«УТВЕРЖДАЮ»
ПРОРЕКТОР ПО ИННОВАЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ
ФГАОУ ВПО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ)
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
_____________ / Н. Ф. Кашапов /
«____» апреля 2014г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертационной работе Галаева Антона Сергеевича «ГРУППЫ ГОЛОНОМИИ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ И СУПЕРМНОГООБРАЗИЙ»,

представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.04 - геометрия и топология.

Для каждого риманова многообразия определена связность Леви-Чивита и группа голономии, т. е. группа автоморфизмов касательного пространства, порождаемая параллельными переносами реперов вдоль замкнутых кусочно гладких кривых. Если представление этой группы приводимо, то многообразие локально разлагается в произведение. Группы голономии неприводимых (и не симметрических) римановых многообразий допускают классификацию, начало которой было положено Марселем Берже. Эта классификация играет центральную роль в современной дифференциальной геометрии и имеет многочисленные приложения в алгебраической геометрии и теоретической физике.

Ареной действия современных физических полевых теорий является многомерное искривленное лоренцево многообразие («пространство-время»), наделенное в случае необходимости дополнительными структурами. Последние десятилетия отмечены бурным проникновением новейших геометрических методов в теоретическую физику. Это связано с развитием теории калибровочных полей, открытием суперсимметрии, появлением супергравитации, теории струн и суперструн, оживлением интереса к многомерным теориям Калуцы-Клейна. В основе перечисленных быстро развивающихся областей теоретической физики лежит групповой подход, включающий рассмотрение локализованных групп внешних, т. е. пространственно-временных симметрий и групп внутренних симметрий. Принципиальное значение для нахождения решений полевых уравнений имеет выбор анзаца общей конфигурации полевых потенциалов, устанавливаемой из теоретико-групповых соображений.

Важным инструментом построения и исследования полевых моделей в общей теории относительности, теории гравитационного излучения и, в особенности, суперсимметричных моделей и моделей струнной физики является использование алгебр и групп голономии.

Сказанное делает актуальной задачу классификации алгебр голономии лоренцевых многообразий и супермногообразий как для математиков, так и для физиков. Решению этой задачи и посвящена диссертация А. С. Галаева, в которой изучаются группы голономии лоренцевых многообразий и супермногообразий, а также связанных с ними (супер) геометрических структур.

Диссертация, изложенная на 245 страницах, состоит из введения, трех глав, разделенных на 13 параграфов, и списка литературы, включающего 186 названий.

Во введении (с. 6–36) формулируются цели и задачи диссертации, обосновывается их актуальность, описывается содержание работы, дается краткий библиографический обзор и перечисляются результаты диссертации.

Первая глава диссертации, состоящая из шести параграфов (1.1–1.6 , с. 37–94), посвящена решению задачи классификации алгебр голономии лоренцевых многообразий и нахождению структуры тензора кривизны лоренцевых многообразий, допускающих параллельные распределения изотропных прямых.

Параграф 1.1 носит обзорный характер и содержит необходимые сведения из теории групп и алгебр голономии псевдоримановых многообразий. Формулируются основные теоремы, обсуждается классификация Берже связных неприводимых групп голономии римановых и псевдоримановых многообразий.

В параграфе 1.2 обсуждается классификация Берарда-Бержери и Икемакхена слабо неприводимых подалгебр $\mathfrak{g}$ лоренцевой алгебры Ли $\mathfrak{so}(1,n+1)$, не являющихся неприводимыми алгебрами. Согласно теореме Берарда-Бержери и Икемакхена существуют четыре типа таких алгебр; с каждой алгеброй $\mathfrak{g}$ связана подалгебра Ли $\mathfrak{h}$ ортогональной алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$, называемая ортогональной частью алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Дано наглядное геометрическое доказательство результата Берарда-Бержери и Икемакхена.

В параграфе 1.3 дано описание алгебраических тензоров кривизны для алгебр Ли всех типов, рассмотренных в параграфе 1.2. Найден тензор кривизны многообразия Волкера, т. е. лоренцева многообразия со слабо неприводимой алгеброй голономии, не являющейся неприводимой алгеброй, или, эквивалентно, лоренцева многообразия, допускающего параллельное распределение изотропных прямых.

В параграфе 1.4 для каждой ортогональной части $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вычислена одна из компонент тензора кривизны, состоящая из линейных отображений из $\mathbf{R}^n$ в $\mathfrak{h}$, удовлетворяющих некоторому алгебраическому тождеству. Использована теория представлений компактных алгебр Ли.

