{h}$ *такой, что* $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$. *Если неприводимое представление* $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ *задано схемой Дынкина с одной или двумя ненулевыми отметками, то* $\mathcal{R}_1(\mathfrak{h}) \neq 0$, *т.е.* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *— алгебра голономии некоторого симметрического риманова пространства.*

Доказательство. Если ненулевая отметка только одна, то кратность модуля $\mathbb{R}^n$ в тензорном произведении $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$ — единица, а именно, подмодуль в $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$, изоморфный $\mathbb{R}^n$, совпадает с $\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{h}})$, что влечет доказательство.

Предположим, что ненулевых отметок — две. Тогда кратность модуля $\mathbb{R}^n$ в тензорном произведении $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$ — два. Один из подмодулей, изоморфных $\mathbb{R}^n$, совпадает с $\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{h}})$. Ортогональное дополнение к $\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{h}})$ в $\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$ представляет собой подпространство $(\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h})_0 \subset \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$, состоящее из линейных отображений $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{h}$ с $\widetilde{\mathrm{Ric}}(\varphi) = 0$ [166]. Это пространство содержит однозначно определенный подмодуль, изоморфный $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что проекция $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$ на $\tau(\mathbb{R}^n \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{h}})$ — ненулевая. Ясно, что подпространство $W \subset \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$ элементов, обнуляемых алгеброй Ли $\mathfrak{h}$, — двумерное; оно содержит подпространство $\mathbb{R}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{h}} \subset \odot^2 \mathfrak{h} \subset \wedge^2 \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$. Так как $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{R}^n$, то существует $\mathfrak{h}$-эквивариантный изоморфизм $S : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}_1(\mathfrak{h})$, $S \in W$. Если $W \subset \wedge^2 \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$, то $S \in \mathcal{R}_1(\mathfrak{h})$. В противном случае, $W = \mathbb{R}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{R}\psi$, где $\psi \in \odot^2 \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$. Так как $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}) \not\subset (\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h})_0$, то $S \notin \mathbb{R}\psi$. Отображение $T \in \wedge^2 \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{h}$, определенное в лемме, принадлежит W, следовательно $T = c\,\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$ для некоторого ненулевого $c \in \mathbb{R}$. Далее, $\mathrm{id}^*_{\mathfrak{h}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$, и лемма влечет $\mathrm{id}_{\mathfrak{h}} \in \mathcal{R}_1(\mathfrak{h})$, т.е. $\mathcal{R}_1(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$. Это доказывает предложение. ☐

1.6. Конструкции метрик и классификационная теорема

Выше мы получили классификацию слабо неприводимых алгебр Берже, содержащихся в $\mathfrak{sim}(n)$. В этом параграфе мы покажем, что все эти алгебры могут быть реализованы как алгебры голономии лоренцевых многообразий. Этим мы завершаем классификацию алгебр голономии лоренцевых многообразий. Результаты настоящего параграфа опубликованы в [159, 171, 173, 174].

Метрики, реализующие алгебры Берже типов 1 и 2 построили Берард-Бержери и Икемакхен в [26]. Эти метрики имеют вид

$$g = 2dvdu + h + (\lambda v^2 + H_0)(du)^2,$$

где h — риманова метрика на $\mathbb{R}^n$ с алгеброй голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, а H_0 – достаточно общая функция переменных $x^1, \dots, x^n$. Если $\lambda \neq 0$, то алгебра голономии этой метрики совпадает с $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}$, если $\lambda = 0$, то алгебра голономии метрики g совпадает с $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}$.

В [171] мы приводим единую конструкцию метрик со всеми возможными алгебрами голономии. Здесь мы упростим эту конструкцию.

Лемма 1.6.1. *Для произвольной алгебры голономии* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *риманова многообразия найдется* $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ *такой, что векторное подпространство* $P(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{h}$ *порождает алгебру Ли* $\mathfrak{h}$.

Доказательство. Сначала предположим, что подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — неприводима. Если $\mathfrak{h}$ — одна из алгебр голономии $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{u}(m)$, $\mathfrak{sp}(m) \oplus \mathfrak{sp}(1)$, то в качестве P можно взять один из тензоров, описанных в пункте 1.4.2 при произвольном ненулевом фиксированном $X \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, что $P(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{h}$ порождает алгебру Ли $\mathfrak{h}$. Аналогично, если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — симметрическая алгебра Берже, то можно рассмотреть ненулевой $X \in \mathbb{R}^n$ и положить $P = R(X, \cdot)$, где R — тензор кривизны соответствующего симметрического пространства. Для $\mathfrak{su}(m)$ воспользуемся изоморфизмом $\mathcal{P}(\mathfrak{su}(m)) \simeq (\odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m)_0$ из пункта 1.4.2 и возьмем P, определяемый элементом $S \in (\odot^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes \mathbb{C}^m)_0$, который не принадлежит никакому из пространств $(\odot^2(\mathbb{C}^{m_0})^* \otimes \mathbb{C}^{m_0})_0$ для $m_0 < m$. Поступим аналогично для $\mathfrak{sp}(m)$.

Подалгебра $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$ порождается следующими матрицами [19]:

$$\begin{aligned}
&A_1 = E_{12} - E_{34}, \quad A_2 = E_{12} - E_{56}, \quad A_3 = E_{13} + E_{24}, \quad A_4 = E_{13} - E_{67},\\
&A_5 = E_{14} - E_{23}, \quad A_6 = E_{14} - E_{57}, \quad A_7 = E_{15} + E_{26}, \quad A_8 = E_{15} + E_{47},\\
&A_9 = E_{16} - E_{25}, \quad A_{10} = E_{16} + E_{37}, \quad A_{11} = E_{17} - E_{36}, \quad A_{12} = E_{17} - E_{45},\\
&A_{13} = E_{27} - E_{35}, \quad A_{14} = E_{27} + E_{46},
\end{aligned}$$

где $E_{ij} \in \mathfrak{so}(7)$ $(i < j)$ — кососимметрическая матрица такая, что $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$.

Рассмотрим линейное отображение $P \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^7, G_2)$,

$$\begin{aligned}
&P(e_1) = A_6, \quad P(e_2) = A_4 + A_5, \quad P(e_3) = A_1 + A_7, \quad P(e_4) = A_1,\\
&P(e_5) = A_4, \quad P(e_6) = -A_5 + A_6, \quad P(e_7) = A_7.
\end{aligned}$$

Используя компьютер, легко проверить, что $P \in \mathcal{P}(G_2)$, а элементы $A_1, A_4, A_5, A_6, A_7 \in G_2$ порождают алгебру Ли G_2.

Подалгебра $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$ порождается следующими матрицами [19]:

$$\begin{aligned}
&A_1 = E_{12} + E_{34}, \quad A_2 = E_{13} - E_{24}, \quad A_3 = E_{14} + E_{23}, \quad A_4 = E_{56} + E_{78},\\
&A_5 = -E_{57} + E_{68}, \quad A_6 = E_{58} + E_{67}, \quad A_7 = -E_{15} + E_{26}, \quad A_8 = E_{12} + E_{56},\\
&A_9 = E_{16} + E_{25}, \quad A_{10} = E_{37} - E_{48}, \quad A_{11} = E_{38} + E_{47}, \quad A_{12} = E_{17} + E_{28},\\
&A_{13} = E_{18} - E_{27}, \quad A_{14} = E_{35} + E_{46}, \quad A_{15} = E_{36} - E_{45}, \quad A_{16} = E_{18} + E_{36},\\
&A_{17} = E_{17} + E_{35}, \quad A_{18} = E_{26} - E_{48}, \quad A_{19} = E_{25} + E_{38}, \quad A_{20} = E_{23} + E_{67},\\
&A_{21} = E_{24} + E_{57}.
\end{aligned}$$

Линейное отображение $P \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^8, \mathfrak{spin}(7))$,

$$\begin{aligned}
&P(e_1) = 0, \quad P(e_2) = -A_{14}, \quad P(e_3) = 0, \quad P(e_4) = A_{21},\\
&P(e_5) = A_{20}, \quad P(e_6) = A_{21} - A_{18}, \quad P(e_7) = A_{15} - A_{16}, \quad P(e_8) = A_{14} - A_{17}.
\end{aligned}$$

принадлежит пространству $\mathcal{P}(\mathfrak{spin}(7))$, а элементы $A_{14}, A_{15} - A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{20}, A_{21} \in \mathfrak{spin}(7)$ порождают алгебру Ли $\mathfrak{spin}(7)$.

В случае произвольной алгебры голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ утверждение леммы следует из теоремы 1.3.2. ☐

Рассмотрим произвольную алгебру голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ риманова многообразия. Будем исходить из того, что $\mathfrak{h}$ является слабой алгеброй Берже, т.е. $L(\mathcal{P}(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}$. Первоначальная конструкция требует фиксации достаточного числа элементов $P_1, ..., P_N \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$, чьи образы порождают $\mathfrak{h}$. Только что доказанная лемма позволяет ограничиться одним $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$. Напомним, что для $\mathfrak{h}$ имеют место разложения (1.5) и (1.6). Будем предполагать, что базис $e_1, ..., e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ согласован с разложением (1.5). Пусть $m_0 = n_1 + \cdots + n_s = n - n_{s+1}$. Имеем $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(m_0)$ и $\mathfrak{h}$ не переводит в ноль никакие нетривиальные подпространства в $\mathbb{R}^{m_0}$. Заметим, что в случае алгебры Ли $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$ имеем $0 < m_0 \leq m$. Определим числа P^k_{ji} такие, что $P(e_i)e_j = P^k_{ji}e_k$. Рассмотрим на $\mathbb{R}^{n+2}$ следующую метрику:

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + 2A_i dx^i du + H \cdot (du)^2, \tag{1.25}$$

где

$$A_i = \frac{1}{3}(P^i_{jk} + P^i_{kj})x^j x^k, \tag{1.26}$$

а H — функция, которая будет зависеть от типа алгебры голономии, которую мы хотим получить.

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}$ определим числа $\varphi_i = \varphi(P(e_i))$.

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$ определим числа ψ_{ij}, $j = m+1, ..., n$ такие, что

$$\psi(P(e_i)) = -\sum_{j=m+1}^{n} \psi_{ij} e_j. \tag{1.27}$$

Теорема 1.6.1. *Алгебра голономии* $\mathfrak{g}$ *метрики* g *в точке* 0 *зависит от функции* H *следующим образом:*

H	$\mathfrak{g}$
$v^2 + \sum_{i=m_0+1}^{n}(x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}$
$\sum_{i=m_0+1}^{n}(x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}$
$2v\varphi_i x^i + \sum_{i=m_0+1}^{n}(x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}$
$2\sum_{j=m+1}^{n}\psi_{ij}x^i x^j + \sum_{i=m_0+1}^{m}(x^i)^2$	$\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$

Из теорем 1.3.4 и 1.6.1 получаем основную классификационную теорему.

Теорема 1.6.2. *Подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ является слабо неприводимой, не являющейся неприводимой, алгеброй голономии лоренцева многообразия тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной из подалгебр $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}, \mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}, \mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}, \mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi} \subset \mathfrak{sim}(n)$, где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — алгебра голономии риманова многообразия.*

Доказательство теоремы 1.6.1. Рассмотрим поле реперов (1.16). Пусть $X_p = p$ и $X_q = q$. Индексы $a, b, c...$ будут пробегать все индексы базисных векторных полей. Компоненты связности Γ^c_{ba} определяются формулой $\nabla_{X_a} X_b = \Gamma^c_{ba} X_c$. Построенные метрики — аналитические. Из доказательства теоремы 9.2 из [103] следует, что $\mathfrak{g}$ порождается элементами вида

$$\nabla_{X_{a_\alpha}} \cdots \nabla_{X_{a_1}} R(X_a, X_b)(0) \in \mathfrak{so}(T_0 M, g_0) = \mathfrak{so}(1, n+1), \quad \alpha = 0, 1, 2...,$$

где ∇ — связность Леви-Чивита, определяемая метрикой g, а R — тензор кривизны. Компоненты тензора кривизны определяются равенством

$$R(X_a, X_b) X_c = \sum_d R^d_{cab} X_d.$$

Заметим, что имеет место рекуррентная формула

$$\nabla_{a_\alpha} \cdots \nabla_{a_1} R^d_{cab} = X_{a_\alpha} \nabla_{a_{\alpha-1}} \cdots \nabla_{a_1} R^d_{cab} + [\Gamma_{a_\alpha}, \nabla_{X_{a_{\alpha-1}}} \cdots \nabla_{X_{a_1}} R(X_a, X_b)]^d_c, \tag{1.28}$$

где Γ_{a_α} обозначает оператор с матрицей $(\Gamma^a_{ba_\alpha})$. Так как мы рассматриваем метрику Волкера, то $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$.

Учитывая сказанное, нетрудно найти алгебру голономии $\mathfrak{g}$. Проведем вычисления для алгебры четвертого типы. Для других типов алгебр доказательство аналогично. Пусть $H = 2\sum_{j=m+1}^n \psi_{ij} x^i x^j + \sum_{i=m_0+1}^m (x^i)^2$. Мы должны доказать равенство $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$. Ясно, что $\nabla \partial_v = 0$, поэтому $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$.

Возможно ненулевые скобки Ли базисных векторных полей имеют вид

$$[X_i, X_j] = -F_{ij} p = 2P^j_{ik} x^k p, \quad [X_i, q] = C^p_{iq} p,$$

$$C^p_{iq}=-\frac{1}{2}\partial_i H=\begin{cases}-\sum_{j=m+1}^n\psi_{ij}x^j, & 1\leq i\leq m_0,\\ -x^i, & m_0+1\leq i\leq n,\\ -\psi_{ki}x^k, & m+1\leq i\leq n.\end{cases}$$

Используя это, можно легко найти матрицы операторов Γ_a, а именно, $\Gamma_p=0$,

$$\Gamma_k=\begin{pmatrix}0 & Y_k^t & 0\\ 0 & 0 & -Y_k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad Y_k^t=(P^k_{1i}x^i,\dots,P^k_{m_0i}x^i,0,\dots,0),$$

$$\Gamma_q=\begin{pmatrix}0 & Z^t & 0\\ 0 & \left(P^i_{jk}x^k\right) & -Z\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad Z^t=-(C^p_{1q},\dots,C^p_{nq}).$$

Достаточно вычислить следующие компоненты тензора кривизны:

$$R^k_{jiq}=P^k_{ji},\quad R^k_{jil}=0,\quad R^k_{qij}=-P^i_{jk}$$

$$R^j_{qjq}=-1,\ m_0+1\leq j\leq m,\quad R^l_{qjq}=-\psi_{jl},\ m+1\leq l\leq n.$$

Это влечет

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(n)}\left(R\left(X_i,q\right)(0)\right)=P(e_i),\quad \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^n}\left(R\left(X_i,q\right)(0)\right)=\psi(P(e_i)),$$

$$\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^n}\left(R\left(X_j,q\right)(0)\right)=-e_j,\quad m_0+1\leq j\leq m,$$

$$\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^n}\left(R\left(X_i,X_j\right)(0)\right)=P(e_j)e_i-P(e_i)e_j.$$

Получаем включение $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}\subset\mathfrak{g}$. Формула (1.28) и индукция позволяют установить обратное включение. ☐

Рассмотрим два **примера.** Из доказательство леммы 1.6.1 следует, что алгебра голономии метрики

$$g=2dvdu+\sum_{i=1}^7(dx^i)^2+2\sum_{i=1}^7A_idx^idu,$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= \tfrac{2}{3}(2x^2x^3 + x^1x^4 + 2x^2x^4 + 2x^3x^5 + x^5x^7),\\
A_2 &= \tfrac{2}{3}(-x^1x^3 - x^2x^3 - x^1x^4 + 2x^3x^6 + x^6x^7),\\
A_3 &= \tfrac{2}{3}(-x^1x^2 + (x^2)^2 - x^3x^4 - (x^4)^2 - x^1x^5 - x^2x^6),\\
A_4 &= \tfrac{2}{3}(-(x^1)^2 - x^1x^2 + (x^3)^2 + x^3x^4),\\
A_5 &= \tfrac{2}{3}(-x^1x^3 - 2x^1x^7 - x^6x^7),\\
A_6 &= \tfrac{2}{3}(-x^2x^3 - 2x^2x^7 - x^5x^7),\\
A_7 &= \tfrac{2}{3}(x^1x^5 + x^2x^6 + 2x^5x^6),
\end{aligned}$$

в точке $0 \in \mathbb{R}^9$ совпадает с $\mathfrak{g}^{2,G_2} \subset \mathfrak{so}(1,8)$. Аналогично, алгебра голономии метрики

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{8}(dx^i)^2 + 2\sum_{i=1}^{8} A_i dx^i du,$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\tfrac{4}{3}x^7x^8, & A_2 &= \tfrac{2}{3}((x^4)^2 + x^3x^5 + x^4x^6 - (x^6)^2),\\
A_3 &= -\tfrac{4}{3}x^2x^5, & A_4 &= \tfrac{2}{3}(-x^2x^4 - 2x^2x^6 - x^5x^7 + 2x^6x^8),\\
A_5 &= \tfrac{2}{3}(x^2x^3 + 2x^4x^7 + x^6x^7), & A_6 &= \tfrac{2}{3}(x^2x^4 + x^2x^6 + x^5x^7 - x^4x^8),\\
A_7 &= \tfrac{2}{3}(-x^4x^5 - 2x^5x^6 + x^1x^8), & A_8 &= \tfrac{2}{3}(-x^4x^6 + x^1x^7),
\end{aligned}$$

в точке $0 \in \mathbb{R}^{10}$ совпадает с $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{spin}(7)} \subset \mathfrak{so}(1,9)$.

Глава 2.

Применения

2.1. Уравнение Эйнштейна

В этом параграфе мы рассмотрим связь алгебр голономии и уравнения Эйнштейна. Мы найдем алгебры голономии лоренцевых многообразий Эйнштейна. Далее, мы покажем, что в случае ненулевой космологической константы, на многообразии Волкера существуют специальные координаты, позволяющие существенно упростить уравнение Эйнштейна. Будут даны примеры метрик Эйнштейна. Эта тема мотивирована работой физиков Гиббонса и Попа [72]. Приводимые результаты опубликованы в [157, 164, 165, 167].

2.1.1. Алгебры голономии лоренцевых многообразий Эйнштейна

Рассмотрим лоренцево многообразие (M, g) с алгеброй голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$. Прежде всего, в [174] была доказана следующая теорема.

Теорема 2.1.1. *Пусть* (M, g) *— локально неразложимое лоренцево многообразие Эйнштейна, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Тогда алгебра голономии многообразия* (M, g) *— типа 1 или 2. Если космологическая константа многообразия* (M, g) *не равна нулю, то алгебра голономии многообразия* (M, g) *— типа 1. Если* (M, g) *допускает локальные параллельные изотропные векторные поля, то* (M, g) *— Риччи-плоское многообразие.*

Классификацию завершают следующие две теоремы.

Теорема 2.1.2. *Пусть* (M, g) *— локально неразложимое* $n+2$*-мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если* (M, g) *— Риччи-плоское многообразие, то имеет место одно из утверждений:*

(1) *Алгебра голономии* $\mathfrak{g}$ *многообразия* (M, g) *— типа 1 и в разложении* (1.6) *для* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *по крайней мере одна подалгебра* $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ *совпадает с одной из следующих алгебр Ли:* $\mathfrak{so}(n_i)$, $\mathfrak{u}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4}) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ *или с симметрической алгеброй Берже.*

(2) *Алгебра голономии* $\mathfrak{g}$ *многообразия* (M, g) *— типа 2 и в разложении* (1.6) *для* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *каждая подалгебра* $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ *совпадает с одной из следующих алгебр Ли:* $\mathfrak{so}(n_i)$, $\mathfrak{su}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4})$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$.

Теорема 2.1.3. *Пусть* (M, g) *— локально неразложимое* $n+2$*-мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если* (M, g) *— многообразие Эйнштейна, не являющееся Риччи-плоским, то алгебра голономии* $\mathfrak{g}$ *многообразия* (M, g) *— типа 1 и в разложении* (1.6) *для* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *каждая подалгебра* $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ *совпадает с одной из следующих алгебр Ли:* $\mathfrak{so}(n_i)$, $\mathfrak{u}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4}) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ *или с симметрической алгеброй Берже. Более того,* $n_{s+1} = 0$.

Доказательство теорем 2.1.2 и 2.1.3. Зафиксируем точку $x \in M$. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра голономии многообразия (M, g) в этой точке. Отождествим (T_xM, g_x) с пространством $(\mathbb{R}^{1,n+1}, g)$. По теореме Амброза-Зингера, $\mathfrak{g}$ линейно порождается образами элементов

$$R_\gamma = \tau_\gamma^{-1} \circ R_y(\tau_\gamma \cdot, \tau_\gamma \cdot) \circ \tau_\gamma,$$

где γ — кусочно гладкая кривая в M с началом в точке x и с концом в точке $y \in M$. Пусть $\tau_\gamma : T_xM \to T_yM$ — параллельный перенос вдоль γ. Все эти элементы принадлежат пространству $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ и они могут быть описаны как в параграфе 1.3. Предположим, что многообразие (M, g) — Риччи-плоское. По теореме 2.1.1, $\mathfrak{g}$ — типа 1 или 2. Если $\mathfrak{g}$ — типа 2, то из (1.8) и (1.9) следует, что каждый R_γ удовлетворяет $\lambda = 0$, $\vec{v} = 0$, $\mathrm{Ric}(R_0) = 0$, $\widetilde{\mathrm{Ric}}(P) = 0$ и $\mathrm{tr}\, T = 0$. Следовательно, ортогональная часть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ алгебры $\mathfrak{g}$ линейно порождается образами элементов из $\mathcal{R}_0(\mathfrak{h})$ и $\mathcal{P}_0(\mathfrak{h})$. Как мы уже видели, это означает, что каждая подалгебра $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ из разложения (1.6) либо совпадает с $\mathfrak{so}(3) \subset \mathfrak{so}(3)$, либо она порождается образами элементов пространства $\mathcal{R}_0(\mathfrak{h})$. Если $\mathfrak{g}$ — типа 1, то каждый R_γ удовлетворяет $\lambda = 0$, $\vec{v} = \widetilde{\mathrm{Ric}}(P)$, $\mathrm{Ric}(R_0) = 0$ и $\mathrm{tr}\, T = 0$. Следовательно, для некоторого R_γ имеем $\widetilde{\mathrm{Ric}}(P) \neq 0$, т.е. по крайней мере для одной подалгебры $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ имеем $\mathcal{P}_1(\mathfrak{h}_i) \neq 0$. Если (M, g) — многообразие Эйнштейна с космологической константой $\Lambda \neq 0$, то по теореме 2.1.1, $\mathfrak{g}$ — типа 1. Итак, тензор кривизны R_x в точке x удовлетворяет $\lambda = \Lambda$, $\vec{v} = \widetilde{\mathrm{Ric}}(P)$ и $\mathrm{Ric}(R_0) = \Lambda g|_{\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n}$. Следовательно, для каждой $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ имеем $\mathcal{R}_1(\mathfrak{h}_i) \neq 0$, в частности, $n_{s+1} = 0$. ☐

2.1.2. Примеры метрик Эйнштейна

В этом пункте мы покажем существование метрик с каждой из алгебр голономии, полученной в предыдущем пункте.

Из (1.8) и (1.9) следует, что уравнение Эйнштейна

$$\mathrm{Ric} = \Lambda g$$

для метрики (1.12) можно переписать в обозначениях пункта 1.3.2 следующим образом:

$$\lambda = \Lambda, \quad \mathrm{Ric}(h) = \Lambda h, \quad \vec{v} = \widetilde{\mathrm{Ric}}\, P, \quad \mathrm{tr}\, T = 0. \tag{2.1}$$

Прежде всего, рассмотрим метрику (1.12) такую, что h – риманова метрика Эйнштейна с алгеброй голономии $\mathfrak{h}$ и ненулевой космологической константой Λ, а $A = 0$. Пусть

$$H = \Lambda v^2 + H_0,$$

где H_0 – функция координат $x^1, ..., x^n$. Тогда первые три уравнения из (2.1) выполнены. Из (1.19) следует, что последние уравнение имеет вид

$$\Delta H_0 = 0,$$

где

$$\Delta = h^{ij}\left(\partial_i\partial_j - \Gamma^k_{ij}\partial_k\right) \tag{2.2}$$

— оператор Лапласса-Бельтрами метрики h. Выбирая достаточно общую гармоническую функцию H_0, мы получим, что метрика g – эйнштейнова и неразложима. Из теоремы 2.1.3 следует, что $\mathfrak{g} = (\mathbb{R}\oplus\mathfrak{h}) \ltimes \mathbb{R}^n$.

Взяв в той же конструкции $\Lambda = 0$, получим Риччи-плоскую метрику с алгеброй голономии $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n$.

Построим Риччи-плоскую метрику с алгеброй голономии $\mathfrak{g} = (\mathbb{R}\oplus\mathfrak{h})\ltimes\mathbb{R}^n$, где $\mathfrak{h}$ – как в части (1) теоремы 2.1.2. Для этого воспользуемся конструкцией пункта 1.6. Рассмотрим $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ с $\widetilde{\mathrm{Ric}}(P) \neq 0$. Напомним, что $h_{ij} = \delta_{ij}$. Пусть

$$H = vH_1 + H_0,$$

где H_1 и H_0 – функции координат $x^1, ..., x^n$. Третее уравнение из (2.1) принимает вид

$$\partial_k H_1 = 2\sum_i P^k_{ii},$$

поэтому достаточно взять

$$H_1 = 2\sum_{i,k} P^k_{ii}x^k.$$

Последние уравнение имеет вид

$$\frac{1}{2}\sum_i \partial_i^2 H_0 - \frac{1}{4}\sum_{i,j} F^2_{ij} - \frac{1}{2}H_1\sum_i \partial_i A_i - 2A_i\sum_k P^i_{kk} = 0.$$

Замети, что

$$F_{ij} = 2P^j_{ik}x^k, \quad \sum_i \partial_i A_i = -2\sum_{i,k} P^k_{ii}x^k.$$

Получаем уравнение вида $\sum_i \partial_i^2 H_0 = K$, где K – многочлен степени два. Частное решение этого уравнения можно найти в виде

$$H_0 = \frac{1}{2}(x^1)^2K_2 + \frac{1}{6}(x^1)^3\partial_1 K_1 + \frac{1}{24}(x^i)^4(\partial_i)^2 K,$$

где

$$K_1 = K - \frac{1}{2}(x^i)^2(\partial_i)^2 K, \quad K_2 = K_1 - x^1\partial_1 K_1.$$

Чтобы сделать метрику g неразложимой, добавим к полученной функции H_0 гармоническую функцию

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^{n-1})^2 - (n-1)(x^n)^2.$$

Так как $\partial_v\partial_i H \neq 0$, то алгебра голономии метрики g – типа 1 или 3. Из теоремы 2.1.2 следует, что $\mathfrak{g} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}) \ltimes \mathbb{R}^n$.

Аналогично можно построить пример Риччи-плоской метрики с алгеброй голономии $\mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n$, где $\mathfrak{h}$ – как в части (2) теоремы 2.1.2. Для этого нужно рассмотреть $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ с $\widetilde{\mathrm{Ric}}(P) = 0$, взять $H_1 = 0$ и получить нужную H_0.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.1.4. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра из теоремы 2.1.2 или 2.1.3, тогда существует $n+2$-мерное лоренцево многообразие Эйнштейна (или Риччи-плоское) с алгеброй голономии $\mathfrak{g}$.*

Пример 2.1.1. В пункте 1.6 Мы построили метрики с алгебрами голономии $\mathfrak{g}^{2,G_2} \subset \mathfrak{so}(1,8)$ и $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{spin}(7)} \subset \mathfrak{so}(1,9)$. Выбирая только что описанным способом функции H, получим Риччи-плоские метрики с алгебрами голономии $\mathfrak{g}^{2,G_2} \subset \mathfrak{so}(1,8)$ и $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{spin}(7)} \subset \mathfrak{so}(1,9)$.

2.1.3. Лоренцевы многообразия с тотально изотропным оператором Риччи

В предыдущем пункте мы видели, что в отличии от случая римановых многообразий, лоренцевы многообразия ни с какими из алгебр голономии не являются автоматически Риччи-плоскими или многообразиями Эйнштейна. Сейчас мы увидим, что все-таки лоренцевы многообразия с некоторыми алгебрами голономии автоматически удовлетворяют некоторому более слабому условию на тензор Риччи.

Лоренцево многообразие (M, g) называется *тотально Риччи-изотропным*, если образ оператора Риччи этого многообразия – изотропный, эквивалентно,

$$g(\mathrm{Ric}(x), \mathrm{Ric}(y)) = 0$$

для всех векторных полей X и Y. Очевидно, что каждое Риччи-плоское многообразие является тотально Риччи-изотропным. Если (M, g) — спинорное многообразие, допускающие параллельное спинорное поле, то это многообразие является тотально Риччи-изотропным [45, 66].

Теорема 2.1.5. *Пусть (M, g) — локально неразложимое $n + 2$-мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если (M, g) — тотально Риччи-изотропное, то его алгебра голономии — та же, что в теореме 2.1.2.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1.1 из [174] и теорем 2.1.2 и 2.1.3. ☐

Используя результаты пунктов 1.3 и 1.4, легко доказать следующую теорему.

Теорема 2.1.6. *Пусть (M, g) — локально неразложимое $n + 2$-мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если алгебра голономии многообразия (M, g) — типа 2 и в разложении (1.6) алгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ каждая подалгебра $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из алгебр Ли $\mathfrak{su}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4})$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$, то многообразие (M, g) — тотально Риччи-изотропное.*

Заметим, что эту теорему можно доказать также следующим образом. Локально (M, g) допускает спинорную структуру. Из [174, 116] следует, что (M, g) допускает локальные параллельные спинорные поля, следовательно многообразие (M, g) — тотально Риччи-изотропное.

2.1.4. Упрощение уравнения Эйнштейна

Уравнение Эйнштейна для метрики (1.12) рассмотрели Гиббонс и Поп в [72]. Прежде всего оно влечет, что

$$H = \Lambda v^2 + vH_1 + H_0, \quad \partial_v H_1 = \partial_v H_0 = 0.$$

Далее, оно равносильно системе уравнений

$$\Delta H_0 - \frac{1}{2}F^{ij}F_{ij} - 2A^i\partial_i H_1 - H_1\nabla^i A_i + 2\Lambda A^i A_i - 2\nabla^i \dot{A}_i$$
$$+\frac{1}{2}\dot{h}^{ij}\dot{h}_{ij} + h^{ij}\ddot{h}_{ij} + \frac{1}{2}h^{ij}\dot{h}_{ij}H_1 = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla^j F_{ij} + \partial_i H_1 - 2\Lambda A_i + \nabla^j \dot{h}_{ij} - \partial_i(h^{jk}\dot{h}_{jk}) = 0, \tag{2.4}$$

$$\Delta H_1 - 2\Lambda\nabla^i A_i - \Lambda h^{ij}\dot{h}_{ij} = 0, \tag{2.5}$$

$$\mathrm{Ric}_{ij} = \Lambda h_{ij}, \tag{2.6}$$

где оператор Δ дан формулой (2.2). Эти уравнения можно получить, рассмотрев уравнения (2.1) и применив формулы пункта 1.3.2.

Координаты Волкера не определены однозначно. Например, Шимминг [136] доказал, что если $\partial_v H = 0$, то координаты можно выбрать так, что $A = 0$ и $H = 0$. Главная теорема этого пункта дает возможность найти аналогичные координаты и тем самым существенно упростить уравнение Эйнштейна для случая $\Lambda \neq 0$.

Теорема 2.1.7. *Пусть (M, g) — локально неразложимое $n+2$-мерное лоренцево многообразие, допускающее параллельное распределение изотропных прямых. Если (M, g) — многообразие Эйнштейна с ненулевой космологической константой Λ, то в окрестности каждой точки существуют координаты $v, x^1, \dots, x^n, u$ такие, что метрика g имеет вид*

$$g = 2dvdu + h + (\Lambda v^2 + H_0)(du)^2,$$

где $\partial_v H_0 = 0$, h — u-семейство римановых метрик Эйнштейна с космоло-

гической константой Λ, *удовлетворяющее*

$$\Delta H_0 + \frac{1}{2}h^{ij}\ddot{h}_{ij} = 0, \tag{2.7}$$

$$\nabla^j \dot{h}_{ij} = 0, \tag{2.8}$$

$$h^{ij}\dot{h}_{ij} = 0, \tag{2.9}$$

$$\mathrm{Ric}_{ij} = \Lambda h_{ij}. \tag{2.10}$$

Обратно, каждая такая метрика является метрикой Эйнштейна.

Таким образом, мы свели уравнение Эйнштейна для лоренцевых метрик с $\Lambda \neq 0$ к проблеме нахождения семейств римановых метрик Эйнштейна, удовлетворяющих уравнениям (2.8), (2.9) и уравнению (2.7) для нахождения функции H_0.

Доказательство теоремы 2.1.7.

Рассмотрим метрику (1.12). Тензор кривизны R этой метрики определяется элементами $\lambda, \mathfrak{vect} v, R_0, P, T$, как в пункте 1.3.2. Так как многообразие – эйнштейново, имеем $\lambda = \Lambda$.

Предложение 2.1.1. *Для каждого сечения* $W \in \Gamma(E)$ *такого, что* $\nabla_{\partial_v} W = 0$, *существуют координаты* $\tilde{x}^a$ *такие, что соответствующее векторное поле* q' *имеет вид* $q' = -\frac{1}{2}g(W,W)p + W + q$.

Доказательство. Пусть $W = W^i X_i$. Так как $\nabla_{\partial_v} W = 0$, имеем $\partial_v W^i = 0$. Будем искать обратное преобразование координат

$$v = \tilde{v}, \quad x^i = x^i(\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n, \tilde{u}), \quad u = \tilde{u}.$$

Имеем

$$\partial_{\tilde{v}} = \partial_v, \quad \tilde{\partial}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\partial_j, \quad \partial_{\tilde{u}} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{u}}\partial_i + \partial_u.$$

Относительно новых координат,

$$H' = g(\partial_{\tilde{u}}, \partial_{\tilde{u}}) = H + 2\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{u}}A_i + g\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{u}}\partial_i, \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{u}}\partial_j\right).$$

Следовательно,

$$q' = \partial_{\tilde{u}} - \frac{1}{2}H'\partial_v = q + U - \frac{1}{2}g(U,U)p,$$

где

$$U = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{u}} X_i.$$

Равенство $U = W$ эквивалентно системе уравнений

$$\frac{\partial x^i(\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n, \tilde{u})}{\partial \tilde{u}} = W^i(x^1(\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n, \tilde{u}), ..., x^n(\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n, \tilde{u}), \tilde{u}). \tag{2.11}$$

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy^i(\tilde{u})}{d\tilde{u}} = W^i(y^1(\tilde{u}), ..., y^n(\tilde{u}), \tilde{u}). \tag{2.12}$$

Наложим начальные условия $y^i(\tilde{u}_0) = \tilde{x}^i$. Для каждого набора чисел $\tilde{x}^k$ существует единственное решение $y^i(u)$. Поскольку решение гладко зависит от начальных условий, можно записать решение в виде $x^i(\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n, \tilde{u})$. Полученные функции удовлетворяют системе (2.11). Так как $\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}(\tilde{u}_0)\right) \neq 0$, то $\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) \neq 0$ для $\tilde{u}$ близких к $\tilde{u}_0$. Мы получили нужное преобразование координат. □

Таким образом, можно выбрать координаты так, что $\vec{v} = 0$, действительно если $\vec{v} \neq 0$, то рассмотрев $W = -\frac{1}{\Lambda}\vec{v}$, будем иметь $\tilde{v} = 0$. Из (1.17) следует, что $\nabla_{\partial_v} W = 0$. Поэтому, можно найти координаты, относительно которых $A_i = \frac{1}{2\Lambda}\partial_i H_1$. Далее, рассмотрев преобразование

$$v \mapsto v + \frac{1}{2\Lambda}H_1$$

и учитывая (1.20), получим $A_i = H_1 = 0$. Теперь доказательство теоремы 2.1.7 следует из (2.3–2.6). □

Похожие результаты для случая $\Lambda = 0$ получил Лайстнер в [165].

2.1.5. Примеры в размерности 4

Рассмотрим случай многообразий размерности 4, т.е. $n = 2$. Будем писать $x = x^1, y = x^2$.

Риччи-плоские метрики Волкера в размерности 4 найдены в [105]. Для них имеет место $h = (dx)^2 + (dy)^2$, $A_2 = 0$, $H = -(\partial_x A_1)v + H_0$, где A_1 — гармоническая функция, а функция H_0 — решение некоторого уравнения Пуассона.

В [118] описаны все 4-мерные метрики Волкера-Эйнштейна с $\Lambda \neq 0$. Координаты можно выбрать так, что h — метрика постоянной секционной кривизны, независящая от u. Далее, $A = W dz + \bar{W}\bar{z}$, $W = i\partial_z L$, где $z = x + iy$, а L – $\mathbb{R}$-значная функция,

$$L = 2\mathrm{Re}\left(\phi\partial_z(\ln P_0) - \frac{1}{2}\partial_z\phi\right), \quad 2P_0^2 = \left(1 + \frac{\Lambda}{|\Lambda|}z\bar{z}\right)^2, \tag{2.13}$$

где $\phi = \phi(z, u)$ произвольная функция, голоморфная относительно переменной z и гладко зависящая от u. Окончательно, $H = \Lambda^2 v + H_0$, а функцию $H_0 = H_0(z, \bar{z}, u)$ можно найти схожим образом.

В этом пункте мы построим примеры эйнштейновых метрик Волкера с $\Lambda \neq 0$, $A = 0$, и h зависящем от u. Решение из [118] не подходит для построения примеров такого вида, поскольку „простые" функции $\phi(z, u)$ определяют „сложные" формы A. Построенные примеры могут оказаться полезными согласно работам [41, 57, 59, 72]. Аналогичные примеры можно построить в случае размерности 5, этот случай обсуждается в [72, 75].

Заметим, что каждая риманова метрика Эйнштейна в размерности 2 (и 3) имеет постоянную секционную кривизну, поэтому такие метрики с одинаковой константой Λ — локально изометричны, а координаты можно выбрать так, что $\partial_u h = 0$. Как в [118], можно показать, что если $\Lambda > 0$, то можно считать, что $h = \frac{1}{\Lambda}\big((dx)^2 + \sin^2 x\,(dy)^2\big)$, $H = \Lambda v^2 + H_0$, и уравнение Эйнштейна сводится к системе

$$\Delta_{S^2} f = -2f, \quad \Delta_{S^2} H_0 = 2\Lambda\left(2f^2 - (\partial_x f)^2 + \frac{(\partial_y f)^2}{\sin^2 x}\right),$$
$$\Delta_{S^2} = \partial_x^2 + \frac{\partial_y^2}{\sin^2 x} + \cot x\,\partial_x. \tag{2.14}$$

Функция f определяет 1-форму A: $A = -\frac{\partial_y f}{\sin x}dx + \sin x\,\partial_x f dy$. Аналогично, если $\Lambda < 0$, то рассмотрим $h = \frac{1}{-\Lambda\cdot x^2}\big((dx)^2 + (dy)^2\big)$, и будем иметь

$$\Delta_{L^2} f = 2f, \quad \Delta_{L^2} H_0 = -4\Lambda f^2 - 2\Lambda x^2((\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2),$$
$$\Delta_{L^2} = x^2(\partial_x^2 + \partial_y^2), \quad (2.15)$$

и $A = -\partial_y f dx + \partial_x f dy$. Таким образом, чтобы найти частное решение системы уравнений (2.7–2.10), удобно найти функцию f, а потом, изменяя координаты, избавиться от 1-формы A. После такой замены координат, h не зависит от u тогда и только тогда, когда A — киллингова форма для h [72]. Если $\Lambda > 0$, то это равносильно тому, что

$$f = c_1(u) \sin x \sin y + c_2(u) \sin x \cos y + c_3(u) \cos x;$$

для $\Lambda < 0$ это равносильно равенству

$$f = c_1(u)\frac{1}{x} + c_2(u)\frac{y}{x} + c_3(u)\frac{x^2 + y^2}{x}.$$

Функции $\phi(z, u) = c(u)$, $c(u)z$ и $c(u)z^2$ из (2.13) определяют Киллингову форму A [165]. Для других функций ϕ форма A имеет сложную структуру. Пусть g — метрика Эйнштейна вида (1.12) с $\Lambda \neq 0$, $A = 0$ и $H = \Lambda v^2 + H_0$. Тензор кривизны R метрики g имеет вид

$$R(p, q) = \Lambda p \wedge q, \quad R(X, Y) = \Lambda X \wedge Y, \quad R(X, q) = -p \wedge T(X), \quad R(p, X) = 0.$$

Метрика g неразложима тогда и только тогда, когда $T \neq 0$. В этом случае алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{sim}(2)$.

Для тензора Вейля имеем

$$W(p, q) = \frac{\Lambda}{3} p \wedge q, \quad W(p, X) = -\frac{2\Lambda}{3} p \wedge X,$$
$$W(X, Y) = \frac{\Lambda}{3} X \wedge Y, \quad W(X, q) = -\frac{2\Lambda}{3} X \wedge q - p \wedge T(X).$$

В [79, 80] показано, что метрика g имеет тип Петрова II или D (тип может зависеть от точки). Из критерия Бела следует, что g имеет тип II в точке $m \in M$ тогда и только тогда, когда $T_m \neq 0$, иначе g — типа D. Так как эндоморфизм T_m — симметрический с нулевым следом, он либо равен нулю, либо имеет ранг 2. Следовательно, $T_m = 0$ тогда и только тогда, когда $\det T_m = 0$.

Случай $\Lambda < 0$.

Пример 2.1.2. Рассмотрим функцию $f = c(u)x^2$, тогда $A = 2xc(u)dy$. Выберем $H_0 = -\Lambda x^4 c^2(u)$. Чтобы избавиться от формы A, решим систему уравнений

$$\frac{dx(u)}{du} = 0, \qquad \frac{dy(u)}{du} = 2\Lambda c(u)x^3(u)$$

с начальными условиями $x(0) = \tilde{x}$ и $y(0) = \tilde{y}$. Получим преобразование

$$v = \tilde{v}, \quad x = \tilde{x}, \quad y = \tilde{y} + 2\Lambda b(u)\tilde{x}^3, \quad u = \tilde{u},$$

где функция $b(u)$ удовлетворяет $\frac{db(u)}{du} = c(u)$ и $b(0) = 0$. Относительно новых координат имеем

$$g = 2dvdu + h(u) + \big(\Lambda v^2 + 3\Lambda x^4 c^2(u)\big)(du)^2,$$

$$h(u) = \frac{1}{-\Lambda \cdot x^2}\Big(\big(36\Lambda^2 b^2(u)x^4 + 1\big)(dx)^2 + 12\Lambda b(u)x^2 dxdy + (dy)^2\Big).$$

Пусть $c(u) \equiv 1$, тогда $b(u) = u$ и $\det T = -9\Lambda^4 x^4 \left(x^4 + v^2\right)$. Равенство $\det T_m = 0$ $((m = (v, x, y, u)))$ равносильно равенству $v = 0$. Метрика неразложима. Метрика g имеет тип Петрова D на множестве $\{(0, x, y, u)\}$ и тип II на его дополнении.

Пример 2.1.3. Функции $f = x^2 y$ и $H_0 = -\Lambda x^4 y$ являются частными решениями (2.15). При этом $A = -x^2 dxdu + 2xydy$. Рассмотрим преобразование координат, заданное своим обратным преобразованием

$$v = \tilde{v}, \; x = \tilde{x}(1 + 3\Lambda\tilde{u}\tilde{x}^3)^{-\frac{1}{3}}, \; y = \tilde{y}(1 + 3\Lambda\tilde{u}\tilde{x}^3)^{\frac{2}{3}}, \; u = \tilde{u}.$$

Относительно новых координат,

$$g = 2dvdu + h(u) + \Lambda\left(v^2 + 3x^4y^2 + \frac{x^6}{\rho^2}\right)(du)^2, \qquad \rho = 1 + 3\Lambda ux^3,$$

$$h(u) = \frac{1}{-\Lambda}\left(\left(36\Lambda^2 x^2 y^2 u^2 + \frac{1}{x^2\rho^2}\right)(dx)^2 + 12\Lambda\rho yudxdy + \frac{\rho^2}{x^2}(dy)^2\right).$$

Можно показать, что $\det T < 0$ всюду, поэтому метрика g — неразложима и имеет тип Петрова II.

Случай $\Lambda > 0$.

Пример 2.1.4. Функция $f = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\cos x\, + 1$ является частным решением первого уравнения в (2.14). Получаем $A = \Big(\cos x\, - \ln\left(\cot\frac{x}{2}\right)\sin^2 x\,\Big)\, dy$. Рассмотрим преобразование

$$\tilde v = v, \quad \tilde x = x, \quad \tilde y = y - \Lambda u\left(\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right), \quad \tilde u = u.$$

Относительно новых координат,

$$g = 2dvdu + h(u) + \left(\Lambda v^2 + \tilde H_0\right)(du)^2,$$

$$h(u) = \left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{4\Lambda u^2}{\sin^4 x}\right)(dx)^2 + \frac{4u}{\sin x}dxdy + \frac{\sin^2 x}{\Lambda}(dy)^2,$$

где $\tilde H_0$ удовлетворяет $\Delta_h \tilde H_0 = -\frac{1}{2}h^{ij}\ddot h_{ij}$. Примером такой функции $\tilde H_0$ является

$$\tilde H_0 = -\Lambda\left(\frac{1}{\sin^2 x} + \ln^2\left(\cot\frac{x}{2}\right)\right).$$

Имеем

$$\det T = -\frac{\Lambda^4}{\sin^4 x}\left(v^2 + \left(\ln\left(\cot\frac{x}{2}\right)\cos x\, - 1\right)^2\right).$$

Поэтому метрика g имеет тип Петрова D на множестве $\Big\{(0, x, y, u)\big|\ln\left(\cot\frac{x}{2}\right)\cos x\, - 1 = 0\Big\}$ и тип II на дополнении к этому множеству. Метрика неразложима.

Пример 2.1.5. Функции $f = y\cos x$ и $H_0 = \Lambda\cdot\Big(-y^2\cos^2 x\, + \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\Big)$ являются частными решениями уравнений (2.14). Имеем $A = -\cot x dx - y\sin^2 x\, dy$. Рассмотрим преобразование

$$\tilde v = v, \quad \tilde x = \arccos\left(e^{\Lambda u}\cos x\,\right), \quad \tilde y = ye^{-\Lambda u}, \quad \tilde u = u.$$

Относительно новых координат,

$$g = 2dvdu + h(u) + \Lambda\left(v^2 - y^2 e^{-2\Lambda u} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)(du)^2, \quad \rho = e^{-\Lambda u}\cos x,$$

$$h(u) = \frac{e^{-2\Lambda u}\sin^2 x}{\Lambda\cdot(1-\rho^2)}(dx)^2 + \frac{e^{2\Lambda u}(1-\rho^2)}{\Lambda}(dy)^2.$$

Имеем $\det T = -\frac{\Lambda^4\cdot\left(4y^2\cos^2 x+(\rho+2v)^2\right)}{4(1-\rho^2)^2}$. Поэтому, метрика g имеет тип Петрова D в точке (v, x, y, u) тогда и только тогда, когда либо $x = \frac{\pi}{2}$ и $v = 0$, либо $y = 0$ и $\cos x = -2ve^{\Lambda u}$.

2.2. Псевдоримановы многообразия с рекуррентными спинорными полями

Существование рекуррентного спинорного поля на псевдоримановом многообразии тесно связано с существованием параллельного одномерного комплексного подрасслоения спинорного расслоения этого многообразия. В этом параграфе классифицируем следующие односвязные псевдоримановы многообразия, допускающие такие подрасслоения, в терминах их алгебр голономии: римановы многообразия; лоренцевы многообразия; псевдоримановы многообразия с неприводимыми алгебрами голономии; псевдоримановы многообразия нейтральной сигнатуры, допускающие два взаимно дополнительные параллельные изотропные распределения. Результаты этого параграфа опубликованы в [154].

Пусть (M, g) — спинорное псевдориманово многообразие сигнатуры (r, s), а S — соответствующее комплексное спинорное расслоение с индуцированной связностью ∇^S. Спинорное поле $s \in \Gamma(S)$ называется *рекуррентным*, если

$$\nabla^S_X s = \theta(X)s \tag{2.16}$$

для всех векторных полей $X \in \Gamma(TM)$, здесь θ — комплекснозначная 1-форма. Если $\theta = 0$, то s — *параллельное* спинорное поле. Для рекуррентного спинорного поля s существует локально определенная, не обращающаяся в ноль функция f такая, что поле fs — параллельно тогда и только тогда, когда $d\theta = 0$. Если многообразие M — односвязно, то такая функция определена глобально.

Изучение спинорных многообразий, допускающих параллельные спинорные поля, было начато Н. Хитчиным [84], а позднее Т. Фридрихом [69]. М. Ванг охарактеризовал односвязные спинорные римановы многообразия, допускающие параллельные спинорные поля, в терминах групп голономии этих многообразий [148]. Аналогичный результат получили Т. Лайстнер для лоренцевых многообразий [115, 114], Х. Баум и И. Кас для псевдоримановых многообразий с неприводимыми группами голономии [19], и А. Икемакхен в случае псевдоримановых многообразий нейтральной сигнатуры (n, n), допускающих два взаимно дополнительные параллельные изотропные распределения [92].

