ФГБОУ ВПО Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Бударина Наталья Викторовна

Метрическая теория совместных диофантовых приближений в полях действительных, комплексных и p-адических чисел

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена в отделе теоретической и прикладной математики Хабаровского отделения Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор Берник Василий Иванович (Институт математики НАН Беларуси)
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Журавлев Владимир Георгиевич (ФГБОУ ВПО "Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых")
	доктор физико-математических наук, профессор Гриценко Сергей Александрович (ФГБОУ ВПО Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации)
	доктор физико-математических наук, профессор Добровольский Николай Михайлович (ФГБОУ ВПО "Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого")
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО "Брянский государственный технический университет"

Защита диссертации состоится 16 мая 2014 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д. 501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова" по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО "Московской государственный университет имени М.В. Ломоносова" (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8 этаж).

Автореферат разослан 16 апреля 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д. 501.001.84,
созданного на базе ФГБОУ ВПО МГУ,
доктор физ.-мат. наук, профессор А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Область исследования диссертации относится к одному из активно развивающихся разделов теории чисел – метрической теории диофантовых приближений, связанных с диофантовыми приближениями зависимых величин в различных метриках. В теории диофантовых приближений традиционно выделяют три подхода: глобальный, индивидуальный и метрический. Глобальный подход связан с исследованием диофантовых свойств всех чисел или наборов чисел из конкретного класса, например, теорема Дирихле. Индивидуальный подход подразумевает исследование диофантовых свойств конкретных чисел или наборов чисел, например, трансцендентность π, и алгебраическая независимость π и e^{π}. В метрической теории диофантовых приближений изучаются диофантовы свойства всех чисел или наборов чисел, за исключением множеств малой или нулевой меры Лебега (меры Хаара). Исключительные множества могут далее изучаться с помощью меры и размерности Хаусдорфа.

Теорема Хинчина. Метрическая теория диофантовых приближений началась с работ А.Я. Хинчина и Э. Бореля. В 1924 году А.Я. Хинчин[1] доказал классическую теорему о приближении действительных чисел рациональными числами. Далее $\mu_1(A)$ – мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал.

Теорема 1 (Хинчин)**.** *Пусть $\Psi(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – функция такая, что $q\Psi(q)$ монотонно убывает. Обозначим через $\mathcal{L}_1(\Psi)$ множество таких $x \in I$, для которых неравенство*

$$|x - p/q| < \frac{\Psi(q)}{q} \quad \text{или} \quad |qx - p| < \Psi(q)$$

имеет бесконечное число решений в числах $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Тогда

$$\mu_1(\mathcal{L}_1(\Psi)) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) < \infty, \\ \mu_1(I), & \text{если} \quad \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) = \infty. \end{cases}$$

Теорема Хинчина показывает, что при любых $\epsilon > 0$ и $k \geq 2$ множества $\mathcal{L}_1(\Psi_1)$ и $\mathcal{L}_1(\Psi_2)$ для

$$\Psi_1(q) = q^{-1} \log^{-1} q (\log\log q)^{-1} \dots (\underbrace{\log\log\dots\log}_{k} q)^{-1-\epsilon},$$

$$\Psi_2(q) = q^{-1} \log^{-1} q (\log\log q)^{-1} \dots (\underbrace{\log\log\dots\log}_{k} q)^{-1}$$

---

[1] *Khintchine A.J.* Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen // Math. Ann. – 1924. – Vol. 92. – P. 115–125.

имеют совершенно разные метрические характеристики (нулевую и полную меру на I).

Заметим, что доказательство теоремы Хинчина в случае сходимости значительно легче. Оно справедливо без дополнительного требования монотонности и было проведено ранее Э. Борелем в общем случае, а для $\Psi(q) = q^{-2}$ в 1898 году им же. Теорема Хинчина была обобщена им самим на случай совместных приближений[2] и А.В. Грошевым на случай линейных приближений[3]. В указанных работах все переменные входили в первой степени. Хотя такие задачи, как правило, проще, но до сих пор здесь остаются нерешенные задачи. Более подробно результаты метрической теории диофантовых приближений отражены в монографиях Спринджука[4] и Хармана[5].

Пусть

$$P(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_1 f + a_0$$

– целочисленный многочлен с $a_n \neq 0$, степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = \max_{0 \le j \le n} |a_j|$. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество целочисленных многочленов степени не превосходящей n и через $\mathcal{P}'_n$ – множество целочисленных многочленов степени n.