В параграфе 1.5 изучается ортогональная часть алгебры голономии лоренцева многообразия, являющаяся, согласно результату Лайстнера, алгеброй голономии риманова многообразия. В случае, когда ортогональная часть является полупростой алгеброй Ли, приведено простое доказательство утверждения Лайстнера. Результаты предыдущих параграфов вместе с результатом Лайстнера дают классификацию слабо неприводимых подалгебр Берже в $\mathfrak{so}(1,n+1)$, являющихся кандидатами в алгебры голономии.

В параграфе 1.6 доказывается, что слабо неприводимые алгебры Берже могут быть реализованы как алгебры голономии лоренцевых многообразий. Предложена единая конструкция для лоренцевых метрик, реализующих слабо неприводимые алгебры Берже всех четырех типов. Диссертант строит специальные лоренцевы метрики на $\mathbf{R}^{n+2}$, получая таким образом классификацию всех слабо неприводимых алгебр голономии лоренцевых многообразий. Важно заметить, что поиски решения аналогичной задачи для римановых многообразий длились более 30 лет, решение было дано Робертом Брайнтом в 1987 году.

Вторая глава, которая состоит из четырех параграфов (2.1–2.4, с. 95–155), посвящена приложениям результатов первой главы.

Параграф 2.1 содержит исследование связи между группами голономии лоренцевых многообразий и уравнениями Эйнштейна, мотивированное работой физиков Гиббонса и Попе. Получена классификация алгебр голономии лоренцевых многообразий Эйнштейна. Показано, что лоренцевы многообразия с некоторыми алгебрами голономии являются Риччи-изотропными. Найден способ упрощения уравнений Эйнштейна и построены примеры метрик Эйнштейна специального вида.

В параграфе 2.2 классифицируются в терминах алгебр голономии римановы и лоренцевы спинорные многообразия, допускающие рекуррентные спинорные поля, которые обобщают параллельные спинорные поля и являются обобщенными Киллинговыми спинорными полями.

В параграфе 2.3 получена классификация локально конформных лоренцевых метрик со специальными группами голономии. Ранее в работах физиков (Холл, Томпсон и др.) были сделаны попытки построения таких 4–мерных метрик, однако примеры метрик найдены не были. В диссертации А. С. Галаева не только приведены такие примеры, но дано полное решение задачи для случая лоренцевых пространств произвольной размерности.

В работах проф. В. Р. Кайгородова, долгие годы руководившего кафедрой теории относительности и гравитации Казанского университета, было показано, что, в отличие от 2–симметрических римановых многообразй, существуют не локально симметрические 2-симметрические лоренцевы многообразия. В параграфе 2.4 диссертации получена локальная классификация 2-симметрических лоренцевых многообразий, т. е. лоренцевых многообразий с нулевой второй ковариантной производной тензора кривизны. В дисертации отмечается, что испанские специалисты по теории относительности (Санчес, Сеновилла и др.) повторили результаты параграфа 2.4 путем решения сложных систем дифференциальных уравнений, что делает очевидными преимущества развитого в диссертации алгебраического подхода.

Третья глава содержит три параграфа (3.1–3.3, с. 156 –225). В этой главе закладываются основы теории групп голономии связностей на супермногообразиях. В известных пионерских работах советских физиков В. П. Акулова, Д. В. Волкова и В. А. Сороки рассматривались группы голономии связностей на супермногообразиях, являющиеся обычными группами Ли. В рамках последовательного суперсимметричного подхода естественно ожидать, что группа голономии супермногообразия будет супергруппой Ли.

В параграфе 3.1 дается определение супергруппы Ли голономии связности на локально свободном пучке над супермногообразием, в частности, супергруппы Ли голономии связности в касательном расслоении. Показано, что введенные супергруппы голономии обладают свойствами обычных групп голономии. Рассмотрены примеры.

В параграфе 3.2 приводится классификация возможных связных неприводимых групп голономии римановых супермногообразий нулевой четной размерности, а в параграфе 3.3 дается классификация возможных связных неприводимых групп голономии римановых супермногообразий. Этот результат обобщает известную классификацию Берже для римановых многообразий. В качестве примера рассмотрены различные супергеометрические структуры и соответствующие группы голономии.

В главе 3 построена принципиально новая теория. Впервые определена группа голономии связности на супермногообразии как супергруппа Ли. Подробно изучены свойства этой группы. Получено обобщение классификации групп голономии римановых многообразий на случай римановых супермногообразий.

Замечания.