Т. Фридрих [69] рассмотрел уравнение (2.16) на римановом многообразии в предположении, что θ — вещественнозначная 1-форма. Он доказал, что это уравнение влечет равенство тензора Риччи нулю и равенство $d\theta = 0$. Ниже мы увидим, что это утверждение не имеет место в случае лоренцевых многообразий. Пример 1 из [69] дает решение s уравнения (2.16) с $\theta = \mathrm{i}\omega$, $d\omega \neq 0$ для некоторой вещественнозначной 1-формы ω на компактном римановом многообразии (M, g), представляющем собой произведение неплоского тора T^2 и окружности S^1. В действительности, рекуррентное спинорное поле s возникает из локально определенного рекуррентного спинорного поля на кэлеровом, не являющемся Риччи-плоским, многообразии T^2, существование последнего спинорного поля показывает приводимая ниже теорема 2.2.1.

Спинорное расслоение S псевдориманова многообразия (M, g) допускает параллельное комплексное подрасслоение размерности 1 тогда и только тогда, когда в окрестности каждой точки многообразия (M, g) существует не обращающееся в ноль рекуррентное спинорное поле; эти поля должны быть пропорциональны в пересечениях областей их определения. В этом параграфе мы изучаем некоторые классы спинорных псевдоримановых многообразий (M, g), чьи спинорные расслоения допускают одномерные комплексные подрасслоения.

В пункте 2.2.2 мы доказываем, что если спинорное расслоение локально неразложимого риманова спинорного многообразия (M, g) допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение, то либо многообразие (M, g)

является кэлеровым и не является Риччи-плоским, либо оно допускает ненулевое параллельное спинорное поле. Более того, спинорное расслоение всякого односвязного локально неразложимого спинорного кэлерова, не являющегося Риччи-плоским, многообразия допускает в точности два параллельные одномерные комплексные подрасслоения. Далее, произвольное односвязное полное спинорное риманово многообразие, спинорное расслоение S которого допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение, а алгебра голономии не является неприводимой, представляет собой произведение спинорного кэлерова многообразия, не являющегося Риччи-плоским, и спинорного риманова многообразия, допускающего параллельное спинорное поле.

В пункте 2.2.3 мы доказываем, что спинорное расслоение $n+2$-мерного односвязного неразложимого спинорного лоренцева многообразия (M,g) допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда (M,g) допускает параллельное распределение изотропных прямых, т.е. его алгебра голономии $\mathfrak{g}$ содержится в параболической подалгебре

$$\mathfrak{sim}(n) = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(n)) \ltimes \mathbb{R}^n \subset \mathfrak{so}(1, n+1),$$

и подалгебра $\mathfrak{h} = \mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(n)}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$ сохраняет одномерное комплексное подпространство спинорного модуля Δ_n.

В пункте 2.2.4 для псевдоримановых спинорных многообразий с неприводимыми алгебрами голономии мы получаем те же результаты, что и для неразложимых римановых многообразий в пункте 2.2.2.

В пункте 2.2.5 мы доказываем, что спинорное расслоение каждого односвязного псевдориманова спинорного многообразия нейтральной сигнатуры (n,n) с двумя взаимно дополнительными параллельными изотропными распределениями допускает параллельное комплексное подрасслоение.

В пункте 2.2.6 мы обсуждаем связь рекуррентных спинорных полей и параллельных спинорных полей $spin^C$-расслоений, которые изучали А. Мороиану [122] и А. Икхемакхен [93, 94].

2.2.1. Спинорные представления

Напомним некоторые стандартные обозначения. Пусть $\mathbb{R}^{r,s}$ — псевдоевклидово пространство с метрикой g сигнатуры (r,s) (r обозначает число минусов). Пусть $(\mathcal{C}l_{r,s},\cdot)$ — соответствующая алгебра Клиффорда, а $\mathbb{C}l_{r,s}=\mathcal{C}l_{r,s}\otimes\mathbb{C}$ — ее комплексификация. Последняя алгебра может быть реализована в виде матричной алгебры следующим образом. Рассмотрим базис

$$\left(u(\epsilon)=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\-\epsilon\mathrm{i}\end{pmatrix},\ \epsilon=\pm1\right)$$

пространства $\mathbb{C}^2$. Определим следующие изоморфизмы пространства $\mathbb{C}^2$:

$$E=\mathrm{id},\quad T=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix}.$$

Имеем

$$T^2=-V^2=-U^2=E,\quad UT=-\mathrm{i}V,\quad VT=iU,\quad UV=-\mathrm{i}T,$$

$$Tu(\epsilon)=-\epsilon u(\epsilon),\quad Uu(\epsilon)=\mathrm{i}u(-\epsilon),\quad Tu(\epsilon)=\epsilon u(-\epsilon).$$

Пусть $n=r+s$. Базис $e_1,...,e_n$ пространства $\mathbb{R}^{r,s}$ называется ортонормированным, если $g(e_i,e_j)=k_i\delta_{ij}$, где $k_i=-1$ для $1\le i\le r$, и $k_i=1$ для $r+1\le i\le n$. Зафиксируем такой базис. Для целого m обозначим через $\mathbb{C}(m)$ алгебру комплексных квадратных матриц порядка m. Определим следующие изоморфизмы:

1) если n — четное, то определим $\Phi_{r,s}:\mathbb{C}l_{r,s}\to\mathbb{C}\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$, полагая

$$\Phi_{r,s}(e_{2k-1})=\tau_{2k-1}E\otimes\cdots\otimes E\otimes U\otimes\underbrace{T\otimes\cdots\otimes T}_{(k-1)-\text{раз}},\tag{2.17}$$

$$\Phi_{r,s}(e_{2k})=\tau_{2k}E\otimes\cdots\otimes E\otimes V\otimes\underbrace{T\otimes\cdots\otimes T}_{(k-1)-\text{раз}},\tag{2.18}$$

где $1\le k\le\frac{n}{2}$, $\tau_i=\mathrm{i}$ для $1\le i\le r$, и $\tau_i=1$ для $r+1\le i\le n$;

2) если n — нечетное, то определим $\Phi_{r,s} : \mathbb{C}l_{r,s} \to \mathbb{C}\Big(2^{\frac{n-1}{2}}\Big) \oplus \mathbb{C}\Big(2^{\frac{n-1}{2}}\Big)$, полагая

$$\Phi_{r,s}(e_k) = (\Phi_{r,s-1}(e_k), \Phi_{r,s-1}(e_k)), \quad k = 1, ..., n-1, \tag{2.19}$$

$$\Phi_{r,s}(e_n) = (T \otimes \cdots \otimes T, -\mathrm{i}T \otimes \cdots \otimes T). \tag{2.20}$$

Полученное пространство $\Delta_{r,s} = \mathbb{C}^{2^{[\frac{n}{2}]}}$ называется *спинорным модулем.* Будем писать $A \cdot s = \Phi_{r,s}(A)s$ для $A \in \mathbb{C}l_{r,s}$, $s \in \Delta_{r,s}$. Будем рассматривать следующий базис модуля $\Delta_{r,s}$:

$$(u(\epsilon_k, ..., \epsilon_1) = u(\epsilon_k) \otimes \cdots \otimes u(\epsilon_1) | \epsilon_i = \pm 1).$$

Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{spin}(r,s)$ группы Ли $\mathrm{Spin}(r,s)$ может быть вложена в $\mathbb{C}l_{r,s}$ следующим образом:

$$\mathfrak{spin}(r,s) = \mathrm{span}\{e_i \cdot e_j | 1 \le i < j \le n\}.$$

Алгебру Ли $\mathfrak{so}(r,s)$ можно отождествить с пространством бивекторов $\Lambda^2\mathbb{R}^{r,s}$ таким образом, что

$$(x \wedge y)z = g(x,z)y - g(y,z)x, \quad x, y, z \in \mathbb{R}^{r,s}.$$

Имеет место изоморфизм

$$\lambda_* : \mathfrak{so}(r,s) \to \mathfrak{spin}(r,s), \quad \lambda_*(x \wedge y) = x \cdot y.$$

Полученное представление алгебры Ли $\mathfrak{so}(r,s)$ в $\Delta_{r,s}$ — неприводимо, если n — нечетно, и это представление представимо в виде прямой суммы двух неприводимых подмодулей

$$\Delta^{\pm}_{r,s} = \mathrm{span}\{u(\epsilon_k, ..., \epsilon_1) | \epsilon_1 = \cdots = \epsilon_k = \pm 1\},$$

если n — четно.

Если (M, g) — спинорное многообразие, то оно допускает спинорное расслоение S. Слой S_x этого расслоения можно отождествить со спинорным модулем $\Delta_{r,s}$. Связность Леви-Чивита ∇ определяет связность ∇^S на спинорном расслоении S. Алгебра голономии этой связности совпадает с $\lambda_*(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{spin}(r,s)$.

2.2.2. Римановы многообразия

Теорема 2.2.1. *Пусть (M,g) — локально неразложимое n-мерное односвязное спинорное риманово многообразие. Тогда спинорное расслоение S этого многообразия допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда алгебра голономии $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ многообразия (M,g) — одна из $\mathfrak{u}(\frac{n}{2})$, $\mathfrak{su}(\frac{n}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n}{4})$, $G_2\subset\mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7)\subset\mathfrak{so}(8)$, или (M,g) — локально симметрическое кэлерово многообразие.*

Доказательство. Напомним, что S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда алгебра голономии $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ сохраняет одномерное комплексное подпространство l спинорного модуля Δ_n. Если $\mathfrak{h}$ аннулирует l, то (M,g) допускает параллельное спинорное поле, и $\mathfrak{h}$ — одна из $\mathfrak{su}(\frac{n}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n}{4})$, G_2, $\mathfrak{spin}(7)$ [148]. Предположим, что $\mathfrak{h}$ не обнуляет l. Заметим, что $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ — компактная алгебра Ли. Единственной компактной алгеброй Ли, допускающей нетривиальное точное 2-мерное вещественное представление является $\mathfrak{so}(2)$. Это показывает, что $\mathfrak{h}$ содержит одномерный центр, следовательно $\mathfrak{h}$ содержится в $\mathfrak{u}(\frac{n}{2})$, т.е. многообразие (M,g) — кэлерово. Так как $\mathfrak{su}(\frac{n}{2})$ обнуляет два комплексные одномерные подпространства в Δ_n, то $\mathfrak{u}(\frac{n}{2})$ сохраняет эти два подпространства и не обнуляет их. Мы показали, что спинорное расслоение S кэлерова многообразия допускает по крайней мере два параллельные одномерные комплексные подрасслоения. В случае $\mathfrak{h}=\mathfrak{u}(\frac{n}{2})$ этих подрасслоений — в точности два. ☐

Следствие 2.2.1. *Пусть (M,g) — односвязное спинорное риманово многообразие с неприводимой алгеброй голономии и без ненулевых параллельных спинорных полей. Тогда спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда (M,g) — кэлерово многообразие, не являющееся Риччи-плоским.*

Доказательство. Это утверждение следует из того факта, что односвязные римановы многообразия с алгебрами голономии $\mathfrak{su}(\frac{n}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n}{4})$, G_2, $\mathfrak{spin}(7)$

допускают ненулевые параллельные спинорные поля. ☐

Следствие 2.2.2. *Пусть* (M, g) *— односвязное полное спинорное риманово многообразие без ненулевых параллельных спинорных полей, алгебра голономии которого не является неприводимой. Тогда его спинорное расслоение* S *допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда многообразие* (M, g) *— прямое произведение спинорного кэлерова, не являющегося Риччи-плоским, многообразия и спинорного риманова многообразия с ненулевым параллельным спинорным полем.*

Доказательство. По теореме де Рама, многообразие (M, g) можно разложить в прямое произведение односвязных неразложимых полных римановых многообразий и, возможно, плоского многообразия, см., например, [174]. Римановы многообразия в этом расслоении автоматически являются спинорными, а спинорное расслоение S многообразия (M, g) допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда этим свойством обладает каждое многообразие из разложения. ☐

Теорема 2.2.2. *Пусть* (M, g) *— локально неразложимое* n*-мерное односвязное спинорное кэлерово многообразие, не являющееся Риччи-плоским. Тогда его спинорное расслоение* S *допускает в точности два параллельных одномерных комплексных подрасслоения.*

Утверждение теоремы следует из более общей теоремы 2.2.6, которая будет доказана ниже.

2.2.3. Лоренцевы многообразия

В этом пункте мы рассмотрим лоренцевы многообразия (M, g), т.е. псевдоримановы многообразия сигнатуры $(1, n + 1)$, $n \geq 0$. Алгебры голономии лоренцевых спинорных многообразий, допускающих параллельные спинорные поля, классифицированы в [115, 114]. Предположим, что спинорное расслоение многообразия (M,g) допускает одномерное параллельное комплексное подрасслоение, и на (M,g) нет ненулевых параллельных спинорных полей.

Теорема 2.2.3. *Пусть* (M,g) *— односвязное полное спинорное лоренцево многообразие. Предположим, что на* (M,g) *нет ненулевых параллельных спинорных полей. Тогда спинорное расслоение* S *допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда имеет место одно из следующих утверждений:*

1) (M,g) *представляет собой прямое произведение многообразия* $(\mathbb{R},-(dt)^2)$ *и спинорного риманова многообразия* (N,h) *такого, что спинорное расслоение многообразия* (N,h) *допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение, и на* (N,h) *нет параллельных спинорных полей;*

2) (M,g) *— прямое произведение неразложимого спинорного лоренцева многообразия и спинорного риманова многообразия* (N,h) *таких, что спинорные расслоения обоих многообразий допускают параллельные одномерные комплексные подрасслоения, и по крайней мере на одном из этих многообразий нет параллельных спинорных полей.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы непосредственно следует из теоремы Ву, подобное утверждение доказано в [115, 114]. ☐

Заметим, что если многообразие (M,g) допускает параллельное спинорное поле, то имеет место аналог теоремы 2.2.3, в которой (N,h) допускает параллельное спинорное поле [115, 114].

Рассмотрим неразложимое лоренцево многообразие (M,g). Предположим, что спинорное расслоение многообразия (M,g) допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение l. Пусть $s\in\Gamma(l)$ — произвольное локальное сечение расслоения l, не обращающееся в ноль. Пусть $p\in\Gamma(TM)$ — соответствующий поток Дирака. Векторное поле p определяется равенством

$$g(p,X)=-<X\cdot s,s>,$$

где $<,>$ — эрмитово произведение на S. Мы утверждаем, что p — рекуррентное векторное поле. В самом деле, следуя вычислениям из [114], для произвольных векторных полей X и Y имеем

$$\begin{aligned} g(\nabla_Y p, X) &= Y(g(p,X)) - g(p, \nabla_Y X) = -(Y(< X \cdot s, s >) - < \nabla_Y X \cdot s, s >) \\ &= -(< \nabla_Y X \cdot s, s > + < X \cdot \nabla^S_Y s, s > \\ &+ < X \cdot s, \nabla^S_Y s > - < \nabla_Y X \cdot s, s >) \\ &= -(\theta(Y) + \overline{\theta(Y)}) < X \cdot s, s >= (\theta(Y) + \overline{\theta(Y)}) g(p, X). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\nabla_Y p = 2\mathrm{Re}(\theta)(Y)p. \tag{2.21}$$

В случае лоренцевых многообразий поток Дирака удовлетворяет $g(p,p) \leq 0$, а нулевые точки поля p совпадают с нулевыми точками поля s. Так как s не обращается в ноль, а p — рекуррентное поле, то либо $g(p,p) < 0$, либо $g(p,p) = 0$. В первом случае многообразие разложимо. Таким образом, p — изотропное рекуррентное векторное поле, а многообразие (M, g) допускает параллельное распределение изотропных прямых.

В [115, 114] показано, что (M, g) допускает параллельное спинорное поле тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n$, и в разложении (1.6) для подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ каждая из подалгебр $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из алгебр Ли $\mathfrak{su}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4})$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$.

Теорема 2.2.4. *Пусть (M, g) — односвязное локально неразложимое $(n+2)$-мерное спинорное лоренцево многообразие. Тогда спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда (M, g) допускает параллельное распределение изотропных прямых (т.е. его алгебра голономии $\mathfrak{g}$ содержится в $\mathfrak{sim}(n)$), а в разложении (1.6) для подалгебры $\mathfrak{h} = \mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(n)}\mathfrak{g}$ каждая из подалгебр $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из алгебр Ли $\mathfrak{u}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{su}(\frac{n_i}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{n_i}{4})$, G_2, $\mathfrak{spin}(7)$ или с алгеброй голономии неразложимого симметрического кэлерова пространства. Число параллельных одномерных комплексных подрасслоений расслоения S равно* *числу одномерных комплексных подпространств модуля Δ_n, сохраняемых алгеброй $\mathfrak{h}$.*

Доказательство. Достаточно для каждой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ из теоремы 1.6.2 найти все одномерные комплексные инвариантные подпространства в $\Delta_{1,n+1}$.

При отождествлении $\mathfrak{so}(1, n+1) \simeq \Lambda^2\mathbb{R}^{1,n+1}$ элемент $(a, A, X) \in \mathfrak{sim}(n)$ соответствует бивектору

$$-ap \wedge q + A - p \wedge X.$$

Напомним, что

$$\Delta_{1,n+1} \simeq \Delta_n \otimes \Delta_{1,1}, \quad \Delta_{1,1} \simeq \mathbb{C}^2.$$

Рассмотрим векторы $e_- = \frac{\sqrt{2}}{2}(p - q)$, $e_+ = \frac{\sqrt{2}}{2}(p + q)$ и ортонормированный базис $e_-, e_+, e_1, ..., e_n$ пространства $\mathbb{R}^{1,n+1}$. Заметим, что $p = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_- + e_+)$ и $q = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_- - e_+)$.

Найдем все комплексные одномерные $p \wedge \mathbb{R}^n$-инвариантные подмодули в $\Delta_{1,n+1}$. Предположим, что $w \in \Delta_{1,n+1}$ — спинор такой, что $(p \wedge e_i) \cdot w = c_i w$, $c_i \in \mathbb{C}$, для всех $i = 1, ..., n$. Пусть

$$w = w_+ \otimes u(1) + w_- \otimes u(-1),$$

где $w_\pm \in \Delta_n$. Используя (2.17), (2.18) и вычисления из [115, 114], легко установить, что

$$(e_i \wedge p) \cdot w = \frac{\sqrt{2}}{2} e_i \cdot (e_- + e_+) \cdot w = \sqrt{2}(e_i \cdot w_-) \otimes u(1).$$

Следовательно, равенства $(p \wedge e_i) \cdot w = c_i w$ влекут $c_i = 0$, $e_i \cdot w_- = 0$. Так как векторы e_i действуют в Δ_n как изоморфизмы, имеем $w_- = 0$. Таким образом, $w = w_+ \otimes u(1)$, и все комплексные одномерные $p \wedge \mathbb{R}^n$-инвариантные подмодули в $\Delta_{1,n+1}$ содержаться в $\Delta_n \otimes u(1)$. Более того, представление алгебры $p \wedge \mathbb{R}^n$ в этом модуле — тривиально. Тоже самое утверждение имеет место для $p \wedge \mathbb{R}^m$ в случае алгебры Ли $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$. Далее,

$$(p \wedge q) \cdot (w_+ \otimes u(1)) = 2w_+ \otimes u(1), \quad A(w_+ \otimes u(1)) = A(w_+) \otimes u(1)$$

для всех $w_+ \in \Delta_n$ и $A \in \mathfrak{so}(n)$. Это показывает, что все $\mathfrak{g}$-инвариантные одномерные подпространства модуля $\Delta_{1,n+1}$ имеют вид $l \otimes u(1)$, где $l \subset \Delta_n$ — $\mathfrak{h}$-инвариантное одномерное подпространство. Теорема верна. $\square$

Рассмотрим пример. Пусть (M, g) — односвязное спинорное лоренцево многообразие с алгеброй голономии $\mathfrak{g} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}) \ltimes \mathbb{R}^n$, где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — алгебра голономии риманова многообразия, допускающего ненулевое параллельное спинорное поле. Согласно теореме 2.2.4, на (M, g) локально существует рекуррентное спинорное поле s (рассматривая достаточно малое подмножество многообразия (M, g), можем предполагать, что s определено глобально). Предположение об алгебре $\mathfrak{h}$ и доказательство теоремы 2.2.4 показывают, что соответствующая 1-форма θ — вещественнозначная. Тот факт, что многообразие с алгеброй голономии $\mathfrak{g}$ не допускает никакое ненулевое параллельное векторное поле и равенство (2.21) показывают, что $d\theta \neq 0$. Таким образом, утверждение теоремы 1 из [69], упомянутое во введении, не имеет место для лоренцевых многообразий.

2.2.4. Псевдоримановы многообразия с неприводимыми алгебрами голономии

Теорема 2.2.5. *Пусть (M, g) — односвязное спинорное псевдориманово многообразие сигнатуры (r, s) с неприводимой алгеброй голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(r, s)$. Тогда спинорное расслоение S этого многообразия допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда алгебра голономии $\mathfrak{h}$ — одна из $\mathfrak{u}(\frac{r}{2}, \frac{s}{2})$, $\mathfrak{su}(\frac{r}{2}, \frac{s}{2})$, $\mathfrak{sp}(\frac{r}{4}, \frac{s}{2})$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $G^*_{2(2)} \subset \mathfrak{so}(3, 4)$, $G_2^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{so}(7, 7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$, $\mathfrak{spin}(3, 4) \subset \mathfrak{so}(4, 4)$, $\mathfrak{spin}(7, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(8, 8)$, или (M, g) — локально симметрическое псевдокэлерово многообразие.*

Доказательство. Напомним, что неприводимые алгебры голономии односвязных псевдоримановых многообразий (M, g), допускающих ненулевые параллельные спинорные поля, исчерпываются алгебрами $\mathfrak{su}(\frac{r}{2}, \frac{s}{2})$,

$\mathfrak{sp}(\frac{r}{4},\frac{s}{2})$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $G^*_{2(2)} \subset \mathfrak{so}(3,4)$, $G_2^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{so}(7,7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$, $\mathfrak{spin}(3,4) \subset \mathfrak{so}(4,4)$, $\mathfrak{spin}(7,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(8,8)$ [19]. Из результатов [12] следует, что многообразия с каждой из этих алгебр голономии являются Риччи-плоскими.

Предположим, что многообразие (M,g) не является Риччи-плоским, а его спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение l. Пусть s — локальное сечение расслоения l, определенное в окрестности некоторой точки $y \in M$. Уравнение (2.16) влечет

$$R^S_y(X,Y)s_y = (d\theta)_y(X,Y)s_y \tag{2.22}$$

для всех $X,Y \in T_yM$. Здесь R^S — тензор кривизны связности ∇^S. Это уравнение показывает, что $R^S_y(X,Y)$ действует на l_y как умножение на комплексные числа. Из теоремы Амброза-Зингера следует, что алгебра голономии $\mathfrak{h}_x$, $x \in M$, многообразия (M,g) действует на l_x как умножение на комплексные числа, и это действие — нетривиально. Поскольку подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(r,s)$ — неприводима, она является редуктивной алгеброй Ли. Поэтому $\mathfrak{h}$ содержит некоторый коммутативный идеал. Согласно лемме Шура, этот идеал порожден комплексной структурой $J \in \mathfrak{u}(\frac{r}{2},\frac{s}{2})$, следовательно $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}(\frac{r}{2},\frac{s}{2})$. Так как $\mathfrak{su}(\frac{r}{2},\frac{s}{2})$ обнуляет два комплексных одномерных подпространства в $\Delta_{r,s}$ [19], то $\mathfrak{u}(\frac{r}{2},\frac{s}{2})$ сохраняет эти два подпространства. Следовательно, спинорное расслоение каждого псевдокэлерова многообразия допускает по крайней мере два параллельных одномерных комплексных подрасслоения. ☐

Следствие 2.2.3. *Пусть (M,g) — односвязное спинорное псевдориманово многообразие с неприводимой алгеброй голономии и без ненулевых параллельных спинорных полей. Тогда спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда (M,g) — псевдокэлерово многообразие, не являющееся Риччи-плоским.*

Теорема 2.2.6. *Пусть (M,g) — односвязное спинорное псевдокэлерово многообразие, не являющееся Риччи-плоским, с неприводимой алгеброй голономии. Тогда его спинорное расслоение S допускает в точности два парал-*

лельных одномерных комплексных подрасслоения.

Доказательство. Пусть (M, g) — односвязное спинорное псевдориманово многообразие, не являющееся Риччи-плоским, с неприводимой алгеброй голономии. Предположим, что спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение l. Пусть s — локальное сечение расслоения l, т.е. s — рекуррентное спинорное поле. В доказательстве теоремы 2.2.5 мы видели, что $\mathfrak{h}$ содержит одномерный коммутативный идеал, порожденный комплексной структурой $J \in \mathfrak{u}(\frac{r}{2}, \frac{s}{2})$, а в уравнении (2.22) действие эндоморфизма $R_x(X, Y)$ на s_x совпадает с действием его проекции $\mathbb{R}J \subset \mathfrak{h}_x$. Следовательно, уравнение (2.22) влечет равенство $(d\theta(X, Y))^2 = -a(X, Y)^2$, $a(X, y) \in \mathbb{R}$, т.е. $d\theta = \mathrm{i}\omega$ для некоторой вещественнозначной 2-формы ω на многообразии M.

Будем следовать идеям из [122] и [93]. Вычисления аналогичные вычислениям из леммы 3.1 из [122] и теоремы 2 из [69] влекут уравнение

$$\mathrm{Ric}(X) \cdot s = \mathrm{i}(X \lrcorner \omega) \cdot s \tag{2.23}$$

для всех векторных полей X. Здесь Ric — оператор Риччи. Рассмотрим распределение T и E, определяемые следующим образом:

$$T_x = \{X \in T_xM | X \cdot s_x = 0\},$$

$$E_x = \{X \in T_xM | \exists Y \in T_xM,\ X \cdot s_x = \mathrm{i}Y \cdot s_x\}.$$

Поскольку мы выбрали s в некоторой окрестности произвольной точки многообразия, и любые два таких спинорных поля пропорциональны в пересечении областей их определения, то распределения T и E определены глобально на M. Мы утверждаем, что оба распределения — параллельны. Пусть $X \in \Gamma(T)$, тогда для каждого локального векторного поля Z имеем

$$(\nabla_Z X) \cdot s = \nabla^S_Z(X \cdot s) - X \cdot (\nabla^S_Z s) = 0 - X \cdot (\theta(Z)s) = -\theta(Z)(X \cdot s) = 0,$$

т.е. T — параллельно. Пусть $X \in \Gamma(E)$, тогда существует локальное векторное поле Y такое, что $X \cdot s = \mathrm{i}Y \cdot s$. Для произвольного локального векторного поля Z имеем

$$(\nabla_Z X)\cdot s = \nabla^S_Z(X\cdot s) - X\cdot(\nabla^S_Z s) = \nabla^S_Z(\mathrm{i}Y\cdot s) - X\cdot(\theta(Z)s)$$

$$= \mathrm{i}(\nabla_Z Y + \theta(Z)Y - \theta(Z)Y)\cdot s = \mathrm{i}(\nabla_Z Y)\cdot s,$$

т.е. E — параллельно. Так как $\mathrm{Ric} \neq 0$ и $w = id\theta \neq 0$, то равенство (2.23) показывает, что $T \neq TM$ и $E \neq 0$. Так как алгебра голономии многообразия (M, g) неприводима, имеем $T = 0$ и $E = TM$. Таким образом, для каждого локального векторного поля X существует единственное локальное векторное поле Y такое, что $X\cdot s = \mathrm{i}Y\cdot s$. Это определяет эндоморфизм касательного расслоения I такой, что

$$X\cdot s = \mathrm{i}I(X)\cdot s. \tag{2.24}$$

Следовательно,

$$X\cdot s = \mathrm{i}I(X)\cdot s = -I^2(X)\cdot s, \quad (X + I^2(X))\cdot s = 0.$$

Так как $T = 0$, то $I^2(X) = -X$, т.е. I — почти комплексная структура на M. Покажем, что I — g-ортогональная структура. Имеем

$$2g(I(X), I(Y))s = I(X)\cdot I(Y)\cdot s + I(Y)\cdot I(X)\cdot s = -\mathrm{i}(I(X)\cdot Y\cdot s + I(Y)\cdot X\cdot s)$$
$$= -\mathrm{i}(2g(I(X), Y)s - Y\cdot I(X)\cdot s + 2g(X, I(Y))s - X\cdot I(Y)\cdot s)$$
$$= X\cdot Y\cdot s + Y\cdot X\cdot s - 2\mathrm{i}(g(I(X), Y) + g(X, I(Y)))s$$
$$= 2g(X, Y)s - 2\mathrm{i}(g(I(X), Y) + g(X, I(Y)))s.$$

Это влечет $g(I(X), I(Y)) = g(X, Y)$. Далее, мы утверждаем, что структура I — параллельная. В самом деле, (2.24) влечет следующее равенство для всех векторных полей X и Y:

$$\nabla_Y X\cdot s + X\cdot\theta(Y)\cdot s = \mathrm{i}\nabla_Y(IX)\cdot s + \mathrm{i}I(X)\cdot\theta(Y)\cdot s.$$

Следовательно,

$$\theta(Y)X\cdot s = \mathrm{i}\nabla_Y(IX)\cdot s.$$

Используя это и равенство (2.24), примененное к $\nabla_Y X$, получим

$$0 = \mathrm{i}(\nabla_Y(IX) - I(\nabla_Y X)) \cdot s.$$

Это показывает, что $\nabla_Y(IX) - I(\nabla_Y X) \in \Gamma(T)$. Следовательно, $\nabla_Y(IX) - I(\nabla_Y X) = 0$, т.е. $\nabla I = 0$. Таким образом, s определяет кэлерову структуру I. Отметим, что это дает другое доказательство теоремы 2.2.5.

Предположим, что имеется два рекуррентных спинорных поля s и s_1. Эти поля определяют кэлеровы структуры I и I_1, удовлетворяющие (2.24) для s и s_1 соответственно. Так как I и I_1 параллельны, то их значения I_x и I_{1x} в произвольной точке $x \in M$ коммутируют с алгеброй голономии $\mathfrak{h}_x \subset \mathfrak{so}(T_xM, g_x) \simeq \mathfrak{so}(r,s)$. Так как $\mathfrak{h}_x \subset \mathfrak{so}(T_xM, g_x)$ — неприводима, то согласно лемме Шура, централизатор алгебры Ли $\mathfrak{h}_x$ в $\mathfrak{so}(T_xM, g_x)$ изоморфен либо $\mathrm{i}\mathbb{R}$, либо $\mathfrak{sp}(1)$. В последнем случае, $\mathfrak{h}_x$ должна содержаться в $\mathfrak{sp}(\frac{r}{4}, \frac{s}{4})$. Это дает противоречие, поскольку многообразия с такими алгебрами голономии являются Риччи-плоскими. Заключаем, что $I_x = \alpha I_{1x}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. Так как $I_x^2 = I_{1x}^2 = -\mathrm{id}$, то $\alpha = \pm 1$. Поскольку оба тензорных поля I и I_1 — параллельны, то $I = \alpha I_1$.

Предположим, что $I = I_1$. Пусть Ω — псевдокэлерова форма, соответствующая структуре I. Пусть $e_1, ..., e_m, Ie_1, ..., Ie_m$ $(r + s = n = 2m)$ — локальный ортонормированный базис пространства $\Gamma(TM)$, т.е. $g(e_i, e_i) = g(Ie_i, Ie_i) = k_i$. где $k_i = -1$ для $i = 1, ..., \frac{r}{2}$, и $k_i = 1$ для $i = \frac{r}{2} + 1, ..., m$. Пусть $e^1, ..., e^m, (Ie)^1, ..., (Ie)^m$ — двойственный базис пространства $\Gamma(TM)$. Тогда

$$\Omega = -\sum_{i=1}^{m} k_i (Ie)^i \wedge e^i.$$

Используя это и (2.24), получаем

$$\Omega \cdot s = -\sum_{i=1}^{m} k_i (Ie_i) \cdot e_i \cdot s = -\mathrm{i} \sum_{i=1}^{m} k_i (Ie_i) \cdot (Ie_i) \cdot s = -\mathrm{i} m s.$$

Аналогично, $\Omega \cdot s_1 = -\mathrm{i} m s_1$. Напомним, что имеет место следующее разложение спинорного разложения S псевдокэлерова многообразия:

$$S=\sum_{k=0}^{m} S_k, \quad (S_k)_x \simeq \Lambda^k\mathbb{C}^m,$$

где S_k — собственное пространство, соответствующее собственному значению $(m-2k)\mathrm{i}$ оператора умножения Клиффорда на форму Ω. Получаем, что $s, s_1 \in S_m$. Так как S_m — расслоение ранга 1, то s и s_1 — пропорциональны и принадлежат одному одномерному параллельному подрасслоению расслоения S. Выше мы видели, что S допускает по крайней мере два параллельные одномерные комплексные подрасслоения. Теперь ясно, что имеется в точности два таких подрасслоения, второе из них соответствует кэлеровой структуре $-I$ (и совпадает с расслоением S_0 ранга 1).

2.2.5. Псевдоримановы многообразия нейтральной сигнатуры

Теорема 2.2.7. *Пусть (M,g) — односвязное спинорное псевдориманово многообразие нейтральной сигнатуры (n,n), допускающее два взаимно дополнительные параллельные изотропные распределения. Тогда спинорное расслоение S многообразия (M,g) допускает одномерное комплексное подрасслоение.*

Доказательство. Касательное пространство такого многообразия можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^{n,n}$ и оно допускает разложение $\mathbb{R}^{n,n}=W\oplus W_1$, где $W, W_1\subset\mathbb{R}^{n,n}$ — изотропные подпространства. Алгебра голономии такого многообразия имеет вид

$$\widetilde{\mathfrak{h}}=\left\{A=\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & -B^T\end{pmatrix}\middle| B\in\mathfrak{h}\right\}, \tag{2.25}$$

где $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ — подалгебра, совпадающая с ограничением представления $\widetilde{\mathfrak{h}}$ на W. В [92] показано, что $\widetilde{\mathfrak{h}}$ обнуляет некоторый элемент в $\Delta_{n,n}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$. Также показано, что элемент $A\in\widetilde{\mathfrak{h}}$ действует в

$\Delta_{n,n}$ как

$$\frac{1}{2}n\cdot+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(e_i^*\cdot A(e_i)-A(e_i^*)\cdot e_i)\cdot,$$

где $e_1,...,e_n$ и $e_1^*,...,e_n^*$ — базисы пространств W и W_1 такие, что $g(e_i,e_j^*)=\delta_{ij}$. Следовательно, $A_0=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & -E\end{pmatrix}$ действует в $\Delta_{n,n}$ как умножение на n. Так как алгебра Ли $\widetilde{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})}$ обнуляет некоторый ненулевой элемент в $\Delta_{n,n}$, то алгебра Ли $\widetilde{\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})}=\widetilde{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})}\oplus\mathbb{R}A_0$ сохраняет соответствующую прямую в $\Delta_{n,n}$. Это доказывает теорему. ☐

2.2.6. Связь с параллельными спинорными полями *spin*^{C}-расслоений

Пусть (M,g) — односвязное спинорное риманово многообразие с алгеброй голономии $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(p,q)$ и спинорным расслоением S. Пусть S^C — *spin*^{C}-расслоение на (M,g), определенное комплексным расслоением прямых L над (M,g) с формой связности $\mathrm{i}A$ и алгеброй голономии $\mathfrak{h}_L\subset\mathrm{i}\mathbb{R}$. Алгебра голономии $\widehat{\mathfrak{h}}$ индуцированной связности на S^C содержится в $\lambda_*(\mathfrak{h})\oplus\mathrm{i}\mathbb{R}\subset\mathfrak{spin}(p,q)\oplus\mathrm{i}\mathbb{R}$. В [93] показано, что существование ненулевого параллельного спинорного поля в расслоении S^C эквивалентно существованию ненулевого спинора $v\in\Delta_{p,q}$ такого, что $\xi\cdot v=\mathrm{i}tv$ для всех $(\xi,\mathrm{i}t)\in\widehat{\mathfrak{h}}$. Следовательно, существование ненулевого параллельного спинорного поля в S^C влечет существование параллельного одномерного комплексного подрасслоения S. В общем случае, обратное утверждение, вообще говоря, не имеет место. Например, в случае лоренцевых многообразий, существование ненулевого параллельного спинорного поля в S^C влечет существование ненулевого параллельного векторного поля на многообразии (M,g) [94], в то же время, выше мы видели, что существуют лоренцевы многообразия, допускающие ненулевые рекуррентные спинорные поля и, вместе с тем, не допускающие ненулевые параллельные векторные поля.

2.3. Конформно плоские лоренцевы многообразия со специальными группами голономии

В этом параграфе будет получена локальная классификация конформно плоских лоренцевых многообразий со специальными группами голономии. Соответствующие локальные метрики представляют собой некоторые расширения римановых метрик постоянной секционной кривизны до метрик Волкера. Этот результат опубликован в [153, 162].

2.3.1. Результаты

Известно [106], что конформно плоское риманово многообразие либо является произведением двух пространств постоянной секционной кривизны, либо произведением пространства постоянной секционной кривизны и интервала, либо ограниченная группа голономии этого многообразия совпадает с компонентой связности единицы ортогональной группы. Последнее условие представляет собой наиболее общую ситуацию, среди разнообразных многообразий, удовлетворяющих этому условию, можно выделить только пространства постоянной секционной кривизны. Ясно, что не существует конформно плоских римановых многообразий со специальными группами голономии.

Главным результатом настоящего параграфа является полное локальное описание конформно плоских лоренцевых многообразий (M, g) со слабо неприводимыми, не являющимися неприводимыми, группами голономии.

На многообразии Волкера (M, g) определим каноническую функцию λ, исходя из равенства

$$\operatorname{Ric} p = \lambda p,$$

где Ric – оператор Риччи. Если метрика g записана в виде (1.12), то $\lambda = \frac{1}{2}\partial_v^2 H$, и скалярная кривизна метрики g удовлетворяет

$$s = 2\lambda + s_0,$$

где s_0 – скалярная кривизна метрики h. Вид конформно плоской метрики

Волкера будет зависеть от обращения в ноль функции λ. В общем случае получаем следующий результат.

Теорема 2.3.1. *Пусть* (M,g) – *конформно плоское многообразие Волкера (т.е. с нулевым тензором кривизны Вейля) размерности* $n+2\geq 4$. *Тогда в некоторой окрестности каждой точки* M *существуют координаты* $v,x^1,...,x^n,u$ *такие, что*

$$g=2dvdu+\Psi\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2+2Adu+(\lambda(u)v^2+vH_1+H_0)(du)^2,$$

где

$$\begin{aligned}
\Psi&=\frac{4}{\left(1-\lambda(u)\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2\right)^2},\\
A&=A_idx^i,\quad A_i=\Psi\left(-4C_k(u)x^kx^i+2C_i(u)\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2\right),\\
H_1&=-4C_k(u)x^k\sqrt{\Psi}-\partial_u\ln\Psi+K(u),
\end{aligned}$$

$$H_0(x^1,...,x^n,u)$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{\lambda^2(u)}\Psi\sum_{k=1}^{n}C_k^2(u)+\sqrt{\Psi}\left(a(u)\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2+D_k(u)x^k+D(u)\right),\\ \text{если } \lambda(u)\neq 0,\\ 16\left(\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2\right)^2\sum_{k=1}^{n}C_k^2(u)+\tilde{a}(u)\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2+\tilde{D}_k(u)x^k+\tilde{D}(u),\\ \text{если } \lambda(u)=0\end{cases}$$

для некоторых функций $\lambda(u)$, $a(u)$, $\tilde{a}(u)$, $C_i(u)$, $D_i(u)$, $D(u)$, $\tilde{D}_i(u)$, $\tilde{D}(u)$.

Скалярная кривизна метрики g *равна* $-(n-2)(n+1)\lambda(u)$.

Если функция λ равна нулю на некотором открытом множестве, или не обращается в ноль, то метрика, полученная выше, может быть упрощена.

Теорема 2.3.2. *Пусть* (M,g) – *конформно плоское многообразие Волкера размерности* $n+2\geq 4$.

1) *если функция* λ *не равна нулю в некоторой точке многообразия, то в некоторой окрестности этой точки существуют координаты*

$v, x^1, ..., x^n, u$ такие, что

$$g = 2dvdu + \Psi\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + (\lambda(u)v^2 + vH_1 + H_0)(du)^2,$$

где

$$\Psi = \frac{4}{(1-\lambda(u)\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2)^2},$$

$$H_1 = -\partial_u \ln\Psi, \quad H_0 = \sqrt{\Psi}\left(a(u)\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2 + D_k(u)x^k + D(u)\right).$$

2) Если $\lambda \equiv 0$ в некоторой окрестности некоторой точки многообразия, то в окрестности этой точки существуют координаты $v, x^1, ..., x^n, u$ такие, что

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + 2Adu + (vH_1 + H_0)(du)^2,$$

где

$$A = A_i dx^i, \quad A_i = C_i(u)\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2, \quad H_1 = -2C_k(u)x^k$$

$$H_0 = \sum_{k=1}^{n}(x^k)^2\left(\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2\sum_{k=1}^{n}C_k^2(u) - (C_k(u)x^k)^2 + \dot{C}_k(u)x^k + a(u)\right) + D_k(u)x^k + D(u).$$

В частности, если все $C_i \equiv 0$, то метрика может быть записана в виде

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + a(u)\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2(du)^2. \tag{2.26}$$

Таким образом, теорема 2.3.2 дает локальный вид конформно плоской метрики Волкера в окрестностях точек, где λ не обращается в ноль или тождественно равна нулю. Такие точки представляют собой всюду плотное подмножество многообразия. Теорема 2.3.1 описывает также метрику в окрестностях тех точек, где функция λ обращается в ноль, но не является локально нулевой, например, в окрестностях изолированных нулевых точек функции λ.

Далее, мы находим алгебры голономии полученных метрик и проверяем, какие из метрик – разложимы.

Теорема 2.3.3. *Пусть* (M, g) *– как в теореме 2.3.1.*

1) *Многообразие* (M, g) *– локально неразложимо тогда и только тогда, когда существует система координат, удовлетворяющая одному из следующих условий:*

- $\dot{\lambda} \not\equiv 0$,
- $\dot{\lambda} \equiv 0$, $\lambda \neq 0$, *т.е.* g *может быть записана как в первой части теоремы 2.3.2, и* $\sum_{k=1}^{n} D_k^2 + (a + \lambda D)^2 \not\equiv 0$,
- $\lambda \equiv 0$, *т.е.* g *может быть записана как во второй части теоремы 2.3.2, и* $\sum_{k=1}^{n} C_k^2 + a^2 \not\equiv 0$.

В противном случае, метрика может быть записана в виде

$$g = \Psi \sum_{k=1}^{n} (dx^k)^2 + 2dvdu + \lambda v^2 (du)^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Алгебра голономии этой метрики тривиальна тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$. *Если* $\lambda \neq 0$, *то алгебра голономии изоморфна* $\mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{so}(1,1)$.

2) *Предположим, что многообразие* (M, g) *– локально неразложимо. Тогда его алгебра изоморфна* $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda^2 + \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \equiv 0$ *для каждой системы координат; в этом случае,* (M, g) *– плоская гравитационная волна, а* g *дана формулой* (2.26). *Если для каждой системы координат имеем* $\lambda^2 + \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \not\equiv 0$, *то алгебра голономии изоморфна* $\mathfrak{sim}(n)$.

В пункте 2.3.2 мы распространяем результат Куриты [106] на случай псевдоримановых многообразий. В пункте 2.3.3 приводятся выражения для тензора кривизны и конформного тензора кривизны Вейля W метрики Волкера. Пункты 2.3.4, 2.3.5 и 2.3.6 посвящены доказательствам основных теорем. Мы записываем уравнение $W = 0$ в виде системы дифференциальных уравнений с частными производными и находим подходящие системы координат так, что возможно получить полное решение этой системы. В пункте 2.3.7 найден оператор Риччи полученных метрик.

В пункте 2.3.8 рассмотрен случай многообразий размерности 4. Возможные алгебры голономии конформно плоских лоренцевых многообразий размерности 4 найдены в [79]. Метрика (2.26) в размерности 4 получена в [143]. В статье [79] была обозначена проблема построения примера конформно плоской метрики с алгеброй голономии $\mathfrak{sim}(2)$ (эта алгебра в [79] обозначена через R_{14}). Попытка построить такую метрику была сделана в [71]. Мы показываем, что метрика, построенная там, в действительности является разложимой, а ее алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{so}(1,1) \oplus \mathfrak{so}(2)$. Таким образом, в настоящей работе мы впервые получаем конформно плоскую метрику с алгеброй голономии $\mathfrak{sim}(n)$, и более того, мы находим все такие метрики.

Полевое уравнение теории гравитации Нордстрема, которая была создана до теории Эйнштейна, имеет вид:

$$W = 0, \quad s = 0,$$

см. [125, 130, 47]. Все метрики из теоремы 2.3.1 в размерности 4 и метрики из второй части теоремы 2.3.2 для бо́льших размерностей дают примеры решения этих уравнений. Таким образом, мы нашли все решения теории гравитации Нордстрема с алгебрами голономии, содержащимися в $\mathfrak{sim}(n)$. Аналогично, уравнение Эйнштейна на лоренцевых многообразиях с такими алгебрами голономии изучалось в [72]. В этом случае невозможно получит полное решение, однако примеры решений имеют интересные физические интерпретации [72].

Важно отметить, что односвязные конформно плоские лоренцевы спинорные многообразия допускают пространства конформных спиноров Киллинга максимально возможной размерности [20].

Было бы интересно получить примеры конформно плоских лоренцевых многообразий, имеющих какие-либо глобальные геометрические свойства, например, важными являются конструкции глобально гиперболических лоренцевых многообразий со специальными группами голономии [24].

Проективная эквивалентность 4-мерных конформно плоских лоренцевых метрик со специальными алгебрами голономии изучалась недавно в [81]. Имеется много интересных работ о конформно плоских (псевдо)римановых, в частности, лоренцевых многообразиях. Отметим лишь некоторые из них [7, 101, 134, 65, 85, 86, 87].

Результаты этого параграфа были использованы в [163] для классификации лоренцевых многообразий, удовлетворяющих условию $\nabla^2 R = 0$.

2.3.2. Разложимость конформно плоских псевдоримановых многообразий

Курита [106] доказал следующую теорему для случая римановых многообразий.

Теорема 2.3.4. *Пусть (M, g) – n-мерное конформно плоское риманово многообразие. Тогда его локальная ограниченная группа голономии H_x $(x \in M)$ в общем случае совпадает с $\mathrm{SO}(n)$. Если $H_x \neq \mathrm{SO}(n)$, то для некоторой координатной окрестности U точки x имеет место одно из следующих утверждений:*

1) *H_x – тривиально, а метрика – плоская в U;*
2) *$H_x = \mathrm{SO}(k) \times \mathrm{SO}(n-k)$ и U – прямое произведение некоторого k-мерного многообразия постоянной секционной кривизны K и некоторого $(n-k)$-мерного многообразия постоянной секционной кривизны $-K$ $(K \neq 0)$;*
3) *$H_x = \mathrm{SO}(n-1)$, и U – прямое произведение прямой (или интервала) и некоторого $(n-1)$-мерного многообразия постоянной секционной кривизны.*

Мы обобщаем эту теорему для случая псевдоримановых многообразий, мы также даем более точную формулировку этой теоремы.

Теорема 2.3.5. *Пусть* (M, g) – *конформно плоское псевдориманово многообразие сигнатуры* (r, s) *с ограниченной группой голономии* $\mathrm{Hol}^0(M, g)$*. Если* (M, g) *не является плоским, то имеет место одно из следующих утверждений:*

1) $\mathrm{Hol}^0(M, g) = \mathrm{SO}(r, s)$*;*

2) $\mathrm{Hol}^0(M, g)$ *является слабо неприводимой и не является неприводимой (в частности, она сохраняет некоторое вырожденное подпространство касательного пространства);*

3) $\mathrm{Hol}^0(M, g) = \mathrm{SO}(r_1, s_1) \times \mathrm{SO}(r - r_1, s - s_1)$*, и каждая точка* $x \in M$ *имеет окрестность, которая либо плоская, либо представляет собой произведение некоторого псевдориманова многообразия постоянной секционной кривизны* K *и сигнатуры* (r_1, s_1)*, и некоторого псевдориманова многообразия постоянной секционной кривизны* $-K$ *(*$K \neq 0$*) и сигнатуры* $(r - r_1, s - s_1)$*;*

4) $\mathrm{Hol}^0(M, g) = \mathrm{SO}(r - 1, s)$ *(соответственно* $\mathrm{Hol}^0(M, g) = \mathrm{SO}(r, s - 1)$*), и каждая точка* $x \in M$ *имеет окрестность, которая либо является плоской, либо представляет собой произведение псевдориманова многообразия постоянной секционной кривизны и сигнатуры* $(r - 1, s)$ *(соответственно* $(r, s - 1)$*) и пространства* $(L, -(dt)^2)$ *(соответственно* $(L, (dt)^2)$*), где* L – *прямая или интервал.*

Доказательство. Пусть (M, g) – псевдориманово многообразие сигнатуры (r, s) и размерности $d = r + s$. Векторное расслоение $\mathfrak{so}(TM)$ кососимметрических эндоморфизмов касательного расслоения TM можно отождествить с пространством бивекторов $\wedge^2 TM$, таким образом, что

$$(X \wedge Y)Z = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X$$

для всех векторных полей X, Y, Z на M. Тензор Вейля W псевдориманова многообразия (M, g) определяется равенством

$$W = R + R_L, \tag{2.27}$$

где тензор R_L имеет вид

$$R_L(X,Y) = LX \wedge Y + X \wedge LY, \tag{2.28}$$

$$L = \frac{1}{d-2}\left(\operatorname{Ric} - \frac{s}{2(d-1)}\operatorname{id}\right)$$

– тензор Скоутена, а s – скалярная кривизна.