Отметим один, редко цитируемый результат Хинчина об усилении теоремы Минковского для кривой Веронезе $\mathcal{V}_n = (x, x^2, \ldots, x^n)$: при любом $\epsilon > 0$ и почти всех $x \in \mathbb{R}$ неравенство

$$|P(x)| < \epsilon H^{-n}$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных многочленах P, deg $P \le n$, и высоты H. Этот результат сыграл определенную роль в становлении метрической теории линейных приближений, в первую очередь, в связи с решением проблемы Малера.

Проблема Малера. В 30-е годы 20 века К. Малером[6] и Ф. Коксмой[7] были предложены две близкие классификации действительных и комплексных чисел. Пусть x - вещественное или комплексное число. Малер построил классификацию чисел x, основанную на приближении нуля значениями

---

[2] *Khintchine A.J.* Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen // Math. Zeitschr. – 1926. – Vol. 24. – P. 706–714.

[3] *Грошев А.В.* Теорема о системе линейных форм // Докл. АН СССР. – 1938. – №19. – С. 151–152.

[4] *Sprindzuk V.G.* Metric Theory of Diophantine Approximation. – Wiley, New York, 1979.

[5] *Harman G.* Metric number theory. – Oxford, 1998. – Vol. 18.

[6] *Mahler K.* Zur Approximation der Exponential function und des Logarithmus // J. reine und angew. math. – 1932. – Vol. 166. – P. 118–150.

[7] *Koksma J.* Uber die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplex Zahlen durch algebraische Zahlen // Mh. Math. Physik. – 1939. – Vol. 48. – P. 176–189.

многочленов в x. Определим

$$w(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{w_n(x)}{n},$$

где $w_n(x)$ - супремум множества действительных чисел w, для которых существует бесконечно много целочисленных многочленов $P \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих условию

$$0 < |P(x)| \leq H(P)^{-w}.$$

Если $w(x) = \infty$ и существует такой индекс $\eta = \eta(x)$, что $w_\eta(x) = \infty$, то пусть η и будет наименьшим индексом, для которого это верно; в противном случае, полагаем $\eta(x) = \infty$. Малер ввел следующие классы чисел:

$$\begin{array}{llll} A- & \text{числа,} & \text{если} & w(x) = 0, \\ S- & \text{числа,} & \text{если} & 0 < w(x) < \infty, \\ T- & \text{числа,} & \text{если} & w(x) = \infty \quad \text{и} \quad \eta(x) = \infty, \\ U- & \text{числа,} & \text{если} & w(x) = \infty \quad \text{и} \quad \eta(x) < \infty. \end{array}$$

Алгебраические числа составляют класс $A-$ чисел, все трансцендентные числа попадают в классы $S, T, U-$ чисел.

В основе классификаци Коксмы лежит приближение чисел x алгебраическими числами. Пусть

$$w^*(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{w_n^*(x)}{n},$$

где $w_n^*(x)$ - супремум множества действительных чисел w, для которых существует бесконечно много действительных алгебраических чисел α степени не превосходящей n, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - \alpha| \leq H(\alpha)^{-w-1}.$$

Классы S, T, U из классификации трансцендентных чисел Малера совпадают с классами S^*, T^*, U^* из классификации трансцендентных чисел Коксма, что говорит о наличии связи между полиномиальной и алгебраической аппроксимациями. Однако эта связь неоднозначна: например, легко доказать (используя принцип Дирихле) существование многочлена P, принимающего малое значение $|P(x)|$ в точке x, но трудно доказать существование точной алгебраической аппроксимации (см. гипотезу Вирзинга).

Гипотеза Вирзинга. Для каждого $\epsilon > 0$ *существует постоянная* $c(n, x, \epsilon) > 0$, *для которой существует бесконечно много алгебраических чисел* α *степени* $\leq n$ *с условием*

$$|x - \alpha| \leq c(n, x, \epsilon) H(\alpha)^{-n-1+\epsilon}.$$

Вирзинг доказал разрешимость неравенства с показателем $-n/2-1$. В случае $n=2$ гипотеза Вирзинга была доказана Давенпортом и Шмидтом в 1967 г. Более поздние результаты относительно данной гипотезы можно найти в книге Бюжо[8].