1. Текст диссертации содержит некоторое количество пропущенных или лишних запятых, опечаток и неудачных выражений, например, «возможно ненулевые скобки Ли» (с. 92), «никакое ненулевое параллельное векторное поле» (с.118), «значения уравнений» (с. 208), «экстремально полезный» (с. 209, вторая строка снизу), «бесследная часть» (с. 210, первый абзац), «Дальнейшее доказательство – то же самое» (с. 214, первый абзац), «теоретический физик», повидимому, в реальности не существующий. В некоторых местах заметно, что текст был первоначально написан на английском языке, а затем (не вполне удачно) переведен на русский язык.

2. Встречается накладка обозначений, например, буква *R* обозначает «алгебраический тензор кривизны» и тензор кривизны многообразия, что затрудняет чтение текста (см., например, первую строку с. 41 и конец с. 40); во второй строке на с. 49 символ g используется для обозначения метрики лоренцева многообразия и метрики Минковского.

3. Не все используемые термины расшифрованы, например, «суперсимметрическое отображение» (с. 207, третья строка сверху), «отображение зарядов» (с. 76), «поток Дирака» (с. 115). Возможно, имеются ввиду используемые в физике элеметарных частиц термины «зарядовое сопряжение» и «(дираковский) ток»?

4. На с. 37 дается определение ограниченной группы голономии, а на с. 42 в теореме 1.1.6 используется термин «суженная группа голономии».

5. На с. 65 и в других местах упоминается тензор Вейля без указания, какой тензор Вейля (конформной или проективной кривизны) имеется ввиду.

6. Из текста неясно, кому принадлежит теорема 2.4.1 (с. 149).

7. На с. 151 (8 строка сверху) написано «c_\beta – постоянные векторы», в действительности речь идет о наборе постоянных чисел.

8. Что означают слова «алгебра голономии дельта» в предложении 3.1.3 на с. 180?

9. С. 193, последний абзац перед п. 3.2.4. Доказательство теоремы 3.2.2 для случая непростой полупростой алгебры Ли заменяется ссылкой на работу диссертанта, что вряд ли допустимо в диссертации. То же на с. 213, где мы читаем: «В [166] мы доказываем...».

10. Доказательства предложений 3.3.1 и 3.3.2 на с. 201, 202 не приведены, ссылки или комментарии отсутствуют.

11. Диссертант не поясняет, почему он ограничивается случаем неприводимых несимметрических супералгебр Берже вида (3.27) (с. 200).

Резюмируя сказанное выше, следует сказать, что исследования А. С. Галаева вносят важный вклад в теорию групп голономии связностей на многообразиях. Учитывая, что в диссертации А. С. Галаева дана классификация алгебр голономии лоренцевых многообразий, найдена единая конструкция для лоренцевых метрик, реализующих слабо неприводимые алгебры Берже всех возможных типов, впервые определена и исследована группа голономии связности на супермногообразии как супергруппа Ли и получено обобщение классификации групп голономии римановых многообразий на случай римановых супермногообразий, можно считать, что в диссертации А. С. Галаева содержится решение задач, имеющих существенное значение в дифференциальной геометрии расслоенных пространств с приложениями в теории поля, гравитации и супергравитации.

Выводы диссертации достоверны и обоснованны. Диссертация хорошо оформлена. Результаты диссертации, отраженные в 20 научных публикациях в изданиях из списка ВАК РФ, докладывались на семинарах и конференциях разного уровня – как отечественных (Саратов, Казань, Москва, Новосибирск), так и зарубежных (Берлин, Гамбург, Люксембург, Вена, Брно, Баку, Стокгольм, Варшава).

Содержание автореферата соответствует научным положениям диссертации и достаточно полно их отражает.

Отмеченные выше неточности, имеющие, по существу, редакционный характер, не влияют на достоверность результатов и не снижают общей высокой оценки работы.

Результаты диссертации и развитые в ней методы могут использоваться в исследованиях по геометрии и топологии, а также применяться в учебном процессе для чтения спецкурсов в университетах страны. Техника, развитая в первых двух главах диссертации, может быть использована для дальнейшего изучения лоренцевых многообразий, а также псевдоримановых многообразий произвольной сигнатуры. Предложенные конструкции метрик могут служить анзацами при построении теоретико-полевых физических моделей, в частности, струнных моделей и моделей супергравитации.

Диссертационная работа А. С. Галаева «Группы голономии лоренцевых многообразий и супермногообразий» (объем – 245 машинописных страниц, библиография – 186 наименований) является научно-квалификационной работой, в которой решен ряд актуальных задач дифференциальной геометрии. Диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней» ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор, Антон Сергеевич Галаев, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология.

Рецензент – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории относительности и гравитации Ася Васильевна Аминова.

Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры теории относительности и гравитации института физики 25 апреля 2014 г., протокол № 4.

Заведующий кафедрой теории
относительности и гравитации,
доктор физико-математических наук, С. В. Сушков