Предположим, что ограниченная группа голономии $\mathrm{Hol}^0(M, g)$ не является слабо неприводимой. Теорема Ву о разложении [149] утверждает, что каждая точка многообразия M имеет окрестность U, такую, что $(U, g|_U)$ является произведением

$$(U, g|_U) = (M_1 \times M_2, g_1 + g_2)$$

двух псевдоримановых многообразий (M_1, g_1) и (M_2, g_2). Пусть d_1 и d_2 – размерности этих многообразий. Для тензоров кривизны, операторов Риччи и скалярных кривизн имеем

$$R = R_1 + R_2, \quad \operatorname{Ric} = \operatorname{Ric}_1 + \operatorname{Ric}_2, \quad s = s_1 + s_2.$$

Сначала предположим, что $d \geq 4$. В этом случае $W = 0$, и имеем

$$R_1 + R_2 = -R_L. \tag{2.29}$$

Предположим, что $d_1 \geq d_2$ и $d_1 \geq 2$. Тензор кривизны R_1 может быть записан в виде $R_1 = W_1 - R_{L_1}$. Рассматривая равенство (2.29), ограниченное на TM_1, мы получаем $W_1 = 0$ и

$$\frac{1}{d_1-2}\left(\operatorname{Ric}_1 - \frac{s_1}{2(d_1-1)}\operatorname{id}\right) = \frac{1}{d-2}\left(\operatorname{Ric}_1 - \frac{s_1+s_2}{2(d-1)}\operatorname{id}\right). \tag{2.30}$$

Если $d_2 \geq 2$, то, взяв след в (2.30), получим

$$\frac{s_1}{d_1(d_1-1)} = -\frac{s_2}{d_2(d_2-1)}.$$

Поскольку s_1 – функция на M_1, а s_2 – функция на M_2, то обе функции должны быть постоянными. Подставляя последнее равенство назад в (2.30), получаем

$$\mathrm{Ric}_1 = \frac{s_1}{d_1}\,\mathrm{id}\,. \tag{2.31}$$

Далее,

$$R_1(X,Y) = \frac{s_1}{d_1(d_1-1)} X \wedge Y. \tag{2.32}$$

Тоже самое верно для второго многообразия. Для секционных кривизн получаем

$$k_1 = \frac{s_1}{d_1(d_1-1)} = -\frac{s_2}{d_2(d_2-1)} = -k_2.$$

Если $d_2 = 1$, то (2.30) эквивалентно (2.31), и это влечет (2.32). Из теоремы Шура следует, что k_1 – постоянная. Если $d_1 = 2$, то тензор кривизны R_1 удовлетворяет $R_1(X,Y) = fX \wedge Y$ для некоторой функции f на M_1. Доказательство в этом случае такое же как и выше.

Если $d = 3$, то $d_1 = 2$ и $d_2 = 1$. Имеем $R = R_1$ и $R_1(X,Y) = fX \wedge Y$ для некоторой функции f и M_1. В этом случае, (M,g) – конформно плоское тогда и только тогда, когда тензор Коттона C, определяемый равенством

$$C(X,Y,Z) = g((\nabla_Z L)X, Y) - g((\nabla_Y L)X, Z),$$

равен нулю. Это влечет, что функция f – постоянна, т.е. (M_1, g_1) – многообразие постоянной секционной кривизны.

Остается доказать, что если $\mathrm{Hol}^0(M,g)$ – неприводима, то она совпадает с $\mathrm{SO}(r,s)$. Предположим, что $\mathrm{Hol}^0(M,g)$ – неприводима и отлична от $\mathrm{SO}(r,s)$ и $\mathrm{U}(\frac{r}{2},\frac{s}{2})$. Тогда рассматриваемое многообразие является многообразием Эйнштейна [44]. Поскольку (M,g) является также конформно плоским, то (M,g) – многообразие постоянной секционной кривизны, и его связная группа голономии либо тривиальна, либо совпадает с $\mathrm{SO}(r,s)$, т.е. мы получаем противоречие. Известно, что если псевдокэлерово многообразие является конформно плоским, то оно является плоским [150], следовательно $\mathrm{Hol}^0(M,g) \neq \mathrm{U}(\frac{r}{2},\frac{s}{2})$. Это доказывает теорему 2.3.5. □

2.3.3. Тензор конформной кривизны Вейля метрик Волкера

Для доказательства теоремы 2.3.1 нам потребуется некоторая информация о тензоре кривизны метрики Волкера (1.12). Будем использовать обозначения пункта 1.3.2. Для тензора R_L, определенного выше, имеем

$$R_L(p,X) = \frac{1}{n} p \wedge \left(\mathrm{Ric}(h) + \frac{(n-1)\lambda - s_0}{n+1}\,\mathrm{id} \right) X, \tag{2.33}$$

$$R_L(p,q) = \frac{1}{n}\left(\frac{2n\lambda - s_0}{n+1} p \wedge q + p \wedge (\vec{v} - \widetilde{\mathrm{Ric}}\, P) \right), \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} R_L(X,Y) = \frac{1}{n}\Big(& p \wedge (g(X, \vec{v} - \widetilde{\mathrm{Ric}}\, P)Y - g(Y, \vec{v} - \widetilde{\mathrm{Ric}}\, P)X) \\ & + \left(\mathrm{Ric}(h) - \frac{s}{2(n+1)} \right) X \wedge Y + X \wedge \left(\mathrm{Ric}(h) - \frac{s}{2(n+1)} \right) Y \Big), \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} R_L(X,q) = \frac{1}{n}\Big(& (\mathrm{tr}\, T) p \wedge X + g(X, \vec{v} - \widetilde{\mathrm{Ric}}\, P) p \wedge q + X \wedge (\vec{v} - \widetilde{\mathrm{Ric}}\, P) \\ & + \left(\mathrm{Ric}(h) + \frac{(n-1)\lambda - s_0}{n+1}\,\mathrm{id} \right) X \wedge q \Big). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Тензор Вейля W можно вычислить используя это, формулы пункта 1.3.2 и (2.27).

2.3.4. Доказательство теоремы 2.3.1

Предположим, что (M,g) – многообразие Волкера, т.е. его алгебра голономии содержится в $\mathfrak{sim}(n)$. Локальный вид метрики g дан формулой (1.12). Предположим, что метрика g – конформно плоская, т.е. $W = 0$.

Лемма 2.3.1. *Уравнение $W = 0$ эквивалентно следующей системе уравнений:*

$$s_0 = -n(n-1)\lambda, \quad R_0 = -\frac{1}{2}\lambda R_{\mathrm{id}}, \quad P(X) = \vec{v} \wedge X, \quad T = f\,\mathrm{id}_E, \tag{2.37}$$

где X – произвольное сечение E, а f – некоторая функция. В частности, условие $W = 0$ влечет $\widetilde{\mathrm{Ric}}\, P = -(n-1)\vec{v}$, и равенство нулю тензора Вейля W_0 метрики h.

Доказательство. Предположим, что $W = 0$. Тогда, $R = -R_L$. Из (1.4) и (2.33) следует равенство $\mathrm{Ric}(h) = -\frac{(n-1)\lambda - s_0}{n+1}\,\mathrm{id}$. Взяв след, получим

$s_0 = -n(n-1)\lambda$. Следовательно, $\mathrm{Ric}(h) = \frac{s_0}{n}\,\mathrm{id}$, т.е. метрики h – эйнштейновы, и имеем

$$R_0 = W_0 - \frac{s_0}{2n(n-1)} R_{\mathrm{id}}.$$

Из (1.3) и (2.35) выплывает

$$R_0 + \frac{s_0}{2n(n-1)} R_{\mathrm{id}} = 0.$$

Заключаем, что $W_0 = 0$. Используя (1.4) и (2.36), получим $P(X) = -\frac{1}{n} X \wedge (\vec{v} - \widetilde{\mathrm{Ric}}\, P)$. Применяя $\widetilde{\mathrm{Ric}}$, получаем $\widetilde{\mathrm{Ric}}\, P = -(n-1)\vec{v}$. Следовательно, $P(X) = \vec{v} \wedge X$. Равенства (1.4) и (2.36) влекут $T(X) = \frac{1}{n}(\mathrm{tr}\, T)X$, т.е. $T = f\,\mathrm{id}$ для некоторой функции f. Обратно, (2.37) влечет равенство $W = 0$. ☐

Поскольку h не зависит от v, имеем $\partial_v \lambda = 0$. Из (1.17) следует, что

$$H = \lambda v^2 + H_1 v + H_0, \quad \partial_v H_1 = \partial_v H_0 = 0.$$

Из (1.18) вытекает, что компоненты тензора P не зависят от координаты v. Это, уравнение $P(X) = \vec{v} \wedge X$ и (1.17) влекут $\partial_i \partial_v^2 H = 0$, т.е. $\partial_i \lambda = 0$, следовательно s_0 и λ – функции зависящие только от u. Заметим, что для $n \geq 3$ это утверждение следует также из равенства $\mathrm{Ric}(h) = \frac{s_0}{n}\,\mathrm{id}$. Итак, каждая метрика в семействе $h(u)$ имеет постоянную секционную кривизну. Существует преобразование $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^k, u)$ координат $x^1, ..., x^n$, зависящее от параметра u такое, что относительно новых координат метрика h имеет вид

$$h = \Psi \sum_{k=1}^{n} (dx^k)^2, \quad \Psi = \frac{4}{\left(1 - \lambda(u) \sum_{k=1}^{n} (x^k)^2\right)^2}.$$

Рассматривая преобразование $\tilde{v} = v, \tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^k, u), \tilde{u} = u$, можем предполагать, что h в (1.12) имеет только что полученный вид.

Рассмотрим уравнение $T_{ij} = f\delta_{ij}$. Равенство (1.19) влечет $f = vf_1 + f_0$, $\partial_v f_1 = \partial_v f = 0$. Применяя ∂_v к $T_{ij} = f\delta_{ij}$, получим уравнения

$$f_1 \delta_{ij} = \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_j H_1 - \lambda(u) \frac{1}{2} (\nabla_i A_j + \nabla_j A_i).$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$\nabla_i Z_i = \nabla_j Z_j, \quad \nabla_i Z_j + \nabla_j Z_i = 0, \qquad i \neq j, \tag{2.38}$$

где

$$Z_i = \lambda A_i - \frac{1}{2}\partial_i H_1. \tag{2.39}$$

Заметим, что $\vec{v} = -Z_i h^{ij} X_j$. Символы Кристоффеля метрики h имеют следующий вид:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2\Psi}(\delta_{kj}\partial_i\Psi + \delta_{ki}\partial_j\Psi - \delta_{ij}\partial_k\Psi).$$

Используя это, полученные выше уравнения могут быть записаны в виде

$$\partial_i\left(\frac{Z_i}{\Psi}\right) = \partial_j\left(\frac{Z_j}{\Psi}\right), \quad \partial_i\left(\frac{Z_j}{\Psi}\right) + \partial_j\left(\frac{Z_i}{\Psi}\right) = 0, \quad i \neq j. \tag{2.40}$$

Рассмотрим отдельно случаи $n = 2$ и $n \geq 3$.

Случай $n \geq 3$.

Лемма 2.3.2. *Если $n \geq 3$, то общее решение системы*

$$\partial_i f_i = \partial_j f_j, \quad \partial_i f_j + \partial_j f_i = 0, \quad i \neq j$$

имеет вид

$$f_i = x^i B_k x^k - \frac{1}{2}B_i\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2 + d_{ik}x^k + cx^i + c_i,$$

где $B_i, c_i, c, d_{ik} \in \mathbb{R}$, $d_{ki} = -d_{ik}$.

Доказательство. Пусть индексы i, j, k попарно различны, тогда

$$\partial_i\partial_j f_k = -\partial_i\partial_k f_j = \partial_k\partial_j f_i = -\partial_i\partial_j f_k,$$

т.е. $\partial_i\partial_j f_k = 0$. Это показывает, что $f_k = \sum_{i\neq k} C_{ki}(x^i, x^k)$. Теперь эти функции нетрудно найти. ☐

Получаем

$$Z_i = \Psi\left(x^i B_k(u)x^k - \frac{1}{2}B_i(u)\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2 + d_{ik}(u)x^k + c(u)x^i + c_i(u)\right), \tag{2.41}$$

где $B_i(u), c_i(u), c(u), d_{ik}(u)$ – функции переменной u, и $d_{ki}(u) = -d_{ik}(u)$.

Только что решенная система уравнений близка к уравнению Киллинга для 1-форм:

$$\nabla_i Z_j + \nabla_j Z_i = 0.$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.3.3. *Каждое киллингово векторное поле в пространстве с метрикой* $\Psi \sum_{k=1}^{n}(dx^k)^2$ *имеет вид*

$$X = X^i \partial_i, \quad X^i = f_{ik}x^k - 2\lambda x^i c_k x^k + \lambda c_i \sum_{k=1}^{n}(x^k)^2 + c_i,$$

где $b_i, f_{ik} \in \mathbb{R}$, $f_{ki} = -f_{ik}$.

В зависимости от значения λ, упомянутая выше метрика является метрикой одного из пространств: сферы, пространства Лобачевского, евклидова пространства. Это соответствует тому, что алгебра Ли $\mathfrak{k}$ киллинговых векторных полей этих пространств соответственно изоморфна $\mathfrak{so}(n+1)$, $\mathfrak{so}(1,n)$, $\mathfrak{iso}(\mathbb{R}^n)$. Симметрическое разложение алгебры Ли $\mathfrak{k}$ имеет вид $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n) + \mathbb{R}^n$. Векторные поля, определяемые числами f_{ik}, соответствуют элементам $\mathfrak{so}(n)$, векторные поля определяемые числами c_i, соответствуют элементам $\mathbb{R}^n$.

Доказательство леммы 2.3.3. Рассмотрим киллингову 1-форму $Z_i = h_{ij}X^j$. Кроме уравнений (2.38) она удовлетворяет уравнениям $\nabla_i Z_i = 0$. Эти уравнения имеют вид

$$\partial_i \left(\frac{Z_i}{\Psi}\right) = -\frac{1}{2\Psi^2}\sum_{k=1}^{n} Z_k \partial_k \Psi.$$

Это влечет $Z_i = \Psi f_i$, где f_i – как в лемме 2.3.2 с $c = 0$ и $B_k = -2\lambda c_k$. Лемма верна. ☐

Из (2.39) следует

$$\begin{aligned}\lambda F_{ij} &= \partial_i Z_j - \partial_j Z_i \\ &= \Psi^{\frac{3}{2}}\big((B_i - 2\lambda C_i)x^j - (B_j - 2\lambda C_j)x^i + 2\lambda x^k(d_{jk}x^i - d_{ik}x^j)\big) - 2\Psi d_{ij}. \quad (2.42)\end{aligned}$$

Это влечет равенство $B_i(u) = \lambda(u)\tilde{B}_i(u)$ для некоторой функции $\tilde{B}_i(u)$.

Из (1.18) и (1.17) следует, что уравнение $P(X) = \vec{v} \wedge X$ имеет вид

$$-\frac{1}{2}\nabla_k F_{ij} - \delta_{ik}\frac{\Psi}{2}\partial_u\partial_j \ln\Psi + \delta_{jk}\frac{\Psi}{2}\partial_u\partial_j \ln\Psi$$
$$= \Psi\left(\frac{1}{2}\partial_j H_1 - \lambda A_j\right)\delta_{ki} - \Psi\left(\frac{1}{2}\partial_i H_1 - \lambda A_i\right)\delta_{kj}. \quad (2.43)$$

Если i, j, k – попарно различны, то

$$0 = \nabla_k F_{ij} = \partial_k F_{ij} - \frac{1}{\Psi}F_{ij}\partial_k\Psi - \frac{1}{2\Psi}F_{kj}\partial_i\Psi - \frac{1}{2\Psi}F_{ik}\partial_j\Psi$$
$$= \Psi\partial_k\left(\frac{F_{ij}}{\Psi}\right) - \lambda F_{kj}x^i\sqrt{\Psi} - \lambda F_{ik}x^j\sqrt{\Psi}.$$

Используя это и уравнение (2.42), получаем

$$-\partial_k\left(\frac{F_{ij}}{\Psi}\right) = \lambda x^k\Psi\big((\tilde{B}_j - 2C_j)x^i - (\tilde{B}_i - 2C_i)x^j\big) +$$
$$2\sqrt{\Psi}(x^i d_{kj} - x^j d_{ki}) + 2\lambda\Psi x^k(x^j d_{il} - x^i d_{jl})x^l.$$

Интегрируя по переменной x^k, находим

$$F_{ij} = \Psi^{\frac{3}{2}}\big((\tilde{B}_i - 2C_i)x^j - (\tilde{B}_j - 2C_j)x^i + 2(d_{li}x^j - d_{lj}x^i)x^l\big) - \Psi C_{ij}(x^i, x^j, u) \quad (2.44)$$

для некоторых функций $C_{ij}(x^i, x^j, u)$. Сравнивая это с (2.42), получаем $d_{ij} = \frac{\lambda}{2}C_{ij}$. Уравнения (2.43) для $k = i \neq j$ имеют вид

$$\nabla_i F_{ij} = -\Psi\partial_u\partial_j \ln\Psi + 2\Psi Z_j.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\nabla_i F_{ij} = \Psi^{\frac{3}{2}}\partial_i\left(\frac{F_{ij}}{\Psi^{\frac{3}{2}}}\right) + \lambda F_{lj}x^l\sqrt{\Psi}.$$

Используя это, (2.39), (2.42) и (2.44), получаем

$$\Psi^{\frac{3}{2}}\left(-2d_{ij} - \partial_i\frac{C_{ij}}{\sqrt{\Psi}}\right) + \Psi\partial_u\partial_j \ln\Psi$$
$$-\Psi^2\left(\lambda D_k x^k x^j - \frac{1}{2}D_j\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2 + 2c(u)x^j + \frac{1}{2}D_j\right) = 0,$$

где $D_k = \tilde{B}_k + 2C_k$. Используя уравнения

$$\partial_j\partial_u \ln\Psi = \dot{\lambda}x^j\Psi, \quad \partial_i\frac{C_{ij}}{\sqrt{\Psi}} = -\lambda x_i C_{ij} + \frac{\partial_i C_{ij}}{\sqrt{\Psi}}, \quad d_{ij} = \frac{\lambda}{2}C_{ij},$$

находим

$$-\partial_i C_{ij} - \Psi \left(\lambda D_k x^k x^j - \frac{1}{2} D_j \sum_{k=1}^{n} (x^k)^2 + (2c(u) - \dot{\lambda}) x^j + \frac{1}{2} D_j \right) = 0.$$

Если $\lambda(u) \neq 0$, то уравнение $d_{ij} = \frac{\lambda}{2} C_{ij}$ влечет $\partial_i C_{ij} = 0$. Следовательно, $D_k = 0$ и $c = \frac{1}{2}\dot{\lambda}$. Если $\lambda(u) = 0$, то

$$\partial_j \partial_i C_{ij} + 4(D_j x_j - (2c - \dot{\lambda})) = 0.$$

Здесь мы пишем x_j вместо x^j, чтобы избежать суммирование по j. Т.к. $C_{ij} = -C_{ji}$, имеем $D_j = 0$, $c = \frac{1}{2}\dot{\lambda}$ и $\partial_i C_{ij} = 0$. Таким образом, $D_k = 0$, $\tilde{B}_k = -2C_k$, $c = \frac{1}{2}\dot{\lambda}$ и $d_{ij} = \frac{\lambda}{2} C_{ij}$, где C_{ij} – функции переменной u. Итак,

$$F_{ij} = \Psi^{\frac{3}{2}} \big(4C_j(u) x^i - 4C_i(u) x^j + \lambda(u)(C_{li}(u) x^j - C_{lj}(u) x^i) x^l \big) - \Psi C_{ij}(u). \quad (2.45)$$

Напомним, что $F = dA$. В [72] показано, что преобразование $v \mapsto v - \phi(x^1, ..., x^m, u)$ меняет A_i на $A_i + \partial_i \phi$. Такое преобразование оставляет F без изменений. Это позволяет нам выбрать произвольную форму A такую, что $dA = F$. Мы выбираем

$$A_i = \Psi \left(-4C_k(u) x^k x^i + 2C_i(u) \sum_{k=1}^{n} (x^k)^2 + \frac{1}{2} C_{ik}(u) x^k \right).$$

Рассмотрим преобразование координат с обратным преобразованием

$$v = \tilde{v}, \quad x^i = A^i_j(\tilde{u}) \tilde{x}^j, \quad u = \tilde{u}, \quad (2.46)$$

где $A^i_j(u)$ – некоторое семейство ортогональных матриц. Легко проверить, что

$$\tilde{A}_i = \sum_{k=1}^{n} A^k_i(u) (\partial_u A^k_l(u)) \tilde{x}^l + A^k_i(u) A_i.$$

Полученная в результате преобразования метрика имеет ту же форму, при этом

$$\tilde{C}_i(u) = C_j(u) A^j_i(u), \quad \tilde{C}_{ij}(u) = \sum_{k=1}^{n} A^k_i(u) \partial_u A^k_j(u) + \frac{1}{2} A^r_i(u) C_{rk}(u) A^k_j(u).$$

Рассмотрим уравнение $\tilde{C}_{ij}(u) = 0$. Т.к. $\sum_{k=1}^{n} A^i_k(u) A^j_k(u) = \delta^{ij}$, то это уравнение принимает вид

$$\partial_u A^k_i(u) = A^j_i(u)\frac{1}{2}C_{jk}(u).$$

Поскольку матрица $C_{jk}(u)$ – кососимметрична, $\frac{1}{2}C_{jk}(u)$ представляет собой кривую в алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$. Поэтому семейство $A^k_i(u)$, удовлетворяющее рассматриваемому уравнению – ничто иное, как развертка кривой $\frac{1}{2}C_{jk}(u)$ в группе Ли $\mathrm{SO}(n)$. Таким образом, применяя такое преобразование, можем полагать, что $C_{ij}(u) = 0$. Далее,

$$\partial_i H_1 = 2\lambda A_i - 2Z_i = -2\Psi\left(2\lambda C_k(u)x^k x^i - \lambda C_i(u)\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2 + \frac{1}{2}\dot{\lambda}x^i + C_i(u)\right).$$

Получаем, что

$$H_1 = -4C_k(u)x^k\sqrt{\Psi} - \partial_u \ln\Psi + K(u)$$

для некоторой функции $K(u)$.

Остается только одна неизвестная функция H_0. Рассмотрим уравнения $T_{ij} = f\delta_{ij}$. Если $i \neq j$, то $\nabla_i\nabla_j H_0 = \sqrt{\Psi}\partial_i\partial_j\frac{H_0}{\sqrt{\Psi}}$, и, используя (1.19), получим

$$\partial_i\partial_j\frac{H_0}{\sqrt{\Psi}} = 2\Psi^{\frac{3}{2}}x^i x^j\sum_{k=1}^{n}C_k^2(u).$$

Если $\lambda(u) \neq 0$, то функция $\frac{4}{\lambda^2(u)}\Psi\sum_{k=1}^{n}C_k^2(u)$ представляет собой частное решение этой системы. Общее решение системы имеет вид

$$H_0 = \frac{4}{\lambda^2(u)}\Psi\sum_{k=1}^{n}C_k^2(u) + \sqrt{\Psi}\sum_{k=1}^{n}f_k(x^k, u).$$

Условие $\nabla_i\nabla_i H_0 = \nabla_j\nabla_j H_0$ влечет $\partial_i^2 f_i = \partial_j^2 f_j$, следовательно

$$f_i(x^i, u) = a(u)(x^i)^2 + D_i(u)x_i + d_i(u)$$

для некоторых функций $a(u)$, $D_i(u)$, $d_i(u)$. Полученная функция H_0 – как в утверждении теоремы для случая $\lambda(u) \neq 0$. Случай $\lambda(u) = 0$ рассматривается аналогично.

Случай $n = 2$. Система уравнений (2.40) имеет вид

$$\partial_1\left(\frac{Z_1}{\Psi}\right) = \partial_2\left(\frac{Z_2}{\Psi}\right), \quad \partial_1\left(\frac{Z_2}{\Psi}\right) + \partial_2\left(\frac{Z_1}{\Psi}\right) = 0, \tag{2.47}$$

это влечет только, что $\frac{Z_1}{\Psi}$ и $\frac{Z_2}{\Psi}$ – вещественная и мнимая части некоторой комплексной голоморфной функции переменной $x^1 + ix^2$. Заметим, что

$$\nabla_1 F_{12} = \Psi\partial_1\frac{F_{12}}{\Psi}, \quad \nabla_2 F_{12} = \Psi\partial_2\frac{F_{12}}{\Psi}.$$

Используя (2.43), получим

$$Z_1 = -\frac{1}{2}\partial_2\frac{F_{12}}{\Psi} + \frac{1}{2}\partial_u\partial_1\ln\Psi, \quad Z_2 = \frac{1}{2}\partial_1\frac{F_{12}}{\Psi} + \frac{1}{2}\partial_u\partial_2\ln\Psi.$$

Подставляя это в первое уравнение из (2.47), и, используя равенство $\partial_u\partial_i\ln\Psi = \dot\lambda x^i\Psi$, получаем

$$\partial_1\partial_2\frac{F_{12}}{\Psi^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Это показывает, что

$$F_{12} = \Psi^{\frac{3}{2}}(f_1(x^1, u) + f_2(x^2, u)).$$

Подставляя полученное выражение в (2.47), имеем $\partial_1^2 f_1 = \partial_2^2 f_2$, т.е.

$$f_1 = t(u)(x^1)^2 + a^1(u)x^1 + b_1(u), \quad f_2 = t(u)(x^2)^2 + a^2(u)x^2 + b_2(u).$$

Далее,

$$\partial_1 H_1 = 2Z_1 + 2\lambda A_1, \quad \partial_2 H_1 = 2Z_2 + 2\lambda A_2.$$

Следовательно,

$$0 = \partial_2\partial_1 H_1 - \partial_1\partial_2 H_1 = -2\lambda F_{12} + 2\partial_2 Z_1 - 2\partial_1 Z_2.$$

Прямые вычисления показывают, что это влечет $t = \lambda b$, где $b = b_1 + b_2$. Итак,

$$F_{12} = \Psi^{\frac{3}{2}}(\lambda(u)b(u)((x^1)^2 + (x^2)^2) + a_i(u)x^i(u) + b(u)).$$

Равенство (2.45) для $n = 2$ имеет вид

$$F_{12} = \Psi^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{2}\lambda(u)C_{12}(u)((x^1)^2 + (x^2)^2) - \frac{1}{2}C_{12}(u) + 4C_2(u)x^1 - 4C_1(u)x^2\right).$$

Это показывает, что форма F_{ij} – такая же, как в случае $n \geq 3$, и окончание доказательства для случая $n = 2$ – такое же, как для $n \geq 3$. Теорема верна.

□

2.3.5. Доказательство теоремы 2.3.2

Рассмотрим координаты $v, x^1, ..., x^n, u$ и метрику g как в теореме 2.3.1.

1) Предположим, что функция $\lambda(u)$ нигде не обращается в ноль. Рассмотрим преобразование

$$v \mapsto v - \phi, \quad \phi = \frac{2}{\lambda(u)} C_k(u) x^k \sqrt{\Psi}.$$

Форма A_i меняется на

$$A_i + \partial_i \phi = \Psi \left(-2C_k(u) x^k x^i + C_i(u) \sum_{k=1}^{n} (x^k)^2 + \frac{C_i(u)}{\lambda(u)} \right).$$

Согласно лемме 2.3.3, при каждом u, $h^{ik} A_k$ – киллингово векторное поле римановой метрики $h(u)$.

Следуя идеям из [165], найдем преобразование координат, в результате которого функции A_i становятся нулевыми. Рассмотрим преобразование координат, заданное своим обратным преобразованием

$$v = \tilde{v},\ x^k = x^k(\tilde{x}^i, u),\ u = \tilde{u}.$$

Имеет место равенство

$$\tilde{A}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \left(A_i + h_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u} \right).$$

Уравнение $\tilde{A}_k = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial x^j(\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n, u)}{\partial u} = V^j(x^1(\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n, u), ..., x^n(\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n, u), u),$$

где $V^j = -h^{jk} A_k$. Рассматривая $\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^k$ как параметры и налагая начальные условия

$$x^i(\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n, u_0) = \tilde{x}^i,$$

получаем, что рассматриваемая система уравнений представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящую от начальных условий как от параметров. Эта система имеет единственное решение, дающее нужное преобразование. Так как для каждого u, $h^{ik} A_k$ – киллингово векторное поле римановой метрики $h(u)$, то преобразование $x^k = x^k(\tilde{x}^i, u)$ – изометрия, следовательно h не меняется. Таким образом, получаем метрику теоремы 2.3.1 с $C_i = 0$. Применяя преобразование $v \mapsto v + \frac{1}{2\lambda(u)}K(u)$, получаем $H_1 = -\partial_u \ln \Psi$.

2) Предположим, что функция λ – нулевая. Форма F принимает вид

$$F_{ij} = 32(C_j(u)x^i - C_i(u)x^j).$$

Как было показано в теореме 2.3.1, можем выбрать $A_i = 16C_i(u)\sum_{k=1}^n (x^k)^2$. Применив преобразование $x^i \mapsto \frac{x^i}{2}$ и заменив $2C_i(u)$ на $C_i(u)$, получим $A = C_i(u)\sum_{k=1}^n (x^k)^2 dx^i du$, т.е. $A_i = C_i(u)\sum_{k=1}^n (x^k)^2$. Более того, $h = \sum_{k=1}^n (dx^k)^2$. Из уравнения $P(X) = \vec{v} \wedge X$ следует, что

$$\partial_j H_1 = -\nabla_i F_{ij} = -2C_j.$$

Поэтому, $H_1 = -2C_k x^k + K(u)$ для некоторой функции $K(u)$.

Предположим, что $\sum_{k=1}^n C_k^2 \not\equiv 0$. Рассмотрим преобразование координат, заданное обратным преобразованием

$$v = \tilde{v}, \quad x^i = \tilde{x}^i + b^i(\tilde{u}), \quad u = \tilde{u}$$

таким, что $2C_i(u)b^i(u) = K(u)$. После этого, $H_1 = -2C_i(u)x^i$, т.е. можем предположить, что $K(u) = 0$. Уравнение $T_{ij} = f\delta_{ij}$ для $i \neq j$ имеет вид

$$\frac{1}{2}\partial_i\partial_j H_0 = x^i x^j \sum_{k=1}^n C_k - 2C_k x^k (C_j x^i + C_i x^j) - C_i C_j \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + (\dot{C}_j x^i + \dot{C}_i x^j).$$

Общее решение этой системы, при условии $T_{ii} = T_{jj}$, дано в утверждении теоремы.

Предположим, что $\sum_{k=1}^n C_k^2 \equiv 0$. Легко проверить, что только следующие компоненты тензора кривизны могут быть ненулевыми: R_{iuju}, R_{uiuj}, R_{iuuj}, R_{uiju}, поэтому метрика представляет собой плоскую гравитационную волну [174], т.е. $h = \sum_{k=1}^n (dx^k)^2$, $A = 0$ и $H = H_0$. Более того,

$$H_0 = a(u)\sum_{i=1}^n (x^i)^2 + D_i(u)x^i + D(u).$$

Рассмотрим новые координаты

$$\tilde{v} = v - \sum_j \frac{db^j(u)}{du} x^j + d(u), \quad \tilde{x}^i = x^i + b^i(u), \quad \tilde{u} = u.$$

Получим метрику того же вида с

$$\tilde{H}_0 = a(u) \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 + \tilde{D}_i(u) x^i + \tilde{D}(u),$$

где

$$\tilde{D}_j = -2\frac{d^2 b^j}{(du)^2} + 2ab^j + D_j, \tag{2.48}$$

$$\tilde{D} = 2\frac{dd(u)}{du} + \sum_j \left(\frac{db^j}{du}\right)^2 + a\sum_j (b^j)^2 + D_i b^i + D. \tag{2.49}$$

Уравнение (2.48) влечет существование функций $b^j(u)$ таких, что $\tilde{D}_k = 0$. Используя последнее равенство, можно выбрать функцию $d(u)$ таким образом, что $\tilde{D} = 0$. Итак,

$$H_0 = a(u) \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2.$$

Теорема верна. □

2.3.6. Доказательство теоремы 2.3.3

Рассмотрим метрику g из теоремы 2.3.1. Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ – алгебра голономии многообразия (M, g).

Предположим, что $\lambda \equiv 0$ на M. Пусть $\sum_{k=1}^{n} C_k^2 \not\equiv 0$. Тогда существует точка $x \in M$ такая, что $\vec{v}_x \neq 0$. Условие на тензор кривизны влечет

$$R_x(p_x, q_x) = -p_x \wedge \vec{v}_x, \quad R_x(X, Y) = p_x \wedge ((X \wedge Y)\vec{v}_x).$$

Это показывает, что $p_x \wedge E_x \subset \mathfrak{g}$. Далее,

$$R_x(\vec{v}_x, q_x) = -g(\vec{v}_x, \vec{v}_x) p_x \wedge q_x - p_x \wedge T_x(\vec{v}_x),$$

что влечет $\mathbb{R} p_x \wedge q_x \subset \mathfrak{g}$. Наконец,

$$R_x(X, q_x) = -g(\vec{v}_x, X) p_x \wedge q_x + \vec{v}_x \wedge X - p_x \wedge T_x(X).$$

Так как бивекторы вида $\vec{v}_x \wedge X$ порождают алгебру Ли $\mathfrak{so}(E_x)$, то заключаем, что

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}p_x \wedge q_x + \mathfrak{so}(E_x) + p_x \wedge E_x \simeq \mathfrak{sim}(n).$$

Если $\sum_{k=1}^n C_k^2 \equiv 0$ и $a^2 \not\equiv 0$, то метрика дана формулой (2.26), а алгебра голономии этой метрики совпадает с $\mathbb{R}^n$. Если $\sum_{k=1}^n C_k^2(u) \equiv 0$ и $a^2(u) \equiv 0$, то метрика – плоская.

Предположим, что λ – ненулевая постоянная. Тогда метрика может быть записана как первая метрика в теореме 2.3.2. Имеем

$$R(p,q) = -\lambda p \wedge q, \quad R(X,Y) = -\frac{1}{2}\lambda X \wedge Y, \quad X, Y \in \Gamma(E).$$

Это показывает, что $\mathfrak{g}$ содержит подалгебру $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(n) \subset \mathfrak{sim}(n)$. Далее,

$$T_{ii} = \lambda \Psi^{\frac{3}{2}} D_k x^k + \Psi(\sqrt{\Psi} - 1)(a + \lambda D).$$

Если $\sum_{k=1}^n D_k^2 + (a + \lambda D)^2 \not\equiv 0$, то тензор T не равен нулю тождественно, а равенство $R(X,q) = -n \operatorname{tr} T p \wedge X$ показывает, что $\mathfrak{g}$ содержит $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$, т.е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sim}(n)$. В противном случае,

$$g = \Psi \sum_{k=1}^n (dx^k)^n + 2dvdu + (\lambda v^2 + 2D(u))(du)^2.$$

Ясно, что такая метрика g – разложима. Метрика $2dvdu + (\lambda v^2 + 2D(u))(du)^2$ имеет постоянную секционную кривизну $\frac{\lambda}{2}$, следовательно она изоморфна метрике $2dvdu + \lambda v^2(du)^2$.

Предположим, что для некоторой системы координат $\dot{\lambda} \not\equiv 0$. Тогда $\lambda \not\equiv 0$ на некотором открытом подмножестве области определения этой системы координат, и метрика может быть записана как первая метрика из теоремы 2.3.2. Имеем $\vec{v} = -\frac{1}{2}\dot{\lambda} x^i \partial_i$. Пусть x – произвольная точка такая, что $\vec{v}_x \neq 0$. Имеем

$$R_x(p_x, q_x) = -\lambda_x p_x \wedge q_x - p_x \wedge \vec{v}_x \in \mathfrak{g},$$
$$R_x(X,Y) = -\frac{\lambda}{2} X \wedge Y + p_x \wedge ((Y \wedge X)\vec{v}_x) \in \mathfrak{g}, \quad X, Y \in T_x M.$$

Рассматривая скобку Ли последних двух элементов алгебры $\mathfrak{g}$, получаем

$$p_x \wedge ((Y \wedge X)\vec{v}_x) \in \mathfrak{g}.$$

Это показывает, что $\mathfrak{g}$ содержит подалгебру, изоморфную $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{g}$. Два равенства, записанные выше, указывают на то, что $\mathfrak{g}$ содержит подалгебру $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(n) \subset \mathfrak{sim}(n)$. Таким образом, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sim}(n)$. Теорема верна. $\square$

2.3.7. Оператор Риччи полученных метрик

Оператор Риччи метрики (2.26) имеет вид

$$\mathrm{Ric} = na(u)\partial_v \otimes du,$$

в частности, $\mathrm{Ric}^2 = 0$.

В работе [65] изучались конформно плоские лоренцевы многообразия (M, g), удовлетворяющие условию

$$[R(X,Y), \mathrm{Ric}] = 0. \tag{2.50}$$

Было показано, что эти многообразия исчерпываются пространствами постоянной секционной кривизны, произведениями двух пространств постоянной секционной кривизны, и произведениями пространств постоянной секционной кривизны и интервалов. Оператор Риччи метрики (2.26) удовлетворяет (2.50). Более того, такая метрика является полной, например, для $a(u) = 1$, т.е. в случае пространств Каэна–Валлаха. Таким образом, некоторые метрики в [65] потеряны. В работе [85] изучались псевдоримановы конформно плоские многообразия (M, g), удовлетворяющие (2.50). Было показано, что помимо очевидных случаев, (M, g) может представлять собой комплексную сферу или пространство, удовлетворяющее $\mathrm{Ric}^2 = 0$. Различные примеры конформно плоских многообразий со свойством $\mathrm{Ric}^2 = 0$ построены в [86].

Оператор Риччи второй метрики из теоремы 2.3.2 имеет следующий вид:

$$\mathrm{Ric}(p) = 0, \quad \mathrm{Ric}(X) = ng(X, \vec{v})p, \quad \mathrm{Ric}(q) = nT_{11}p + n\vec{v}, \quad X \in \Gamma(E),$$

здесь $\vec{v} = -\sum_{k=1}^{n} C_k(u)X_k$. Функцию T_{11} можно найти, используя (1.19). Имеем $\mathrm{Ric}^2 \neq 0$ и $\mathrm{Ric}^3 = 0$. Условие (2.50) не имеет места. Скалярная кривизна этой метрики равна нулю.

Для первой метрики из теоремы 2.3.2 имеем

$$\mathrm{Ric}(p) = \lambda p, \quad \mathrm{Ric}(X) = ng(X, \vec{v})p - (n-1)\lambda X, \quad \mathrm{Ric}(q) = nT_{11}p + n\vec{v} + \lambda q,$$

где $\vec{v} = -\frac{1}{2}\dot{\lambda}\Psi x^k X_k$. Оператор Риччи не является нильпотентным. Скалярная кривизна этой метрики равна $2\lambda + s_0 = -(n-2)(n+1)\lambda$, и она равна нулю только в размерности четыре.

2.3.8. Случай размерности 4

Применяя теорему 2.3.5 к конформно плоскому, не являющемуся плоским, лоренцеву многообразию (M, g) размерности 4 с алгеброй голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, 3)$, получим, что (M, g) должно удовлетворять одному из следующих условий:

1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 3)$;

2) $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(2)$, т.е. (M, g) – как в теореме 2.3.1 для $n = 2$;

3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 1) \oplus \mathfrak{so}(2)$, и (M, g) – локально изометрично либо произведению $(dS_2, cg_{dS_2)}$ и (L^2, cg_{L^2}), либо произведению (AdS_2, cg_{AdS_2}) и (S^2, cg_{S^2});

4) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 2)$, и (M, g) – локально изометрично произведению многообразия $(\mathbb{R}, (dt)^2)$ и одного из многообразий (dS_3, cg_{dS_3}), (AdS_3, cg_{AdS_3}); или $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$, и (M, g) – локально изометрично произведению многообразия $(\mathbb{R}, -(dt)^2)$ и одного из многообразий (S^3, cg_{S^3}), (L^3, cg_{L^3}).

Здесь $c > 0$ – константа, а S^n, L^n, dS_n, AdS_n – соответственно сфера, пространство Лобачевского, пространство де Ситтера и анти-де Ситтера. Стандартное пространство-время Фридмана-Робертсона-Волкера является конформно плоским и имеет алгебру голономии $\mathfrak{so}(1,3)$ [79].

Возможные алгебры голономии конформно плоских лоренцевых многообразий размерности 4 найдены в [79]. Метрика (2.26) в размерности 4 получена в [143]. В статье [79] была обозначена проблема построения примера конформно плоской метрики с алгеброй голономии $\mathfrak{sim}(2)$ (эта алгебра в [79] обозначена через R_{14}). Попытка построить такую метрику была сделана в [71], где была построена следующая метрика:

$$g = 2dxdt + 4ydtdy - 4zdtdz + \frac{(dy)^2}{2y^2} + \frac{(dz)^2}{2y^2} + 2(x + y^2 - z^2)^2(dt)^2. \quad (2.51)$$

Применяя преобразование

$$x \mapsto x - y^2 + z^2, \quad y \mapsto y, \quad z \mapsto z, \quad t \mapsto t,$$

получим

$$g = 2dxdt + 2x^2(dt)^2 + \frac{(dy)^2}{2y^2} + \frac{(dz)^2}{2y^2}. \quad (2.52)$$

Итак, метрика (2.51) является разложимой, а ее алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{so}(1,1) \oplus \mathfrak{so}(2)$. Таким образом, в настоящей работе мы впервые получаем конформно плоскую метрику с алгеброй голономии $\mathfrak{sim}(2)$, и более того, мы находим все такие метрики.

2.4. 2-симметрические лоренцевы многообразия

В этом параграфе мы получаем классификацию 2-симметрических лоренцевых многообразий. Этот результат опубликован в [163].

Симметрические псевдоримановы многообразия представляют собой важный класс пространств. Прямым обобщением этих многообразий являются k-симметрические псевдоримановы пространства (M, g), удовлетворяющие условию

$$\nabla^k R = 0, \quad \nabla^{k-1} R \neq 0,$$

где $k \geq 1$. В случае римановых многообразий, условие $\nabla^k R = 0$ влечет $\nabla R = 0$ [145]. С другой стороны, существуют псевдоримановы k-симметрические пространства для $k \geq 2$ [100, 140, 33].

Неразложимые односвязные лоренцевы симметрические пространства исчерпываются пространствами де Ситтера, анти-де Ситтера и Каэна-Валаха, последние пространства представляют собой специальные плоские гравитационные волны [49]. Кайгородов [100] рассматривал различные обобщенные симметрические лоренцевы пространства.

Работа Сеновилла [140] начинает систематические исследования 2-симметрических лоренцевых пространств, в ней доказано, что каждое такое пространство допускает изотропное параллельное векторное поле. В работе [33] получена локальная классификация таких пространств в размерности 4, для этого была использована классификация Петрова тензоров Вейля [128].

В работе [163] мы обобщаем результат [33] на случай произвольной размерности.

Теорема 2.4.1. *Пусть (M, g) — локально неразложимое лоренцево многообразие размерности $n+2$. Тогда многообразие (M, g) — 2-симметрическое тогда и только тогда, когда локально существуют координаты $v, x^1, ..., x^n, u$ такие, что*

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + (H_{ij}u + F_{ij})x^i x^j (du)^2,$$

где H_{ij} — ненулевая диагональная вещественная матрица с диагональными элементами $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, а F_{ij} — симметрическая вещественная матрица.

Этот результат был передоказан в [34] с помощью рассмотрения уравнения $\nabla^2 R = 0$ в локальных координатах и громоздких вычислений. Это показывает значительное преимущество методов теории групп голономии.

2.4.1. Алгебра голономии 2-симметрического лоренцева многообразия

Следующая теорема доказана в [140] методами обычно применяемыми в теории относительности.

Теорема 2.4.2. *Каждое 2-симметрическое лоренцево многообразие* (M, g) *допускает параллельное изотропное векторное поле.*

Эта теорема показывает, что алгебра голономии такого многообразия – типа 2 или 4. Теорему 2.4.2 легко передоказать, используя теорию групп голономии [163].

Краеугольным камнем этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.4.3. *Алгеброй голономии* $(n+2)$*-мерного локально неразложимого 2-симметрического лоренцева многообразия* (M, g) *является* $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$.

2.4.2. Доказательство теоремы 2.4.3

Для подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ рассмотрим пространство

$$\nabla\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \{S \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{r,s}, \mathcal{R}(\mathfrak{g})) | S_u(v, w) + S_v(w, u) + S_w(u, v) = 0\}.$$

Если $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(r, s)$ — алгебра голономии многообразия (M, g) в точке $m \in M$, то $\nabla R_m \in \nabla\mathcal{R}(\mathfrak{g})$. Разложение пространства $\nabla\mathcal{R}(\mathfrak{so}(r, s))$ на неприводимые $\mathfrak{so}(r, s)$-модули найдено в [144].

Нетрудно найти пространство $\nabla\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ для каждой алгебры голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$, оно состоит из тензоров

$$S \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{1,n+1}, \mathcal{R}(\mathfrak{g})), \quad S : u \in \mathbb{R}^{1,n+1} \mapsto S_u = R^{(\lambda_u, e_u, P_u, R^0_u, T_u)} \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}),$$

удовлетворяющих второму тождеству Бьянки.

Пусть (M, g) — $(n+2)$-мерное локально неразложимое 2-симметрическое лоренцево многообразие, т.е. тензор ∇R — ненулевой, параллельный, а потому аннулируется алгеброй голономии. Пространство $\nabla\mathcal{R}(\mathfrak{so}(1, n+1))$ не содержит ненулевых элементов, аннулируемых алгеброй Ли $\mathfrak{so}(1,n+1)$ [144]. Поскольку $\mathfrak{so}(1,n+1)$ — единственная неприводимая алгебра голономии, получаем, что $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{sim}(n)$, т.е. метрика g локально имеет вид (1.12).

Редукция. Напомним, что для $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ имеют место разложения (1.5), (1.6), этим разложениям соответствуют адаптированные координаты (1.13), более того, существуют адаптированные координаты, относительно которых $A=0$, [165]. Для каждого $\alpha=0,...,s$ рассмотрим подмногообразие $M_\alpha\subset M$, определенное условиями $x_\beta=c_\beta$, $\alpha\neq\beta$, где c_β — постоянные векторы. Индуцированная метрика имеет вид

$$g_\alpha=2dvdu+h_\alpha+H_\alpha(du)^2.$$

Лемма 2.4.1. *Подмногообразие $M_\alpha\subset M$ является вполне геодезическим. Ортогональная часть алгебры голономии $\mathfrak{g}_\alpha$ метрики g_α совпадает с неприводимой подалгеброй $\mathfrak{h}_\alpha\subset\mathfrak{so}(n_\alpha)$, $\alpha=1,...,s$. Если метрика g — 2-симметрическая, то тензор кривизны каждой метрики g_α удовлетворяет $\nabla^2R=0$.*

Доказательство. Ненулевые компоненты связности метрики (1.12) с $A=0$ — следующие:

$$\Gamma^v_{uu}=\frac{1}{2}H_{,u},\quad \Gamma^v_{iu}=\frac{1}{2}H_{,i},\quad \Gamma^v_{vu}=\frac{1}{2}H_{,v},\quad \Gamma^i_{ju}=\frac{1}{2}h^{ik}h_{jk,u},$$
$$\Gamma^i_{uu}=-\frac{1}{2}h^{ik}H_{,k},\quad \Gamma^u_{uu}=\frac{1}{2}H_{,v},\quad \Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}(h),$$

где запятая обозначает частную производную. Это показывает, что каждое подмногообразие $M_\alpha\subset M$ — вполне геодезическое. Поэтому, если $\nabla^2R=0$, то каждое (M_α,g_α) также удовлетворяет этому условию. Утверждение об ортогональной части следует из того, что она совпадает с индуцированной связностью в векторном расслоении со слоем $p_m^\perp/\mathbb{R}p_m\simeq E_m$ и не зависит от функции H [174]. ☐

Рассмотрим разложение (1.6). Если $E=\mathbb{R}^{n_s+1}$, то $\mathfrak{h}=0$ и доказывать нечего. Если $n_1\neq0$, то метрика g_1 удовлетворяет $\nabla^2R=0$ и ортогональная часть алгебры голономии этой метрики $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{so}(n_1)$ — неприводима. Мы покажем, что этого не может быть.

Итак, предположим, что (M, g) удовлетворяет $\nabla^2 R = 0$ и алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n$, где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — неприводима.

Лемма 2.4.2. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n$, где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — неприводима. Тогда подпространство $\nabla\mathcal{R}(\mathfrak{g})^0 \subset \nabla\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, состоящее из тензоров, анулируеммых алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, имеет вид*

$$\nabla\mathcal{R}(\mathfrak{g})^0 = \mathbb{R}S, \quad S = q' \otimes R^{\mathrm{Id}_E}, \quad q' = g(p, \cdot).$$

Доказательство. Пусть $S \in \nabla\mathcal{R}(\mathfrak{g})^0$. Для каждого $v \in V = \mathbb{R}^{1,n+1}$, элемент $S_v \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ может быть записан в виде $S_v = R^{(R^0_v, P_v, T_v)}$. Так как $S.(p, \cdot) = 0$, то $S_p = 0$. Условие того, что $\mathfrak{g}$ аннулирует S имеет вид

$$[A, S_{v_3}(v_1, v_2)] - S_{Av_3}(v_1, v_2) - S_{v_3}(Av_1, v_2) - S_{v_3}(v_1, Av_2) = 0$$

для всех $A \in \mathfrak{g}$ и $v_1, v_2, v_3 \in V$. Пусть $U, X, Y, Z \in E$. Имеем

$$[p \wedge X, S_U(Y, Z)] = 0.$$

Следовательно, $R^0_U(Y, Z)X = 0$, т.е. $R^0_U = 0$. Далее,

$$[p \wedge X, S_Z(Y, q)] - S_Z(Y, X) = 0.$$

Поэтому,

$$-p \wedge P_Z(Y)X - p \wedge (P_Z(Y)X - P_Z(X)Y) = 0,$$

т.е. $2P_Z(Y)X = P_Z(X)Y$. Так как это условие имеет место для всех $X, Y \in E$, получаем $P_Z = 0$. Мы доказали, что $S_Z(X, Y) = 0$. Аналогично,

$$[p \wedge X, S_q(Y, Z)] = 0,$$

т.е. $R^0_q = 0$. Равенство

$$[p \wedge X, S_q(Y, q)] - S_X(Y, q) - S_q(Y, X) = 0$$

влечет

$$T_X(Y) = 2P_q(Y)X - P_q(X)Y.$$

Второе тождество Бьянки

$$S_q(X,Y) + S_X(Y,q) + S_Y(q,X) = 0$$

влечет

$$T_X(Y) - T_Y(X) = P_q(X)Y - P_q(Y)X.$$

Итак, $P_q(Y)X - P_q(X)Y = 0$. Из этого и определения пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ следует, что $P_q = 0$. Поэтому, $T_X = 0$. Окончательно, пусть $A \in \mathfrak{h}$, тогда

$$[A, S_q(X,q)] - S_q(AX,q) = 0.$$

Это влечет $AT_q(X) = T_q(AX)$, т.е. T_q коммутирует с $\mathfrak{h}$. Так как T_q — симметрический эндоморфизм E, а подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — неприводима, то из леммы Шура следует, что T_q — пропорционален тождественному. ☐

Из леммы 2.4.2 следует, что ∇R для рассматриваемой метрики имеет вид

$$\nabla_U R = fg(p,U)R^{\mathrm{Id}_E}, \quad \forall U \in TM, \tag{2.53}$$

где f — некоторая функция и

$$R^{\mathrm{Id}_E}(U_1,U_2) = p \wedge ((U_1 \wedge U_2)p), \quad \forall U_1, U_2 \in TM.$$

Лемма 2.4.3. *Конформный тензор Вейля W — параллелен, т.е. $\nabla W = 0$.*

Доказательство. Известно, что

$$W = R + L \wedge g,$$

где

$$L = \frac{1}{d-2}\left(\mathrm{Ric} - \frac{s}{2(d-1)}\mathrm{Id}\right), \quad d = n+2,$$
$$(L \wedge g)(U_1,U_2) = LU_1 \wedge U_2 + U_1 \wedge LU_2, \quad U_1, U_2 \in TM.$$

Для каждого векторного поля U имеем

$$\nabla_U W = \nabla_U R + (\nabla_U L) \wedge g.$$

Пусть $X_0 = p$, $X_{n+1} = q$. Для ковариантной производной оператора Риччи имеем

$$\begin{aligned}(\nabla_{U_1}\mathrm{Ric})U_2 = g^{ab}\nabla_{U_1}R(U_2,X_a)X_b = g^{ab}fg(p,U_1)R^{\mathrm{Id}_E}(U_2,X_a)X_b\\ = g^{ab}fg(p,U_1)(p\wedge((U_2\wedge X_a)p))X_b\\ = fg(p,U_1)(g^{ab}g(p,X_b)(U_2\wedge X_a)p - g^{ab}g((U_2\wedge X_a)p,X_b)p)\\ = fg(p,U_1)((U_2\wedge p)p - g^{ab}g(g(U_2,p)X_a - g(X_a,p)U_2,X_b)p)\\ = (2-d)fg(p,U_1)g(p,U_2)p.\end{aligned}$$

Следовательно, $(\nabla_{U_1}\mathrm{Ric})U_2 = -nfg(p,U_1)g(p,U_2)p$. Далее,

$$g(\mathrm{grad}s,U_1) = g^{ab}g((\nabla_{U_1}\mathrm{Ric})X_a,X_b) = 0,$$

т.е. $\mathrm{grad}s = 0$. Следовательно,

$$(\nabla_{U_1}L)U_2 = -fg(p,U_1)g(p,U_2)p.$$

Поэтому,

$$\begin{aligned}(\nabla_{U_1}L)U_2\wedge U_3 + U_2\wedge(\nabla_{U_1}L)U_3\\ = -fg(p,U_1)g(p,U_2)p\wedge U_3 - U_2\wedge fg(p,U_1)g(p,U_3)p\\ = fg(p,U_1)(p\wedge g(p,U_3)U_2 - p\wedge g(p,U_2)U_3)\\ = -fg(p,U_1)p\wedge((U_2\wedge U_3)p) = -\nabla_{U_1}R(U_2,U_3).\end{aligned}$$

Таким образом, $(\nabla_{U_1}L)\wedge g = -\nabla_{U_1}R$ и $\nabla W = 0$. □

Условие $\nabla W = 0$ при сделанных нами предположениях влечет, что (M,g) — плоская гравитационная волна. Действительно, если $W = 0$, то это доказано в параграфе 2.3. Если $W \neq 0$, то результаты работ [63, 62] показывают, что либо $\nabla R = 0$, либо (M,g) — плоская гравитационная волна. Таким образом, алгебра голономии многообразия (M,g) содержится в $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$, и мы получаем противоречие. Теорема верна. □

2.4.3. Доказательство теоремы 2.4.1

Мы доказали, что алгебра голономии рассматриваемого многообразия совпадает с $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$, многообразия с такой алгеброй голономии являются плоскими гравитационными волнами, поэтому локально существуют координаты $v, x^1, ..., x^n, u$ такие, что метрика g имеет вид

$$g = 2dvdu + \delta_{ij}dx^i dx^j + H(du)^2, \quad \partial_v H = 0.$$

Остается только найти функцию H. Имеем следующие ненулевые компоненты связности:

$$\Gamma^v_{uu} = \frac{1}{2}H_{,u}, \quad \Gamma^i_{uu} = -\frac{1}{2}H_{,i}, \quad \Gamma^v_{iu} = \frac{1}{2}H_{,i}$$

Относительно стандартного репера $p = \partial_v$, $e_i = \partial_i$, $q = \partial_u - \frac{1}{2}H\partial_v$ и двойственного корепера $p' = g(q, \cdot), e^i, q' = g(p, \cdot)$, имеем

$$R = \frac{1}{2}H_{,ij}(q' \wedge e^i \vee q' \wedge e^j).$$

Для ковариантных производных тензора кривизны получаем

$$\nabla R = \frac{1}{2}H_{,ijk}e^k \otimes (q' \wedge e^i \vee q' \wedge e^j) + \frac{1}{2}H_{,iju}q' \otimes (q' \wedge e^i \vee q' \wedge e^j),$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 R = \left(\frac{1}{2}H_{,ijk} - \frac{1}{4}\sum_k H_{,k}H_{,ijk}\right) q'^2 \otimes (q' \wedge e^i \vee q' \wedge e^j) \\ + \frac{1}{2}H_{,ijku}(q' \vee e^k) \otimes (q' \wedge e^i \vee q' \wedge e^j) \\ + \frac{1}{2}H_{,ijk\ell}(e^k \otimes e^\ell) \otimes (q' \wedge e^i \vee q' \wedge e^j). \quad (2.54)\end{aligned}$$

Поэтому метрика плоской гравитационной волны является 2-симметрической тогда и только тогда, когда

$$H = (uH_{ij} + F_{ij})x^i x^j + G_i(u)x^i + K(u),$$

где H_{ij} и F_{ij} – симметрические матрицы, матрица H_{ij} — ненулевая, а $G_i(u)$ и $K(u)$ — функции u. Используя замену координат, можно избавится от функций $G_i(u)$, $K(u)$ и привести матрицу H_{ij} к диагональному виду [163].

□

Глава 3.

Теория групп голономии супермногообразий

3.1. Общая теория

Здесь мы приведем необходимые сведения и дадим определение групп голономии связностей на локально свободных пучках над супермногообразиями, а также обсудим их свойства. Эти результаты опубликованы в [169].

3.1.1. Супералгебры Ли

Приведем некоторые сведения о супералгебрах Ли [61, 98, 107, 68].

Векторным суперпространством V называется $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$, $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Элементы $x \in V_{\bar{0}} \cup V_{\bar{1}}$ называются однородными. Элементы $x \in V_{\bar{0}}$ называются четными, четность $|x|$ такого x определяется равенством $|x| = \bar{0}$, напротив, элементы $x \in V_{\bar{1}} \backslash \{0\}$ называются нечетными, будем писать $|x| = \bar{1}$. Если V и W — векторные суперпространства, то тензорное произведение $V \otimes W$ также является векторным суперпространством относительно градуировки

$$(V \otimes W)_{\bar{0}} = (V_{\bar{0}} \otimes W_{\bar{0}}) \oplus (V_{\bar{1}} \otimes W_{\bar{1}}), \quad (V \otimes W)_{\bar{1}} = (V_{\bar{0}} \otimes W_{\bar{1}}) \oplus (V_{\bar{1}} \otimes W_{\bar{0}}).$$

Линейные отображения $F : V \to W$, сохраняющие четность, называются *морфизмами*.

Супералгебра — это векторное суперпространство $A = A_{\bar 0} \oplus A_{\bar 1}$ вместе с морфизмом $\cdot : A \otimes A \to A$ (для однородных элементов имеем $|x \cdot y| = |x| + |y|$). Важным примером супералгебр является *супералгебра Грассманна*

$$\Lambda(m) = \Lambda \mathbb{R}^m = \oplus_{k=1}^{m} \Lambda^k \mathbb{R}^m$$

с очевидной $\mathbb{Z}_2$-градуировкой. Эта супералгебра является суперкоммутативной, т.е. ее однородные элементы удовлетворяют $xy = (-1)^{|x||y|} yx$.

Супералгеброй Ли называется супералгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar 0} \oplus \mathfrak{g}_{\bar 1}$ с умножением $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, удовлетворяющим свойствам

$$[x, y] = -(-1)^{|x||y|} [y, x],$$

$$[[x, y], z] + (-1)^{|x|(|y|+|z|)} [[y, z], x] + (-1)^{|z|(|x|+|y|)} [[z, x], y] = 0.$$

В частности, $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ является алгеброй Ли, а $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ – $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модулем.

Говорят, что простая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ — *классического типа*, если представление $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ в пространстве $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ вполне приводимо, иначе такая супералгебра Ли имеет *тип Картана*. Простая супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ классического типа имеет *тип I*, если представление $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ в $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ неприводимо и *тип II*, если $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ представляет собой прямую сумму двух неприводимых $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модулей. Рассмотрим примеры.

Пусть $V = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$ — векторное суперпространство. Супералгебра Ли всех эндоморфизмов V обозначается $\mathfrak{gl}(V)$. Ее четная часть $\mathfrak{gl}(V)_{\bar 0} = \mathfrak{gl}(V_{\bar 0}) \oplus \mathfrak{gl}(V_{\bar 1})$ состоит из четных эндоморфизмов; нечетная часть $\mathfrak{gl}(V)$ состоит из нечетных эндоморфизмов, т.е. из эндоморфизмов меняющих четность, $\mathfrak{gl}(V)_{\bar 1} = V_{\bar 0}^* \otimes V_{\bar 1} \oplus V_{\bar 1}^* \otimes V_{\bar 0}$.

Рассмотрим супервекторное пространство $V = \mathbb{R}^{n|m} = \mathbb{R}^n \oplus \Pi \mathbb{R}^m$, где Π — функтор, меняющий четность, в частности, здесь он используется чтобы показать, что векторное пространство $\Pi \mathbb{R}^m$ — чисто нечетное. В этом случае вместо $\mathfrak{gl}(V)$ пишем $\mathfrak{gl}(n|m, \mathbb{R})$. В матричной форме имеем

$$\mathfrak{gl}(n|m, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right\},$$

где

$$\mathfrak{gl}(n|m,\mathbb{R})_{\bar 0} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{gl}(n|m,\mathbb{R})_{\bar 1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Рассмотрим супералгебру Ли

$$\mathfrak{sl}(n|m,\mathbb{R}) = \{\xi \in \mathfrak{gl}(n|m,\mathbb{R}) |\operatorname{str}\xi = 0\},$$

где

$$\operatorname{str}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{tr} A - \operatorname{tr} D.$$

Если $n \neq m$, то $\mathfrak{sl}(n|m)$ — простая классического типа II.

Пусть g — четная невырожденная суперсимметрическая форма на векторном суперпространстве $\mathbb{R}^{n|2m} = \mathbb{R}^n \oplus \Pi\mathbb{R}^{2m}$, т.е. $g(\mathbb{R}^n, \Pi\mathbb{R}^{2m}) = g(\Pi\mathbb{R}^{2m}, \mathbb{R}^n) = 0$, ограничение η формы g на $\mathbb{R}^n$ невырождено и симметрично и имеет некоторую сигнатуру (p,q), $p+q=n$, а ограничение ω формы g на $\mathbb{R}^{2m}$ — невырождено и кососимметрично. Имея такую форму, будем обозначать пространство $\mathbb{R}^{n|2m}$ через $\mathbb{R}^{p,q|2m}$. Ортосимплектическая супералгебра Ли определяется как суперподалгебра в $\mathfrak{gl}(n|2m,\mathbb{R})$, сохраняющая g,

$$\mathfrak{osp}(p,q|2m)_{\bar i} = \{\xi \in \mathfrak{gl}(n|2m,\mathbb{R})_{\bar i} |\, g(\xi x, y) + (-1)^{|x|\bar i} g(x, \xi y) = 0\}, \ \bar i \in \mathbb{Z}_2.$$

Если $p+q \neq 2$, то супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(p,q|2m)$ — простая классического типа I. В частности, если ограничение g на $\mathbb{R}^n$ — положительно определено, то можно выбрать базис, относительно которого матрица формы g имеет вид $\begin{pmatrix} 1_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_m \\ 0 & -1_m & 0 \end{pmatrix}$, тогда

$$\mathfrak{osp}(n|2m) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 \\ B_2^t & C_1 & C_2 \\ -B_1^t & C_3 & -C_1^t \end{pmatrix} \middle| A^t = -A, C_2^t = C_2, C_3^t = C_3 \right\}.$$

Предположим, что n — четно и предположим, что мы имеем невырожденную суперсимметрическую форму на векторном суперпространстве $\mathbb{R}^n \oplus \Pi\mathbb{R}^{2m}$ такую, что ограничение g на $\mathbb{R}^n$ имеет сигнатуру $(2p_0, 2q_0)$, $2p_0+2q_0=n$. Пусть J — комплексная структура на $\mathbb{R}^n \oplus \Pi\mathbb{R}^{2m}$ такая, что $g(Jx, Jy) = g(x, y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n \oplus \Pi\mathbb{R}^{2m}$. Ограничение формы $g(J\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{R}^{2m}$ — симметрично, невырождено и имеет некоторую сигнатуру $(2p_1, 2q_1)$, $p_1+q_1=m$. По определению,

$$\mathfrak{u}(p_0, q_0|p_1, q_1) = \{\xi \in \mathfrak{osp}(2p_0, 2q_0|2m) | [\xi, J] = 0\},$$

$$\mathfrak{su}(p_0, q_0|p_1, q_1) = \{\xi \in \mathfrak{u}(p_0, q_0|p_1, q_1) | \operatorname{str}(J \circ \xi) = 0\}.$$

Аналогично, предположим, что n и $2m$ — четные, кратные 4, $m = 2k$ и предположим, что имеется четная невырожденная суперсимметрическая форма на $\mathbb{R}^n \oplus \Pi\mathbb{R}^{2m}$ такая, что ограничение g на $\mathbb{R}^n$ — сигнатуры $(4r, 4s)$, $4r + 4s = n$. Пусть I, J, K — кватернионная структура на $\mathbb{R}^n \oplus \Pi\mathbb{R}^{2m}$, т.е. I, J, K представляют собой комплексные структуры и порождают алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{sp}(1)$, при этом, $g(Ix, Iy) = g(Jx, Jy) = g(Kx, Ky) = g(x, y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n \oplus \Pi\mathbb{R}^{2m}$. По определению,

$$\mathfrak{hosp}(r, s|k) = \{\xi \in \mathfrak{osp}(4r, 4s|2m) | [\xi, I] = [\xi, J] = [\xi, K] = 0\}.$$

Нормализатор $\mathfrak{sp}(1)$ в $\mathfrak{osp}(4r, 4s|2m)$ совпадает с $\mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{hosp}(r, s|k)$. Заметим, что $\mathfrak{hosp}(r, s|k)_{\bar{0}} \cap \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}^*(k)$, где $\mathfrak{so}^*(k)$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{H})$, действующая на $\mathbb{R}^{4k} = \mathbb{H}^k$ и сохраняющая форму

$$\omega(\cdot, \cdot) + i\omega(I\cdot, \cdot) + j\omega(J\cdot, \cdot) + k\omega(K\cdot, \cdot),$$

где ω — ограничение g на $\mathbb{R}^{4k}$.

3.1.2. Супермногообразия

Приведем некоторые определения и факты о супермногообразиях из [61, 107, 108, 119, 146].

Вещественным гладким (аналитическим) супермногообразием $\mathcal{M}$ размерности $n|m$ называется пара $(M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$, где M — хаусдорфово топологическое пространство, а $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ — пучок коммутативных супералгебр над $\mathbb{R}$, локально изоморфных

$$\mathbb{R}^{n|m} = (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{n|m}} = \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} \otimes \Lambda_{\eta^1,\dots,\eta^m}),$$

где $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ — пучок гладких (аналитических) функций на $\mathbb{R}^n$, а $\Lambda_{\eta^1,\dots,\eta^m}$ — супералгебра Грассманна с m порождающими. Сечения пучка $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ называются *суперфункциями* на $\mathcal{M}$. Идеал

$$(\mathcal{O}_{\mathcal{M}})_{\bar{1}} \oplus ((\mathcal{O}_{\mathcal{M}})_{\bar{1}})^2$$

состоит из нильпотентных элементов в $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, пучок $\mathcal{O}_M$, определяемый как фактор

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}}/((\mathcal{O}_{\mathcal{M}})_{\bar{1}} \oplus ((\mathcal{O}_{\mathcal{M}})_{\bar{1}})^2)$$

задает на M структуру вещественного гладкого (аналитического) многообразия. Получаем каноническую проекцию

$$\sim : \mathcal{O}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{O}_M.$$

Значением суперфункции f в точке $x \in M$ называется значение $\tilde{f}(x)$. Если $m = 0$, то $\mathcal{M} = M$ — гладкое многообразие. Каждый изоморфизм $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{n|m}}(U_1)$, где $U \subset M$ и $U_1 \subset \mathbb{R}^n$, определяет на $\mathcal{M}$ *систему локальных координат* $(U, x^1, ..., x^{n+m})$. Известно [15], что на $\mathcal{M}$ существует атлас, состоящий из систем координат $(U, x^1, ..., x^{n+m})$ таких, что $(U, x^1, ..., x^n)$ представляют собой систему координат на M. Будем использовать такие координаты. Будем предполагать, что $i, j, k = 1, ..., n$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., m$ и $a, b, c = 1, ..., n+m$. Для $(U, x^1, ..., x^{n+m})$ будем обозначать $x^{n+\alpha}$ за ξ^α. Для каждой $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U)$ имеем

$$f = \sum_{r=0}^{m} \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_r} f_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \xi^{\alpha_1} \cdots \xi^{\alpha_r}, \tag{3.1}$$

где $f_{\alpha_1\dots\alpha_r} \in \mathcal{O}_M(U)$ и $f_\emptyset = \tilde{f}$. Для произвольных $\alpha_1 < \dots < \alpha_r$ и перестановки $\sigma : \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \to \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ имеем $f_{\sigma(\alpha_1)\dots\sigma(\alpha_r)} = \operatorname{sign}_\sigma f_{\alpha_1\dots\alpha_r}$. Если среди чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ имеются два одинаковых, то $f_{\alpha_1\dots\alpha_r} = 0$.

Обозначим через $\mathcal{T}_\mathcal{M}$ касательный пучок, т.е. пучок супердифференцирований пучка $\mathcal{O}_\mathcal{M}$. Если (U, x^i, ξ^α) — система локальных координат, то векторные поля $\partial_{x^i}, \partial_{\xi^\alpha}$ образуют базис супермодуля $\mathcal{T}_\mathcal{M}(U)$ над супералгеброй $\mathcal{O}_\mathcal{M}(U)$. Векторные поля ∂_{x^i} и ∂_{ξ^α} действуют на функцию f вида (3.1) по правилу

$$\partial_{x^i} f = \sum_{r=0}^{m} \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_r} \partial_{x^i} f_{\alpha_1\dots\alpha_r} \xi^{\alpha_1} \cdots \xi^{\alpha_r}, \tag{3.2}$$

$$\partial_{\xi^\alpha} f = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{r} \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_{s-1} < \alpha_s = \alpha < \alpha_{s+1} \dots < \alpha_r} (-1)^{s-1} f_{\alpha_1\dots\alpha_r} \xi^{\alpha_1} \cdots \xi^{\alpha_{s-1}} \xi^{\alpha_{s+1}} \cdots \xi^{\alpha_r}. \tag{3.3}$$

Вместо ∂_{x^a} будем писать ∂_a.

Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_\mathcal{M})$ — супермногообразие, а $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_\mathcal{M}$-супермодулей на $\mathcal{M}$, например $\mathcal{T}_\mathcal{M}$. Пусть $p|q$ — ранг пучка $\mathcal{E}$. Тогда локально существует базис сечений $(e_I, h_\Phi)_{I=1,\dots,p;\Phi=1,\dots,q}$ пучка $\mathcal{E}$. Будем обозначать такой базис также через e_A, где $e_{p+\Phi} = h_\Phi$. Будем предполагать, что $A, B, C = 1, \dots, p+q$. Пусть $x \in M$. Рассмотрим векторное суперпространство

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}(V)/(\mathcal{O}_\mathcal{M}(V)_x \mathcal{E}(V)),$$

где $V \subset M$ — открытое подмножество, а $\mathcal{O}_\mathcal{M}(V)_x$ — идеал $\mathcal{O}_\mathcal{M}(V)$, состоящий из функций, обращающихся в ноль в точке x. Пространство $\mathcal{E}_x$ не зависит от выбора V и имеет размерность $p|q$. Для каждого открытого подмножества $V \subset M$ определена проекция из $\mathcal{E}(V)$ на $\mathcal{E}_x$. Например, если $\mathcal{E} = \mathcal{T}_\mathcal{M}$, то $(\mathcal{T}_\mathcal{M})_x$ — касательное пространство $T_x\mathcal{M}$ к $\mathcal{M}$ в точке x.

Связностью на $\mathcal{E}$ называется морфизм

$$\nabla : \mathcal{T}_\mathcal{M} \otimes_\mathbb{R} \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$

пучков супермодулей над $\mathbb{R}$ такой, что

$$\nabla_{fY}X = f\nabla_Y X \quad \text{and} \quad \nabla_Y fX = (Yf)X + (-1)^{|Y||f|} f\nabla_Y X$$

для всех однородных функций f, векторных полей Y на $\mathcal{M}$ и сечений X пучка $\mathcal{E}$. В частности, $|\nabla_Y X| = |Y| + |X|$. Локально получаем суперфункции Γ^A_{aB} такие, что

$$\nabla_{\partial_a} e_B = \Gamma^A_{aB} e_A.$$

Ясно, что $|\Gamma^A_{aB}| = |a| + |A| + |B|$, где $|a| = |\partial_{x^a}|$ и $|A| = |e_A|$.

Тензор кривизны связности ∇ определяется равенством

$$R(Y, Z) = [\nabla_Y, \nabla_Z] - \nabla_{[Y,Z]}, \tag{3.4}$$

где Y и Z –векторные поля на $\mathcal{M}$. Пусть $\bar{\nabla}$ — связность на $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$. Определим *ковариантную производную* R относительно $\bar{\nabla}$,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}^r_{Y_r,\dots,Y_1} R(Y,Z)X =& \nabla_{Y_r}(\bar{\nabla}^{r-1}_{Y_{r-1},\dots,Y_1} R(Y,Z)X) - \bar{\nabla}^{r-1}_{\bar{\nabla}_{Y_r}Y_{r-1},\dots,Y_1} R(Y,Z)X \\ &- (-1)^{|Y_r||Y_{r-1}|}\bar{\nabla}^{r-1}_{Y_{r-1},\bar{\nabla}_{Y_r}Y_{r-2},\dots,Y_1} R(Y,Z)X \\ &- \dots - (-1)^{|Y_r|(|Y_{r-1}|+\dots+|Y_2|)}\bar{\nabla}^{r-1}_{Y_{r-1},\dots,Y_2,\bar{\nabla}_{Y_r}Y_1} R(Y,Z)X \\ &- (-1)^{|Y_r|(|Y_{r-1}|+\dots+|Y_1|)}\bar{\nabla}^{r-1}_{Y_{r-1},\dots,Y_1} R(\bar{\nabla}_{Y_r}Y, Z)X \\ &- (-1)^{|Y_r|(|Y_{r-1}|+\dots+|Y_1|+|Y|)}\bar{\nabla}^{r-1}_{Y_{r-1},\dots,Y_1} R(Y, \bar{\nabla}_{Y_r}Z)X \\ &- (-1)^{|Y_r|(|Y_{r-1}|+\dots+|Y_1|+|Y|+|Z|)}\bar{\nabla}^{r-1}_{Y_{r-1},\dots,Y_1} R(Y,Z)\nabla_{Y_r}X,\end{aligned} \tag{3.5}$$

где $r \geq 1$, $Y_r, ..., Y_1, Y, Z \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(M)$ – однородные и $X \in \mathcal{E}(M)$. Предполагаем, что $\bar{\nabla}^0 R = R$. Имеем

$$|\bar{\nabla}^r_{Y_r,\dots,Y_1} R(Y,Z)| = |Y_r| + \dots + |Y_1| + |Y| + |Z|.$$

Если $\mathcal{E} = \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ и $\bar{\nabla} = \nabla$, то получаем обычные ковариантные производные тензора R.

Пусть $r \geq 0$. Определим компоненты $\bar{\nabla}^r_{a_r,\dots,a_1} R^A_{Bab}$ тензора $\bar{\nabla}^r R$ из условия

$$\bar{\nabla}^r_{\partial_{a_r},\dots,\partial_{a_1}} R(\partial_a, \partial_b)e_B = \bar{\nabla}^r_{a_r,\dots,a_1} R^A_{Bab} e_A.$$

Тогда, $|\bar{\nabla}^r_{a_r,\dots,a_1} R^A_{Bab}| = |a_r| + \dots + |a_1| + |a| + |b| + |A| + |B|$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} R^A_{Bab} = \partial_a \Gamma^A_{bB} + (-1)^{|a|(|b|+|B|+|C|)} \Gamma^C_{bB} \Gamma^A_{aC} \\ - (-1)^{|a||b|} (\partial_b \Gamma^A_{aB} + (-1)^{|b|(|a|+|B|+|C|)} \Gamma^C_{aB} \Gamma^A_{bC}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

и

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^r_{a_r,\dots,a_1} R^A_{Bab} =& \partial_{a_r} (\bar{\nabla}^{r-1}_{a_{r-1},\dots,a_1} R^A_{Bab}) \\ &+ (-1)^{|a_r|(|a_{r-1}|+\dots+|a_1|+|a|+|b|+|B|+|C|)} \bar{\nabla}^{r-1}_{a_{r-1},\dots,a_1} R^C_{Bab} \Gamma^A_{a_r C} \\ &- \bar{\Gamma}^c_{a_r a_{r-1}} \bar{\nabla}^{r-1}_{c,a_{r-2},\dots,a_1} R^A_{Bab} \\ &- (-1)^{(|c|+|a_{r-2}|)|a_{r-1}|} \bar{\Gamma}^c_{a_r a_{r-2}} \bar{\nabla}^{r-1}_{a_{r-1},c,a_{r-3},\dots,a_1} R^A_{Bab} \\ &- \dots - (-1)^{(|c|+|a_1|)(|a_{r-1}|+\dots|a_2|)} \bar{\Gamma}^c_{a_r a_1} \bar{\nabla}^{r-1}_{a_{r-1},\dots,a_2,c} R^A_{Bab} \\ &- (-1)^{(|c|+|a|)(|a_{r-1}|+\dots+|a_1|)} \bar{\Gamma}^c_{a_r a} \bar{\nabla}^{r-1}_{a_{r-1},\dots,a_1} R^A_{Bcb} \\ &- (-1)^{(|c|+|b|)(|a_{r-1}|+\dots+|a_1|+|a|)} \bar{\Gamma}^c_{a_r b} \bar{\nabla}^{r-1}_{a_{r-1},\dots,a_1} R^A_{Bac} \\ &- (-1)^{(|C|+|B|)(|a_{r-1}|+\dots+|a_1|+|a|+|b|)} \Gamma^C_{a_r B} \bar{\nabla}^{r-1}_{a_{r-1},\dots,a_1} R^A_{Cab}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.1.3. Определение группы голономии связности на локально свободном пучке над супермногообразием

Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_\mathcal{M})$ — супермногообразие, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_\mathcal{M}$-супермодулей ранга $p|q$ на $\mathcal{M}$, а ∇ – связность на $\mathcal{E}$. Рассмотрим векторное расслоение E над M, определенное как

$$E = \cup_{x \in M} \mathcal{E}_x.$$

Ранг расслоения E равен $p + q$. Определим подрасслоения

$$E_{\bar{0}} = \cup_{x \in M} (\mathcal{E}_x)_{\bar{0}}, \quad E_{\bar{1}} = \cup_{x \in M} (\mathcal{E}_x)_{\bar{1}}$$

расслоения E. Ограничение

$$\tilde{\nabla} = (\nabla|_{\Gamma(TM) \otimes \Gamma(E)})^\sim : \Gamma(TM) \otimes \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

определяет связность на E. Так как связность ∇ — четная, подрасслоения $E_{\bar{0}}, E_{\bar{1}} \subset E$ — параллельны. Рассмотрим кривую $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to M$ и параллельный перенос $\tau_\gamma : E_{\gamma(a)} \to E_{\gamma(b)}$ вдоль γ. Так как подрасслоения $E_{\bar{0}}, E_{\bar{1}} \subset E$ — параллельны, имеем

$$\tau_\gamma(E_{\bar{0}})_{\gamma(a)} = (E_{\bar{0}})_{\gamma(b)}, \quad \tau_\gamma(E_{\bar{1}})_{\gamma(a)} = (E_{\bar{1}})_{\gamma(b)}.$$

Получаем изоморфизм

$$\tau_\gamma : \mathcal{E}_{\gamma(a)} \to \mathcal{E}_{\gamma(b)}$$

векторных суперпространств. Назовем этот изоморфизм *параллельным переносом* в $\mathcal{E}$ вдоль γ.

Определение 3.1.1. Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_\mathcal{M})$ — супермногообразие, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_\mathcal{M}$-супермодулей на $\mathcal{M}$, а ∇ — связность на $\mathcal{E}$. Алгебра голономии $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ связности ∇ в точке $x \in M$ – это суперподалгебра супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(\mathcal{E}_x)$, порожденная операторами вида

$$\tau_\gamma^{-1} \circ \bar{\nabla}^r_{Y_r,\dots,Y_1} R_y(Y,Z) \circ \tau_\gamma : \mathcal{E}_x \to \mathcal{E}_x,$$

где γ — кусочно-гладкая кривая в M с началом в точке x; $y \in M$ — конечная точка кривой γ; $r \geq 0$, $Y, Z, Y_1, \dots, Y_r \in T_y\mathcal{M}$; $\bar{\nabla}$ — связность на $\mathcal{T}_\mathcal{M}|_U$ для некоторой открытой окрестности $U \subset M$ точки y.

Предложение 3.1.1. *Определение алгебры голономии* $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ *не зависит от выбора связностей* $\bar{\nabla}$.

Доказательство. Пусть γ — кривая в M с началом в точке x и концом в точке $y \in M$. Пусть $U \subset M$ — открытая окрестность точки y. Для произвольной связности $\hat{\nabla}$ на $\mathcal{T}_\mathcal{M}|_U$ и произвольного целого $t \geq 0$ определим векторное пространство

$$L(\hat{\nabla})_t = \operatorname{span}\{\hat{\nabla}^r_{Y_r,\dots,Y_1} R_y(Y,Z) | 0 \leq r \leq t,\ Y, Z, Y_1, \dots, Y_r \in T_y\mathcal{M}\}.$$

Ясно, что $L(\hat{\nabla})_t$ не зависит от выбора U. Пусть (U, x^a) — система локальных координат такая, что $y \in U$. Пусть $\bar{\nabla}$ — связность на $\mathcal{T}_\mathcal{M}|_U$. Обозначим символом $\vec{\nabla}$ связность на $\mathcal{T}_\mathcal{M}|_U$ такую, что $\vec{\nabla}\partial_a = 0$. Чтобы доказать предложение, достаточно показать, что для произвольного $t \geq 0$ имеем $L(\bar{\nabla})_t = L(\vec{\nabla})_t$. Это будет следовать из следующей леммы.

Лемма 3.1.1. *Для произвольного* $t \geq 0$ *имеем*

$$\bar{\nabla}^t_{\partial_{a_t},\dots,\partial_{a_1}} R(\partial_{a_0}, \partial_{a_{-1}}) =$$

$$\vec{\nabla}^t_{\partial_{a_t},\dots,\partial_{a_1}} R(\partial_{a_0}, \partial_{a_{-1}}) + \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{(b_s,\dots,b_{-1})} B_{a_t\dots a_{-1},b_s\dots b_{-1}} \vec{\nabla}^s_{\partial_{b_s},\dots,\partial_{b_1}} R(\partial_{b_0}, \partial_{b_{-1}}),$$

где $B_{a_t\dots a_{-1},b_s\dots b_{-1}} \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U)$.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по t. Для $t = 0$ доказывать нечего. Зафиксируем $t > 0$. Предположим, что лемма верна для всех $r < t$ и докажем ее для $r = t$. Используя (3.7) и предположения индукции, получаем

$$\begin{aligned}
&\bar{\nabla}^r_{\partial_{a_r},\dots,\partial_{a_1}} R(\partial_{a_0}, \partial_{a_{-1}})\\
=&[\nabla_{\partial_r}, \bar{\nabla}^{r-1}_{\partial_{a_{r-1}},\dots,\partial_{a_1}} R(\partial_{a_0}, \partial_{a_{-1}})]\\
&- \sum_{l=-1}^{r-1} (-1)^{(|c|+|a_l|)(|a_{r-1}|+\dots+|a_{l+1}|)} \bar{\Gamma}^c_{a_r a_l} \bar{\nabla}^{r-1}_{\partial_{a_{r-1}},\dots,\partial_{a_{l+1}},\partial_c,\partial_{a_{l-1}},\dots,\partial_{a_1}} R(\partial_{a_0}, \partial_{a_{-1}})\\
=&[\nabla_{\partial_r}, \vec{\nabla}^{r-1}_{\partial_{a_{r-1}},\dots,\partial_{a_1}} R(\partial_{a_0}, \partial_{a_{-1}})\\
&+ \sum_{s=0}^{r-2} \sum_{(b_s,\dots,b_{-1})} B_{a_{r-1}\dots a_{-1},b_s\dots b_{-1}} \vec{\nabla}^s_{\partial_{b_s},\dots,\partial_{b_1}} R(\partial_{b_0}, \partial_{b_{-1}})]\\
&- \sum_{l=-1}^{r-1} (-1)^{(|c|+|a_l|)(|a_{r-1}|+\dots+|a_{l+1}|)} \bar{\Gamma}^c_{a_r a_l} \bar{\nabla}^{r-1}_{\partial_{a_{r-1}},\dots,\partial_{a_{l+1}},\partial_c,\partial_{a_{l-1}},\dots,\partial_{a_1}} R(\partial_{a_0}, \partial_{a_{-1}})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&[\nabla_{\partial_r}, \vec{\nabla}^{r-1}_{\partial_{a_{r-1}},\dots,\partial_{a_1}} R(\partial_{a_0}, \partial_{a_{-1}})] \\
&+\sum_{s=0}^{r-2} \sum_{(b_s,\dots,b_{-1})} \partial_{a_r}(B_{a_{r-1}\dots a_{-1},b_s\dots b_{-1}})\vec{\nabla}^{s}_{\partial_{b_s},\dots,\partial_{b_1}} R(\partial_{b_0}, \partial_{b_{-1}}) \\
&+\sum_{s=0}^{r-2} \sum_{(b_s,\dots,b_{-1})} (-1)^{|a_r||B_{a_{r-1}\dots a_{-1},b_s\dots b_{-1}}|} B_{a_{r-1}\dots a_{-1},b_s\dots b_{-1}} [\nabla_{\partial_{a_r}}, \vec{\nabla}^{s}_{\partial_{b_s},\dots,\partial_{b_1}} R(\partial_{b_0}, \partial_{b_{-1}})] \\
&-\sum_{l=-1}^{r-1} (-1)^{(|c|+|a_l|)(|a_{r-1}|+\dots+|a_{l+1}|)} \bar{\Gamma}^{c}_{a_r a_l} \bar{\nabla}^{r-1}_{\partial_{a_{r-1}},\dots,\partial_{a_{l+1}},\partial_c,\partial_{a_{l-1}},\dots,\partial_{a_1}} R(\partial_{a_0}, \partial_{a_{-1}}) \\
=&\vec{\nabla}^{r}_{\partial_{a_r},\dots,\partial_{a_1}} R(\partial_{a_0}, \partial_{a_{-1}}) + \sum_{s=0}^{r-2} \sum_{(b_s,\dots,b_{-1})} \partial_{a_r}(B_{a_{r-1}\dots a_{-1},b_s\dots b_{-1}})\vec{\nabla}^{s}_{\partial_{b_s},\dots,\partial_{b_1}} R(\partial_{b_0}, \partial_{b_{-1}}) \\
&+\sum_{s=0}^{r-2} \sum_{(b_s,\dots,b_{-1})} (-1)^{|a_r||B_{a_{r-1}\dots a_{-1},b_s\dots b_{-1}}|} B_{a_{r-1}\dots a_{-1},b_s\dots b_{-1}} \vec{\nabla}^{s+1}_{\partial_{a_r}\partial_{b_s},\dots,\partial_{b_1}} R(\partial_{b_0}, \partial_{b_{-1}}) \\
&-\sum_{l=-1}^{r-1} (-1)^{(|c|+|a_l|)(|a_{r-1}|+\dots+|a_{l+1}|)} \bar{\Gamma}^{c}_{a_r a_l} \bar{\nabla}^{r-1}_{\partial_{a_{r-1}},\dots,\partial_{a_{l+1}},\partial_c,\partial_{a_{l-1}},\dots,\partial_{a_1}} R(\partial_{a_0}, \partial_{a_{-1}}).
\end{aligned}
$$

Для окончания доказательства леммы достаточно применить предположение индукции к последнему члену выражения. $\square$

Предложение доказано. $\square$

Пусть E — векторное расслоение над M, а $\tilde{\nabla}$ — связность на E, как выше. Алгебра голономии $\mathfrak{hol}(\tilde{\nabla})_x$ содержится в $(\mathfrak{hol}(\nabla)_x)_{\bar{0}}$, однако эти алгебры Ли не обязаны совпадать, это показывает следующий пример.

Пример 3.1.1. Рассмотрим супермногообразие $\mathbb{R}^{0|1} = (\{0\}, \Lambda_\xi)$. Определим связность ∇ на $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^{0|1}}$, полагая $\nabla_{\partial_\xi}\partial_\xi = \xi\partial_\xi$. Тогда $\mathfrak{hol}(\tilde{\nabla})_0 = \{0\}$ и $(\mathfrak{hol}(\nabla)_0)_{\bar{0}} = \mathfrak{hol}(\nabla)_0 = \mathfrak{gl}(0|1)$.

Теперь мы определим группы голономии. Напомним, что *супергруппа Ли* $\mathcal{G} = (G, \mathcal{O}_\mathcal{G})$ — это групповой объект категории супермногообразий. Низлежащее гладкое многообразие G является группой Ли. Супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ для $\mathcal{G}$ отождествляется с касательным пространством к $\mathcal{G}$ в точке $e \in G$. Алгеброй Ли группы Ли G является четная часть $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Супергруппа Ли $\mathcal{G}$ однозначно определяется парой *Хариша-Чандра* $(G, \mathfrak{g})$, где G — группа Ли, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar 0} \oplus \mathfrak{g}_{\bar 1}$ — супералгебра Ли, при этом $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ – алгебра Ли группы Ли G, более того, должно существовать представление Ad группы Ли G в пространстве $\mathfrak{g}$, которое является продолжением присоединенного представления G на $\mathfrak{g}_{\bar 0}$, причем дифференциал Ad совпадает с суперскобкой Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, ограниченной на $\mathfrak{g}_{\bar 0} \times \mathfrak{g}_{\bar 1}$ [61, 74].

Пусть $\mathrm{Hol}(\nabla)^0_x$ — связная подгруппа Ли группы Ли

$$\mathrm{GL}((\mathcal{E}_x)_{\bar 0}) \times \mathrm{GL}((\mathcal{E}_x)_{\bar 1}),$$

соответствующая подалгебре

$$(\mathfrak{hol}(\nabla)_x)_{\bar 0} \subset \mathfrak{gl}((\mathcal{E}_x)_{\bar 0}) \oplus \mathfrak{gl}((\mathcal{E}_x)_{\bar 1}) \subset \mathfrak{gl}(\mathcal{E}_x).$$

Пусть $\mathrm{Hol}(\nabla)_x$ — подгруппа Ли группы Ли

$$\mathrm{GL}((\mathcal{E}_x)_{\bar 0}) \times \mathrm{GL}((\mathcal{E}_x)_{\bar 1}),$$

порожденная группами Ли $\mathrm{Hol}(\nabla)^0_x$ и $\mathrm{Hol}(\tilde\nabla)_x$. Алгебра Ли группы Ли $\mathrm{Hol}(\nabla)_x$ совпадает с $(\mathfrak{hol}(\nabla)_x)_{\bar 0}$. Пусть Ad' – представление связной группы Ли $\mathrm{Hol}(\nabla)^0_x$ на $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ такое, что дифференциал Ad' совпадает с суперскобкой Ли $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$, ограниченной на $(\mathfrak{hol}(\nabla)_x)_{\bar 0} \times (\mathfrak{hol}(\nabla)_x)_{\bar 1}$. Определим представление Ad'' группы Ли $\mathrm{Hol}(\tilde\nabla)_x$ на $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ правилом

$$\mathrm{Ad}''_{\tau_\mu}(\tau_\gamma^{-1} \circ \bar\nabla^r_{Y_r,\dots,Y_1} R_y(Y,Z) \circ \tau_\gamma) = \tau_\mu \circ \tau_\gamma^{-1} \circ \bar\nabla^r_{Y_r,\dots,Y_1} R_y(Y,Z) \circ \tau_\gamma \circ \tau_\mu^{-1}.$$

Заметим, что

$$\mathrm{Ad}'|_{\mathrm{Hol}(\nabla)^0_x \cap \mathrm{Hol}(\tilde\nabla)_x} = \mathrm{Ad}''|_{\mathrm{Hol}(\nabla)^0_x \cap \mathrm{Hol}(\tilde\nabla)_x}.$$

Таким образом, мы определили представление Ad группы Ли $\mathrm{Hol}(\nabla)_x$ на $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$. Имеем $\mathrm{Hol}(\nabla)^0_x \cap \mathrm{Hol}(\tilde\nabla)_x = \mathrm{Hol}(\tilde\nabla)^0_x$. Если M — односвязно, то $\mathrm{Hol}(\tilde\nabla)_x \subset \mathrm{Hol}(\nabla)^0_x$ и $\mathrm{Hol}(\nabla)_x = \mathrm{Hol}(\nabla)^0_x$.

Определение 3.1.2. Супергруппа Ли $\mathcal{H}ol(\nabla)_x$, определяемая парой Хариша-Чандра $(\mathrm{Hol}(\nabla)_x, \mathfrak{hol}(\nabla)_x)$, называется группой голономии связности ∇ в точке x. Супергруппа Ли $\mathcal{H}ol(\nabla)^0_x$, определяемая парой Хариша-Чандра $(\mathrm{Hol}(\nabla)^0_x, \mathfrak{hol}(\nabla)_x)$, называется ограниченной группой голономии связности ∇ в точке x.

3.1.4. Параллельные сечения

Пусть $(\mathcal{M}, \mathcal{O}_\mathcal{M})$ — супермногообразие, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_\mathcal{M}$-супермодулей на $\mathcal{M}$, а ∇ — связность на $\mathcal{E}$. Сечение $X \in \mathcal{E}(M)$ называется *параллельным*, если $\nabla X = 0$. Пусть E — векторное расслоение на M, а $\tilde{\nabla}$ — связность на E, как выше. Для сечения $\tilde{X} \in \Gamma(E)$ получаем $\tilde{\nabla}\tilde{X} = 0$. Поэтому, для произвольной кривой $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to M$ имеем $\tau_\gamma \tilde{X}_{\gamma(a)} = \tilde{X}_{\gamma(b)}$. Следовательно, $\tau_\gamma X_{\gamma(a)} = X_{\gamma(b)}$, где $\tau_\gamma : \mathcal{E}_{\gamma(a)} \to \mathcal{E}_{\gamma(b)}$, т.е. X — *параллельно вдоль кривых* в M.

Рассмотрим систему локальных координат (U, x^a) и базис e_A модуля $\mathcal{E}(U)$. Пусть $X \in \mathcal{E}(U)$, тогда

$$X = X^A e_A, \quad \nabla_{\partial_a} X = \partial_a X^A e_A + (-1)^{|a||X^A|} X^A \Gamma^B_{aA} e_B\text{[1]}.$$

Таким образом, условие $\nabla X = 0$ эквивалентно

$$\partial_a X^A + (-1)^{|a||X^B|} X^B \Gamma^A_{aB} = 0 \tag{3.8}$$

или уравнениям

$$\partial_i X^A + X^B \Gamma^A_{iB} = 0, \tag{3.9}$$

$$\partial_\gamma X^A + (-1)^{|X^B|} X^B \Gamma^A_{\gamma B} = 0. \tag{3.10}$$

Уравнения (3.9) и (3.10) можно переписать в виде

$$(\partial_{\gamma_r} ... \partial_{\gamma_1}(\partial_i X^A + X^B \Gamma^A_{iB}))^\sim = 0, \tag{3.11}$$

$$(\partial_{\gamma_r} ... \partial_{\gamma_1}(\partial_\gamma X^A + (-1)^{|X^B|} X^B \Gamma^A_{\gamma B}))^\sim = 0, \tag{3.12}$$

где $0 \le r \le m$, или в виде

$$\partial_i X^A_{\gamma_1 ... \gamma_r} + \operatorname{sign}_{\gamma_1, ..., \gamma_r} \sum_{l=0}^{r} \sum_{\substack{\{\alpha_1, ..., \alpha_r\} = \{\gamma_1, ..., \gamma_r\} \\ \alpha_1 < \cdots < \alpha_l, \alpha_{l+1} < \cdots < \alpha_r}} \operatorname{sign}_{\alpha_1, ..., \alpha_r} X^B_{\alpha_1 ... \alpha_l} \Gamma^A_{iB\alpha_{l+1} ... \alpha_r} = 0, \tag{3.13}$$

---

[1] Мы предполагаем, что $(-1)^{|a||X^A|} X^A \Gamma^B_{aA} = (-1)^{|a|} X^A_{\bar{0}} \Gamma^B_{aA} - (-1)^{|a|} X^A_{\bar{1}} \Gamma^B_{\gamma A}$, где $X^A = X^A_{\bar{0}} + X^A_{\bar{1}}$ — разложение of X^A в сумму четных и нечетных частей.

$$X^A_{\gamma\gamma_1\dots\gamma_r}+$$

$$\operatorname{sign}_{\gamma_1,\dots,\gamma_r}\sum_{l=0}^{r}\sum_{\substack{\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}=\{\gamma_1,\dots,\gamma_r\}\\ \alpha_1<\dots<\alpha_l,\alpha_{l+1}<\dots<\alpha_r}}\operatorname{sign}_{\alpha_1,\dots,\alpha_r}(-1)^l X^B_{\alpha_1\dots\alpha_l}\Gamma^A_{\gamma B\alpha_{l+1}\dots\alpha_r}=0. \quad (3.14)$$

Предложение 3.1.2. *Параллельное сечение $X \in \mathcal{E}(M)$ однозначно определяется своим значением в произвольной точке $x \in M$.*

Доказательство. Пусть $\nabla X = 0$, $x \in M$ и X_x — значение сечения X в точке x. Так как X — параллельно вдоль кривых в M, то, используя X_x, можно найти значения сечения X во всех точках многообразия M. Рассмотрим локальные координаты, как выше. Так как мы знаем значения X во всех точках, нам известны функции $\tilde{X}^A$. Используя (3.14) для $r = 0$, можно найти функции X^A_γ, а именно

$$X^A_\gamma = -\tilde{X}^B\tilde{\Gamma}^A_{\gamma B}.$$

Используя (3.14) для $r = 1$, имеем

$$X^A_{\gamma\gamma_1} = -\tilde{X}^B\Gamma^A_{\gamma B\gamma_1} + X^B_{\gamma_1}\tilde{\Gamma}^A_{\gamma B}.$$

Таким же образом можно найти все функции $X^A_{\gamma\gamma_1\dots\gamma_r}$, т.е. функции X^A — известны, а значит мы восстановили сечение X. □

Теорема 3.1.1. *Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_\mathcal{M})$ — супермногообразие, $x \in M$, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_\mathcal{M}$-супермодулей на $\mathcal{M}$, а ∇ — связность на $\mathcal{E}$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между параллельными сечениями $X \in \mathcal{E}(M)$ и векторами $X_x \in \mathcal{E}_x$, аннулируемыми алгеброй голономии $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ и сохраняемыми группой $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})_x$.*

Доказательство теоремы 3.1.1. Предположим, что сечение $X \in \mathcal{E}(M)$ — параллельно, т.е. $\nabla X = 0$. Пусть $U \subset M$ — открытое подмножество, а $\bar{\nabla}$ — связность на $\mathcal{T}_\mathcal{M}|_U$. Из (3.5) следует, что

$$\bar{\nabla}^r_{Y_r,\dots,Y_1}R(Y,Z)X = 0 \qquad (3.15)$$

для всех векторных полей $Y, Z, Y_1, ..., Y_r \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(U)$. Так как X – параллельно, то для всех кривых γ в M с началом в точке $x \in M$ и концом в точке $y \in M$, имеем $X_y = \tau_\gamma X_x$. Поэтому, чтобы убедится в том, что X_x аннулируется алгеброй $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$, достаточно рассмотреть (3.15) в произвольной точке y.

Обратно, предположим, что существует ненулевой вектор $X_x \in \mathcal{E}_x$, аннулируемый алгеброй голономии $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ и сохраняемый группой $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})_x$. Из теоремы 1.1.1 следует, что существует сечение $X_0 \in \Gamma(E)$ такое, что $\tilde{\nabla} X_0 = 0$ и $(X_0)_x = X_x$. Зафиксируем координаты (U, x^a) на $\mathcal{M}$ и локальный базис e_A модуля $\mathcal{E}(U)$. Тогда $\tilde{e}_A$ — локальный базис модуля $\Gamma(U, E)$, и мы получаем функции $X_0^A \in \mathcal{O}_M(U)$ такие, что $X_0 = X_0^A \tilde{e}_A$ на U. Используя (3.14) и X_0^A, определим, как в доказательстве предложения 3.1.2, функции $X^A_{\gamma\gamma_1...\gamma_r} \in \mathcal{O}_M(U)$ для всех $\gamma < \gamma_1 < \cdots < \gamma_r$, $0 \leq r \leq m-1$. Получим функции $X^A \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U)$ такие, что $\tilde{X}^A = X_0^A$. Рассмотрим сечение $X = X^A e_A \in \mathcal{E}(U)$. Мы утверждаем, что $\nabla X = 0$. Чтобы это доказать, достаточно показать, что функции X^A удовлетворяют (3.11) и (3.12) для всех $\gamma_1 < \cdots < \gamma_r$, $0 \leq r \leq m$ и произвольных γ, тогда X^A будут удовлетворять (3.11) и (3.12) для всех $\gamma_1, ..., \gamma_r$ и γ. Заметим, что по построению, функции X^A удовлетворяют (3.12) для $\gamma < \gamma_1 < \cdots < \gamma_r$.

Воспользуемся индукцией по r. Параллельно с этим будем доказывать равенство

$$(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+1}}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,...,a_2} R^A_{Ba_1a} X^B))^\sim = 0, \tag{3.16}$$

где $r \geq 1$, $1 \leq s \leq r$. Для $r = 0$, равенство (3.11) следует из того, что $\tilde{\nabla} X_0 = 0$; (3.12) следует из определения функций X^A_γ. Зафиксируем $r_0 > 0$. Предположим, что (3.11) и (3.12) имеют место для всех $r < r_0$ и проверим это равенство для $r = r_0$.

Лемма 3.1.2. *Имеем*

$$\begin{aligned}(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_1}(\partial_i X^A + X^B \Gamma^A_{iB}))^\sim \\ = (\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|} R^A_{B\gamma_1 i} X^B))^\sim,\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_1}(\partial_\gamma X^A + (-1)^{|X^B|}X^B\Gamma^A_{\gamma B}))^\sim =$$
$$\begin{cases} 0, \quad \textit{если } \gamma < \gamma_1; \\ (-1)^{s-1}\frac{1}{2}(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_{s+1}}\partial_{\gamma_{s-1}}...\partial_{\gamma_1}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}R^A_{B\gamma_s\gamma_s}X^B))^\sim, \\ \quad \textit{если } \gamma = \gamma_s \textit{ для некоторого } s, 1 \le s \le r; \\ (\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}R^A_{B\gamma_1\gamma}X^B))^\sim, \\ \quad \textit{если } \gamma_s < \gamma < \gamma_{s+1} \textit{ для некоторого } s, \ 1 \le s \le r. \end{cases} \tag{3.18}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_1}(\partial_i X^A + X^B\Gamma^A_{iB}))^\sim \\
=&(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}(\partial_i\partial_{\gamma_1}X^A + (\partial_{\gamma_1}X^B)\Gamma^A_{iB} + (-1)^{|X^B|}X^B\partial_{\gamma_1}\Gamma^A_{iB}))^\sim \\
=&(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}(\partial_i(-(-1)^{|X^B|}X^B\Gamma^A_{\gamma_1 B}) - (-1)^{|X^C|}X^C\Gamma^B_{\gamma_1 C}\Gamma^A_{iB} + (-1)^{|X^B|}X^B\partial_{\gamma_1}\Gamma^A_{iB}))^\sim \\
=&(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}(-(-1)^{|X^B|}(\partial_i X^B)\Gamma^A_{\gamma_1 B} - (-1)^{|X^B|}X^B\partial_i\Gamma^A_{\gamma_1 B} \\
&- (-1)^{|X^C|}X^C\Gamma^B_{\gamma_1 C}\Gamma^A_{iB} + (-1)^{|X^C|}X^C\partial_{\gamma_1}\Gamma^A_{iC}))^\sim \\
=&(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}((-1)^{|X^B|}X^C\Gamma^B_{iC}\Gamma^A_{\gamma_1 B} - (-1)^{|X^C|}X^C\partial_i\Gamma^A_{\gamma_1 C} \\
&- (-1)^{|X^C|}X^C\Gamma^B_{\gamma_1 C}\Gamma^A_{iB} + (-1)^{|X^C|}X^C\partial_{\gamma_1}\Gamma^A_{iC}))^\sim \\
=&(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}((-1)^{|X^C|+|B|+|C|}X^C\Gamma^B_{iC}\Gamma^A_{\gamma_1 B} - (-1)^{|X^C|}X^C\partial_i\Gamma^A_{\gamma_1 C} \\
&- (-1)^{|X^C|}X^C\Gamma^B_{\gamma_1 C}\Gamma^A_{iB} + (-1)^{|X^C|}X^C\partial_{\gamma_1}\Gamma^A_{iC}))^\sim \\
=&(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}((-1)^{|X^C|}X^C R^A_{C\gamma_1 i}))^\sim = (\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}((-1)^{|X^C|(|A|+|C|)}R^A_{C\gamma_1 i}X^C))^\sim \\
=&(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}R^A_{B\gamma_1 i}X^B))^\sim.
\end{aligned}$$

Мы использовали предположения индукции, (3.6) и факт, что предположения индукции влекут

$$(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}(-(-1)^{|X^B|}\partial_i X^B))^\sim$$
$$= (\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}((-1)^{|X^B|}X^C\Gamma^B_{iC}))^\sim = (\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}((-1)^{|X^C|+|B|+|C|}X^C\Gamma^B_{iC}))^\sim.$$

Это доказывает (3.17).

Докажем (3.18). Прежде всего, если $\gamma < \gamma_1$, то из определения X^A следует, что

$$(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_1}(\partial_\gamma X^A + (-1)^{|X^B|}X^B\Gamma^A_{\gamma B}))^\sim = 0.$$

Как выше, из предположений индукции следует, что для любого t, $1 \leq t \leq r$ имеем

$$\begin{aligned}(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_1}((-1)^{|X^B|}X^B\Gamma^A_{\gamma B}))^{\sim} &= (-1)^{t-1}(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_{t+1}}\partial_{\gamma_{t-1}}...\partial_{\gamma_1}\partial_{\gamma_t}((-1)^{|X^B|}X^B\Gamma^A_{\gamma B}))^{\sim} \\ &= (-1)^{t-1}(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_{t+1}}\partial_{\gamma_{t-1}}...\partial_{\gamma_1}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}(-(-1)^{|B|+|C|}\Gamma^C_{\gamma_t B}\Gamma^A_{\gamma C} + \partial_{\gamma_t}\Gamma^A_{\gamma B})X^B))^{\sim}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Далее, если $\gamma = \gamma_s$ для некоторого s, $1 \leq s \leq r$, то $\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_1}\partial_\gamma X^A = 0$ и

$$\begin{aligned}&(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_1}(\partial_\gamma X^A + (-1)^{|X^B|}X^B\Gamma^A_{\gamma B}))^{\sim} \\ &\quad = (-1)^{s-1}(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_{s+1}}\partial_{\gamma_{s-1}}...\partial_{\gamma_1}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}(-(-1)^{|B|+|C|}\Gamma^C_{\gamma_s B}\Gamma^A_{\gamma_s C} + \partial_{\gamma_s}\Gamma^A_{\gamma_s B})X^B))^{\sim} \\ &\quad = (-1)^{s-1}\frac{1}{2}(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_{s+1}}\partial_{\gamma_{s-1}}...\partial_{\gamma_1}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}R^A_{B\gamma_s\gamma_s}X^B))^{\sim},\end{aligned}$$

где мы использовали (3.19) для $t = s$ и (3.6).

Остается рассмотреть случай $\gamma_s < \gamma < \gamma_{s+1}$ для некоторого s, $1 \leq s \leq r$. В этом случае,

$$\begin{aligned}(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_1}\partial_\gamma X^A)^{\sim} &= (-1)^s(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_{s+1}}\partial_\gamma\partial_{\gamma_s}...\partial_{\gamma_1}X^A)^{\sim} \\ &= (-1)^s(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_{s+1}}\partial_\gamma\partial_{\gamma_s}...\partial_{\gamma_2}(-(-1)^{|X^B|}X^B\Gamma^A_{\gamma_1 B}))^{\sim} \\ &= (\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}\partial_\gamma((-1)^{|X^B|}X^B\Gamma^A_{\gamma_1 B}))^{\sim} \\ &= (\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}((-1)^{|X^B|}\partial_\gamma X^B\Gamma^A_{\gamma_1 B} + X^B\partial_\gamma\Gamma^A_{\gamma_1 B}))^{\sim} \\ &= (\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}(-(-1)^{|X^B|}(-1)^{|X^C|}X^C\Gamma^B_{\gamma C}\Gamma^A_{\gamma_1 B} + X^B\partial_\gamma\Gamma^A_{\gamma_1 B}))^{\sim} \\ &= (\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}(-(-1)^{|C|+|B|+(|A|+|B|)|X^B|}\Gamma^C_{\gamma B}\Gamma^A_{\gamma_1 C}X^B \\ &\qquad + (-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}\partial_\gamma\Gamma^A_{\gamma_1 B}X^B))^{\sim},\end{aligned}$$

где мы использовали определение X^A и предположения индукции. Сравнивая это с (3.19) для $t = 1$ и (3.6), получим

$$(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_1}(\partial_\gamma X^A + (-1)^{|X^B|}X^B\Gamma^A_{\gamma B}))^{\sim} = (\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}R^A_{B\gamma_1\gamma}X^B))^{\sim}.$$

Лемма верна. ☐

Так как $\tilde{\nabla} X_0 = 0$, то для произвольной кривой γ в U с началом в точке $x \in M$ и концом в некоторой точке $y \in U$, получаем $X_y = \tau_\gamma X_x$. Отсюда следует, что

$$(\bar{\nabla}^s_{Y_s,...,Y_1}R(Y,Z))^{\sim}\tilde{X} = 0 \quad (3.20)$$

для всех $s \geq 0$ и $Y, Z, Y_1, ..., Y_r \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(U)$. Поэтому,

$$(\bar{\nabla}^{t-1}_{a_t,...,a_2} R^A_{Ba_1a} X^B)^{\sim} = 0 \quad \text{для всех } t \geq 1. \tag{3.21}$$

Лемма 3.1.2 и (3.21) доказывают (3.11), (3.12) и (3.16) для $r = 1$. Предположим, что (3.16) имеет место для всех $r < r_0$ и докажем это равенство вместе с (3.11) и (3.12) для $r = r_0$.

Лемма 3.1.3. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned}(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+1}}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,...,a_2} R^A_{Ba_1a} X^B))^{\sim}\\ = (\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+2}}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}\bar{\nabla}^{s}_{a_{s+1},...,a_2} R^A_{Ba_1a} X^B))^{\sim}\end{aligned}$$

для всех s, $1 \leq s \leq r$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}&(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+1}}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,...,a_2} R^A_{Ba_1a} X^B))^{\sim}\\ &\quad = (\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+2}}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}(\partial_{a_{s+1}}(\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,...,a_2} R^A_{Ba_1a})X^B\\ &\quad + (-1)^{|a_{s+1}|(|a_s|+\dots+|a_1|+|a|+|A|+|B|)}\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,...,a_2} R^A_{Ba_1a}\partial_{a_{s+1}} X^B)))^{\sim}.\end{aligned}$$

Используя (3.7) и предположения индукции, получим

$$\begin{aligned}&(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+2}}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}\partial_{a_{s+1}}(\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,...,a_2} R^A_{Ba_1a})X^B))^{\sim}\\ &\quad = (\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+2}}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}\bar{\nabla}^{s}_{a_{s+1},...,a_2} R^A_{Ba_1a} X^B\\ &\quad + (-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}(-1)^{(|C|+|B|)(|a_r|+\cdots|a_1|+|a|)}\Gamma^C_{a_{s+1}B}\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,...,a_2} R^A_{Ca_1a} X^B))^{\sim}.\end{aligned}$$

Более того,

$$
\begin{aligned}
&(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+2}}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}(-1)^{|a_{s+1}|(|a_s|+\dots+|a_1|+|a|+|A|+|B|)}\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,\dots,a_2}R^A_{Ba_1a}\partial_{a_{s+1}}X^B))^{\sim}\\
&\quad=-\,(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+2}}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}(-1)^{|a_{s+1}|(|a_s|+\dots+|a_1|+|a|+|A|+|B|)}\\
&\qquad\times\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,\dots,a_2}R^A_{Ba_1a}(-1)^{|a_{s+1}||X^C|}X^C\Gamma^B_{a_{s+1}C})^{\sim}\\
&\quad=-\,(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+2}}((-1)^{(|A|+|B|)(|X^C|+|B|+|C|)+|a_{s+1}|(|a_s|+\dots+|a_1|+|a|+|A|+|B|)+|a_{s+1}||X^C|}\\
&\qquad\times\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,\dots,a_2}R^A_{Ba_1a}X^C\Gamma^B_{a_{s+1}C}))^{\sim}\\
&\quad=-\,(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+2}}((-1)^{(|A|+|C|)(|X^B|+|C|+|B|)+|a_{s+1}|(|a_s|+\dots+|a_1|+|a|+|A|+|C|)+|a_{s+1}||X^B|}\\
&\qquad\times\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,\dots,a_2}R^A_{Ca_1a}X^B\Gamma^C_{a_{s+1}B}))^{\sim}\\
&\quad=-\,(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+2}}((-1)^{\sigma}\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,\dots,a_2}R^A_{Ca_1a}X^B\Gamma^C_{a_{s+1}B}))^{\sim}\\
&\quad=-\,(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+2}}((-1)^{\sigma}(-1)^{(|C|+|a_{s+1}|+|B|)(|a_s|+\dots+|a_1|+|a|+|C|+|X^B|)}\\
&\qquad\times\Gamma^C_{a_{s+1}B}\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,\dots,a_2}R^A_{Ca_1a}X^B))^{\sim},\\
&\quad=-\,(-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}(-1)^{(|C|+|B|)(|a_r|+\dots|a_1|+|a|)}\Gamma^C_{a_{s+1}B}\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,\dots,a_2}R^A_{Ca_1a}X^B))^{\sim}.
\end{aligned}
$$

Здесь мы использовали вытекающее из предположений индукции равенство

$$(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+2}}(\partial_{a_{s+1}}X^B))^{\sim}=-(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+2}}((-1)^{|a_{s+1}||X^C|}X^C\Gamma^B_{a_{s+1}C}))^{\sim}$$

и равенство $(-1)^{|a_{s+1}||X^C|}X^C\Gamma^B_{a_{s+1}C}=(-1)^{|a_{s+1}|(|X^B|+|B|+|C|)}X^C\Gamma^B_{a_{s+1}C}$.

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+1}}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,\dots,a_2}R^A_{Ba_1a}X^B))^{\sim}\\
&\qquad\qquad=(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+2}}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}\bar{\nabla}^{s}_{a_{s+1},\dots,a_2}R^A_{Ba_1a}X^B))^{\sim}.
\end{aligned}
$$

Лемма доказана. □

Используя лемму 3.1.3, (3.21) и факт, что для нечетных функций $f\in\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U)$, $|f|=1$, имеем $\tilde{f}=0$, получаем

$$
\begin{aligned}
&(\partial_{a_r}...\partial_{a_{s+1}}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}\bar{\nabla}^{s-1}_{a_s,\dots,a_2}R^A_{Ba_1a}X^B))^{\sim}\\
&\qquad=((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}\bar{\nabla}^{r-1}_{a_r,\dots,a_2}R^A_{Ba_1a}X^B)^{\sim}=(\bar{\nabla}^{r-1}_{a_r,\dots,a_2}R^A_{Ba_1a}X^B)^{\sim}=0.
\end{aligned}
$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
&(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_1}(\partial_iX^A+X^B\Gamma^A_{iB}))^{\sim}=(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_2}((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}R^A_{B\gamma_1i}X^B))^{\sim}\\
&\qquad=((-1)^{(|A|+|B|)|X^B|}\bar{\nabla}^{r-1}_{\gamma_r,\dots,\gamma_2}R^A_{B\gamma_1i}X^B)^{\sim}=(\bar{\nabla}^{r-1}_{\gamma_r,\dots,\gamma_2}R^A_{B\gamma_1i}X^B)^{\sim}=0.
\end{aligned}
$$

Аналогично, $(\partial_{\gamma_r}...\partial_{\gamma_1}(\partial_\gamma X^A+(-1)^{|X^B|}X^B\Gamma^A_{\gamma B}))^{\sim}=0$.

Функции X^A удовлетворяют (3.11) и (3.12). Следовательно, $\nabla X=0$. Из предложения 3.1.2 следует, что X не зависит от выбора системы координат над U. Поэтому, для каждой координатной окрестности $U\subset M$ имеем единственное параллельное сечение $X\in\mathcal{E}(U)$. Это определяет параллельное сечение $X\in\mathcal{E}(M)$. Теорема верна. $\square$

Связность ∇ называется *плоской*, если $\mathcal{E}$ допускает локальные базисы параллельных сечений.

Следствие 3.1.1. *Пусть $\mathcal{M}=(M,\mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ — супермногообразие, $x\in M$, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-супермодулей на $\mathcal{M}$, а ∇ — связность на $\mathcal{E}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) связность ∇ — плоская;

(ii) $R=0$;

(iii) $\mathfrak{hol}(\nabla)_x=0$.

Параллельные подпучки. Напомним, что подпучок $\mathcal{F}\subset\mathcal{E}$ $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-подмодулей называется *локально прямым подпучком* ранга $p_1|q_1$, если локально существует базис e_A $(A=1,...,p,p+1...,p+q)$ модуля $\mathcal{E}(U)$ такой, что $e_{\bar{A}}$ $(\bar{A}=1,...,p_1,p+1,...,p+q_1)$ — базис модуля $\mathcal{F}(U)$. Например, локально прямой подпучок касательного пучка $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ называется *распределением* на $\mathcal{M}$.

Локально прямой подпучок $\mathcal{F}\subset\mathcal{E}$ называется *параллельным*, если для каждого открытого подмножества $U\subset M$ и произвольных $Y\in\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(U)$, $X\in\mathcal{F}(U)$ имеем $\nabla_Y X\in\mathcal{F}(U)$.

Следующая теорема обобщает теорему 1.1.2, ее доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.1, его можно найти в [169].

Теорема 3.1.2. *Пусть $\mathcal{M}=(M,\mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ — супермногообразие, $x\in M$, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-супермодулей на $\mathcal{M}$, а ∇ — связность на $\mathcal{E}$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между параллель-*

ными локально прямыми подпучками $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ ранга $p_1|q_1$ и векторными подпространствами $F_x \subset \mathcal{E}_x$ размерности $p_1|q_1$, сохраняемыми алгеброй голономии $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ и группой $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})_x$.

3.1.5. Случай линейных связностей над супермногообразиями

Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_\mathcal{M})$ — супермногообразие размерности $n|m$. Рассмотрим связность ∇ на касательном пучке $\mathcal{T}_\mathcal{M}$ супермногообразия $\mathcal{M}$. Тогда в определение 3.1.1 алгебры голономии $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ можно выбрать $\bar{\nabla} = \nabla$. Положим $\mathcal{E} = \mathcal{T}_\mathcal{M}$, тогда $E = \cup_{y \in M} T_y \mathcal{M} = T\mathcal{M}$. В частности, $E_{\bar{0}} = TM$ — касательное расслоение многообразия M. Получаем связности $\tilde{\nabla}$ и $\tilde{\nabla}|_{TM}$ на векторных расслоениях $T\mathcal{M}$ и TM. Алгебру голономии $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ и группу $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})_x$ можно отождествить с суперподалгеброй $\mathfrak{hol}(\nabla) \subset \mathfrak{gl}(n|m, \mathbb{R})$ и подгруппой Ли $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, соответственно.

На кокасательном пучке $\mathcal{T}^*_\mathcal{M} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathcal{M}}(\mathcal{T}_\mathcal{M}, \mathcal{O}_\mathcal{M})$ супермногообразия $\mathcal{M}$ определяется связность ∇^*,

$$(\nabla^*_X \varphi) Y = X\varphi(Y) - (-1)^{|X||\varphi|} \varphi(\nabla_X Y),$$

где $U \subset M$ — открытое подмножество, $X, Y \in \mathcal{T}_\mathcal{M}(U)$ и $\varphi \in \mathcal{T}^*_\mathcal{M}(U)$ — однородные элементы. Тензор кривизны R^* связности ∇^* имеет вид

$$(R^*(Y,Z)\varphi)X = -(-1)^{|\varphi|(|Y|+|Z|)} \varphi(R(Y,Z)X),$$

где $U \subset M$ — открытое подмножество, $X, Y \in \mathcal{T}_\mathcal{M}(U)$ и $\varphi \in \mathcal{T}^*_\mathcal{M}(U)$ — однородные элементы. Пусть $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to M$ — кривая, а $\tau_\gamma : T_{\gamma(a)}\mathcal{M} \to T_{\gamma(b)}\mathcal{M}$ и $\tau^*_\gamma : T^*_{\gamma(a)}\mathcal{M} \to T^*_{\gamma(b)}\mathcal{M}$ — параллельные переносы связностей ∇ и ∇^*. Тогда,

$$(\tau^*_\gamma \varphi) X = \varphi(\tau^{-1}_\gamma X),$$

где $\varphi \in \mathcal{T}^*_{\gamma(a)}\mathcal{M}$ и $X \in \mathcal{T}_{\gamma(b)}\mathcal{M}$.

Рассмотрим пучок тензорных полей типа (r,s) над $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{T}^{r,s}_\mathcal{M} = \otimes^r_{\mathcal{O}_\mathcal{M}} \mathcal{T}_\mathcal{M} \bigotimes_{\mathcal{O}_\mathcal{M}} \otimes^s_{\mathcal{O}_\mathcal{M}} \mathcal{T}^*_\mathcal{M}.$$

Определим связность $\nabla^{r,s}$ на этом пучке,

$$\nabla^{r,s}_X(X_1\otimes\dots\otimes X_r\otimes\varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_s)$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{|X|(|X_1|+\dots+|X_{i-1}|)}X_1\otimes\dots\otimes X_{i-1}\otimes\nabla_X X_i\otimes X_{i+1}\otimes\dots\otimes X_r\otimes\varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_s$$

$$+\sum_{j=1}^{s}(-1)^{|X|(|X_1|+\dots+|X_r|+|\varphi_1|+\dots+|\varphi_{j-1}|)}$$

$$\times X_1\otimes\dots\otimes X_r\otimes\varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_{j-1}\otimes\nabla^*_X\varphi_j\otimes\varphi_{j+1}\otimes\dots\otimes\varphi_s,$$

где $U\subset M$ — открытое подмножество, $X,X_1,...,X_r\in\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(U)$ и $\varphi_1,...,\varphi_r\in\mathcal{T}^*_{\mathcal{M}}(U)$ — однородные элементы. Для тензора кривизны $R^{r,s}$ этой связности имеем

$$R^{r,s}(Y,Z)(X_1\otimes\dots\otimes X_r\otimes\varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_s)$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{(|Y|+|Z|)(|X_1|+\dots+|X_{i-1}|)}X_1\otimes\dots\otimes X_{i-1}$$

$$\otimes R(Y,Z)X_i\otimes X_{i+1}\otimes\dots\otimes X_r\otimes\varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_s$$

$$+\sum_{j=1}^{s}(-1)^{(|Y|+|Z|)(|X_1|+\dots+|X_r|+|\varphi_1|+\dots+|\varphi_{j-1}|)}X_1\otimes\dots\otimes X_r\otimes\varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_{j-1}\otimes$$

$$R^*(Y,Z)\varphi_j\otimes\varphi_{j+1}\otimes\dots\otimes\varphi_s,$$

где $U\subset M$ — открытое подмножество, $Y,Z,X_1,...,X_r\in\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(U)$ и $\varphi_1,...,\varphi_s\in\mathcal{T}^*_{\mathcal{M}}(U)$. Параллельный перенос $\tau^{r,s}_\gamma$ связности $\nabla^{r,s}$ вдоль кривой $\gamma:[a,b]\subset\mathbb{R}\to M$ имеет вид

$$\tau^{r,s}_\gamma(X_1\otimes\dots\otimes X_r\otimes\varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_s)=(\tau_\gamma X_1\otimes\dots\otimes\tau_\gamma X_r\otimes\tau^*_\gamma\varphi_1\otimes\dots\otimes\tau^*_\gamma\varphi_s),$$

где $X_1,...,X_r\in T_{\gamma(a)}\mathcal{M}$ и $\varphi_1,...,\varphi_s\in T^*_{\gamma(a)}\mathcal{M}$.

Таким образом, алгебра голономии $\mathfrak{hol}(\nabla^{r,s})_x$ связности $\nabla^{r,s}$ в точке $x\in M$ и группа $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla}^{r,s})_x$ совпадают с тензорными продолжениями представлений алгебры $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ и группы $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})_x$, соответственно. Из теоремы 3.1.1 немедленно следует

Теорема 3.1.3. *Пусть* $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ *— супермногообразие,* $x \in M$*, а* ∇ *— связность на* $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$*. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между параллельными тензорными полями* $P \in \mathcal{T}^{r,s}_{\mathcal{M}}(M)$ *и тензорами* $P_x \in T^{r,s}_x\mathcal{M}$*, аннулируемыми алгеброй* $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ *и сохраняемыми группой* $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})_x$.

Пример 3.1.2. В таблице 3.1.1 приведены эквивалентные условия для существования некоторых параллельных тензорных полей.

Кручение связности ∇ определяется формулой

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - (-1)^{|X||Y|}\nabla_Y X - [X,Y], \tag{3.22}$$

где $U \subset M$ — открытое подмножество и $X, Y \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(U)$ — однородный элемент. Если связность ∇ — без кручения, т.е. $T = 0$, то тензор кривизны R удовлетворяет супертождеству Бьянки

$$R(X,Y)Z + (-1)^{|X|(|Y|+|Z|)}R(Y,Z)X + (-1)^{|Z|(|X|+|Y|)}R(Z,X)Y = 0 \tag{3.23}$$

для всех открытых подмножеств $U \subset M$ и однородных $X, Y, Z \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(U)$.

Распределение $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ называется *инволютивным*, если

$$[\mathcal{F}(U), \mathcal{F}(U)] \subset \mathcal{F}(U)$$

для всех открытых подмножеств $U \subset M$. Теорема 3.1.2 дает взаимно однозначное соответствие между параллельными распределениями на $\mathcal{M}$ и векторными суперпространствами $F \subset T_x\mathcal{M}$, сохраняемыми $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ и $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})_x$. Из (3.22) следует, что если ∇ — связность без кручения, то каждое параллельное распределение на $\mathcal{M}$ — инволютивно.

Римановым супермногообразием $(\mathcal{M}, g)$ называется супермногообразие $\mathcal{M}$ размерности $n|m$, $m = 2k$, снабженное четной невырожденный суперсимметрической метрикой g. В частности, значение g_x метрики g в каждой точке $x \in M$ удовлетворяет следующим условиям:

$$g_x\big|_{(T_x\mathcal{M})_{\bar{0}} \times (T_x\mathcal{M})_{\bar{1}}} = 0,$$

Таблица 3.1.1. Примеры параллельных структур и соответствующие голономии

параллельная структура на $\mathcal{M}$	$\mathfrak{hol}(\nabla)$ сод-ся в	$\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})$ содержится в	огра-ние
риманова суперметрика	$\mathfrak{osp}(p,q\|2k)$	$\mathrm{O}(p,q)\times\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{R})$	$n=p+q$, $m=2k$
четная невырожденная суперкососимметрическая метрика	$\mathfrak{osp}^{\mathrm{sk}}(2k\|p,q)$	$\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{R})\times\mathrm{O}(p,q)$	$n=2k$, $m=p+q$
нечетная невырожденная суперсимметрическая метрика	$\mathfrak{pe}(n,\mathbb{R})$	$\left\{\left(\begin{smallmatrix} A & 0\\ 0 & (A^t)^{-1}\end{smallmatrix}\right)\middle\|A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\right\}$	$m=n$
нечетная невырожденная суперкососимметрическая метрика	$\mathfrak{pe}^{sk}(n,\mathbb{R})$	$\left\{\left(\begin{smallmatrix} A & 0\\ 0 & (A^t)^{-1}\end{smallmatrix}\right)\middle\|A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\right\}$	$m=n$
комплексная структура	$\mathfrak{gl}(k\|l,\mathbb{C})$	$\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(l,\mathbb{C})$	$n=2k$, $l=2m$
нечетная комплексная структура	$\mathfrak{q}(n,\mathbb{R})$	$\left\{\left(\begin{smallmatrix} A & 0\\ 0 & A\end{smallmatrix}\right)\middle\|A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\right\}$	$m=n$

$g_x|_{(T_x\mathcal{M})_{\bar 0}\times(T_x\mathcal{M})_{\bar 0}}$ является невырожденной симметрической формой, а $g_x|_{(T_x\mathcal{M})_{\bar 1}\times(T_x\mathcal{M})_{\bar 1}}$ — невырожденной кососимметрической формой. Метрика g определяет псевдориманову метрику $\tilde g$ на многообразии M. Метрика $\tilde g$ не обязана быть положительно определенной. Супермногообразие $(\mathcal{M},g)$ допускает единственную линейную связность без кручения ∇ такую, что $\nabla g=0$. Эта связность называется *связностью Леви-Чивита.* Пусть $\mathfrak{hol}(\mathcal{M},g)$ — алгебра голономии связности ∇. Имеем $\mathfrak{hol}(\mathcal{M},g)\subset\mathfrak{osp}(p_0,q_0|2k)$ и $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})\subset\mathrm{O}(p_0,q_0)\times\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{R})$, где (p_0,q_0) — сигнатура псевдоримановой метрики $\tilde g$.

3.1.6. Супералгебры Берже

Пусть V — вещественное или комплексное векторное суперпространство, а $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(V)$ — суперподалгебра. *Пространством алгебраиче-*

ских тензоров кривизны типа $\mathfrak{g}$ называется векторное суперпространство $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{0}} \oplus \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{1}}$,

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \left\{ R \in \wedge^2 V^* \otimes \mathfrak{g} \,\middle|\, \begin{array}{c} R(X,Y)Z + (-1)^{|X|(|Y|+|Z|)} R(Y,Z)X \\ +(-1)^{|Z|(|X|+|Y|)} R(Z,X)Y = 0,\ X,Y,Z \in V \end{array} \right\}.$$

Ясно, что $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ является $\mathfrak{g}$-супермодулем относительно действия $A \cdot R = R_A$,

$$R_A(X,Y) = [A, R(X,Y)] \\ - (-1)^{|A||R|} R(AX,Y) - (-1)^{|A|(|R|+|X|)} R(X,AY), \quad (3.24)$$

где $A \in \mathfrak{g}$, $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})$, а $X, Y \in V$ — однородные элементы. Если $\mathcal{M}$ — супермногообразие, а ∇ — линейная связность без кручения на $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$, то, применяя ковариантные производные к (3.23), получим

$$(\nabla^r_{Y_r,\dots,Y_1} R)_x \in \mathcal{R}(\mathfrak{hol}(\nabla)_x)$$

для всех $r \geq 0$ и $Y_1, \dots, Y_r \in T_x M$. Более того,

$$|(\nabla^r_{Y_r,\dots,Y_1} R)_x| = |Y_1| + \dots + |Y_r|$$

для однородных $Y_1, \dots, Y_r$.

Определим векторное суперпространство

$$L(\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \operatorname{span}\{R(X,Y) | R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g}),\ X, Y \in V\} \subset \mathfrak{g}.$$

Из (3.24) следует, что $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g}))$ является идеалом в $\mathfrak{g}$. Назовем суперподалгебру $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ *супералгеброй Берже* если $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$.

Предложение 3.1.3. *Пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие размерности $n|m$ с линейной связностью без кручения. Тогда алгебра голономии ∇ является супералгеброй Берже.*

Доказательство следует из определения 3.1.1 и (3.23). ☐

Рассмотрим векторное суперпространство

$$\mathcal{R}^{\nabla}(\mathfrak{g}) = \left\{ S \in V^* \otimes \mathcal{R}(g) \,\middle|\, \begin{array}{c} S_X(Y,Z) + (-1)^{|X|(|Y|+|Z|)} S_Y(Z,X) \\ +(-1)^{|Z|(|X|+|Y|)} S_Z(X,Y) = 0,\ X,Y,Z \in V \end{array} \right\}.$$

Если $\mathcal{M}$ — супермногообразие, а ∇ — линейная связность без кручения на $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$, то

$$(\nabla^r_{Y_r,\dots,Y_2,\cdot}R)_x \in \mathcal{R}^\nabla(\mathfrak{hol}(\nabla)_x)$$

для всех $r \geq 1$ и $Y_2,\dots,Y_r \in T_xM$. Более того,

$$|(\nabla^r_{Y_r,\dots,Y_2,\cdot}R)_x| = |Y_2| + \cdots + |Y_r|$$

для всех однородных $Y_2,\dots,Y_r$.

Различные примеры супералгебр Берже даны в [169].

Заметим, что $\mathfrak{osp}(0|2m) \simeq \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$. Поэтому суперподалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(0|2m)$ являются обычными подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$. Пространство $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ будем обозначать $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g})$. Подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$, соответствующие суперподалгебрам Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(0|2m)$, будем называть косыми алгебрами Берже.

3.1.7. Группы голономии локально симметрических суперпространств

Пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие размерности $n|m$ со связностью без кручения ∇. Супермногообразие $(\mathcal{M},\nabla)$ называется *локально симметрическим*, если имеем $\nabla R = 0$. Заметим, что в этом случае многообразие $(M,\tilde{\nabla}|_{TM})$ также является локально симметрическим. Пусть $x \in M$. Теорема 3.1.3 показывает, что $\mathfrak{hol}(\nabla)_x$ аннулирует значения $R_x \in \mathcal{R}(\mathfrak{hol}(\nabla)_x)$, а $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})_x$ сохраняет R_x. Следовательно,

$$\mathfrak{hol}(\nabla)_x = \mathrm{span}\{R_x(X,Y)|X,Y \in T_x\mathcal{M}\}.$$

Пусть V — векторное суперпространство, а $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — суперподалгебра, аннулирующая некоторый $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})$. Рассмотрим супералгебру Ли $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}+V$ с суперскобками Ли

$$[x,y] = -R(x,y), \quad [A,x] = Ax, \quad [A,B] = A \circ B - (-1)^{|A||B|}B \circ A,$$

где $x, y \in V$ и $A, B \in \mathfrak{g}$. Разложение $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} + V$ называется *симметрическим разложением* супералгебры Ли $\mathfrak{h}$ [56]. Для простых алгебр Ли $\mathfrak{h}$ все такие разложения описаны в [141]. В частности, это позволяет найти все неприводимые алгебры голономии локально симметрических супермногообразий.

Супералгебра Берже $\mathfrak{g}$ называется *симметрической*, если $\mathcal{R}^\nabla(\mathfrak{g}) = 0$.

Предложение 3.1.4. *Пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие с линейной связностью без кручения ∇. Если $\mathfrak{hol}(\nabla)$ — симметрическая супералгебра Берже, то супермногообразие $(\mathcal{M}, \nabla)$ — локально симметрическое.*

Доказательство. Нужно доказать, что $\nabla R = 0$. Так как $\mathcal{R}^\nabla(\mathfrak{hol}(\nabla)_y) = 0$ для всех $y \in M$, то $(\nabla^r_{Y_r,\dots,Y_1} R)^\sim = 0$ для всех $r \geq 0$ и всех векторных полей $Y_1, ..., Y_r$ на $\mathcal{M}$. Используя это, (3.7) и двойную индукцию по r и s, легко получить, что $(\partial_{a_r} \cdots \partial_{a_{s+1}} \nabla^{s+1}_{a_s,\dots,a_1,f} R^d_{cab})^\sim = 0$ для всех r и s таких, что $r \geq s \geq 0$. В частности, $(\partial_{\gamma_r} \cdots \partial_{\gamma_1} \nabla_f R^d_{cab})^\sim = 0$ для всех $r \geq 0$. Таким образом, $\nabla R = 0$. ☐

Симметрические суперпространства изучались в [141, 108, 74]. Один класс нечетных симметрических пространств был рассмотрен в [56].

3.2. Случай нечетных супермногообразий

Здесь мы приведем классификацию неприводимых алгебр голономии нечетных римановых супермногообразий из [158, 168] и некоторые сведения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

3.2.1. Косые продолжения алгебр Ли

Результаты этого пункта мы будем использовать позже. Они также имеют независимый интерес [10, 124].

Неприводимые подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с нетривиальными продолжениями

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \{\varphi \in (\mathbb{F}^n)^* \otimes \mathfrak{g} | \varphi(x)y = \varphi(y)x \text{ для всех } x, y \in \mathbb{F}^n\}$$

— хорошо известны [44]. Здесь мы классифицируем неприводимые подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ с нетривиальными косыми продолжениями

$$\mathfrak{g}^{[1]} = \{\varphi \in (\mathbb{F}^n)^* \otimes \mathfrak{g} | \varphi(x)y = -\varphi(y)x \text{ для всех } x, y \in \mathbb{F}^n\}.$$

Неприводимые подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ с ненулевыми косыми продолжениями классифицированы в [124]. Эти подалгебры исчерпываются ортогональной алгеброй Ли $\mathfrak{so}(n)$ и присоединенными представлениями компактных простых алгебр Ли.

Неприводимые подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ с $\mathfrak{g}^{[1]} \neq 0$ классифицированы в [168]. Мы приводим список этих алгебр в таблице 3.2.1. Этот результат следует из того, что $\mathfrak{g}^{[1]}$ совпадает с $\Pi(\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(0|n, \mathbb{C}))^{(1)}$ и из того факта, что полное продолжение Картана

$$\mathfrak{g}_* = \mathbb{R}^{0|n} \oplus \mathfrak{g} \oplus (\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(0|n, \mathbb{C}))^{(1)} \oplus (\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(0|n, \mathbb{C}))^{(2)} \oplus \cdots$$

является неприводимой транзитивной супералгеброй Ли с согласованной $\mathbb{Z}$-градуировкой и $\mathfrak{g}_1 \neq 0$. Такие $\mathbb{Z}$-градуированные супералгебры Ли классифицированы в [98]. Второе продолжение $\mathfrak{g}^{[2]}$ определяется очевидным образом.

Классифицируем теперь неприводимые подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ с $\mathfrak{g}^{[1]} \neq 0$. Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ — такая подалгебра. Если такое представление — вещественного типа, т.е. $\mathbb{R}^n$ не допускает комплексную структуру, коммутирующую с элементами $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ — неприводимая подалгебра, и $(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})^{[1]} = \mathfrak{g}^{[1]} \otimes \mathbb{C} \neq 0$. Заметим, что если в этом случае представление $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ отлично от присоединенного и от стандартного представления алгебры Ли $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$, то $(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})^{(1)} \neq 0$ или $(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^{(1)} \neq 0$ (в частности, $\mathfrak{g}^{(1)} \neq 0$). Следовательно неприводимые подалгебры вещественного типа $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ с $\mathfrak{g}^{[1]} \neq 0$ исчерпываются неприводимыми подалгебрами вещественного типа $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ (с точностью до центра алгебры Ли $\mathfrak{g}$) с $\mathfrak{g}^{(1)} \neq 0$, присоединенными представлениями вещественных форм комплексных простых алгебр Ли и подалгебрами $\mathfrak{so}(p, n-p) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Этот результат приведен в таблице 3.2.2, где мы используем следующие обозначения из [44]:

$$H_n(\mathbb{C}) = \{A \in Mat_n(\mathbb{C}) | A^* = A\}, \quad S_n(\mathbb{H}) = \{A \in Mat_n(\mathbb{H}) | A^* = -A\},$$

$$A_n(\mathbb{H}) = \{A \in Mat_n(\mathbb{H}) | A^* = A\}.$$

Первое и второе косые продолжения можно найти, используя соотношения $(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})^{[k]} = \mathfrak{g}^{[k]} \otimes \mathbb{C}$.

Предположим, что представление $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ — комплексного типа, т.е. $E = \mathbb{R}^n$ допускает комплексную структуру J, коммутирующую с элементами из $\mathfrak{g}$. В этом случае комплексификация $E \otimes \mathbb{C}$ допускает разложение

$$E \otimes \mathbb{C} = V \oplus \bar{V},$$

где V и $\bar{V}$ — собственные пространства продолжения J на $E \otimes \mathbb{C}$, соответствующие собственным значениям i и $-i$. Алгебра Ли $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ сохраняет это разложение. Рассмотрим идеал

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \cap J\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}.$$

Так как $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли, то существует идеал $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}$ такой, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathbb{C}$ допускает разложение

$$\mathfrak{g}_1 \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}_1' \oplus \mathfrak{g}_1''$$

в прямую сумму собственных подпространств продолжения J на $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathbb{C}$, соответствующих собственным значениям i и $-i$. Ясно, что $\mathfrak{g}_1'$ аннулирует V, $\mathfrak{g}_1''$ аннулирует $\bar{V}$, а $\mathfrak{g}_2 \otimes \mathbb{C}$ действует диагонально в $V \oplus \bar{V}$. Поэтому,

$$(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})^{[1]} = (\mathfrak{g}_1' \subset \mathfrak{gl}(\bar{V}))^{[1]} \oplus (\mathfrak{g}_1'' \subset \mathfrak{gl}(V))^{[1]}.$$

Очевидно, что представление $\mathfrak{g}_1' \oplus (\mathfrak{g}_2 \otimes \mathbb{C})$ в $\bar{V}$ — неприводимо. Если $\dim \mathfrak{g}_2 \geq 2$, то это представление является тензорным произведением некоторых неприводимых представлений алгебр Ли $\mathfrak{g}_1'$ и $\mathfrak{g}_2 \otimes \mathbb{C}$. В этом случае, $(\mathfrak{g}_1' \subset \mathfrak{gl}(\bar{V}))^{[1]} = 0$ и $(\mathfrak{g}_1'' \subset \mathfrak{gl}(V))^{[1]} = 0$. Поэтому, $\dim \mathfrak{g}_2 \leq 1$, и

Таблица 3.2.1. Комплексные неприводимые подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ с $\mathfrak{g}^{[1]} \neq 0$.

$\mathfrak{g}$	V	$\mathfrak{g}^{[1]}$	$\mathfrak{g}^{[2]}$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n, \quad n \geq 3$	$(\mathbb{C}^n \otimes \Lambda^2(\mathbb{C}^n)^*)_0$	$(\mathbb{C}^n \otimes \Lambda^3(\mathbb{C}^n)^*)_0$
$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n, \quad n \geq 2$	$\mathbb{C}^n \otimes \Lambda^2(\mathbb{C}^n)^*$	$\mathbb{C}^n \otimes \Lambda^3(\mathbb{C}^n)^*$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$	$\odot^2\mathbb{C}^n, \quad n \geq 3$	$\Lambda^2(\mathbb{C}^n)^*$	0
$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$	$\odot^2\mathbb{C}^n, \quad n \geq 3$	$\Lambda^2(\mathbb{C}^n)^*$	0
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$	$\Lambda^2\mathbb{C}^n, \quad n \geq 5$	$\odot^2(\mathbb{C}^n)^*$	0
$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$	$\Lambda^2\mathbb{C}^n, \quad n \geq 5$	$\odot^2(\mathbb{C}^n)^*$	0
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(m,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m, \quad n,m \geq 2$ $n \neq m$	V^*	0
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n, \quad n \geq 3$	V^*	0
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n, \quad n \geq 3$	V^*	0
$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n, \quad n \geq 4$	Λ^3V^*	Λ^4V^*
$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}^n, \quad n \geq 4$	Λ^3V^*	Λ^4V^*
$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}^{2n} \quad n \geq 2$	V^*	0
$\mathfrak{g}$ — простая	$\mathfrak{g}$	$\mathbb{C}\,\mathrm{id}$	0
$\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}$ — простая	$\mathfrak{g}$	$\mathbb{C}\,\mathrm{id}$	0

$\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{gl}(\frac{n}{2},\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ – комплексная подалгебра, рассматриваемая как вещественная алгебра Ли.

Таким образом, неприводимые подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ с $\mathfrak{g}^{[1]} \neq 0$ исчерпываются подалгебрами из таблицы 3.2.1, подалгебрами из таблицы 3.2.2, и подалгебрами вида $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{z} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, где $\mathfrak{z} \subset \mathbb{C}$ — центр вещественной размерности 1 или 2, а $\mathfrak{g}_1$ — подалгебра из таблицы 3.2.1 с тривиальным центром.

3.2.2. Нечетные симметрические суперпространства и простые супералгебры Ли

Пусть $(\mathcal{M} = \mathbb{R}^{0|k}, \nabla)$ — нечетное симметрическое супермногообразие с алгеброй голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(0|k,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{gl}(k,\mathbb{R})$. Определим супералгебру Ли

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \oplus \Pi\mathbb{R}^k,$$

Таблица 3.2.2. Неприводимые подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ вещественного типа с $\mathfrak{g}^{[1]} \neq 0$ ($\mathfrak{z}$ обозначает 0 или $\mathbb{R}$).

$\mathfrak{g}$	V	
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^n$,	$n \geq 3$
$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^n$,	$n \geq 2$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{z}$	$\odot^2\mathbb{R}^n$,	$n \geq 3$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H}) \oplus \mathfrak{z}$	$S_n(\mathbb{H})$,	$n \geq 2$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{z}$	$\Lambda^2\mathbb{R}^n$,	$n \geq 5$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H}) \oplus \mathfrak{z}$	$A_n(\mathbb{H})$,	$n \geq 3$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(m,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$,	$n > m \geq 2$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{z}$	$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$,	$n \geq 3$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H}) \oplus \mathfrak{sl}(m,\mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{H}^n \otimes \mathbb{H}^m$,	$n > m \geq 1$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H}) \oplus \mathfrak{sl}(n,\mathbb{H}) \oplus \mathfrak{z}$	$\mathbb{H}^n \otimes \mathbb{H}^n$,	$n \geq 2$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{R}$	$H_n(\mathbb{C})$,	$n \geq 3$
$\mathfrak{so}(p,q) \oplus \mathfrak{z}$	$\mathbb{R}^{p+q}$,	$p+q \geq 4$
$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{2n}$,	$n \geq 2$
$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}$, $\mathfrak{g}$ — вещественная форма простой комплексной алгебры Ли	$\mathfrak{g}$	

полагая

$$[\Pi X, \Pi Y] = R(X,Y), \quad [A, \Pi X] = \Pi(AX), \quad [A,B] = [A,B]_{\mathfrak{g}},$$

где $A, B \in \mathfrak{g}$ и $X, Y \in \mathbb{R}^k$. Обратно, пусть $\mathfrak{k}$ — супералгебра Ли с четной частью $\mathfrak{g}$ и нечетной частью $\Pi\mathbb{R}^k$. Пусть G — односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, а $\mathcal{K}$ — односвязная супергруппа Ли с супералгеброй Ли $\mathfrak{k}$. Супергруппу Ли $\mathcal{K}$ можно отождествить с парой Хариша-Чандра $(G, \mathfrak{k})$ [74]. Суперпространство $\mathcal{M} = \mathcal{K}/G$ является нечетным супермногообразием и допускает единственную симметрическую связность [108].

Таким образом, мы получили взаимно однозначное соответствие между связными симметрическими нечетными суперпространствами $(\mathcal{M}, \nabla)$ и супералгебрами Ли $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \oplus \Pi\mathbb{R}^k$. Более того, $\Pi\mathbb{R}^k$ является касательным пространством к $\mathcal{M}$, а $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(k,\mathbb{R})$ — алгебра голономии. Многообразие $(\mathcal{M}, \nabla)$ является римановым тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(k,\mathbb{R})$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли. Предположим, что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(k,\mathbb{R})$ — либо неприводимая подалгебра, либо существует $\mathfrak{g}$-инвариантное разложение

$$\Pi\mathbb{R}^k = \mathfrak{k}_{-1} \oplus \mathfrak{k}_1$$

такое, что представления $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{k}_{-1}$ и $\mathfrak{k}_1$ — точные и неприводимые. Предположим, что существует $R \in \bar{\mathcal{R}}(g)$ такой, что $\mathfrak{g}$ аннулирует R и имеем $R(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k) = \mathfrak{g}$, тогда супералгебра Ли $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \oplus \Pi\mathbb{R}^k$, определенная выше, является простой, это следует из предложений 1.2.7 и 1.2.8 и [98].

Таким образом, мы свели классификацию слабо неприводимых редуктивных подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(k,\mathbb{R})$, допускающих элементы $R \in \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g})$ такие, что $\mathfrak{g}$ аннулирует R и верно $R(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k) = \mathfrak{g}$, к классификации вещественных простых супералгебр Ли классического типа. Заметим, что нас интересует случай $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(k,\mathbb{R})$. Если $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(k,\mathbb{R})$ не является неприводимой, то $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(k,\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{k}_{-1} \simeq \mathfrak{k}_1^*$.

Приведем списки простых вещественных и комплексных супералгебр Ли классического типа [68, 98, 127]. Простые вещественные супералгебры Ли классического типа исчерпываются простыми комплексными супералгебрами Ли классического типа, рассматриваемыми как вещественные супералгебры Ли, и их вещественными формами.

Таблица 3.2.3. Простые комплексные супералгебры Ли типа I.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$	$\mathfrak{g}_{\bar{1}}$	ограничения
$\mathfrak{osp}(n\|2m,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{2m}$	$n \neq 2$
$\mathfrak{osp}(4\|2,\alpha,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$	$\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1\}$
$F(4)$	$\mathfrak{so}(7,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^8 \otimes \mathbb{C}^2$	
$G(3)$	$G_2 \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^7 \otimes \mathbb{C}^2$	
$\mathfrak{pq}(n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$	$n \geq 3$

3.2.3. Неприводимые комплексные косые алгебры Берже

В [168] мы классифицировали косые алгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, здесь мы ограничимся тем, что приведем классификацию косых алгебр Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(V)$,

Таблица 3.2.4. Простые комплексные супералгебры Ли типа II.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$	$\mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_{-1}$	ограничения
$\mathfrak{sl}(n\|m,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(m,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^{m*}$	$\mathbb{C}^{n*}\otimes\mathbb{C}^m$	$n\neq m$
$\mathfrak{psl}(n\|n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^{n*}$	$\mathbb{C}^{n*}\otimes\mathbb{C}^n$	
$\mathfrak{osp}(2\|2m,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{2m}$	$\mathbb{C}^{2m}$	
$\mathfrak{pe}(n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$	$\odot^2\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$	$\Lambda^2\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})^*$	$n\geq 3$

этого нам будет достаточно для дальнейших рассмотрений.

Теорема 3.2.1. *Пусть V — комплексное симплектическое векторное пространство. Неприводимые комплексные косые алгебры Берже $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{sp}(V)$ исчерпываются алгебрами таблицы 3.2.7. Последние 3 алгебры – симметрические косые алгебры Берже.*

Доказательство. Пусть V — комплексное симплектическое векторное пространство и $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{sp}(V)$ — неприводимая полупростая подалгебра.

В доказательстве мы во многом используем доказательство аналогичного результата из [137]. В действительности, большинство результатов не зависит от того, рассматриваем ли мы тензоры кривизны как отображения с областью определения Λ^2V или из $\odot^2V$. Некоторые случаи потребуют дополнительных рассмотрений.

Зафиксируем подалгебру Картана в $\mathfrak{g}$. Пусть Δ — множество корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а Φ — множество весов представления $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(V)$. Положим $\Delta_0=\Delta\cup\{0\}$. Для каждого $\alpha\in\Delta$ зафиксируем ненулевой вектор A_α в корневом пространстве $\mathfrak{g}_\alpha$. Рассмотрим множество

$$\Phi_\alpha=\{\text{веса } A_\alpha V\}=(\alpha+\Phi)\cap\Phi.$$

Тройка $(\lambda_0,\lambda_1,\alpha)$, где $\lambda_0,\lambda_1\in\Phi$ и $\alpha\in\Delta$ называется *порождающей тройкой*, если

$$\Phi_\alpha\subset\{\lambda_0+\beta,\lambda_1+\beta|\beta\in\Delta_0\}.$$

Порождающая тройка называется *экстремальной*, если λ_0 и λ_1 являются экстремальными весами. Доказательство следующего утверждения аналогично

Таблица 3.2.5. Простые вещественные супералгебры Ли типа I.

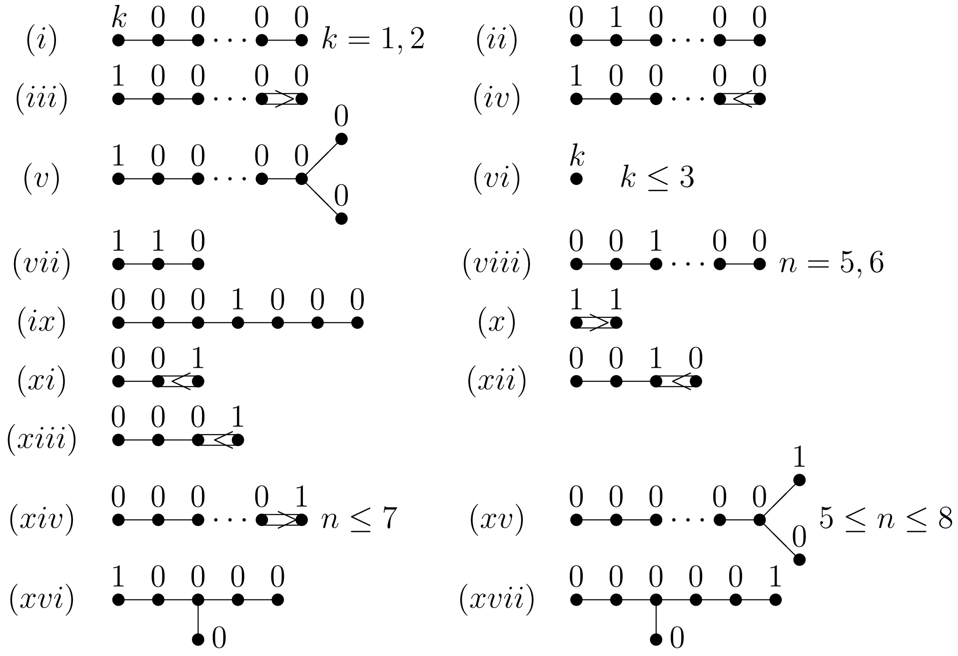
$\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$	$\mathfrak{g}_{\bar{1}}$
$\mathfrak{osp}(n\vert 2m,\mathbb{C})$	$\mathfrak{osp}(r,n-r\vert 2m,\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(r,n-r)\oplus\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{r,n-r}\otimes\mathbb{R}^{2m}$
$\mathfrak{osp}(2n\vert 2m,\mathbb{C})$	$\mathfrak{hosp}(r,m-r\vert n)$	$\mathfrak{so}(n,\mathbb{H})\oplus\mathfrak{sp}(r,m-r)$	$\mathbb{H}^{n}\otimes_{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{r,m-r}$
$\mathfrak{osp}(1\vert 2m,\mathbb{C})$	$\mathfrak{osp}(1\vert 2m,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{2m}$
$\mathfrak{osp}(4\vert 2,\alpha,\mathbb{C})$		$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ $\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{2}\otimes\mathbb{R}^{2}\otimes\mathbb{R}^{2}$ $\mathbb{R}^{4}\otimes\mathbb{R}^{2}$ $\mathbb{R}^{1,3}\otimes\mathbb{R}^{2}$
$F(4)$		$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{so}(7)$ $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{so}(3,4)$ $\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{so}(2,5)$ $\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{so}(1,6)$	$\mathbb{R}^{2}\otimes\Delta_{7}$ $\mathbb{R}^{2}\otimes\Delta_{3,4}$ $\mathbb{C}^{2}\otimes\Delta_{2,5}$ $\mathbb{C}^{2}\otimes\Delta_{1,6}$
$G(3)$		$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus G_{2}$ $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus G^{*}_{2(2)}$	$\mathbb{R}^{2}\otimes\mathbb{R}^{7}$ $\mathbb{R}^{2}\otimes\mathbb{R}^{3,4}$
$\mathfrak{pq}(n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{pq}(n,\mathbb{R})$ $\mathfrak{pq}(n,\mathbb{H})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ $\mathfrak{su}(p,n-p)$ $\mathfrak{sl}(\frac{n}{2},\mathbb{H})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ $\mathfrak{su}(p,n-p)$ $\mathfrak{sl}(\frac{n}{2},\mathbb{H})$
$\mathfrak{sl}(n\vert m,\mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(s,n-s\vert r,m-r)$	$\mathfrak{su}(s,n-s)\oplus\mathfrak{su}(r,m-r)\oplus\mathbb{R}i$	$\mathbb{C}^{s,n-s}\otimes\mathbb{C}^{r,m-r}$
$\mathfrak{psl}(n\vert n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{psu}(s,n-s\vert r,n-r)$	$\mathfrak{su}(s,n-s)\oplus\mathfrak{su}(r,n-r)$ $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{s,n-s}\otimes\mathbb{C}^{r,n-r}$ $\mathbb{C}^{n}\otimes\overline{\mathbb{C}^{n}}$
$\mathfrak{osp}(2\vert 2m,\mathbb{C})$	$\mathfrak{hosp}(r,m-r\vert 1)$	$\mathbb{R}i\oplus\mathfrak{sp}(r,m-r)$	$\mathbb{H}^{r,m-r}$

доказательству теоремы 3.12 из [137], подробности можно найти в [168].

Теорема 3.2.2. *Пусть $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(V)$ — неприводимая косая алгебра Берже, тогда существует экстремальная тройка $(\lambda_0,\lambda_1,\alpha)$.*

Предположим сначала, что $\mathfrak{g}$ является простой алгеброй Ли. Приведем предложение 3.18 из [137].

Предложение 3.2.1. *Пусть $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(V)$ — неприводимая простая подалгебра. Предположим, что существует экстремальная порождающая тройка $(\lambda_0,\lambda_1,\alpha)$. Тогда либо $\Phi\subset\Delta_0$, либо представление $\mathfrak{g}$ на V сопряжено одному из следующих представлений:*



Если $\Phi \subset \Delta_0$, то представление $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — одно из следующих:

$(xviii)$ $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ действующая на $(\Lambda^2\mathbb{C}^{2n})_0 = \Lambda^2\mathbb{C}^{2n}/\mathbb{C}\Omega$, где Ω – симплектическая форма на $\mathbb{C}^{2n}$;

(xix) $\mathfrak{f}_4$ действующая на $V^{\mathfrak{f}_4}_{\pi_1} = \mathbb{C}^{26}$;

(xx) $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{gl}(7, \mathbb{C})$;

(xxi) присоединенные представления простых алгебр Ли.

Так как мы рассматриваем случай $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(V)$, то нам интересны только следующие представления: (iv), (vi) при $k = 1, 3$, $(viii)$ при $n = 6$, (x), (xi), (xii), (xiv) при $n = 1, 2, 5, 6$, (xv) при $n = 6, 8$, $(xvii)$.

Представления (x), (xii) и (xv) для $n = 8$ можно рассмотреть так же, как в [137] (где для этих представлений доказано, что $\dim \mathcal{R}(\mathfrak{g}) \leq 1$; аналогично можно показать, что $\dim \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}) \leq 1$, но эти представления не содержатся в

Таблица 3.2.6. Простые вещественные супералгебры Ли типа II.

$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_{\bar 0}$	$\mathfrak{g}_{\bar 1}$
$\mathfrak{sl}(n\|m, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n\|m, \mathbb{R})$ $\mathfrak{sl}(\frac{n}{2}\|\frac{m}{2}, \mathbb{H})$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(m, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ $\mathfrak{sl}(\frac{n}{2}, \mathbb{H}) \oplus \mathfrak{sl}(\frac{m}{2}, \mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^{m*} \oplus \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^m$ $\mathbb{H}^{\frac{n}{2}} \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{\frac{m}{2}*} \oplus \mathbb{H}^{\frac{n}{2}*} \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{\frac{m}{2}}$
$\mathfrak{osp}(2\|2m, \mathbb{C})$	$\mathfrak{osp}(2\|2m, \mathbb{R})$	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{2m} \oplus \mathbb{R}^{2m*}$
$\mathfrak{pe}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{pe}(n, \mathbb{R})$ $\mathfrak{pe}(\frac{n}{2}, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ $\mathfrak{sl}(\frac{n}{2}, \mathbb{H})$	$\odot^2\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \oplus \Lambda^2\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$ $\odot^2\mathfrak{sl}(\frac{n}{2}, \mathbb{H}) \oplus \Lambda^2\mathfrak{sl}(\frac{n}{2}, \mathbb{H})^*$

таблице 3.2.3, поэтому $\dim \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}) = 0$).

Рассмотрим оставшиеся представления.

(vi) ($\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(\odot^k\mathbb{C}^2)$, $k = 1, 3$). Вычисления с использованием пакета Mathematica показывают, что $\dim \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}) = 0$ для $k = 3$. Случай $k = 1$ определяет стандартное представление $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Пространство $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g})$ может быть найдено из равенства

$$\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}) = \ker(\partial : \odot^2 V^* \otimes \mathfrak{g} \to \odot^3 V^* \otimes V),$$

где ∂ — симметризация; отображение ∂ является $\mathfrak{g}$-эквивариантным. Разложим $\mathfrak{g}$-модули $\odot^2 V^* \otimes \mathfrak{g}$ и $\odot^3 V^* \otimes V$ в сумму неприводимых компонент. Если кратность компоненты V_Λ в представлении $\odot^2 V^* \otimes \mathfrak{g}$ больше соответствующей кратности в представлении $\odot^3 V^* \otimes V$, то пространство $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g})$ содержит $\mathfrak{g}$-модуль, изоморфный V_Λ. В частности, $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}) \neq 0$, а поскольку алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является простой, то $\mathfrak{g}$ является косой алгеброй Берже. Применим эту идею к следующим двум случаям.

(xv) $n = 6$ (спинорное представление алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(12,\mathbb{C})$ на $V = \Delta^+_{12}$). Используя пакет LiE, можно проверить, что $\odot^2 V^* \otimes \mathfrak{g}$ содержит подмодуль изоморфный $V_{2\pi_1}$, а $\odot^3 V^* \otimes V$ не содержит подмодуль изоморфный $V_{2\pi_1}$. Поэтому, $\mathfrak{spin}(12,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(\Delta^+_{12})$ является косой алгеброй Берже.

(xi) ($\mathfrak{sp}(6,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(\Lambda^3\mathbb{C}^6)$.) В этом случае $\odot^2 V^* \otimes \mathfrak{g}$ содержит подмодуль

Таблица 3.2.7. Неприводимые комплексные косые алгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C}) = \mathfrak{sp}(V)$.

$\mathfrak{g}$	V	ограничение
$\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{2m}$	$n \geq 1$
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^m$	$m \geq 3$
$\mathfrak{spin}(12,\mathbb{C})$	$\Delta^+_{12} = \mathbb{C}^{32}$	
$\mathfrak{sl}(6,\mathbb{C})$	$\Lambda^3\mathbb{C}^6 = \mathbb{C}^{20}$	
$\mathfrak{sp}(6,\mathbb{C})$	$V_{\pi_3} = \mathbb{C}^{14}$	
$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(2q,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{2q}$	$n \geq 3$, $q \geq 2$
$G_2^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^7 \otimes \mathbb{C}^2$	
$\mathfrak{so}(7,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^8 \otimes \mathbb{C}^2$	

изоморфный V_{π_3}, а $\odot^3 V^* \otimes V$ не содержит подмодуль изоморфный V_{π_3}. Поэтому, $\mathfrak{sp}(6,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(14,\mathbb{C})$ является косой алгеброй Берже.

(xiv) (спинорное представление алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$ на $V = \Delta_{2n+1}$, $n = 5,6$). С помощью пакета Mathematica мы показываем, что $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{spin}(11,\mathbb{C})) = 0$. В [168] мы показали, что $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{spin}(14,\mathbb{C})) = 0$. Так как $\mathfrak{spin}(13,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{spin}(14,\mathbb{C})$, то $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{spin}(13,\mathbb{C})) = 0$. Если $n = 2$, то имеем стандартное представление алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$; $n = 1$ дает стандартное представление $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

$(xvii)$ $\mathfrak{e}_7 \subset \mathfrak{gl}(56,\mathbb{C})$. Воспользуемся описанием этого представления из [9]. Алгебра Ли $\mathfrak{e}_7$ допускает структуру $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры Ли,

$$\mathfrak{e}_7 = \mathfrak{sl}(8,\mathbb{C}) \oplus \Lambda^4\mathbb{C}^8.$$

Пространство представления $\mathbb{C}^{56}$ можно разложить в прямую сумму

$$\mathbb{C}^{56} = \Lambda^2\mathbb{C}^8 \oplus \Lambda^2(\mathbb{C}^8)^*.$$

Элементы $\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})$ сохраняют это представление и действуют естественно на каждой компоненте, а элементы $\Lambda^4\mathbb{C}^8$ меняют компоненты местами. Так как $\mathfrak{e}_7 \subset \mathfrak{sp}(56,\mathbb{C})$, то каждый элемент $R \in \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{e}_7)$ является симметрическим отображением

$$R : \odot^2\mathbb{C}^{56} \to \mathfrak{e}_7 \subset \odot^2\mathbb{C}^{56}$$

и обращается в ноль на ортогональном дополнение к $\mathfrak{e}_7 \subset \odot^2\mathbb{C}^{56}$. Таким образом, $R \in \odot^2\mathfrak{e}_7$. Как $\mathfrak{e}_7$-модуль $\odot^2\mathfrak{e}_7$ можно представить в виде

$$\odot^2\mathfrak{e}_7 = V^{\mathfrak{e}_7}_{2\pi_1} \oplus V^{\mathfrak{e}_7}_{\pi_6} \oplus \mathbb{C}.$$

Имеем $\dim V^{\mathfrak{e}_7}_{2\pi_1} = 7371$ и $\dim V^{\mathfrak{e}_7}_{\pi_6} = 1539$. Как $\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})$-модуль $\odot^2\mathfrak{e}_7 = \odot^2(\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C}) \oplus \Lambda^4\mathbb{C}^8)$ можно представить в виде

$$\odot^2\mathfrak{e}_7 = \odot^2\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C}) \oplus \odot^2\Lambda^4\mathbb{C}^8 \oplus W,$$

где $W \subset \odot^2\mathfrak{e}_7$ состоит из симметрических отображений, переставляющих $\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})$ и $\Lambda^4\mathbb{C}^8$. Важным является тот факт, что в разложении пространства $\odot^2\mathfrak{e}_7$ в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})$-модулей имеется только одно слагаемое размерности больше 1 и кратности 2: $\odot^2(\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C}))$ и $\odot^2\Lambda^4$ содержат подмодуль изоморфный $V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_2+\pi_6}$. Следовательно, каждый $R \in \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{e}_7)$ можно представить в виде суммы элементов из $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{e}_7)$, содержащихся в $(\odot^2\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C}))/V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_2+\pi_6}$, $(\odot^2\Lambda^4\mathbb{C}^8)/V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_2+\pi_6}$, W и $2V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_2+\pi_6} \subset \odot^2\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C}) \oplus \odot^2\Lambda^4\mathbb{C}^8$. Имеем

$$\odot^2\mathbb{C}^{56} = \odot^2(\Lambda^2\mathbb{C}^8) \oplus (\Lambda^2\mathbb{C}^8 \otimes \Lambda^2(\mathbb{C}^8)^*) \oplus \odot^2(\Lambda^2\mathbb{C}^8)$$

$$= (\Lambda^2\mathbb{C}^8 \oplus \Lambda^4\mathbb{C}^8) \oplus (V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_2+\pi_6} \oplus \mathfrak{sl}(8,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}) \oplus (\Lambda^2(\mathbb{C}^8)^* \oplus \Lambda^4\mathbb{C}^8)$$

как $\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})$-модуль. Это разложение определяет включение $\mathfrak{e}_7 \subset \odot^2\mathbb{C}^{56}$ и поведение элементов из W. Предположим, что $R \in \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{e}_7) \cap W$. Пусть $x, y \in \odot^2(\Lambda^2\mathbb{C}^8)$. По определению W, имеем $R(x,y) \in \mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})$. Применяя тождество Бьянки к $x, y, z \in \odot^2(\Lambda^2\mathbb{C}^8)$, получим $R|_{\odot^2(\Lambda^2\mathbb{C}^8)\otimes\Lambda^2\mathbb{C}^8} \in \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(\Lambda^2\mathbb{C}^8))$. Более того, поскольку R является симметрическим отображением, то только что рассмотренное ограничение равно нулю тогда и только тогда, когда $R = 0$. В [168] показано, что

$$\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(\Lambda^2\mathbb{C}^8)) \simeq \Lambda^2(\mathbb{C}^8)^* \otimes \odot^2(\mathbb{C}^8)^* \simeq V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_5+\pi_7} \oplus V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_6+2\pi_7}.$$

Таким образом, $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{e}_7) \cap W$ изоморфно некоторому подмодулю $\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})$-модуля $V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_5+\pi_7} \oplus V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_6+2\pi_7}$. Заметим, что $\dim V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_5+\pi_7} = 378$ и $\dim V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_6+2\pi_7} = 630$. Далее, $\odot^2(\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})) \simeq V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{2\pi_1+2\pi_7} \oplus V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_2+\pi_6} \oplus \mathfrak{sl}(8,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$, $\odot^2\Lambda^4\mathbb{C}^8 \simeq V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_4} \oplus V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_2+\pi_6} \oplus \mathbb{C}$, $\dim V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{2\pi_1+2\pi_7} = 1232$, $V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{\pi_2+\pi_6} = 720$, $\dim V^{\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})}_{2\pi_4} = 1764$. Анализируя размерности модулей, получаем $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{e}_7) = 0$.

Доказательство теоремы для случая полупростой, не являющейся, простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ аналогично доказательству похожей теоремы из [121], подробности можно найти в [168]. ☐

3.2.4. Неприводимые алгебры голономии несимметрических нечетных римановых супермногообразий

В пункте 3.2.2 мы классифицировали неприводимые симметрические косые алгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$, поэтому остается классифицировать неприводимые, не являющиеся симметрическими косые алгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$.

Напомним, что в таблице 3.2.7 даны неприводимые косые подалгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$, последние три алгебры этой таблицы являются симметрическими.

Для вещественного пространства V и неприводимой подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ рассмотрим комплексификации

$$V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \subset \mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}}).$$

Легко видеть, что

$$\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Предположим, что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — комплексного типа, т.е. V можно рассматривать как комплексное векторное пространство. Рассмотрим естественное представление $i : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{gl}(V)$. Следующее предложение аналогично предложению 3.1 из [137].

Предложение 3.2.2. *Пусть V — вещественное векторное пространство, а $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — неприводимая подалгебра.*

1. *Если представление $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — комплексного типа, то $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — косая алгебра Берже тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}})$ — косая алгебра Берже.*

2. *Если подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — вещественного типа, и если $(i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))^{[1]} = 0$, то $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — косая алгебра Берже тогда и только тогда, когда $J\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}(V)$ - комплексная неприводимая косая алгебра Берже.*

Прежде всего, алгебры из таблицы 3.2.7 соответствуют второму случаю из предложения с $(i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))^{[1]} = 0$, и только первые пять алгебр из таблицы 3.2.7 не являются симметрическими косыми алгебрами Берже.

Предположим, что подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(V)$ — вещественного типа и является несимметрической косой алгеброй Берже. Тогда $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{sp}(V_{\mathbb{C}})$ — одна из первых пяти алгебр таблицы 3.2.7. Каждая из этих алгебр также является алгеброй Берже [137]. Из предложения 3.2.2 и предложения 3.1 из [137] следует, что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(V)$ является алгеброй Берже, поэтому мы можем получит список неприводимых несимметрических косых алгебр Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(V)$ вещественного типа, используя [137].

Остается рассмотреть подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(V)$ комплексного типа такие, что $(i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))^{[1]} \neq 0$. Пусть $\mathfrak{g}$ — такая алгебра. Пусть, как в пункте 3.2.1,

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \cap J\mathfrak{g}.$$

Тогда

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1' \oplus \mathfrak{g}_1'' \oplus (\mathfrak{g}_2 \otimes \mathbb{C}).$$

Более того, $\mathfrak{g}_1'$ и $\mathfrak{g}_1''$ — изоморфны. Таблица 3.2.1 показывает, что единственной возможной $i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ является $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$. В этом случае, $V = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{g}_2 = \mathbb{R}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, действующая в $V_{\mathbb{C}}$, сохраняет разложение $V_{\mathbb{C}} = W \oplus \bar{W}$, где W и $\bar{W}$ — собственные пространства продолжения J на $V_{\mathbb{C}}$, соответствующие собственным значениям i и $-i$. Более того, $\mathfrak{g}_1' \simeq \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ аннулирует W, $\mathfrak{g}_1'' \simeq \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ аннулирует $\bar{W}$, а $\mathbb{C}$ действует диагонально в $W \oplus \bar{W}$. Это показывает, что

$$\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \subset \bar{\mathcal{R}}\big(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(W)\big) \oplus \bar{\mathcal{R}}\big(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(\bar{W})\big).$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}} W = 2n$. Алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ не являются косыми подалгебрами Берже в $\mathfrak{gl}(W)$ для W таких размерностей, поэтому $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = 0$. Это показывает, что $\mathfrak{g}_1 = 0$, следовательно $\mathfrak{g} \cap J\mathfrak{g} = 0$, т.е. $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ — вещественная форма. Следует рассмотреть вещественные формы $\mathfrak{g}$ алгебр $\mathfrak{h}$ из таблицы 3.2.1 такие, что ограничение на $\mathfrak{g}$ соответствующего представления $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(E)$ — неприводимо и взять $V = E$, рассматриваемое как вещественное векторное пространство. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}$ действует диагонально в $V_{\mathbb{C}} = W \oplus \bar{W}$. Пусть $R \in \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \subset V_{\mathbb{C}})$ и $S \in \nabla\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \subset V_{\mathbb{C}})$. Из первого тождества Бьянки следует, что $R(X,Y) = 0$, если оба X и Y принадлежат либо W, либо $\bar{W}$. Далее, для $X_1 \in \bar{W}$ и $X \in W$ имеем

$$R(X_1, \cdot|_W)|_W \in ((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_W \subset \mathfrak{gl}(W))^{[1]}, \quad R(X, \cdot|_{\bar{W}})|_{\bar{W}} \in ((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\bar{W}} \subset \mathfrak{gl}(\bar{W}))^{[1]}.$$

Отсюда и из второго тождества Бьянки следует, что

$$S_{\cdot|_W}(X_1, \cdot|_W)|_W \in ((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_W \subset \mathfrak{gl}(W))^{[2]}, \quad S_{\cdot|_{\bar{W}}}(X, \cdot|_{\bar{W}})|_{\bar{W}} \in ((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\bar{W}} \subset \mathfrak{gl}(\bar{W}))^{[2]}.$$

Следовательно, если $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(V)$ — косая алгебра Берже и $((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_W \subset \mathfrak{gl}(W))^{[2]} = 0$, то $\nabla\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}) = 0$, т.е. $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(V)$ — симметрическая косая алгебра Берже. Поэтому мы получаем только четыре возможности для $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(E)$:

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),\ \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}),\ \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}),\ \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}).$$

Соответствующие $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$ — следующие:

$$\mathfrak{u}(n),\ \mathfrak{su}(n) \subset \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}), \quad \mathfrak{so}(n, \mathbb{H}),\ \mathfrak{so}(n, \mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}i \subset \mathfrak{sp}(4n, \mathbb{R}).$$

Найдем пространство $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C} = \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}}))$. Как мы видели, каждый $R \in \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}}))$ однозначно определяется значениями $R(X, X_1)$ где $X \in W$ и $X_1 \in \bar{W}$. Пусть $e_1, ..., e_m$ — базис в W, а $e^1, ..., e^m$ — двойственный базис в $\bar{W}$. Будем писать $R(e_i, e^j) = A_i^j$, где $A_i^j \in g_{\mathbb{C}}|_W$. Определим числа A_{ik}^{jl} такие, что $A_i^j e_k = \sum_l A_{ik}^{jl} e_l$. Тогда, $A_i^j e^l = \sum_k A_{ik}^{jl} e^k$. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$, тогда $A_i^j \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ и $m = n$. Имеем $R \in \bar{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ тогда и только тогда, когда $A_{ik}^{jl} = -A_{ki}^{jl}$ и $A_{ik}^{jl} = -A_{ik}^{lj}$. Поэтому, $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{u}(n)) \otimes \mathbb{C}$ изоморфно $(W \wedge W) \otimes (W^* \wedge W^*)$. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ дополнительно получаем условия $\sum_k A_{ik}^{jk} = 0$. Это показывает, что $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(n) \subset \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ являются косыми алгебрами Берже. Так как

$$(\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}))^{[1]} = (\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}))^{[1]},$$

то $\mathfrak{so}(n, \mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}i \subset \mathfrak{sp}(4n, \mathbb{R})$ не является косой алгеброй Берже. Рассмотрим $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{H}) \subset \mathfrak{sp}(4n, \mathbb{R})$. Каждый $R \in \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \subset V_{\mathbb{C}})$ определяется элементами A_i^j с дополнительным условием $A_{ik}^{jl} = -A_{il}^{jk}$. Это показывает, что $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \subset V_{\mathbb{C}}) \simeq \wedge^4 \mathbb{C}^{2n}$, т.е. $\mathfrak{so}(n, \mathbb{H}) \subset \mathfrak{sp}(4n, \mathbb{R})$ — косая алгебра Берже. Мы доказали следующую классификационную теорему.

Теорема 3.2.3. *Возможные неприводимые алгебры голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$ несимметрических нечетных римановых супермногообразий перечислены в таблице 3.2.8.*

Таблица 3.2.8. Возможные неприводимые алгебры голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(V)$ несимметрических нечетных римановых супермногообразий.

$\mathfrak{g}$	V	ограничение
$\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{2m}$	$m \geq 1$
$\mathfrak{u}(p, q)$	$\mathbb{C}^{p,q}$	$p + q \geq 2$
$\mathfrak{su}(p, q)$	$\mathbb{C}^{p,q}$	$p + q \geq 2$
$\mathfrak{so}(n, \mathbb{H})$	$\mathbb{H}^n$	$n \geq 2$
$\mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{so}(n, \mathbb{H})$	$\mathbb{H}^n$	$n \geq 2$
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(p, q)$	$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{p,q}$	$p + q \geq 3$
$\mathfrak{spin}(2, 10)$	$\Delta^+_{2,10} = \mathbb{R}^{32}$	
$\mathfrak{spin}(6, 6)$	$\Delta^+_{6,6} = \mathbb{R}^{32}$	
$\mathfrak{so}(6, \mathbb{H})$	$\Delta^{\mathbb{H}}_6 = \mathbb{H}^8$	
$\mathfrak{sl}(6, \mathbb{R})$	$\Lambda^3\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^{20}$	
$\mathfrak{su}(1, 5)$	$\{\omega \in \Lambda^3\mathbb{C}^6 \| * w = w\}$	
$\mathfrak{su}(3, 3)$	$\{\omega \in \Lambda^3\mathbb{C}^6 \| * w = w\}$	
$\mathfrak{sp}(6, \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{14} \subset \Lambda^3\mathbb{R}^6$	
$\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{2m}$	$m \geq 1$
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(m, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^m$	$m \geq 3$
$\mathfrak{spin}(12, \mathbb{C})$	$\Delta^+_{12} = \mathbb{C}^{32}$	
$\mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$	$\Lambda^3\mathbb{C}^6 = \mathbb{C}^{20}$	
$\mathfrak{sp}(6, \mathbb{C})$	$V_{\pi_3} = \mathbb{C}^{14}$	

3.3. Группы голономии римановых супермногообразий

3.3.1. Обобщение теоремы Ву

Суперподалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(r, s|2k)$ называется *слабо неприводимой*, если она не сохраняет никакое собственное невырожденное векторное суперподпространство в $\mathbb{R}^{r,s} \oplus \Pi(\mathbb{R}^{2k})$.

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — супермногообразия. Напомним определение произведения

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} = (M \times N, \mathcal{O}_{\mathcal{M}\times\mathcal{N}}).$$

Пусть $U \subset M$ и $V \subset N$ — открытые подмножества, а $(U, x^1, ..., x^n, \xi^1, ..., \xi^m)$ и $(V, y^1, ..., y^p, \eta^1, ..., \eta^q)$ — системы координат на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, соответственно. По определению,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}\times\mathcal{N}}(U \times V) = \mathcal{O}_{M\times N}(U \times V) \otimes \Lambda_{\xi^1,...,\xi^m,\eta^1,...,\eta^q},$$

это условие однозначно определяет пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{M}\times\mathcal{N}}$ [107, 108]. Пусть $(\mathcal{M}, g)$ и $(\mathcal{N}, h)$ — римановы супермногообразия, а ∇^g и ∇^h — соответствующие связности Леви-Чевита. Тогда $g + h$ — риманова суперметрика на $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, при этом

$$\mathfrak{hol}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, g + h)_{(x,y)} = \mathfrak{hol}(\mathcal{M}, g)_x \oplus \mathfrak{hol}(\mathcal{N}, h)_y$$

и

$$\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla}^{g+h})_{(x,y)} = \mathrm{Hol}(\tilde{\nabla}^g)_x \times \mathrm{Hol}(\tilde{\nabla}^h)_y,$$

где $x \in M$ и $y \in N$. Следующая теорема обобщает теорему 1.1.6.

Теорема 3.3.1. *Пусть $(\mathcal{M}, g)$ — риманово супермногообразие такое, что псевдориманово многообразие $(M, \tilde{g})$ — односвязно и геодезически полно. Предположим, что алгебра голономии $\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, g)$ не является слабо неприводимой. Тогда существуют римановы супермногообразия $(\mathcal{M}_0, g_0)$, $(\mathcal{M}_1, g_1)$,..., $(\mathcal{M}_r, g_r)$ такие, что*

$$(\mathcal{M}, g) = (\mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_1 \times \cdots \times \mathcal{M}_r, g_0 + g_1 + \cdots + g_r), \tag{3.25}$$

супермногообразие $(\mathcal{M}_0, g_0)$ — плоское, а алгебры голономии супермногообразий $(\mathcal{M}_1, g_1)$,...,$(\mathcal{M}_r, g_r)$ — слабо неприводимы. В частности,

$$\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, g) = \mathfrak{hol}(\mathcal{M}_1, g_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{hol}(\mathcal{M}_r, g_r). \tag{3.26}$$

Для произвольного $(\mathcal{M}, g)$ разложение (3.25) имеет место локально.

Доказательство. Доказательство локальной версии этой теоремы аналогично доказательству локальной версии теоремы Ву. Пусть $x \in M$. Предположим, что $\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, g)_x$ не является слабо неприводимой, тогда $\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, g)_x$ сохраняет невырожденное векторное суперподпространство $F_1 \subset T_x\mathcal{M}$. Пусть $F_2 \subset T_x\mathcal{M}$ — его ортогональное дополнение. Алгебра $\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, g)_x$ сохраняет разложение $F_1 \oplus F_2 = T_x\mathcal{M}$. По теореме 3.1.2, существуют параллельные распределения $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ на $\mathcal{M}$, определенные на некоторой открытой окрестности U точки x. Эти распределения — инволютивны, поэтому существуют максимальные интегральные многообразия $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ супермногообразия $\mathcal{M}$, проходящие через точку x и соответствующие распределениям $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ [119]. Более того, существуют локальные координаты $x^1, ..., x^n, \xi^1, ..., \xi^m$ и $y^1, ..., y^n, \eta^1, ..., \eta^m$ на $\mathcal{M}$ такие, что $x^1, ..., x^{n_1}, \xi^1, ..., \xi^{m_1}$ и $y^1, ..., y^{n-n_1}, \eta^1, ..., \eta^{m-m_1}$ — координаты на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, соответственно. Поэтому,

$$x^1, ..., x^{n_1}, y^1, ..., y^{n-n_1}, \xi^1, ..., \xi^{m_1}, \eta^1, ..., \eta^{m-m_1}$$

– координаты на $\mathcal{M}$, и $\mathcal{M}$ локально изоморфно некоторой области произведения $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$. Так как F_1 и F_2 — невырождены, то ограничения g_1 и g_2 метрики g соответственно на $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — также невырождены. Легко показать, что g_1 и g_2 не зависят соответственно от координат $y^1, ..., y^{n-n_1}, \eta^1, ..., \eta^{m-m_1}$ и $x^1, ..., x^{n_1}, \xi^1, ..., \xi^{m_1}$. Таким образом, $(\mathcal{M}_1, g_1)$ и $(\mathcal{M}_2, g_2)$ — римановы супермногообразия, и $g = g_1 + g_2$. Локальная версия теоремы доказана.

Предположим, что псевдориманово многообразие $(M, \tilde{g})$ — односвязно и геодезически полно. Пусть F_1, F_2, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — как выше. Ясно, что векторные подпространства $(F_1)_{\bar{0}}, (F_2)_{\bar{0}} \subset T_xM$ — невырождены, и их сохраняет группа голономии $\mathrm{Hol}(M, \tilde{g})_x$ псевдориманова многообразия $(M, \tilde{g})$. По теореме Ву, M диффеоморфно произведению $M_1 \times M_2$, где M_1 и M_2 — интегральные подмногообразия, проходящие через точку x и соответствующие параллельным распределениям, определенным векторными подпространствами $(F_1)_{\bar{0}} \subset T_xM$ и $(F_2)_{\bar{0}} \subset T_xM$. Ясно, что низлежащими многообразиями супермногообразий $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ являются соответственно M_1 и M_2. Из локальной части теоремы следует, что $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ и $g = g_1 + g_2$. Теорема верна. $\Box$

3.3.2. Классификация неприводимых групп голономии римановых супермногообразий

В этом пункте мы классифицируем неприводимые несимметрические супералгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p, q|2m)$ $(p + q > 0)$ вида

$$\mathfrak{g} = (\oplus_i \mathfrak{g}_i) \oplus \mathfrak{z}, \tag{3.27}$$

где $\mathfrak{g}_i$ — простые супералгебры Ли классического типа, а $\mathfrak{z}$ – тривиальный или одномерный центр. Эта классификация обобщает классификацию Берже возможных неприводимых алгебр голономии псевдоримановых многообразий, в то же время мы не получаем аналоги важных алгебр голономии G_2 и $\mathfrak{spin}(7)$.

Заметим, что в общем случае полупростая супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид $\mathfrak{g} = \oplus_i(\mathfrak{g}_i \otimes \Lambda(n_i))$, где $\mathfrak{g}_i$ — простая супералгебра Ли, а $\Lambda(n_i)$ — супералгебра Грассманна [98]. Более того, существуют неприводимые представления разрешимых супералгебр Ли в суперпространствах размерностей больших, чем один [98]. Таким образом, мы рассматриваем только часть неприводимых подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p, q|2m)$. С другой стороны, для неприводимых подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(p, q)$ свойство (3.27) выполняется автоматически, поэтому наше предположение является вполне естественным.

В [141] классифицированы односвязные симметрические суперпространства простых супергрупп Ли. В частности, этот результат влечет классификацию неприводимых алгебр голономии римановых симметрических супермногообразий. Поэтому мы предполагаем, что рассматриваемые супермногообразия не являются локально симметрическими.

Теорема 3.3.2. *Пусть $(\mathcal{M}, g)$ — не являющееся локально симметрическим риманово супермногообразие размерности $p + q|2m$ $(p + q > 0)$ с неприводимой алгеброй голономии $\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, g) \subset \mathfrak{osp}(p, q|2m)$ вида* (3.27)*, тогда*

$\mathfrak{hol}(\mathcal{M},g) \subset \mathfrak{osp}(p,q|2m)$ *совпадает с одной из супералгебр Ли из таблицы 3.3.1.*

Таблица 3.3.1. Неприводимые несимметрические супералгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p,q|2m)$ $(p+q>0)$ вида (3.27) и связные суперподгруппы Ли $G \subset \mathrm{SO}(p,q)\times\mathrm{Sp}(2m,\mathbb{R})$, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{g}_{\bar 0} \subset \mathfrak{so}(p,q)\oplus\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$.

$\mathfrak{g}$	G	$(p,q\|2m)$
$\mathfrak{osp}(p,q\|2m)$	$\mathrm{SO}(p,q)\times\mathrm{Sp}(2m,\mathbb{R})$	$(p,q\|2m)$
$\mathfrak{osp}(p\|2k,\mathbb{C})$	$\mathrm{SO}(p,\mathbb{C})\times\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{R})$	$(p,p\|4k)$
$\mathfrak{u}(p_0,q_0\|p_1,q_1)$	$\mathrm{U}(p_0,q_0)\times\mathrm{U}(p_1,q_1)$	$(2p_0,2q_0\|2p_1+2q_1)$
$\mathfrak{su}(p_0,q_0\|p_1,q_1)$	$\mathrm{U}(1)(\mathrm{SU}(p_0,q_0)\times\mathrm{SU}(p_1,q_1))$	$(2p_0,2q_0\|2p_1+2q_1)$
$\mathfrak{hosp}(r,s\|k)$	$\mathrm{Sp}(p_0,q_0)\times\mathrm{SO}^*(k)$	$(4r,4s\|4k)$
$\mathfrak{hosp}(r,s\|k)\oplus\mathfrak{sp}(1)$	$\mathrm{Sp}(1)(\mathrm{Sp}(p_0,q_0)\times\mathrm{SO}^*(k))$	$(4r,4s\|4k)$
$\mathfrak{osp}^{sk}(2k\|r,s)\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$	$\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{R})\times\mathrm{SO}(r,s)\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$	$(2k,2k\|2r+2s)$
$\mathfrak{osp}^{sk}(2k\|r,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{C})\times\mathrm{SO}(r,\mathbb{C})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$	$(4k,4k\|4r)$

Тензор Риччи супермногообразия $(\mathcal{M},g)$ определяется формулой

$$\mathrm{Ric}(Y,Z)=\mathrm{str}(X\mapsto(-1)^{|X||Z|}R(Y,X)Z), \tag{3.28}$$

где $U\subset M$ — открытое подмножество, а $X,Y,Z\in\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(U)$ — однородные векторные поля.

Определения супермногообразий, которые мы будем рассматривать, аналогичны определениям соответствующих псевдоримановых многообразий [55, 169]. Например, риманово супермногообразие $(\mathcal{M},g)$ называется *кэлеровым супермногообразием*, если оно допускает четную параллельную g-ортогональную комплексную структуру. Алгебра голономии такого многообразия содержится в $\mathfrak{u}(p_0,q_0|p_1,q_1)$. По определению, *специальным кэлеровым супермногообразием или супермногообразием Калаби-Яу* называется Риччи-плоское кэлерово супермногообразие. Следующее предложение мы доказываем в [169].

Предложение 3.3.1. *Пусть* $(\mathcal{M},g)$ *— кэлерово супермногообразие, тогда* $\mathrm{Ric}=0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{hol}(\mathcal{M},g)\subset\mathfrak{su}(p_0,q_0|p_1,q_1)$.

Римановы супермногообразия с алгебрами голономии $\mathfrak{osp}(p,q|2m)$ представляют собой случай „общего положения". Приведем геометрические характеристики односвязных супермногообразий с алгебрами голономии $\mathfrak{g}$, отличными от $\mathfrak{osp}(p,q|2m)$:

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p|2k,\mathbb{C})$: голоморфные римановы супермногообразия;

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(p_0,q_0|p_1,q_1)$: кэлеровы супермногообразия;

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{su}(p_0,q_0|p_1,q_1)$: специальные кэлеровы супермногообразия или супермногообразия Калаби-Яу;

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{hosp}(r,s|k)$: гиперкэлеровы супермногообразия;

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{hosp}(r,s|k) \oplus \mathfrak{sp}(1)$: кватернионнокэлеровы супермногообразия;

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}^{sk}(2k|r,s) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$: паракэлеровы супермногообразия;

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}^{sk}(2k|r,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$: голоморфные паракэлеровы супермногообразия.

Вот еще одно предложение из [169].

Предложение 3.3.2. *Пусть* $(\mathcal{M},g)$ *— кватернионнокэлерово супермногообразие, тогда* $\mathrm{Ric} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{hol}(\mathcal{M},g) \subset \mathfrak{hosp}(p_0,q_0|p_1,q_1)$. *В частности, если* $(\mathcal{M},g)$ *— гиперкэлерово супермногообразие, тогда* $\mathrm{Ric} = 0$. *Если* M *— односвязно, а* $(\mathcal{M},g)$ *— кватернионнокэлерово, и* $\mathrm{Ric} = 0$, *то* $(\mathcal{M},g)$ *— гиперкэлерово.*

Естественной проблемой является проблема построения примеров супермногообразий с каждой из полученных алгебр голономии. Напомним, что проблема построения специальных кэлеровых многообразий привела к теореме Калаби-Яу [151]. В [132] показано, что теорема Калаби-Яу неверна для кэлеровых супермногообразий вещественной размерности два. В [152] показано, что аргументы [132] применимы только для супермногообразий вещественной размерности два, поэтому возможно, что теорема Калаби-Яу верна для супермногообразий вещественной размерности большей чем два. Примеры супермногообразий Калаби-Яу построены в [8]. Примеры кватернионнокэлеровых супермногообразий построены в [55].

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теоремы 3.3.2.

3.3.3. Подготовка к доказательству теоремы 3.3.2

Доказательство следующего предложения — такое же, как доказательство аналогичного утверждения из [137].

Предложение 3.3.3. *Пусть* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ *— неприводимая суперaлгебра Берже вида* (3.27). *Если* $\mathfrak{g}$ *аннулирует модуль* $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, *то* $\mathfrak{g}$ *является симметрической суперaлгеброй Берже.*

Далее мы обсудим некоторые неприводимые представления алгебр Ли.

Пусть $V = \mathbb{R}^{p,q}$, а $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(V)$ — редуктивная слабо неприводимая подалгебра Берже. Если $\mathfrak{g}$ не является неприводимой, то она сохраняет некоторое вырожденное подпространство $W \subset V$. Следовательно, $\mathfrak{g}$ сохраняет изотропное пространство $L = W \cap W^{\perp}$. Так как каждое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — вполне приводимо, то существует дополнительное инвариантное подпространство $L' \subset V$. Поскольку $\mathfrak{g}$ слабо неприводима, то подпространство L' — вырождено. Если L' не является изотропным, то $\mathfrak{g}$ сохраняет ядро ограничения метрики на L', а поэтому $\mathfrak{g}$ сохраняет некоторое дополнительное подпространство в L' к этому ядру, которое является невырожденным. Итак, L' — изотропное подпространство, а $V = L \oplus L'$ является прямой суммой изотропных подпространств. Это может случиться только если $p = q$. Метрика на V позволяет отождествить L' с дуальным пространством L^*, а представления $\mathfrak{g}$ на L и L' являются двойственными. Это показывает, что представление $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(L)$ является неприводимым. Пусть $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})$. Из тождества Бьянки следует, что $R(x, y) = 0$ и $R(\varphi, \psi) = 0$ для всех $x, y \in L$ и $\varphi, \psi \in L^*$. Более того, для каждого фиксированного $\varphi \in L^*$ имеем

$R(\cdot,\varphi)\in(\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(L))^{(1)}$, аналогично для каждого фиксированного $x\in L$ выполнено $R(\cdot,x)\in(\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(L^*))^{(1)}$. Поэтому, $(\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(L))^{(1)}\neq 0$, и представление $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(L)$ можно найти в таблице B из [44]. Слабо неприводимые редуктивные симметрические подалгебры Берже $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(p,q)$ перечислены в [29].

Пусть $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(p,p)=\mathfrak{so}(L\oplus L')$ — как выше. Легко видеть, что $P\in\mathcal{P}_\eta(\mathfrak{g})$ тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{gl}(L)}\circ P|_L\in(\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(L))^{(1)},\quad \mathrm{pr}_{\mathfrak{gl}(L^*)}\circ P|_L\in(\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(L^*))^{(1)}.$$

Поэтому, если $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(L\oplus L^*)$ является слабой алгеброй Берже, то $(\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(L))^{(1)}\neq\{0\}$, и такие алгебры известны.

Приведем алгебраическую версию теоремы 3.3.1 для чисто нечетного случая.

Теорема 3.3.3. *Пусть $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$ — косая подалгебра Берже, не являющаяся неприводимой, тогда существует ортогональное разложение*

$$V=V_0\oplus V_1\oplus\cdots\oplus V_r$$

и разложение

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_r$$

в прямую сумму идеалов такое, что $\mathfrak{g}_i$ аннулирует V_j при $i\neq j$, и $\mathfrak{g}_i\subset\mathfrak{sp}(V_i)$ является слабо неприводимой косой подалгеброй Берже.

Пусть $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})=\mathfrak{sp}(V)$ — редуктивная слабо неприводимая подалгебра. Если $\mathfrak{g}$ не является неприводимой, то, как и выше, можно показать, что V имеет вид $V=L\oplus L^*$, где $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(L)$ — неприводимая подалгебра. Если $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{sp}(V)$ является косой алгеброй Берже, то $(\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(L))^{[1]}\neq\{0\}$, а такие подалгебры нам известны.

Пусть V — комплексное или вещественное векторное пространство с симплектической формой ω. Пусть $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{sp}(V)$ — подалгебра. Назовем векторное пространство

$$\mathcal{P}_\omega(\mathfrak{g})=\left\{P\in V^*\otimes\mathfrak{g}\;\middle|\;\begin{array}{c}\omega(P(X)Y,Z)+\omega(P(Y)Z,X)+\omega(P(Z)X,Y)=0\\ \text{для всех } X,Y,Z\in V\end{array}\right\}$$

пространством *косых слабых тензоров кривизны типа* $\mathfrak{g}$. Назовем подалгебру $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(V)$ косой слабой алгеброй Берже, если $\mathfrak{g}$ линейно порождается образами элементов $P \in \mathcal{P}_\omega(\mathfrak{g})$. Легко видеть, что если $R \in \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g})$, а $X \in V$ — фиксированный вектор, то $R(\cdot, X) \in \mathcal{P}_\omega(\mathfrak{g})$. В частности, каждая косая алгебра Берже является косой слабой алгеброй Берже. Обратное утверждение дает следующая теорема.

Теорема 3.3.4. *Каждая неприводимая слабая косая алгебра Берже* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$ *является косой алгеброй Берже.*

Доказательство этой теоремы представляет собой модифицированную копию теоремы 1.3.3, доказанной в [116].

Если представление $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$ не является абсолютно неприводимым, то пространство $\mathcal{P}_\omega(\mathfrak{g})$ изоморфно $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}))^{[1]}$, и доказательство следует из пункта 3.2.1.

Если представление $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$ является абсолютно неприводимым, то достаточно получить классификацию неприводимых слабых косых алгебр Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$. Она может быть получена таким же способом, как классификация неприводимых слабых алгебр Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$. В действительности, в [116] получено необходимое условие для того, чтобы неприводимая подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ являлась слабой алгеброй Берже, и были классифицированы все подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, удовлетворяющие этому условию, а подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$ были отмечены отдельно. Легко видеть, что слабые косые подалгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$ удовлетворяют упомянутому условию, из этого следует доказательство теоремы. ☐

Пространство $\mathcal{P}_\omega(\mathfrak{g})$ для неприводимых косых подалгебр Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ могут быть найдены используя методы пункта 1.4. В частности, если

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \subset \mathfrak{sp}(V^1 \otimes V^2) = \mathfrak{sp}(V),$$

где $\mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{gl}(V^1)$ и $\mathfrak{g}^2 \subset \mathfrak{gl}(V^2)$ — неприводимы, то

$$\mathcal{P}_\omega(\mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{sp}(V)) = \mathcal{P}_\omega(\mathfrak{g}^2 \subset \mathfrak{sp}(V)) = 0,$$

кроме случая когда комплексификация представления $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(V)$ совпадает с

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}).$$

В последнем случае $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$,

$$\mathcal{P}_\omega(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{sp}(V)) = 0, \quad \mathcal{P}_\omega(\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{so}(V)) = (\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))^{[1]}.$$

Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(L)$ — неприводимая подалгебра. Снова рассмотрим $\mathfrak{g}$ как слабо неприводимую подалгебру в $\mathfrak{sp}(L \oplus L^*) = \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$, где $m = \dim L$. Пусть ω — естественная симплектическая форма на $L \oplus L^*$. Принадлежность $P \in \mathcal{P}_\omega(\mathfrak{g})$ эквивалентна принадлежностям

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{gl}(L)} \circ P|_L \in (\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(L))^{[1]}, \quad \mathrm{pr}_{\mathfrak{gl}(L^*)} \circ P|_L \in (\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(L^*))^{[1]}.$$

Поэтому, если $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(L \oplus L^*)$ — слабая косая подалгебра Берже, то $(\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(L))^{[1]} \neq \{0\}$.

3.3.4. Структура пространств $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$

Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p, q|2m) = \mathfrak{osp}(V)$ и опишем пространство $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$. Обозначим суперсимметрическую метрику на V символом g. Имеем $g = \eta + \omega$, где η — псевдоевклидова метрика сигнатуры(p, q) на $V_{\bar{0}} = \mathbb{R}^{p,q}$, а ω — симплектическая форма на $\Pi V_{\bar{1}} = \mathbb{R}^{2m}$. Отождествим $\mathfrak{osp}(V)$ с $\Lambda^2 V$, при этом элемент $X \wedge Y \in \mathfrak{osp}(V)$ определяется равенством

$$(X \wedge Y)Z = (-1)^{|Y||Z|} g(X, Z)Y - (-1)^{(|Y|+|Z|)|X|} g(Y, Z)X,$$

где $X, Y, Z \in V$ — однородные элементы. Заметим, что $\mathfrak{so}(p, q) \simeq \Lambda^2 V_{\bar{0}}$ и $\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C}) \simeq \Lambda^2 V_{\bar{1}} = \odot^2 \Pi V_{\bar{1}}$. Из первого супертождества Бьянки следует, что каждый $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ удовлетворяет

$$g(R(X, Y)Z, W) = (-1)^{(|X|+|Y|)(|Z|+|W|)} g(R(Z, W)X, Y) \tag{3.29}$$

для всех однородных $X, Y, Z, W \in V$. Это означает, что

$$R : \Lambda^2 V \to \mathfrak{g} \subset \Lambda^2 V$$

является суперсимметрическим отображением. В частности, R равен нулю на ортогональном дополнении $\mathfrak{g}^\perp \subset \Lambda^2 V$.

Сначала рассмотрим пространство $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 0}$. Пусть $R \in (\Lambda^2 V^* \otimes \mathfrak{g})_{\bar 0}$. Определим следующие отображения:

$$\begin{aligned}
A &= \mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(p,q)}\, \mathfrak{g}_{\bar 0} \circ R|_{\Lambda^2 V_{\bar 0} \oplus \Lambda^2 V_{\bar 1}} : \Lambda^2 V_{\bar 0} \oplus \Lambda^2 V_{\bar 1} \to \mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(p,q)}\, \mathfrak{g}_{\bar 0},\\
B &= \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{2m*} \otimes \mathbb{R}^{p+q}}\, \mathfrak{g}_{\bar 1} \circ R|_{V_{\bar 0} \otimes V_{\bar 1}} : V_{\bar 0} \otimes V_{\bar 1} \to \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{2m*} \otimes \mathbb{R}^{p+q}}\, \mathfrak{g}_{\bar 1},\\
C &= \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{p+q\,*} \otimes \mathbb{R}^{2m}}\, \mathfrak{g}_{\bar 1} \circ R|_{V_{\bar 0} \otimes V_{\bar 1}} : V_{\bar 0} \otimes V_{\bar 1} \to \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{p+q\,*} \otimes \mathbb{R}^{2m}}\, \mathfrak{g}_{\bar 1},\\
D &= \mathrm{pr}_{\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})}\, \mathfrak{g}_{\bar 0} \circ R|_{\Lambda^2 V_{\bar 0} \oplus \Lambda^2 V_{\bar 1}} : \Lambda^2 V_{\bar 0} \oplus \Lambda^2 V_{\bar 1} \to \mathrm{pr}_{\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})}\, \mathfrak{g}_{\bar 0}.
\end{aligned}$$

В определении отображений B и C мы использовали включение

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{osp}(p, q|2m) \subset \mathfrak{gl}(p+q|2m, \mathbb{R})\\
&\qquad = \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{2m*} \otimes \mathbb{R}^{p+q} \oplus \mathbb{R}^{p+q\,*} \otimes \mathbb{R}^{2m}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Так как R принимает значения в $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p, q|2m)$, то имеем

$$\omega(C(x,\xi)y, \delta) = -\eta(y, B(x,\xi)\delta) \tag{3.31}$$

для всех $x, y \in V_{\bar 0}$ и $\xi, \delta \in V_{\bar 1}$, т.е. отображения B и C определяют друг друга. Продолжим отображения A, B, C, D на пространство $\Lambda^2 V$, отображая в ноль естественные дополнения. Тогда,

$$R = A + B + C + D.$$

В матричном виде имеем

$$R(x, y) = -R(y, x) = \begin{pmatrix} A(x, y) & 0 \\ 0 & D(x, y) \end{pmatrix},$$

$$R(\xi, \delta) = R(\delta, \xi) = \begin{pmatrix} A(\xi, \delta) & 0 \\ 0 & D(\xi, \delta) \end{pmatrix},$$

$$R(x, \xi) = -R(\xi, x) = \begin{pmatrix} 0 & B(x, \xi) \\ C(x, \xi) & 0 \end{pmatrix},$$

где $x, y \in V_{\bar 0}$ и $\xi, \delta \in V_{\bar 1}$.

Записывая супертождество Бьянки, получаем, что $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 0}$ тогда и только тогда, когда $A|_{\Lambda^2 V_{\bar 0}} \in \mathcal{R}(\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(p,q)}\, \mathfrak{g}_{\bar 0})$, $D|_{\Lambda^2 V_{\bar 1}} \in \bar{R}(\mathrm{pr}_{\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})}\, \mathfrak{g}_{\bar 0})$ и имеют место следующие равенства:

$$D(x,y)\xi + C(y,\xi)x + C(\xi,x)y = 0, \tag{3.32}$$

$$A(\xi,\delta)x - B(\delta,x)\xi + B(x,\xi)\delta = 0 \tag{3.33}$$

для всех $x, y \in V_{\bar 0}$ и $\xi, \delta \in V_{\bar 1}$.

Предположим, что $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 0}$. Используя (3.29), получим

$$\omega(D(x,y)\xi, \delta) = \eta(A(\xi,\delta)x, y), \tag{3.34}$$

$$\omega(C(x,\xi)y, \delta) = -\omega(C(y,\delta)x, \xi), \quad \eta(B(x,\xi)\delta, y) = -\eta(B(y,\delta)\xi, x) \tag{3.35}$$

для всех $x, y \in V_{\bar 0}$ и $\xi, \delta \in V_{\bar 1}$. В частности, $A|_{\Lambda^2 V_{\bar 1}}$ и $D|_{\Lambda^2 V_{\bar 0}}$ определяют друг друга. Значения уравнений (3.32) и (3.33) на $A|_{\Lambda^2 V_{\bar 1}}$ и $D|_{\Lambda^2 V_{\bar 0}}$ не являются столь прозрачными. С другой стороны, если представление $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ в пространстве $V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$ — диагонально (т.е. представления $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ в пространствах $V_{\bar 0}$ и $V_{\bar 1}$ — точные), то $A|_{\Lambda^2 V_{\bar 1}}$ и $D|_{\Lambda^2 V_{\bar 0}}$ определяются соответственно отображениями $D|_{\Lambda^2 V_{\bar 1}}$ и $A|_{\Lambda^2 V_{\bar 0}}$. Мы будем часто использовать это наблюдение.

Обратимся к пространству $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 1}$. Пусть $R \in (\Lambda^2 V^* \otimes \mathfrak{g})_{\bar 1}$. Определим следующие отображения:

$$\begin{aligned}
A &= \mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(p,q)}\, \mathfrak{g}_{\bar 0} \circ R|_{V_{\bar 0} \otimes V_{\bar 1}} : V_{\bar 0} \otimes V_{\bar 1} \to \mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(p,q)}\, \mathfrak{g}_{\bar 0},\\
B &= \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{2m*} \otimes \mathbb{R}^{p+q}}\, \mathfrak{g}_{\bar 1} \circ R|_{\Lambda^2 V_{\bar 0} \oplus \Lambda^2 V_{\bar 1}} : \Lambda^2 V_{\bar 0} \oplus \Lambda^2 V_{\bar 1} \to \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{2m*} \otimes \mathbb{R}^{p+q}}\, \mathfrak{g}_{\bar 1},\\
C &= \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{p+q\,*} \otimes \mathbb{R}^{2m}}\, \mathfrak{g}_{\bar 1} \circ R|_{\Lambda^2 V_{\bar 0} \oplus \Lambda^2 V_{\bar 1}} : \Lambda^2 V_{\bar 0} \oplus \Lambda^2 V_{\bar 1} \to \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{p+q\,*} \otimes \mathbb{R}^{2m}}\, \mathfrak{g}_{\bar 1},\\
D &= \mathrm{pr}_{\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})}\, \mathfrak{g}_{\bar 0} \circ R|_{V_{\bar 0} \otimes V_{\bar 1}} : V_{\bar 0} \otimes V_{\bar 1} \to \mathrm{pr}_{\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})}\, \mathfrak{g}_{\bar 0}.
\end{aligned}$$

Так как R принимает значения в $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p,q|2m)$, имеем

$$\omega(C(x,y)z, \xi) = -\eta(z, B(x,y)\xi), \quad \omega(C(\xi,\delta)z, \theta) = -\eta(z, B(\xi,\delta)\theta) \tag{3.36}$$

для всех $x, y, z \in V_{\bar 0}$ и $\xi, \delta, \theta \in V_{\bar 1}$, т.е. отображения B и C определяют друг друга. Продолжим отображения A, B, C, D на пространство $\Lambda^2 V$, отображая в ноль естественные дополнения. Тогда $R = A + B + C + D$. В матричном виде имеем

$$R(x,y) = -R(y,x) = \begin{pmatrix} 0 & B(x,y) \\ C(x,y) & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(\xi,\delta) = R(\delta,\xi) = \begin{pmatrix} 0 & B(\xi,\delta) \\ C(\xi,\delta) & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(x,\xi) = -R(\xi,x) = \begin{pmatrix} A(x,\xi) & 0 \\ 0 & D(x,\xi) \end{pmatrix},$$

где $x, y \in V_{\bar{0}}$ и $\xi, \delta \in V_{\bar{1}}$.

Записывая супертождество Бьянки, получаем, что $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{1}}$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства

$$B(x,y)z + B(y,z)x + B(z,x)y = 0, \tag{3.37}$$

$$C(\xi,\delta)\theta + C(\delta,\theta)\xi + C(\theta,\xi)\delta = 0, \tag{3.38}$$

$$B(x,y)\xi + A(y,\xi)x + A(\xi,x)y = 0, \tag{3.39}$$

$$C(\xi,\delta)x - D(\delta,x)\xi + D(x,\xi)\delta = 0 \tag{3.40}$$

для всех $x, y, z \in V_{\bar{0}}$ и $\xi, \delta, \theta \in V_{\bar{1}}$. Зафиксируем $\xi \in V_{\bar{1}}$. Используя (3.37), получаем

$$\eta(B(x,y)\xi, z) + \eta(B(y,z)\xi, x) + \eta(B(z,x)\xi, y) = 0$$

для всех $x, y, z \in V_{\bar{0}}$. Используя это и (3.39), мы видим, что для каждого фиксированного $\xi \in V_{\bar{1}}$ имеем

$$R(\cdot,\xi) \in \mathcal{P}_\eta(\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(p,q)}\,\mathfrak{g}_{\bar{0}}).$$

Аналогично, для каждого $x \in V_{\bar{0}}$ имеем

$$R(\cdot,x) \in \mathcal{P}_\omega(\mathrm{pr}_{\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})}\,\mathfrak{g}_{\bar{0}}).$$

Это будет экстремально полезным особенно в случаях, когда представление алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ или некоторого ее идеала является диагональным в $V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$.

В [109] показано, что

$$\mathcal{R}(\mathfrak{osp}(p,q|2m)) \simeq \odot^2(\Lambda^2 V)/\Lambda^4 V \tag{3.41}$$

и $\mathfrak{osp}(p,q|2m)$-супермодуль $\mathcal{R}(\mathfrak{osp}(p,q|2m))$ разлагается в прямую сумму трех неприводимых компонент. Это обобщает хорошо известное разложение $\mathfrak{so}(p,q)$-модуля $\mathcal{R}(\mathfrak{so}(p,q))$ [3] и определяет разложение элементов $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{osp}(p,q|2m))$ в сумму тензора Вейля, бесследной части тензора Риччи и скалярной кривизны.

Сравним (3.41) с полученным нами описанием. Для этого рассмотрим $\mathcal{R}(\mathfrak{osp}(p,q|2m))$ как $\mathfrak{so}(p,q) \oplus \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$-модуль. Имеем

$$\begin{aligned} \Lambda^2 V =& \Lambda^2 V_{\bar 0} \oplus (V_{\bar 0} \otimes V_{\bar 1}) \oplus \Lambda^2 V_{\bar 1}, \\ \odot^2(\Lambda^2 V) =& \odot^2 (\Lambda^2 V_{\bar 0}) \bigoplus \odot^2(V_{\bar 0} \otimes V_{\bar 1}) \bigoplus \odot^2(\Lambda^2 V_{\bar 1}) \bigoplus \Lambda^2 V_{\bar 0} \otimes (V_{\bar 0} \otimes V_{\bar 1}) \\ & \bigoplus \Lambda^2 V_{\bar 0} \otimes \Lambda^2 V_{\bar 1} \bigoplus (V_{\bar 0} \otimes V_{\bar 1}) \otimes \Lambda^2 V_{\bar 1}, \\ \Lambda^4 V =& \Lambda^4 V_{\bar 0} \bigoplus \Lambda^3 V_{\bar 0} \otimes V_{\bar 1} \bigoplus \Lambda^2 V_{\bar 0} \otimes \Lambda^2 V_{\bar 1} \bigoplus V_{\bar 0} \otimes \Lambda^3 V_{\bar 1} \bigoplus \Lambda^4 V_{\bar 1}. \end{aligned}$$

Это влечет

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathfrak{osp}(p,q|2m))_{\bar 0} \simeq & (\odot^2(\Lambda^2 V)/\Lambda^4 V)_{\bar 0} = \odot^2(\Lambda^2 V_{\bar 0})/\Lambda^4 V_{\bar 0} \\ & \bigoplus \odot^2(\Lambda^2 V_{\bar 1})/\Lambda^4 V_{\bar 1} \bigoplus \odot^2(V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}). \end{aligned}$$

Заметим, что $\mathcal{R}(\mathfrak{so}(p,q)) \simeq \odot^2(\Lambda^2 V_{\bar 0})/\Lambda^4 V_{\bar 0}$ [3]. Аналогично,

$$\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})) \simeq \odot^2(\odot^2 \Pi V_{\bar 1})/\odot^4 \Pi V_{\bar 1} = \odot^2(\Lambda^2 V_{\bar 1})/\Lambda^4 V_{\bar 1}.$$

Итак,

$$\mathcal{R}(\mathfrak{osp}(p,q|2m))_{\bar 0} \simeq \mathcal{R}(\mathfrak{so}(p,q)) \oplus \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})) \oplus \odot^2(V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}).$$

Опишем этот изоморфизм. Включения

$$\mathcal{R}(\mathfrak{so}(p,q)), \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})) \subset \mathcal{R}(\mathfrak{osp}(p,q|2m))_{\bar 0}$$

– очевидны. Пусть $B \in \odot^2(V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}) = \Lambda^2(V_{\bar 0} \oplus \Pi V_{\bar 1})$, т.е. B — кососимметрический эндоморфизм $V_{\bar 0} \oplus \Pi V_{\bar 1}$ относительно кососимметрической формы $\eta \otimes \omega$, и B удовлетворяет

$$\eta\otimes\omega(B(x,\xi),y\otimes\delta)=-\eta\otimes\omega(B(y,\delta),x\otimes\xi).$$

Заметим, что это соответствует равенству (3.35). Уравнение (3.31) определяет элемент C, а уравнения (3.32) и (3.33) определяют ограничения $D|_{\Lambda^2V_{\bar 0}}$ и $A|_{\Lambda^2V_{\bar 1}}$. Положим $A|_{\Lambda^2V_{\bar 0}}=0$ и $D|_{\Lambda^2V_{\bar 1}}=0$. Мы получаем некоторый элемент $R\in\mathcal{R}(\mathfrak{osp}(p,q|2m))_{\bar 0}$. Так определяется включение $\odot^2(V_{\bar 0}\oplus V_{\bar 1})\subset\mathcal{R}(\mathfrak{osp}(p,q|2m))_{\bar 0}$.

Далее,

$$\mathcal{R}(\mathfrak{osp}(p,q|2m))_{\bar 1}\simeq V_{\bar 1}\otimes(\Lambda^2V_{\bar 0}\otimes V_{\bar 0})/\Lambda^3V_{\bar 0}\bigoplus V_{\bar 0}\otimes(\Lambda^2V_{\bar 1}\otimes V_{\bar 1})/\Lambda^3V_{\bar 1}.$$

Имеем $\mathcal{P}_\eta(\mathfrak{so}(p,q))\simeq(\Lambda^2V_{\bar 0}\otimes V_{\bar 0})/\Lambda^3V_{\bar 0}$ [166]. Аналогично, $\mathcal{P}_\omega(\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R}))\simeq(\odot^2\Pi V_{\bar 1}\otimes\Pi V_{\bar 1})/\odot^3\Pi V_{\bar 1}$. Получаем

$$\mathcal{R}(\mathfrak{osp}(p,q|2m))_{\bar 1}\simeq\mathcal{P}_\eta(\mathfrak{so}(p,q))\otimes V_{\bar 1}\bigoplus\Pi\mathcal{P}_\omega(\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R}))\otimes V_{\bar 0}.$$

Пусть $P\in\mathcal{P}_\eta(\mathfrak{so}(p,q))$ и $\zeta\in V_{\bar 0}$ — фиксированы. Определим $R\in\mathcal{R}(\mathfrak{osp}(p,q|2m))_{\bar 1}$, полагая

$$A(x,\delta)=\omega(\delta,\zeta)P(x),\quad D(x,\delta)=0,$$

$$B(x,y)\xi=\omega(\zeta,\xi)(P(x)y-P(y)x),\quad B(\xi,\delta)=0.$$

Аналогично, каждый элемент $P\otimes x\in\mathcal{P}_\omega(\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R}))\otimes V_{\bar 0}$ определяет некоторый $R\in\mathcal{R}(\mathfrak{osp}(p,q|2m))_{\bar 1}$. Это дает точную форму полученных изоморфизмов.

Информацию о пространствах $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ для некоторых подалгебр $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(n|k,\mathbb{R})$, не содержащихся в $\mathfrak{osp}(p,q|2m)$, можно найти в [109, 129].

3.3.5. Присоединенные представления простых супералгебр Ли

Предложение 3.3.4. *Пусть $\mathfrak{g}$ — простая (вещественная или комплексная) супералгебра Ли, допускающая четную невырожденную $\mathfrak{g}$-инвариантную суперсимметрическую билинейную форму, т.е. такая, что присоединенное* *представление $\mathfrak{g}$ — ортосимплектическое. Тогда $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{0}}$ — одномерное пространство, порожденное суперскобками Ли супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Прежде всего, из супертождества Якоби следует, что $[\cdot,\cdot] \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{0}}$ для каждой простой супералгебры Ли. Заметим, что представление $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ — диагонально в $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ (с точностью до центра алгебры $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, который не играет роли).

Сначала докажем, что $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{1}} = 0$. Предположим, что $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ содержит по крайней мере два простых идеала $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$. Пусть $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{1}}$, тогда для всех фиксированных $\xi \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ и $x \in \mathfrak{h}_1$ имеем $R(x,\xi) \in \mathfrak{h}_1$. С другой стороны, для всех фиксированных $x \in \mathfrak{h}_1$ имеем $\mathrm{pr}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}} \circ R(x,\cdot) \in \mathcal{P}_\omega(\mathrm{pr}_{\mathfrak{sp}(\mathfrak{g}_{\bar{1}})}\,\mathfrak{g}_{\bar{0}})$, но $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-модуль $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ является тензорным произведением неприводимых представлений простых идеалов в $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ (если $\mathfrak{g}$ — типа I) или является прямой суммой двух таких представлений (если $\mathfrak{g}$ — типа II). Это и пункт 3.2.4 показывают, что $\mathrm{pr}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}} \circ R(x,\cdot)$ не может принимать значение в одном из простых идеалов в $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ (если $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ или ее комплексификация не совпадает с $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, т.е. если $\mathfrak{g}$ отлична от $\mathfrak{osp}(p,q|2)$ и $\mathfrak{osp}(p|2,\mathbb{C})$; эти две супералгебры Ли могут быть рассмотрены так же, как рассмотрена $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1|2m,\mathbb{R})$ ниже; имеем $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{1}} = 0$). Получаем, что $\mathrm{pr}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}} \circ R(x,\cdot) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{h}_1$. Аналогично, $\mathrm{pr}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}} \circ R(x,\cdot) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{h}_2$, и $\mathrm{pr}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}} \circ R(x,\cdot) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$, т.е. $R = 0$.

Предположим, что полупростая часть алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ — простая, тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1|2m,\mathbb{F})$ или $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(2|2m,\mathbb{F})$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Рассмотрим случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1|2m,\mathbb{F})$, случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(2|2m,\mathbb{F})$ может быть рассмотрен аналогично. Так как комплексификация присоединенного представления $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1|2m,\mathbb{R})$ — неприводима, достаточно рассмотреть присоединенное представление супералгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1|2m,\mathbb{C})$. Пусть $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{1}}$. Для каждого $x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$ имеем $\mathrm{pr}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}} \circ R(x,\cdot) \in \mathcal{P}_\omega(\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C}))$, а для каждого $\xi \in \mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathbb{C}^{2m}$ имеем $\mathrm{pr}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}} \circ R(\cdot,\xi) \in \mathcal{P}_\eta(\mathrm{ad}_{\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})})$. Это показывает, что $R(\mathfrak{g})_{\bar{1}}$ диагонально вложено в $\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$ - модуль

$$(\mathbb{C}^{2m}\otimes\mathcal{P}_\eta(\mathrm{ad}_{\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})}))\oplus(\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})\otimes\mathcal{P}_\omega(\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C}))).$$

Предположим, что $m\geq 2$. В [166] мы доказываем, что $\mathcal{P}_\eta(\mathrm{ad}_{\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})})\simeq\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$ и каждый $P\in\mathcal{P}_\eta(\mathrm{ad}_{\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})})$ имеет вид $P(\cdot)=[x,\cdot]$, где $x\in\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$. Заметим, что $\mathcal{P}_\omega(\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C}))$ содержит подмодуль, изоморфный $\mathbb{C}^{2m}$, каждый элемент P этого модуля имеет вид $P(\cdot)=\xi\odot\cdot$ для некоторого $\xi\in\mathbb{C}^{2m}$; здесь для $\xi,\delta\in\mathbb{C}^{2m}$ элемент $\xi\odot\delta\in\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$ определяется равенством

$$(\xi\odot\delta)\theta=\omega(\xi,\theta)\delta+\omega(\delta,\theta)\xi.$$

Итак, $R(\mathfrak{g})_{\bar{1}}$ диагонально вложено в $\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$-модуль

$$(\mathbb{C}^{2m}\otimes\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C}))\oplus(\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}^{2m}).$$

Более того, для каждого $R\in\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{1}}$ существуют линейные отображения $\varphi:\mathbb{C}^{2m}\to\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$ и $\psi:\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})\to\mathbb{C}^{2m}$ такие, что $R(x,\xi)=[\varphi(\xi),x]=\psi(x)\odot\xi$ для всех $\xi\in\mathbb{C}^{2m}$ и $x\in\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$. Так как $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{1}}$ — $\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$-модуль, то φ и ψ — пропорциональны как элементы $\mathbb{C}^{2m}\otimes\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$. Чтобы доказать, что уравнение $[\varphi(\xi),x]=\psi(x)\odot\xi$ для всех $\xi\in\mathbb{C}^{2m}$ и $x\in\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$ имеет только тривиальное решение, достаточно разложить $\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$-модуль $\mathbb{C}^{2m}\otimes\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$ в прямую сумму неприводимых компонент и проверить это уравнение на некотором ненулевом представителе каждой компоненты. Имеем

$$\mathbb{C}^{2m}\otimes\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})=V_{3\pi_1}\oplus V_{\pi_1+\pi_2}\oplus\mathbb{C}^{2m}.$$

Пусть $(\xi_\alpha)_{\alpha=-m,\dots,-1,1,\dots,m}$ — стандартный базис пространства $\mathbb{C}^{2m}$, т.е. $\omega(\xi_\alpha,\xi_\beta)=\delta_{\alpha,-\beta}$. Тогда $\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{C})$ линейно порождается элементами вида $\xi_\alpha\odot\xi_\beta$. Пусть

$$\varphi=c\psi=\xi_1\otimes\xi_1\odot\xi_1\in V_{3\pi_1}.$$

Подставляя в уравнение $\xi = \xi_{-1}$ и $x = \xi_{-1} \odot \xi_1$, получим

$$0 = [\xi_1 \odot \xi_1, \xi_{-1} \odot \xi_1].$$

С другой стороны,

$$[\xi_1 \odot \xi_1, \xi_{-1} \odot \xi_1] = 2\xi_1 \odot \xi_1 \neq 0.$$

Следовательно, $\varphi = c\psi = \xi_1 \otimes \xi_1 \odot \xi_1$ не является решением уравнения. Аналогично, рассматривая

$$\varphi = c\psi = \sum_\alpha \xi_\alpha \otimes \xi_{-\alpha} \odot \xi_1 \in \mathbb{C}^{2m}, \quad \xi = \xi_1, \quad x = \xi_1 \odot \xi_1,$$

получим, что $\varphi = c\psi = \sum_\alpha \xi_\alpha \otimes \xi_{-\alpha} \odot \xi_1$ не является решением уравнения. Окончательно, $\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$-модуль $\mathbb{C}^{2m} \otimes \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$ содержит весовое пространство веса $\pi_1 + \pi_2$ размерности 2, и это пространство состоит из векторов

$$c_1\xi_1 \otimes \xi_1 \odot \xi_2 + c_2\xi_2 \otimes \xi_1 \odot \xi_1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Пусть $\varphi = c\psi$ — такой вектор. Выбирая $\xi = \xi_{-1}$ и $x = \xi_{-2} \odot \xi_1$, получим $c_1 = 0$; выбирая $\xi = \xi_{-2}$ и $x = \xi_{-1} \odot \xi_2$, получим $c_2 = 0$. Мы доказали, что $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{1}} = 0$. Если $m = 1$, то $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{sp}(2, \mathbb{C}) = V_{3\pi_1} \oplus \mathbb{C}^2$. Легко видеть, что $\mathcal{P}_\omega(\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C})) = \mathbb{C}^2$. Дальнейшее доказательство — то же самое.

Теперь докажем, что пространство $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{0}}$ — одномерно.

Пусть $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{0}}$ — дан, как выше, линейными отображениями A, B, C, D. Мы видели, что $A|_{\Lambda^2 V_{\bar{0}}}$ (или $D|_{\Lambda^2 V_{\bar{1}}}$) однозначно определяет A и D. Мы утверждаем, что это отображение определяет весь R. Действительно, предположим, что $A = 0$ и $D = 0$. Пусть $\xi, \delta \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ и $x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Имеем $\xi \cdot R(x, \delta) = [\xi, R(x, \delta)]$. Если $R(x, \delta) \neq 0$, то поскольку $\mathfrak{g}$ — простая, существует ξ такой, что $\xi \cdot R(x, \delta) \neq 0$. С другой стороны, $\xi \cdot R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{1}} = 0$, что дает противоречие и доказывает утверждение.

Если полупростая часть алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ — простая, то $A|_{\Lambda^2 V_{\bar{0}}}$, будучи элементом пространства $\mathcal{R}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}})$, пропорционален скобке Ли в $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ [137]. Так как

$A|_{\Lambda^2 V_{\bar 0}}$ однозначно определяет $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 0}$, получаем, что пространство $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 0}$ — одномерно.

Предположим, что $\mathfrak{g}$ — типа I, а полупростая часть $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ не является простой. Тогда пространство $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}_{\bar 0} \subset \mathfrak{sp}(\mathfrak{g}_{\bar 1}))$ — одномерно (пункт 3.2.4). Следовательно, $D|_{\Lambda^2 V_{\bar 1}}$ принадлежит некоторому одномерному пространству. Так как $D|_{\Lambda^2 V_{\bar 1}}$ однозначно определяет $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 0}$, получаем, что пространство $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 0}$ — одномерно.

Окончательно, пусть $\mathfrak{g}$ — типа II, а полупростая часть алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ не является простой, т.е. $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{z}$. Тогда $A|_{\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2} = 0$, $A|_{\Lambda^2 \mathfrak{h}_1} = c_1[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}_1}$ и $A|_{\Lambda^2 \mathfrak{h}_2} = c_2[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}_2}$ аннулируются алгеброй Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$, поэтому $D|_{\Lambda^2 V_{\bar 1}}$ принадлежит некоторому двумерному пространству, аннулируемому алгеброй Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$. С другой стороны, $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ может аннулировать только одномерное подпространство в $\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{g}_{\bar 0} \subset \mathfrak{sp}(\mathfrak{g}_{\bar 1}))$. Поэтому, существует $c \in \mathbb{C}$ такое, что для каждого R имеем $c_1 = c\, c_2$. Таким образом, пространство $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 0}$ — одномерно. Предложение доказано. ☐

3.3.6. Доказательство теоремы 3.3.2

Лемма 3.3.1. *Пусть* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p,q|2m)$ *— неприводимая подалгебра вида* (3.27)*. Если* $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 1} = 0$*, то* $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ *является тривиальным* $\mathfrak{g}$*-модулем.*

Доказательство. Имеем $(\mathfrak{g}_i)_{\bar 1} \cdot \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 0} \subset \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 1} = 0$. Так как каждая $\mathfrak{g}_i$ - простая алгебра Ли классического типа, то $(\mathfrak{g}_i)_{\bar 0} = [(\mathfrak{g}_i)_{\bar 1}, (\mathfrak{g}_i)_{\bar 1}]$. Следовательно, $(\mathfrak{g}_i)_{\bar 0} \cdot \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 0} = 0$. Предположим, что $\mathfrak{z} \neq 0$. Так как $\mathfrak{osp}(p,q|2m)_{\bar 0} \cap \mathfrak{q}(2m,\mathbb{R}) = 0$, то из леммы Шура следует, что $\mathfrak{z} = \mathbb{R}J$, где J - четная комплексная структура на V. Легко видеть, что $J \cdot \mathcal{R}(\mathfrak{g}) = 0$. ☐

Сначала рассмотрим поочередно простые вещественные супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ классического типа. Для каждой $\mathfrak{g}$ мы найдем все неприводимые представления $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(p,q|2m) = \mathfrak{osp}(V)$ такие, что $\mathfrak{g}$ является несимметрической супералгеброй Берже.

Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ имеет вид $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{z}$, где $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ — простые, а $\mathfrak{z}$ – тривиальный или одномерный центр. Если $\mathfrak{g}$ — типа I, т.е. $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-модуль $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ — неприводимый, то $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ имеет вид $W_1 \otimes W_2$, где $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{so}(W_1)$ и $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{sp}(W_2)$ — неприводимые подалгебры. Если $\mathfrak{g}$ — типа II, т.е. $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-модуль имеет $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ вид $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$, где $\mathfrak{g}_{-1}$ и $\mathfrak{g}_1$ — неприводимые $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-модули, то найдутся два векторных пространства U_1 и U_2 такие, что $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{gl}(U_1)$ и $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{gl}(U_2)$ – неприводимые подалгебры, и $\mathfrak{g}_{-1} = U_1^* \otimes U_2$, $\mathfrak{g}_1 = U_2^* \otimes U_1$.

Рассмотрим несколько случаев:

Случай a. $\mathfrak{h}_1$ аннулирует $V_{\bar{1}}$. Предположим, что $\mathfrak{g}$ — типа I. Так как включение $i : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{osp}(p,q|2m)$ является гомоморфизмом супералгебр Ли, то ограничение

$$i|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}} : \mathfrak{g}_{\bar{1}} = W_1 \otimes W_2 \to \mathfrak{osp}(V)_{\bar{1}} = V_{\bar{0}} \otimes V_{\bar{1}}$$

является $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-эквивариантным. В частности, оно является $\mathfrak{h}_1$-эквивариантным. Так как $\mathfrak{h}_1$ аннулирует W_2 и $V_{\bar{1}}$, то $V_{\bar{0}}$ является прямой суммой $\mathfrak{h}_1$-подмодулей, изоморфных W_1, и некоторого $\mathfrak{h}_1$-тривиального модуля. Аналогично, если $\mathfrak{g}$ — типа II, то $V_{\bar{0}}$ является прямой суммой $\mathfrak{h}_1$-подмодулей, изоморфных $U_1 \oplus U_1^*$, и $\mathfrak{h}_1$-тривиального модуля.

Имеют место три подслучая:

a.1. $\mathfrak{h}_2$ аннулирует $V_{\bar{0}}$. Предположим, что $\mathfrak{g}$ – типа I. Из аргументов, приводимых выше, следует, что $V_{\bar{1}}$ является прямой суммой $\mathfrak{h}_2$ -подмодулей, изоморфных W_2 и некоторого $\mathfrak{h}_2$-тривиального модуля. Из параграфа 1.5 и пункта 3.2.4 следует, что если $V_{\bar{0}}$ содержит более одного $\mathfrak{h}_1$-модуля, изоморфного W_1, и если $V_{\bar{1}}$ содержит более одного $\mathfrak{h}_2$-модуля, изоморфного W_2, то $\mathcal{P}_\eta(\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{so}(V_{\bar{0}})) = 0$ и $\mathcal{P}_\omega(\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{so}(V_{\bar{1}})) = 0$. Следовательно, $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{1}} = 0$, т.е. $\mathfrak{g}$ является симметрической. Таким образом, либо $V_{\bar{0}}$ содержит в точности один $\mathfrak{h}_1$-подмодуль, изоморфный W_1, либо $V_{\bar{1}}$ содержит в точности один $\mathfrak{h}_2$-подмодуль, изоморфный W_2. Аналогично, если $\mathfrak{g}$ — типа II, то либо $V_{\bar{0}}$ содержит в точности один $\mathfrak{h}_1$-подмодуль, изоморфный $U_1 \oplus U_1^*$, либо $V_{\bar{1}}$ содержит в точности один $\mathfrak{h}_2$-подмодуль, изоморфный $U_2 \oplus U_2^*$. Далее мы проверяем какие из таких представлений $\mathfrak{g}$ существуют, для этого переходим к комплексификации $\mathfrak{g}$ и ее представления.

Пусть $\mathfrak{g}$ — типа I. Предположим, например, что $V_{\bar{1}}$ содержит в точности один $\mathfrak{h}_2$-подмодуль, изоморфный W_2. Так как $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \otimes W_2$ содержит только один подмодуль, аннулируемый алгеброй $\mathfrak{h}_2$, и изоморфный W_1, как $\mathfrak{h}_1$-модуль, и поскольку представление $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ в V является $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-эквивариантным, то $\mathfrak{g}$ сохраняет векторное суперподпространство $(\mathfrak{g}_{\bar{1}} \cdot V_{\bar{1}}) \oplus V_{\bar{1}} \subset V$, а его четная часть содержит только один $\mathfrak{h}_1$-подмодуль, изоморфный W_1. Из неприводимости V следует, что $V_{\bar{0}}$ содержит в точности один $\mathfrak{h}_1$-подмодуль, изоморфный W_1, а $V_{\bar{1}}$ содержит в точности один $\mathfrak{h}_2$-подмодуль изоморфный W_2. Предположим, что V содержит нетривиальный вектор v, аннулируемый алгеброй Ли $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Можем предположить, что v является однородным. Пусть $v \in V_{\bar{0}}$. Рассмотрим отображение из $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ в $V_{\bar{1}}$, переводящее $\varphi \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ в φv. Это отображение является $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-эквивариантным, а поскольку $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-модули $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ и $V_{\bar{1}}$ — не изоморфны, то это отображение — нулевое. Это показывает, что $\mathbb{R}v \subset V$ — инвариантное подпространство. Таким образом, $V_{\bar{0}} = W_1$ и $V_{\bar{1}} = W_2$. Такое представление $\mathfrak{g}$ либо является стандартным, либо оно не существует. Если $\mathfrak{g}$ – типа II, то похожие аргументы показывают, что $V_{\bar{0}} = U_1$ и $V_{\bar{1}} = U_2$.

a.2. $\mathfrak{h}_2$ аннулирует $V_{\bar{1}}$. В этом случае $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ аннулирует $V_{\bar{1}}$. Пусть $U \subset V_{\bar{0}}$ — непривимый $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$-модуль. Так как U не является $\mathfrak{g}$-инвариантным, то $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \cdot U \neq 0$. С другой стороны, $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \cdot U \subset V_1$ аннулируется $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, т.е. $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \otimes U$ содержит одномерное подпространство, аннулируемое $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$. Это может случиться только, если $U \simeq \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ (если $\mathfrak{g}$ — типа I), или если U изоморфно $\mathfrak{g}_{-1}$ или $\mathfrak{g}_1$ (если $\mathfrak{g}$ — типа II). Такие представления не существуют.

a.3. Представление $\mathfrak{h}_2$ — диагонально в $V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$. Можно разложить $V_{\bar{0}}$ в прямую сумму $V_{\bar{0}} = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus L_4$ так, что $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ аннулирует L_4, $\mathfrak{h}_1$ аннулирует L_2, $\mathfrak{h}_2$ аннулирует L_1, L_1 является прямой суммой $\mathfrak{h}_1$-подмодулей, изоморфных W_1 (соответственно $U_1 \oplus U_1^*$), L_2 является $\mathfrak{h}_2$-подмодулем, L_3 — $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$-подмодуль (при этом каждая неприводимая компонента в L_3 является точной для $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$). Если $L_3 \neq 0$, то из параграфа 1.5 следует, что

$\mathcal{P}_\eta(\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(L_1\oplus L_2)}\,\mathfrak{g}_{\bar 0}) = 0$, что влечет $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 1} = 0$. Таким образом, $L_3 = 0$. Так как $\mathfrak{g}$ — суперменталгебра Берже, то имеет место одно из следующих утверждений:

1. Существует $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 0}$ такой, что для некоторых $x, y \in L_2$ имеем $0 \neq R(x,y) \in \mathfrak{h}_2$. Выражая R в терминах отображений A, B, C, D, как выше, получим $A|_{\Lambda^2 L_2} \neq 0$ и $D|_{\Lambda^2 L_2} \neq 0$. Следовательно, $A|_{\Lambda^2 V_{\bar 1}} \neq 0$ и $D|_{\Lambda^2 V_{\bar 1}} \neq 0$. Это показывает, что $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{so}(L_2)$ — подалгебра Берже, а $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{sp}(V_{\bar 1})$ — косая подалгебра Берже.

2. Существует $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 0}$ такой, что для некоторых $\xi, \delta \in V_{\bar 1}$ имеем $0 \neq R(\xi,\delta) \in \mathfrak{h}_2$. Этот случай аналогичен предыдущему.

3. Существует $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 1}$ такой, что для некоторых $x \in L_2$ и $\xi \in V_{\bar 1}$ имеем $0 \neq R(x,\xi) \in \mathfrak{h}_2$. Это показывает, что $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{so}(L_2)$ — подалгебра Берже, $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{sp}(V_{\bar 1})$ — косая подалгебра Берже.

Таким образом, либо L_2 — неприводимый $\mathfrak{h}_2$-модуль, либо $L_2 = L \oplus L^*$, где $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{gl}(L)$ — неприводимая подалгебра. Тоже самое имеет место для $V_{\bar 1}$. Как в случае a.1, из неприводимости $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(V)$ следует, что $L_2 = 0$, это приводит к противоречию.

Случай b. $\mathfrak{h}_1$ аннулирует $V_{\bar 0}$. Этот случай аналогичен случаю a. Заметим, что если $\mathfrak{g}$ — типа I, то в этом случае $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{sp}(V_{\bar 1})$, и $V_{\bar 1}$ является прямой суммой $\mathfrak{h}_1$-модулей, изоморфных W_1 и тривиального $\mathfrak{h}_1$-модуля. Так как $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{so}(W_1)$, то $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{su}(W_1)$.

Случай c. Представления алгебры Ли $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ — диагональны в $V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$. Можно разложить $V_{\bar 0}$ в прямую сумму $V_{\bar 0} = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus L_4$ так, что $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ аннулирует L_4, $\mathfrak{h}_1$ аннулирует L_2, $\mathfrak{h}_2$ аннулирует L_1, L_1 — $\mathfrak{h}_1$-модуль, L_2 — $\mathfrak{h}_2$-модуль, а L_3 — $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$-модуль. Пусть $V_{\bar 1} = L'_1 \oplus L'_2 \oplus L'_3 \oplus L'_4$ — аналогичное разложение. Так как $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar 1} \neq 0$, то $P_\eta(\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(V_{\bar 0})}\,\mathfrak{g}_{\bar 0}) \neq 0$ и $P_\omega(\mathrm{pr}_{\mathfrak{sp}(V_{\bar 1})}\,\mathfrak{g}_{\bar 0}) \neq 0$. Это показывает, что если $L_1 \neq 0$, то $L_3 = 0$. Боле того, $L_2 \neq 0$, так как представление $\mathfrak{h}_1$ — диагонально в $V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$. Таким образом, либо $L_3 = 0$, либо $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$. Далее, если $L_3 \neq 0$, то $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{so}(L_3)$ — подалгебра Берже (которая либо неприводима, либо L_3 имеет вид $U \oplus U^*$, где $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{gl}(U)$ – неприводима). Аналогично, если $L_1 \neq 0$ и $L_2 \neq 0$, то $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{so}(L_1)$ и $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{so}(L_2)$ — подалгебра Берже. Схожие утверждения имеют место для $V_{\bar{1}}$. Если $L_1 \neq 0$, $L_2 \neq 0$, $L_1' \neq 0$ и $L_2' \neq 0$, то, как в случае а.1, представление — неприводимо. Если $L_1 \neq 0$, $L_2 \neq 0$ и $L_3' \neq 0$, то, как в случае присоединенных представлений, имеем $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{1}} = 0$. Если $L_3 \neq 0$ и $L_3' \neq 0$, то либо $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ не является алгеброй Берже или косой алгеброй Берже, либо $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ является только редуктивной алгеброй Берже, или редуктивной косой алгеброй Берже. В последнем случае представление $\mathfrak{g}$ не является неприводимым.

В каждом из случаев мы разложили V в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ -модулей. Можно задаться вопросом, существуют ли полученные представления $\mathfrak{g}$, другими словами, следует проверить, можно ли полученные представления $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ продолжить до неприводимых представлений $\mathfrak{g}$. Это можно сделать, переходя к комплексификации, тогда можно использовать теорию представлений комплексных простых супералгебр Ли [88, 89, 95, 98, 99, 123, 138, 139, 68]. Каждое неприводимое представление $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ является представлением V_Λ со старшим весом Λ, который можно задать на диаграмме Каца-Дынкина для $\mathfrak{g}$. Существует возможность разложить $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-модуль V_Λ в сумму неприводимых компонент. Один $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-модуль $V_{\tilde{\Lambda}}$ можно получить прямо из Λ. Тогда $V_{\tilde{\Lambda}}$ должен совпадать с одним из неприводимых $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-модулей, полученных нами. Вес $\tilde{\Lambda}$ однозначно определяет Λ, и остается проверить, состоит ли V_Λ из неприводимых $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-модулей, полученных нами. Продемонстрируем эту технику на нескольких примерах.

Пример 3.3.1. Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная форма комплексной простой супералгебры Ли $F(4)$ с $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(7,\mathbb{R})$ и $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathbb{R}^2 \otimes \Delta$, где $\Delta \simeq \mathbb{R}^8$ — спинорное представление алгебры Ли $\mathfrak{so}(7,\mathbb{R})$.

а.1. Имеем $V_{\bar{0}} = \Delta$ и $V_{\bar{1}} = \mathbb{R}^2$. Заметим, что $V_{\bar{0}} \otimes V_{\bar{1}} = \mathfrak{osp}(8|2,\mathbb{R})_{\bar{1}}$, поэтому,

$$[V_{\bar{0}} \otimes V_{\bar{1}}, V_{\bar{0}} \otimes V_{\bar{1}}] = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(8,\mathbb{R}).$$

Это показывает, что не существует представление $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathbb{R}^{8|2}$.

a.2. Мы рассмотрим этот случай после a.3.

a.3. Имеем $V_{\bar 0} = \Delta \oplus L$, где $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \subset \mathfrak{so}(L)$ — неприводимая подалгебра Берже, и $V_{\bar 1} = \mathbb{R}^2$. Как в случае a.1, такое представление не существует. Это можно доказать также следующим способом. Прежде всего, поскольку $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \subset \mathfrak{so}(L)$ — неприводимая алгебра Берже, то единственными возможными L могут быть $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^5$. Переходя к комплексификации, мы получим следующие $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(7,\mathbb{C})$-модули: $V_{\bar 0} = \mathbb{C}^8 \oplus L$, где $\mathbb{C}^8$ — спинорное представление $\mathfrak{so}(7,\mathbb{C})$, L совпадает либо с $\mathbb{C}^3$, либо с $\mathbb{C}^5$, и $V_{\bar 1} = \Pi\mathbb{C}^2$. Заметим, что ни $\mathfrak{g}_{\bar 1} \otimes \mathbb{C}^8$, ни $\mathfrak{g}_{\bar 1} \otimes \mathbb{C}^2$ не содержат ни какой из $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модулей $\mathbb{C}^3$ и $\mathbb{C}^5$. Это означает, что $\mathfrak{g}_{\bar 1} \cdot (\mathbb{C}^8 \oplus \Pi\mathbb{C}^2) \subset \mathbb{C}^8 \oplus \Pi\mathbb{C}^2$, т.е. векторное подпространство $\mathbb{C}^8 \oplus \Pi\mathbb{C}^2 \subset V$ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, поэтому $L = 0$. В действительности, метод разложения $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуля V на неприводимые компоненты основывается на факте, что если $U \subset V$ — неприводимый $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуль, то $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ переводит его в некоторую неприводимую компоненту тензорного произведения $\mathfrak{g}_{\bar 1} \otimes U$.

Информацию о неприводимых представлениях супер态 алгебры Ли $F(4)$ можно найти в [138]. Каждое неприводимое представление со старшим весом Λ для $F(4)$ определяется числовыми отметками (a_1, a_2, a_3, a_4) на схеме Каца-Дынкина. Пусть $b = \frac{1}{3}(2a_1 - 3a_2 - 4a_3 - 2a_4)$. Должны быть выполнены следующие условия: b, a_2, a_3, a_4 — неотрицательные целые числа; если $b = 0$, то $a_1 = \cdots = a_4 = 0$; $b \neq 1$; если $b = 2$, то $a_2 = a_4 = 0$; если $b = 3$, то $a_2 = 2a_4 + 1$. Вес $\tilde\Lambda$ определяется отметками (b, a_2, a_3, a_4) на схеме Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(7,\mathbb{C})$. В нашем случае $\tilde\Lambda$ должен быть одним из $(0,0,0,1)$, $(1,0,0,0)$, $(2,0,0,0)$, $(4,0,0,0)$. Первые два случая не удовлетворяют условиям на числовые отметки. Третий случай соответствует присоединенному представлению. В последнем случае V содержит $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуль со старшим весом $(3,1,0,0)$, в то время как наши представления не могут содержать этот подмодуль.

Возвращаясь к случаю a.2, получим представление с условием $b = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$. Однако представления $F(4)$ с $b = 1$ не существуют.

b. Этот случай не возникает, так как представление $\mathfrak{so}(7,\mathbb{R})$ в Δ не является унитарным.

c. Результаты параграфов 1.1.3, 3.2.4 и [29] показывают, что единственным представлением алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{so}(7,\mathbb{R})$ как косой алгебры Берже является $\mathbb{R}^2\otimes\Delta$, а алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{so}(7,\mathbb{R})$ не является подалгеброй Берже в $\mathfrak{so}(p,q)$. Таким образом, как мы видели, $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{1}}=0$.

Пример 3.3.2. Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная форма простой комплексной супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(4|2,\alpha,\mathbb{C})$ с $\mathfrak{g}_{\bar{0}}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ и $\mathfrak{g}_{\bar{1}}=\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$. Предположим, что $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{osp}(p,q|2m)=\mathfrak{osp}(V)$ — неприводимая подалгебра Берже. Рассмотрим несколько случаев.

Сначала предположим, что никакая из алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ не действует диагонально в $V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$. Используя факт, что представление $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ в $\mathbb{R}^2$ является симплектическим и аргументы случая a.1, получим, что $V_{\bar{1}}=\mathbb{R}^2$ как $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-модуль, и $V_{\bar{0}}=\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$ как $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ -модуль. Чтобы проанализировать такие представления обратимся к комплексному случаю. Тогда можно использовать теорию представлений простой комплексной супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(4|2,\alpha,\mathbb{C})$ [95]. Каждое представление $\mathfrak{osp}(4|2,\alpha,\mathbb{C})$ дано отметками (a_2,a_1,a_3) такими, что a_2,a_3 и $b=\frac{1}{1+\alpha}(2a_1-a_2-\alpha a_3)$ — неотрицательные целые. Далее, если $b=0$, то $a_1=a_2=a_3=0$; если $b=1$, то $\alpha(a_3+1)=\pm(a_2+1)$. В [95] показано, что V содержит следующие $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-модули (b,a_2,a_3), $(b-1,a_2\pm1,a_3\pm1)$, $(b-1,a_2\pm1,a_3\mp1)$, $(b-2,a_2\pm2,a_3)$, $(b-2,a_2,a_3\pm2)$, $(b-2,a_2,a_3)$, $(b-3,a_2\pm1,a_3\pm1)$, $(b-3,a_2\pm1,a_3\mp1)$, $(b-4,a_2,a_3)$ (представления даны числовыми отметками на диаграмме Дынкина для $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$). В нашем случае (b,a_2,a_3) должен быть одним из $(1,0,0)$,$(0,1,0)$,$(0,0,1)$,$(0,1,1)$,$(1,1,0)$,$(1,0,1)$. В первом случае $\alpha=1$, и мы получаем тождественное представление для $\mathfrak{osp}(4|2,\mathbb{R})$; второй, третий и четвертый случаи не возможны; в последних двух случаях V содержит представления $(0,2,1)$ и $(0,1,2)$, что дает противоречие. Таким образом, единственным возможным представлением является тождественное представление $\mathfrak{osp}(4|2,\mathbb{R})$.

Далее мы предполагаем, что некоторое число алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ действует диагонально $V_{\bar 0}\oplus V_{\bar 1}$. Используя аргументы случаев a.3 и b, можно показать, что если $\mathfrak{g}$ является суперглеброй Берже, то она — симметрическая.

Представления простых супералгебр Ли $\mathfrak{g}$ таких, что полупростая часть алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ является простой, можно рассмотреть точно так же. Ситуация становится проще, поскольку представление $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ является диагональным в $V_{\bar 0}\oplus V_{\bar 1}$ (кроме тождественных представлений $\mathfrak{osp}(1|2m,\mathbb{R})$ и $\mathfrak{osp}(2|2m,\mathbb{R})$). Мы немедленно заключаем, что $\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(V_{\bar 0})}\,\mathfrak{g}_{\bar 0}\subset\mathfrak{so}(V_{\bar 0})$ — подалгебра Берже, а $\mathrm{pr}_{\mathfrak{sp}(V_{\bar 1})}\,\mathfrak{g}_{\bar 0}\subset\mathfrak{sp}(V_{\bar 1})$ – косая подалгебра Берже.

Пример 3.3.3. Рассмотрим супералгебру Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{pe}(n,\mathbb{R})$. Напомним, что $\mathfrak{g}_{\bar 0}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ и $\mathfrak{g}_{\bar 1}=\odot^2\mathbb{R}^n\oplus\Lambda^2\mathbb{R}^{n*}$. Предположим, что $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{osp}(p,q|2m)=\mathfrak{osp}(V)$ — неприводимая несимметрическая алгебра Берже. Тогда $\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(V_{\bar 0})}\,\mathfrak{g}_{\bar 0}\subset\mathfrak{so}(V_{\bar 0})$ — подалгебра Берже, а $\mathrm{pr}_{\mathfrak{sp}(V_{\bar 1})}\,\mathfrak{g}_{\bar 0}\subset\mathfrak{sp}(V_{\bar 1})$ — косая подалгебра Берже. Параграф 1.1.3, пункт 3.2.4 и [29] показывают, что $V_{\bar 0}$ и $V_{\bar 1}$ должны содержаться в следующем списке: $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^{n*}$, $\odot^2\mathbb{R}^n\oplus\odot^2\mathbb{R}^{n*}$, $\Lambda^2\mathbb{R}^n\oplus\Lambda^2\mathbb{R}^{n*}$, $\Lambda^3\mathbb{R}^6$. $(n=6)$, $\Lambda^4\mathbb{R}^8$ $(n=8)$. Перейдем к комплексификации. Пусть, например, $V_{\bar 0}=\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{C}^{n*}$. $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуль $\mathfrak{g}_{\bar 1}\cdot\mathbb{C}^n$ должен совпадать с некоторой неприводимой компонентой комплексификации, выше приведенного списка. Имеем

$$\mathfrak{g}_{\bar 1}\otimes\mathbb{C}^n=V_{3\pi_1}\oplus V_{\pi_1+\pi_2}\oplus V_{\pi_1+\pi_{n-2}}\oplus\mathbb{C}^{n*}.$$

Следовательно, $\mathfrak{g}_{\bar 1}\cdot\mathbb{C}^n=\mathbb{C}^{n*}\subset V_{\bar 1}$. Тензорное произведение $\mathfrak{g}_{\bar 1}\otimes\mathbb{C}^{n*}$ не содержит $\mathbb{C}^{n*}$. Это означает, что векторное суперподпространство $\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{C}^{n*}$ (где $\mathbb{C}^{n*}\subset V_{\bar 1}$) в V является $\mathfrak{g}$-инвариантным, а это дает противоречие. Другие представления из данного выше списка можно рассмотреть точно так же.

Таким образом, если $\mathfrak{g}$ — простая вещественная супералгебра Ли и существует неприводимое представление $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{osp}(p,q|2m)$ такое, что $\mathfrak{g}$ — несимметрическая супералгебра Берже, то мы имеем дело с тождественным представлением $\mathfrak{g}$, и $\mathfrak{g}$ является одной из следующих супералгебр Ли: $\mathfrak{osp}(p,q|2m)$, $\mathfrak{osp}(p|2m,\mathbb{C})$, $\mathfrak{su}(p_0,q_0|p_1,q_1)$, $\mathfrak{hosp}(p,q|m)$. Эти супералгебры Ли с их тождественными представлениями являются несимметрическими супералгебрами Берже, так как они содержат соответственно подалгебры $\mathfrak{so}(p,q)$, $\mathfrak{so}(p,\mathbb{C})$, $\mathfrak{su}(p_0,q_0)$, $\mathfrak{hosp}(p,q)$, которые являются несимметрическими алгебрами Берже.

Предположим, что $\mathfrak{g}$ — простая супералгебра Ли и существует неприводимое представление $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{osp}(p,q|2m)$ такое, что $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{z}$ — несимметрическая супералгебра Берже, где $\mathfrak{z}$ — суперподалгебра в $\mathfrak{osp}(p,q|2m)$, коммутирующая с $\mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{g}$ не содержится в $\mathfrak{q}(n,\mathbb{R})$, т.е. она не коммутирует с нечетной комплексной структурой, то по лемме Шура для представлений супералгебр Ли, $\mathfrak{z}$ либо совпадает с $\mathbb{R}J$, где J — четная комплексная структура, либо с $\mathfrak{z}=\mathfrak{sp}(1)$, т.е. $\mathfrak{z}$ порождается четной кватернионной структурой J_1,J_2,J_3. Из параграфа 1.1.3 следует, что в случае, когда $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(p,q)$ — неприводимая подалгебра, отличная от нескольких исключений, если $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{z}$ — алгебра Берже, то и $\mathfrak{h}$ — алгебра Берже. Аналогично, из пункта 3.2.4 следует, что в случае, когда $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$ — неприводимая подалгебра, если $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{z}$ — косая алгебра Берже, то и $\mathfrak{h}$ – косая алгебра Берже. Тоже замечание имеет место для представлений в пространстве $U\oplus U^*$, где $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{sl}(U)$ – неприводимая подалгебра. Это показывает, что метод, развитый выше, может быть применен также к неприводимым подалгебрам $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{z}\subset\mathfrak{osp}(p,q|2m)$, где $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли. Мы получаем тождественное представление супералгебр Ли $\mathfrak{u}(p_0,q_0|p_1,q_1)$, $\mathfrak{hosp}(p,q|m)\oplus\mathbb{R}J$, $\mathfrak{hosp}(p,q|m)\oplus\mathfrak{sp}(1)$. Так как $\mathfrak{u}(p_0,q_0|p_1,q_1)$ содержит $\mathfrak{u}(p_0,q_0)$, то эта супералгебра является несимметрической супералгеброй Берже. Так как

$$\mathcal{R}(\mathfrak{sp}(p,q)\oplus\mathbb{R}J)=\mathcal{R}(\mathfrak{sp}(p,q)),\quad \bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{so}(m,\mathbb{H})\oplus\mathbb{R}J)=\bar{\mathcal{R}}(\mathfrak{so}(m,\mathbb{H})),$$

и J действует диагонально в $V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$, получаем

$$\mathcal{R}(\mathfrak{hosp}(p,q|m) \oplus \mathbb{R}J) = \mathcal{R}(\mathfrak{hosp}(p,q|m)),$$

т.е. $\mathfrak{hosp}(p,q|m) \oplus \mathbb{R}J$ не является супералгеброй Берже. Обобщая тензор кривизны кватернионного проективного пространства [3], определим тензор кривизны $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{hosp}(p,q|m) \oplus \mathfrak{sp}(1))$ равенством

$$R(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3} g(J_\alpha X, Y)J_\alpha - \frac{1}{4}\big(X \wedge Y + \sum_{\alpha=1}^{3} J_\alpha X \wedge J_\alpha Y\big),$$

$X, Y \in V$. Ограничение R на $\Lambda^2\mathbb{R}^{4p,4q}$ совпадает с тензором кривизны кватернионного проективного пространства, поэтому его образ не содержится в $\mathfrak{sp}(p,q)$. Это показывает, что $R \notin \mathcal{R}(\mathfrak{hosp}(p,q|m))$. Таким образом,

$$\mathcal{R}(\mathfrak{hosp}(p,q|m)) \neq \mathcal{R}(\mathfrak{hosp}(p,q|m) \oplus \mathfrak{sp}(1)),$$

и $\mathfrak{hosp}(p,q|m) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ является несимметрической супералгеброй Берже.

Пусть $\mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{gl}(V^1)$ и $\mathfrak{g}^2 \subset \mathfrak{gl}(V^2)$ — две неприводимые вещественные суперподалгебры. Рассмотрим тензорное произведение этих представлений $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \subset \mathfrak{gl}(V^1 \otimes V^2) = \mathfrak{gl}(V)$. Предположим, что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(V)$. Заметим, что если векторные суперпространства V^1 и V^2 допускают комплексные структуры, коммутирующие соответственно с элементами $\mathfrak{g}^1$ и $\mathfrak{g}^2$, то представление $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$ в $V^1 \otimes V^2$ — приводимо, и мы рассматриваем представление в $V^1 \otimes_{\mathbb{C}} V^2$. Для четных и нечетных частей $V^1 \otimes V^2$ имеем

$$(V^1 \otimes V^2)_{\bar{0}} = V^1_{\bar{0}} \otimes V^2_{\bar{0}} \oplus V^1_{\bar{1}} \otimes V^2_{\bar{1}}, \quad (V^1 \otimes V^2)_{\bar{1}} = V^1_{\bar{0}} \otimes V^2_{\bar{1}} \oplus V^1_{\bar{1}} \otimes V^2_{\bar{0}}.$$

Это показывает, что если четные и нечетные части обоих V^1 и V^2 — нетривиальны, то представление $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ является диагональным в $(V^1 \otimes V^2)_{\bar{0}} \oplus (V^1 \otimes V^2)_{\bar{1}}$. Следовательно, $\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}((V^1 \otimes V^2)_{\bar{0}})}\, \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ является алгеброй Берже, а $\mathrm{pr}_{\mathfrak{sp}((V^1 \otimes V^2)_{\bar{1}})}\, \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ — косой алгеброй Берже. Используя аргументы, как выше, легко видеть, что если $\mathfrak{g}$ — супералгебра Берже, то она является симметрической. Тоже самое имеет место для тензорного произведения нескольких представлений.

Предположим далее, что четные и нечетные части V^1 — нетривиальны, а V^2 является чисто четным или чисто нечетным. Если V^2 является чисто нечетным, то $V^1 \otimes V^2 = \Pi V^1 \otimes \Pi V^2$, где ΠV^2 является чисто четным. Таким образом, можно предположить, что V^2 является чисто четным, т.е. V^2 — обычное векторное пространство. Так как $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \subset \mathfrak{osp}(V^1 \otimes V^2)$, то либо $\mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{osp}(V^1)$ и $\mathfrak{g}^2 \subset \mathfrak{so}(V^2)$, либо $\mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{osp}^{sk}(V^1)$ и $\mathfrak{g}^2 \subset \mathfrak{sp}(V^2)$.

Пусть V^1 и V^2 — соответственно комплексное векторное суперпространство и комплексное векторное пространство. Пусть $V = V^1 \otimes V^2$. Пусть g_1 — суперсимметрическая билинейная форма на V^1, а g_2 — симметрическая билинейная форма на V^2. Из результатов [109] следует, что

$$\mathcal{R}(\mathfrak{sl}(V^1) \oplus \mathfrak{sl}(V^2) \oplus \mathbb{C}) \simeq V^* \otimes V^*.$$

Каждый $\tau \in V^* \otimes V^*$ определяет тензор кривизны R_τ равенством

$$R_\tau(x_1 \otimes x_2, u_1 \otimes u_2) = A(x_1 \otimes x_2, u_1 \otimes u_2) + B(x_1 \otimes x_2, u_1 \otimes u_2),$$

где $A(x_1 \otimes x_2, u_1 \otimes u_2) \in \mathfrak{sl}(V^1) \oplus \mathbb{C}$, $B(x_1 \otimes x_2, u_1 \otimes u_2) \in \mathfrak{sl}(V^2) \oplus \mathbb{C}$, и для $v_1 \in V^1$ и $v_2 \in V^2$ имеем

$$A(x_1 \otimes x_2, u_1 \otimes u_2)v_1 = (-1)^{|v_1||u_1|}\tau(x_1, x_2, v_1, u_2)u_1$$

$$-(-1)^{(|v_1|+|u_1|)|x_1|}\tau(u_1, u_2, v_1, x_2)x_1,$$

$$B(x_1 \otimes x_2, u_1 \otimes u_2)v_2 = \tau(x_1, x_2, u_1, v_2)u_2 - (-1)^{|u_1||x_1|}\tau(u_1, u_2, x_1, v_2)x_2.$$

В частности,

$$\mathrm{tr}(B(x_1 \otimes x_2, u_1 \otimes u_2)) = (\tau(x_1, x_2, u_1, u_2) - (-1)^{|u_1||x_1|}\tau(u_1, u_2, x_1, x_2)).$$

Если $q > 1$, то из аргументов, аналогичных аргументам из [121, 168], следует, что если $R_\tau \in \mathcal{R}(\mathfrak{osp}(V^1) \oplus \mathfrak{so}(V^2)) \subset \mathcal{R}(\mathfrak{sl}(V^1) \oplus \mathfrak{sl}(V^2) \oplus \mathbb{C})$, то этот тензор дан элементом $\tau \in \odot^2 V^*$ таким, что

$$\tau(x_1, x_2, u_1, u_2) = c g_1(x_1, u_1) g_2(x_2, u_2),$$

где $c \in \mathbb{C}$. Следовательно,

$$\mathcal{R}(\mathfrak{osp}(V^1) \oplus \mathfrak{so}(V^2)) = \mathcal{R}(\mathfrak{osp}(V^1) \oplus \mathfrak{so}(V^2))_{\bar{0}}$$

— одномерное пространство. Таким образом, $\mathfrak{osp}(V^1) \oplus \mathfrak{so}(V^2) \subset \mathfrak{osp}(V^1 \otimes V^2)$ — симметрическая супералгебра Берже, и $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = 0$ для каждой собственной суперподалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{osp}(V^1) \oplus \mathfrak{so}(V^2) \subset \mathfrak{osp}(V^1 \otimes V^2)$. Аналогично, если g_1 — суперкососимметрическая билинейная форма на V^1, g_2 — симплектическая форма на V^2, то

$$\mathcal{R}(\mathfrak{osp}^{sk}(V^1) \oplus \mathfrak{sp}(V^2)) = \mathcal{R}(\mathfrak{osp}^{sk}(V^1) \oplus \mathfrak{sp}(V^2))_{\bar{0}} = \mathbb{C}R_\tau,$$

где

$$\tau(x_1, x_2, u_1, u_2) = g_1(x_1, u_1) g_2(x_2, u_2).$$

Те же утверждение верны в случае вещественных суперпространств V^1 и V^2.

Остается рассмотреть случаи $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ и $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (если в последнем случае $\mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{osp}^{sk}(V^1)$ допускает комплексную структуру, то мы рассматриваем представление $\mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$ в пространстве $V^1 \otimes_{\mathbb{C}} V^2$). Предположим, что $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Имеем $\mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{osp}^{sk}(V^1)$. Так как не существует редуктивных алгебр Ли $\mathfrak{h}$ таких, что $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ является одновременно подалгеброй Берже в $\mathfrak{so}(p, q)$ и косой подалгеброй Берже в $\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$, то $\mathfrak{g}^1_{\bar{0}}$ нет идеалов, действующих диагонально в $V^1_{\bar{0}} \oplus V^1_{\bar{1}}$. Поэтому $\mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{osp}^{sk}(V^1)$ — тождественное представление супералгебры Ли $\mathfrak{g}^1$. Из параграфа 1.1.3, пункта 3.2.4 и условия $\mathcal{R}(\mathfrak{g})_{\bar{1}} \neq 0$ следует, что $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{osp}^{sk}(V^1) = \mathfrak{osp}^{sk}(2m|r, s)$. Аналогично, если $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, то $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{osp}^{sk}(2m|r, \mathbb{C})$. Мы получили следующие две алгебры: $\mathfrak{osp}^{sk}(2m|r, s) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{osp}(\mathbb{R}^{2m|r,s} \otimes \mathbb{R}^2)$, $\mathfrak{osp}^{sk}(2m|r, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{osp}(\mathbb{C}^{2m|r} \otimes \mathbb{C}^2)$. Второе представление является комплексификацией тождественного представления супералгебры Ли $\mathfrak{hosp}(r, r|m) \oplus \mathfrak{sp}(1)$, поэтому это представление определяет несимметрическую супералгебру Берже. Комплексификацией первого представления является второе, поэтому первое представление также определяет несимметрическую супералгебру Берже. Теорема верна. $\square$

Литература

[1] В. П. Акулов, Д. В. Волков, В. А. Сорока, О калибровочных полях на суперпространствах с различными группами голономии, Письма в ЖЭТФ 22 (7) (1975) 396–399.

[2] В. П. Акулов, Д. В. Волков, В. А. Сорока, Об общековариантных теориях калибровочных полей на суперпространствах, Письма в ЖЭТФ 31 (1) (1977) 12–22.

[3] Д. В. Алексеевский, Римановы пространства с необычными группами голономии, Функ. ан. прил. 2 (2) (1968) 1–10.

[4] Д. В. Алексеевский, Однородные римановы многообразия отрицательной кривизны, Мат. сборн. 96 (1) (1975) 93–117.

[5] Д. В. Алексеевский, Э. Б. Винберг, А. С. Солодовников, Геометрия пространств постоянной кривизны, Итоги науки и техники. ВИНИТИ Т. 29: Совр. пробл. мат. Фунд. напр. М., 1988, 5–146.

[6] D. V. Alekseevsky, V. Cortés, C. Devchand and U. Semmelmann, Killing spinors are Killing vector fields in Riemannian supergeometry, J. Geom. Phys. 26 (1–2) (1998) 37–50.

[7] Д. В. Алексеевский, Б. Н. Кимельфельд, Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий Матем. заметки 24 (1) (1978) 103–110.

[8] R. Ahl Laamara, A. Belhaj, L. B. Drissi, E. H. Saidi, On local Calabi-Yau supermanifolds and their mirrors, J. Phys. A 39 (20) (2006) 5965–5977.

[9] J. F. Adams, Lectures on exceptional Lie groups. The University of Chicago Press, 1996. Edited by Zafer Mahmud and Mamoru Mimura.

[10] A. Altomani, A Santi, Classification of maximal transitive prolongations of super-Poincaré algebras, http://arXiv:1212.1826.

[11] W. Ambrose, I. M. Singer, A theorem on holonomy, Trans. Amer. Math. Soc. 79 (1953) 428–443.

[12] S. Armstrong, Ricci-flat holonomy: a classification, J. Geom. Phys. 57 (6) (2007) 1457–1475.

[13] M. Asorey, P. M. Lavrov, Fedosov and Riemannian supermanifolds, J. Math. Phys. 50 (1) (2009) 013530, 16 pp.

[14] В. В. Астраханцев, О группах голономии четырехмерных псевдоримановых пространств, Мат. заметки 9 (1) (1971) 59–66.

[15] M. Batchelor, The structure of supermanifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 253 (1979) 329–338.

[16] A. Batrachenko, M. J. Duff, J. T. Liu, W. Y. Wen, Generalized holonomy of M-theory vacua, Nuclear Phys. B 726 (1–2) (2005) 275–293.

[17] H. Baum, Holonomy groups of Lorentzian manifolds — a status report, In: Global Differential Geometry, eds. C.Bär, J. Lohkamp and M. Schwarz, 163–200, Springer Proceedings in Mathematics 17, Springer-Verlag, 2012.

[18] H. Baum, O. Müller, Codazzi spinors and globally hyperbolic manifolds with special holonomy, Math. Z. 258 (1) (2008) 185–211.

[19] H. Baum, I. Kath, Parallel spinors and holonomy groups on pseudo-Riemannian spin manifolds, Ann. Global Anal. Geom. 17 (1) (1999) 1–17.

[20] H. Baum, Conformal Killing spinors and the holonomy problem in Lorentzian geometry – a survey of new results, Symmetries and

overdetermined systems of partial differential equations, 251–264, IMA Vol. Math. Appl., 144. New York: Springer, 2008.

[21] H. Baum, K. Lärz, T. Leistner, On the full holonomy group of special Lorentzian manifolds, http://arXiv:1204.5657.

[22] Я. В. Базайкин, О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии $Spin(7)$, Сибирский математический журнал 48 (1) (2007) 11–32.

[23] Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович, Метрики с группой голономии G_2, связанные с 3-сасакиевым многообразием, Сибирский математический журнал 49 (1) (2008) 3–7.

[24] Я. В. Базайкин, Глобально гиперболические лоренцевы пространства со специальными группами голономии, Сибирский математический журнал 50 (4) (2009) 721–736.

[25] А. Бессе, Многообразия Энштейна. Пер. с англ. Т. 2. М.: Мир, 1990.

[26] L. Berard-Bergery, A. Ikemakhen, On the Holonomy of Lorentzian Manifolds, Proceeding of symposia in pure math. 54 (1993) 27–40.

[27] L. Berard-Bergery, A. Ikemakhen, Sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes de signature (n,n), Bull. Soc. Math. France 125 (1) (1997) 93–114.

[28] M. Berger, Sur les groupers d'holonomie des variétés àconnexion affine et des variétés riemanniennes, Bull. Soc. Math. France. 83 (1955) 279–330.

[29] M. Berger, Les espace symétriques non compacts, Ann. Sci. École Norm. Sup. 74 (1957) 85–177.

[30] N. I. Bezvitnaya, Holonomy groups of pseudo-quaternionic-Kählerian manifolds of non-zero scalar curvature, Ann. Global Anal. Geom. 39 (1) (2011) 99–105.

[31] N. I. Bezvitnaya, Holonomy algebras of pseudo-hyper-Kählerian manifolds of index 4. Differential Geom. Appl. 31 (2) (2013) 284–299.

[32] P. A. Blaga, Riemannian connections on supermanifolds: a coordinate-free approach, Mathematica 47 (1) (2005) 27–34.

[33] O. F. Blanco, M. Sánchez, J. M. Senovilla, Complete classifcation of second-order symmetric spacetimes, Journal of Physics: Conference Series 229 (2010) 012021, 5pp.

[34] O. F. Blanco, M. Sánchez, J. M. Senovilla, Structure of second-order symmetric Lorentzian manifolds, J. Eur. Math. Soc. 15 (2) (2013) 595–634.

[35] A. Borel, A. Lichnerowicz, Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes, C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952) 279–300.

[36] Ch. Boubel, Sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes. PhD thesis. Université Henri Poincaré, Nancy. 2000, 218 p.

[37] Ch. Boubel, On the holonomy of Lorentzian metrics, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 16 (3) (2007) 427–475.

[38] Ch. Boubel, A. Zeghib, Dynamics of some Lie subgroups of $O(n, 1)$, applications, Prépublication de l'ENS. Lyon. (2003) 315.

[39] A. Bolsinov, D. Tsonev, On one class of holonomy groups in pseudo-Riemannian geometry, http://arXiv:1107.2361.

[40] J. Brannlund, A. Coley, S. Hervik, Holonomy, decomposability, and relativity, Can. J. Phys. 87 (3) (2009) 241–243.

[41] J. Brannlund, A. Coley, S. Hervik, Supersymmetry, holonomy and Kundt spacetimes, Class. Quantum Grav. 25 (2008) 195007, 10 pp.

[42] R. Bryant, Metrics with exceptional holonomy, Ann. of Math. 126 (2) (1987) 525–576.

[43] R. Bryant, Recent advances in the theory of holonomy, Séminaire Bourbaki 51 ème année 99 (1998) 861, 24 pp.

[44] R. Bryant, Classical, exceptional and exotic holonomies: a status report, Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle en l'Honneur de Marcel Berger . Collection SMF Séminaires and congrès 1 (Soc. math. de France), 1996, 93–166.

[45] R. Bryant, Pseudo-Riemannian metrics with parallel spinor fields and vanishing Ricci tensor, Sémin. Congr., 4, Soc. Math. France, 2000, 53–94.

[46] M. Brozos-Vázquez et al, The geometry of Walker manifolds, Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics 5. Williston: Morgan & Claypool Publishers, 2009.

[47] В. П. Визгин, Релятивистская теория тяготения (истоки и формирование, 1900–1915). М.: Наука, 1981.

[48] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: УРСС, 1995.

[49] M. Cahen, N. Wallach, Lorentzian symmetric spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970) 585–591.

[50] É. Cartan, Les groupes réels simples finis et continus, Ann. Scient. Ecol. Norm. Sup. 31 (1914) 263–355.

[51] É. Cartan, Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, Bull. Soc. math. France 54 (1926) 214–264.

[52] É. Cartan, Les groupes d' holonomie des espaces généralisés, Acta. Math. 48 (1926) 1–42.

[53] S. Cecotti, A Geometric Introduction to F-Theory, Lectures Notes, SISSA, 2010, available at http://people.sissa.it/ cecotti

[54] D. J. Cirilo-Lombardo, Riemannian superspaces, exact solutions and the geometrical meaning of the field localization, Internat. J. Theoret. Phys. 47 (11) (2008) 3015–3028.

[55] V. Cortés, A new construction of homogeneous quaternionic manifolds and related geometric structures, Mem. Amer. Math. Soc. 147 (2000) 700, viii+63 pp.

[56] V. Cortés, Odd Riemannian symmetric spaces associated to four-forms, Math. Scand. 98 (2) (2006) 201–216.

[57] A. Coley, G. W. Gibbons, S. Hervik, C. N. Pope, Metrics with vanishing quantum corrections, Class. Quantum Grav. 25 (2008) 145017, 17pp.

[58] A. Coley, A. Fuster, S. Hervik, Supergravity solutions with constant scalar invariants, International Journal of Modern Physics 24 (6) (2009) 1119–1133.

[59] A. Coley, S. Hervik, G. Papadopoulos, N. Pelavas, Kundt spacetimes, Class. Quantum Grav. 26 (2009) 105016, 34pp.

[60] A. J. Di Scala, C. Olmos, The geometry of homogeneous submanifolds of hyperbolic space, Math. Z. 237 (2001) 199–209.

[61] P. Deligne, J. W. Morgan, Notes on supersymmetry (following Joseph Bernstein), Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians, Vols. 1,2 (Princeton, NJ, 1996/1997), 41-97. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1999.

[62] A. Derdzinski, W. Roter, On conformally symmetric manifolds with metrics of indices 0 and 1, Tensor (N.S.) 31 (3) (1977) 255–259.

[63] A. Derdzinski, W. Roter, The local structure of conformally symmetric manifolds, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 16 (1) (2009) 117–128.

[64] Д. В. Егоров, QR-подмногообразия и римановы метрики с группой голономии G_2, Матем. заметки 90 (5) (2011) 781–784.

[65] M. Erdogan, T. Ikawa, On conformally flat Lorentzian spaces satisfying a certain condition on the Ricci tensor, Indian J. Pure Appl. Math. 26 (5) (1995) 417–424.

[66] J. M. Figueroa-O'Farrill, Breaking the M-waves, Class. Quantum Grav. 17 (15) (2000) 2925–2947.

[67] J. Figueroa-O'Farrill, P. Meessen, S. Philip, Supersymmetry and homogeneity of M-theory backgrounds, Clas. Quantum Grav. 22 (1) (2005) 207-–226.

[68] L. Frappat, A. Sciarrino, P. Sorba, Dictionary on Lie algebras and superalgebras, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 2000.

[69] Th. Friedrich, Zur Existenz paralleler Spinorfelder über Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Colloq. Math. 44 (2) (1981) 277–290.

[70] M. Cvetic, G. W. Gibbons, H. Lu, C. N. Pope, New Complete Non-compact $Spin(7)$ Manifolds, Nucl. Phys. B. 620 (1–2) (2002) 29–54.

[71] R. Ghanam, G. Thompson, Two special metrics with R_{14}-type holonomy, Class. Quantum Grav. 18 (2001) 2007–2014.

[72] G. W. Gibbons, C. N. Pope, Time-Dependent Multi-Centre Solutions from New Metrics with Holonomy $\mathrm{Sim}(n-2)$, Class. Quantum Grav. 25 (2008) 125015, 21pp.

[73] G. W. Gibbons, Holonomy Old and New, Progress of Theoretical Physics Supplement No. 177 (2009) 33–41.

[74] O. Goertsches, Riemannian Supergeometry, Math. Z. 260 (3) (2008) 557–593.

[75] J. Grover at. al., Gauduchon-Tod structures, Sim holonomy and de Sitter supergravity, J. High Energy Phys. 7 (2009) 069.

[76] S. S. Gubser, Special holonomy in string theory and M-theory, Strings, branes and extra dimensions. TASI 2001, 197–233, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004.

[77] V. Guillemin, Infinite dimensional primitive Lie algebras, J. Differential Geom. 4 (1970) 257–282.

[78] T. Jacobson, J. D. Romano, The spin holonomy group in general relativity, Comm. Math. Phys. 155 (2) (1993) 261–276.

[79] G. S. Hall, D. P. Lonie, Holonomy groups and spacetimes, Class. Quantum Grav. 17 (6) (2000) 1369–1382.

[80] G. S. Hall, Symmetries and curvature structure in general relativity. Singapore: World Scientific, 2004.

[81] G. Hall, Projective relatedness and conformal flatness, Cent. Eur. J. Math. 10 (5) (2012) 1763–1770.

[82] J. Hano, H. Ozeki, On the holonomy group of linear connections, Math. J. 10 (1956) 97–100.

[83] S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces. Academic Press New York and London, 1978.

[84] N. Hitchin, Harmonic spinors, Advances in Math. 14 (1974) 1–55.

[85] K. Honda, Conformally flat semi-Riemannian manifolds with commuting curvature and Ricci operators, Tokyo J. Math. 26 (1) (2003) 241–260.

[86] K. Honda, K. Tsukada, Conformally flat semi-Riemannian manifolds with nilpotent Ricci operators and affine differential geometry, Ann. Global Anal. Geom. 25 (3) (2004) 253–275.

[87] K. Honda, K. Tsukada, Three-dimensional conformally flat homogeneous Lorentzian manifolds, J. Phys. A 40 (4) (2007) 831–851.

[88] J. P. Hurni, B. Morel, Irreducible representations of superalgebras of type II, J. Math. Phys. 23 (12) (1982) 2236–2243.

[89] J. P. Hurni, B. Morel, Irreducible representations of $\mathfrak{su}(m|n)$, J. Math. Phys. 24 (1983) 157–163.

[90] A. Ikemakhen, Examples of indecomposable non-irreducible Lorentzian manifolds, Ann. Sci. Math. Québec. 20 (1) (1996) 53–66.

[91] A. Ikemakhen, Sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes de signature $(2, 2+n)$, Publ. Mat. 43 (1) (1999) 55–84.

[92] A. Ikemakhen, Groupes d'holonomie et spineurs parallèles sur les variétés pseudo-riemanniennes complètement réductibles, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 339 (3) (2004) 203–208.

[93] A. Ikemakhen, Parallel spinors on pseudo-Riemannian Spin^c manifolds, J. Geom. Phys. 56 (9) (2006) 1473–1483.

[94] A. Ikemakhen, Parallel spinors on Lorentzian Spin^c manifolds, Differential Geom. Appl. 25 (3) (2007) 299–308.

[95] J. Van der Jeugt, Irreducible representations of the exceptional Lie superalgebras $D(2, 1; \alpha)$, J. Math. Phys. 26 (5) (1985) 913–924.

[96] D. Joyce, Compact manifolds with special holonomy. Oxford University Press, 2000.

[97] D. Joyce, Riemannian holonomy groups and calibrated geometry. Oxford University Press, 2007.

[98] V. G. Kac, Lie superalgebras, Adv. Math., 26 (1977) 8–96.

[99] V. G. Kac, Representations of classical Lie superalgebras. Lectures Notes in Mathematics 676, Berlin: Springer-Verlag, 1978.

[100] В. Р. Кайгородов, Структура кривизны пространства-времени, Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. 14, ВИНИТИ, М., 1983, 177—204.

[101] В. Ф. Кириченко, Конформно плоские локально конформно келеровы многообразия, Матем. заметки 5 (1992) 57–66.

[102] T. Krantz, Kaluza-Klein-type metrics with special Lorentzian holonomy, J. Geom. Phys. 60 (1) (2010) 74–80.

[103] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, Основы дифференциальной геометрии. Т. 1,2. М.: Наука, 1981.

[104] R. P. Kerr, J. N. Goldberg, Some applications of the infinitesimal-holonomy group to the Petrov classification of Einstein spaces, J. Math. Phys. 2 (1961) 327–332.

[105] R. P. Kerr, J. N. Goldberg, Einstein spaces with four-parameter holonomy groups, J. Math. Phys. 2 (1961) 332–336.

[106] M. Kurita, On the holonomy group of the conformally flat Riemannian manifold, Nagoya Math. J. 9 (1955) 161–171.

[107] Д. А. Лейтес, Введение в теорию супермногообразий, УМН 35 (1) (1980) 3–57.

[108] Д. А. Лейтес, Теория супермногообразий. Петрозаводск, 1983.

[109] D. A. Leites, E. Poletaeva, V. Serganova, On Einstein equations on manifolds and supermanifolds, J. Nonlinear Math. Phys. 9 (4) (2002) 394–425.

[110] M. A. A. van Leeuwen, A. M. Cohen, B. Lisser, LiE, A Package for Lie Group Computations, Computer Algebra Nederland, Amsterdam, 1992, http://young.sp2mi.univ-poitiers.fr/~marc/LiE/

[111] T. Leistner, Berger algebras, weak-Berger algebras and Lorentzian holonomy. Berlin, 2002, sfb 288, preprint 567.

[112] T. Leistner, Towards a classification of Lorentzian holonomy Groups, http://arXiv:math.DG/0305139.

[113] T. Leistner, Towards a classification of Lorentzian holonomy groups. Part II: semisimple, non-simple weak-Berger algebras,http://arXiv:math.DG/0309274.

[114] T. Leistner, Holonomy and parallel spinors in Lorentzian geometry. PhD thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, 2003.

[115] T. Leistner, Lorentzian manifolds with special holonomy and parallel spinors, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 69 (2002) 131–159.

[116] T. Leistner, On the classification of Lorentzian holonomy groups, J. Differential Geom. 76 (3) (2007) 423–484.

[117] T. Leistner, P Nurowski, Ambient metrics for n-dimensional pp-waves, Commun. Math. Phys. 296 (3) (2010) 881–898.

[118] J. Lewandowski, Reduced holonomy group and Einstein equations with a cosmological constant, Class. Quantum Grav. 9 (10) (1992) L147–L151.

[119] Ю. И. Манин, Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.

[120] B. McInnes, Methods of holonomy theory for Ricci-flat Riemannian manifolds, J. Math. Phys. 32 (4) (1991) 888–896.

[121] S. Merkulov, L. Schwachhöfer, Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections, Ann. Math. 150 (1999) 77–149.

[122] A. Moroianu, Parallel and Killing spinors on Spin^c manifolds, Comm. Math. Phys. 187 (2) (1997) 417–427.

[123] B. Morel, A. Sciarrino, P. Sorba, Representations of $\mathfrak{osp}(M|2n)$ and Young supertableaux, J. Phys. A: Math. Gen. 18 (1985) 1597–1613.

[124] P.-A. Nagy, Skew-symmetric prolongations of Lie algebras and applications, J. Lie Theory 23 (1) (2013) 1–33.

[125] J.D. Norton, Einstein, Nordström and the early demise of scalar, Lorentz-covariant theories of gravitation, Arch. Hist. Exact Sci. 45 (1) (1992) 17–94.

[126] C. Olmos, A geometric proof of the Berger holonomy theorem, Ann. of Math. (2) 161 (1) (2005) 579–588.

[127] M. Parker, Classification of real simple Lie superalgebras of classical type, J. Math. Phys. 21 (4) (1980) 689–697.

[128] А.З. Петров, Пространства Эйнштейна. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.

[129] E. Poletaeva, Analogues of Riemann tensors for the odd metric on supermanifolds, Acta Appl. Math. 31 (2) (1993) 137–169.

[130] N. Ravndal, Scalar gravitation and extra dimensions, Proceedings of the Gunnar Nordström Symposium on Theoretical Physics, 151–164, Comment. Phys.-Math., 166, Finn. Soc. Sci. Lett., Helsinki, 2004.

[131] G. de Rham, Sur la réductibilitéd'um espace de Riemann, Comm. Math. Helv. 26 (1952) 328–344.

[132] M. Roček, N. Wadhwa, On Calabi-Yau supermanifolds, Adv. Theor. Math. Phys. 9 (2) (2005) 315–320.

[133] K. Sfetsos, D. Zoakos, Supersymmetry and Lorentzian holonomy in various dimensions, J. of High Energy Physics 9 (2004) 10–27.

[134] В. В. Славский, Конформно плоские метрики и псевдоевклидова геометрия, Сиб. матем. журн. 35 (3) (1994) 674–682.

[135] J. F. Schell, Classification of four-dimensional Riemannian spaces, J. Math. Phys. 2 (1961) 202–206.

[136] R. Schimming, Riemannsche Räume mit ebenfrontiger und mit ebener Symmetrie, Math. Nachr. 59 (1974) 129–162.

[137] L. J. Schwachhöfer, Connections with irreducible holonomy representations, Adv. Math. 160 (1) (2001) 1–80.

[138] A. Sciarrino, P. Sorba, Representations of the superalgebra $F(4)$ and Young supertableaux, J. Phys. A: Math. Gen. 19 (1986) 2241–2248.

[139] A. Sciarrino, P. Sorba, Representations of the Lie superalgebra $G(3)$, Proceedings of the XVth ICGTMP, Philadelphie (1986); World Scientific, Singapore, 1987.

[140] J. M. Senovilla, Second-order symmetric Lorentzian manifolds. I. Characterization and general results, Classical Quantum Gravity 25 (24) (2008) 245011, 25 pp.

[141] В. В. Серганова, Классификация простых вещественных супералгебр Ли и симметрических пространств, Функ. ан. прил. 17 (3) (1983) 200–207.

[142] J. Simons, On the transitivity of holonomy systems, Annals of Math. 76 (2) (1962) 213–234.

[143] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, Exact solutions to Einstein's field equations (Second edition), CUP, 2003.

[144] R. S. Strichartz, Linear algebra of curvature tensors and their covariant derivatives, Canad. J. Math. 40 (5) (1988) 1105–1143.

[145] S. Tanno, Curvature tensors and covariant derivatives, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 96 (1972) 233–241.

[146] V. S. Varadarajan, Supersymmetry for Mathematicians: An Introduction, American Mathematical Society, Courant lecture notes 11, 2004.

[147] A. G. Walker, On parallel fields of partially null vector spaces, Quart. J. of Math. 20 (1949) 135–145.

[148] M. Y. Wang, Parallel spinors and parallel forms, Ann. Global Anal. Geom. 7 (1) (1989) 59–68.

[149] H. Wu, On the de Rham decomposition theorem, Illinois J. Math. 8 (1964) 291–311.

[150] K. Yano, On pseudo-Hermitian and pseudo-Kählerian manifolds, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, vol. III, 190–197.

[151] S.-T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equations I, Communications on pure and applied mathematics 31 (1978) 339–411.

[152] C. Zhou, On Ricci flat supermanifolds, J. High Energy Phys. (2005) 004, 10 pp.

РАБОТЫ СОИСКАТЕЛЯ

Статьи в журналах из списка ВАК

[153] А. С. Галаев, Конформно плоские лоренцевы многообразия со специальными группами голономии, Матем. сборник 204 (9) (2013) 29–50.

[154] А. С. Галаев, Псевдоримановы многообразия с рекуррентными спинорными полями, Сиб. матем. журн. 54 (4) (2013) 604–613.

[155] А. С. Галаев, О классификации алгебр голономии лоренцевых многообразий, Сиб. матем. журн. 54 (5) (2013) 1000–1008.

[156] А. С. Галаев, Заметка о группах голономии псевдоримановых многообразий, Матем. заметки 9 (6) (2013) 821–827.

[157] A. S. Galaev, On the Einstein equation on Lorentzian manifolds with parallel distributions of isotropic lines, Учёные записки Казанского университета. Серия Физ.-Матем. науки. 153 (3) (2011) 165–174.

[158] A. S. Galaev, Irreducible holonomy algebras of odd Riemannian supermanifolds, Lobachevskii J. Math. 32 (2) (2011) 163–173.

[159] А. С. Галаев, Алгебры голономии лоренцевых многообразий, Вестник Сарат. гос. техн. ун-та 3 (1) (2006) 5–9.

[160] А. С. Галаев, Группы движений пространств Лобачевского, группы преобразования подобия евклидовых пространств и группы голономии лоренцевых многообразий, Известия Сарат. ун-та: Математика. Механика. Информатика 5 (1) (2005) 3–12.

[161] A. S. Galaev, Irreducible holonomy algebras of Riemannian supermanifolds, Annals of Glob. Anal. Geom. 42 (1) (2012) 1–27.

[162] A. S. Galaev, Some applications of the Lorentzian holonomy algebras, Journal of Geometry and Symmetry in Physics 26 (2012) 13–31.

[163] D. V. Alekseevsky, A. S. Galaev, Two-symmetric Lorentzian manifolds, Journal of Geometry and Physics 61 (12) (2011) 2331–2340.

[164] A. S. Galaev, Examples of Einstein spacetimes with recurrent null vector fields, Class. Quantum Grav. 28 (2011) 175022, 6pp.

[165] A. S. Galaev, T. Leistner, On the local structure of Lorentzian Einstein manifolds with parallel distribution of null lines, Class. Quantum Grav. 27 (2010) 225003, 16pp.

[166] A. S. Galaev, One component of the curvature tensor of a Lorentzian manifold, J. Geom. Phys. 60 (2010) 962–971.

[167] A. S. Galaev, Holonomy of Einstein Lorentzian manifolds, Classical Quantum Gravity 27 (2010) 075008, 13 pp.

[168] A. S. Galaev, Irreducible complex skew-Berger algebras, Differential Geom. Appl. 27 (6) (2009) 743–754.

[169] A. S. Galaev, Holonomy of supermanifolds, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 79 (1) (2009) 47–78.

[170] D. V. Alekseevsky, V. Cortés, A. S. Galaev, T. Leistner, Cones over pseudo-Riemannian manifolds and their holonomy, J. Reine Angew. Math. 635 (2009) 23–69.

[171] A. S. Galaev, Metrics that realize all Lorentzian holonomy algebras, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 3 (5–6) (2006) 1025–1045.

[172] A. S. Galaev, The spaces of curvature tensors for holonomy algebras of Lorentzian manifolds, Differential Geom. Appl. 22 (1) (2005) 1–18.

Главы в книгах

[173] A. S. Galaev, T. Leistner, Recent developments in pseudo-Riemannian holonomy theory, Cortes, Vicente (ed.), Handbook of pseudo-Riemannian

geometry and supersymmetry, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 16, 581–627, Zürich: European Mathematical Society, 2010.

[174] A. S. Galaev, T. Leistner, Holonomy groups of Lorentzian manifolds: classification, examples, and applications, Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, 53–96, ESI Lect. Math. Phys., Zürich: European Mathematical Society, 2008.

Труды конференций

[175] A. S. Galaev, Some applications of the Lorentzian holonomy algebras, Thirteenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, June 3–8, 2011, Varna, Bulgaria, Avangard Prima, Sofia (2012) 132–149.

[176] A. S. Galaev, Lorentzian holonomy algebras and their applications, Abstracts of the IV Congress of the Turkic World Mathematical Society, 1–3 July, 2011, 534 p., p. 14.

[177] A. S. Galaev, On the Einstein equation on Lorentzian manifolds with parallel distributions of isotropic lines. Тория относительности, гравитация, геометрия. Международная конференция "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation."Труды. Казань, 1–6 Ноября, 2010. Казань: Казанский федеральный университет, 2010, 91–100.

[178] А. С. Галаев, Алгебры голономии лоренцевых многообразий Эйнштейна, Труды матем. центра имени Н. И. Лобачевского. — Т.39: Материалы Восьмой молодежной научной школы — конференции "Лобачевские чтения — 2009", 1–6 ноября 2009 года, Казань: Каз.мат.общ-во, 2009. С. 19–23.

[179] А. С. Галаев, Об алгебрах голономии линейных связностей на супермногообразиях, Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры, Труды международнеой конференции посвященной 100 летия со дня рождения В.В. Вагнера. Саратов: Саратовский государственный университет, 2008, 76–78.

[180] А. С. Галаев, О голономии супермногообразий, Труды матем. центра имени Н. И. Лобачевского. Т.38: Материалы Шестой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения — 2007", 14–16 декабря 2007 года. Казань: Каз.мат.общ-во, 2007, 51-53.

[181] А. С. Галаев, О классификации алгебр голономии лоренцевых многообразий, Труды матем. центра имени Н. И. Лобачевского. — Т.31: Материалы Четвертой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения — 2005", 16–18 декабря 2005 года. Казань: Каз.мат.общ-во, 2005, 36–38.

[182] А. С. Галаев, О группах голономии лоренцевых многообразий, Труды матем. центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 18: Материалы международной молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения — 2002", 28 ноября — 1 декабря 2002 г. Казань: Каз. мат. общ-во, 2002, С. 28.

Прочее

[183] А. С. Галаев, Слабо неприводимые подгруппы в $SU(1, n+1)$, Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004, Вып. 6, 27–30.

[184] A. S. Galaev, Isometry groups of Lobachevskian spaces, similarity transformation groups of Euclidean spaces and Lorentzian holonomy groups, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 79 (2006) 87-–97.

[185] A. S. Galaev, Holonomy groups and special geometric structures of pseudo-Kählerian manifolds of index 2. PhD thesis, Humbold University, Berlin. http://arXiv:math/0612392.

[186] A. S. Galaev, Holonomy algebras of Einstein pseudo-Riemannian manifolds, http://arXiv:1206.6623.