Важную роль для дальнейшего развития метрической теории диофантовых приближений сыграла гипотеза Малера[9] о мере множества S-чисел.

Гипотеза Малера. Для любого $\epsilon > 0$ неравенство

$$|P(x)| < H(P)^{-n-\epsilon} \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P \leq n$, только на множестве нулевой меры.

Сам Малер[8] доказал более слабое утверждение: если в (1) показатель степени $-n-\epsilon$ заменить на $-4n$, то множество решений получившегося неравенства будет иметь нулевую меру. Доказательство Малера было основано на представлении результанта $R(P,P')$ неприводимого многочлена P и его производной в виде

$$R(P,P') = P(x)Q_1(x) + P'(x)Q_2(x). \tag{2}$$

Поскольку P – неприводимый многочлен, то $R(P,P') \neq 0$ и, значит, $|R(P,P')| \geq 1$. В представлении (2) известны оценки степени и высоты целочисленных многочленов Q_1 и Q_2. Следовательно, $P(x)$ и $P'(x)$ не могут быть одновременно слишком малыми. Согласно (1), значение $|P(x)|$ мало, поэтому из (1) и (2) получаем оценку снизу для $|P'(x)|$. Если α_1 – ближайший к x корень многочлена P, то нетрудно получить оценки

$$|x-\alpha_1| < 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}, \quad |x-\alpha_1| \leq n|P(x)||P'(x)|^{-1}. \tag{3}$$

Осталось просуммировать вторую оценку по всем многочленам высоты H. Затем новую полученную оценку просуммировать по всем H; получится сходящийся ряд. По лемме Бореля-Кантелли множество решений (1) имеет нулевую меру.

Оценка Малера неоднократно улучшалась. Вначале Коксма показал, что $\sup_{n\geq 1}\frac{w_n(x)}{n} \leq 3$ для почти всех действительных чисел x, а затем Левек на основе леммы Н.И. Фельдмана получил неравенство $\sup_{n\geq 1}\frac{w_n(x)}{n} \leq 2$ для почти всех чисел. Позднее Каш и Фолькман получили $w_n(x) \leq 2n-2$ для почти всех действительных чисел x и $n \geq 2$. Уточняя рассуждения Каша

---

[8] *Bugeaud Y.* Approximation by algebraic numbers. – Cambridge: CUP, 2004. – Vol. 160. – 274 pp.

[9] *Mahler K.* Über das Mass der Menge aller S–Zahlen // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106. – P. 131–139.

и Фолькмана, Шмидт доказал $w_n(x) \leq 2n - 7/3$ для почти всех чисел x и $n \geq 3$. Позднее Фолькман показал, что $w_n(x) \leq 4n/3$ для почти всех чисел x и $n \geq 2$. Спринджук получил более сильный результат, чем Фолькман, $w_n(x) \leq 5n/4 - 3/8$ для $2 \leq n \leq 7$ и $w_n(x) \leq 4n/3 - 1$ для $n \geq 8$.

Из первого неравенства (3) при $|P'(\alpha_1)| > c(n)H^{-n+1}$ и $|P(x)| < H^{-w}$ можно получить оценку $|x - \alpha_1| < c(n)H^{-w+n-1}$. Если зафиксировать H, то количество многочленов с фиксированным H не превышает $(2H+1)^n$. Потребуем сходимость ряда $\sum_H H^{-w+n-1+n}$, что приводит к неравенству $w > 2n$. Для дальнейшего улучшения результата Малера Б. Фолькман использовал оценку

$$|P'(\alpha_1)| > c(n)H^{-n/3} \tag{4}$$

и получил сходимость при $w > 4n/3$. Если $|P'(\alpha_1)| \leq c(n)H^{-n/3}$, то можно показать, что таких многочленов немного, используя результант двух неприводимых многочленов P_1 и P_2, для каждого из которых выполняется неравенство, противоположное (4).

Равенство $w_1(x) = 1$ для почти всех действительных чисел следует из теоремы Хинчина. Равенство $w_2(x) = 2$ для почти всех чисел доказал Кубилюс, применяя метод тригонометрических сумм. Фолькман, опираясь на результаты Давенпорта о бинарных кубических формах, получил равенство $w_3(x) = 3$ для почти всех чисел.

В современной терминологии проблема Малера может быть интерпретирована как один из видов диофантовых приближений зависимых величин или диофантовых приближений на многообразиях.

Теорема Спринджука. В 1964 году В.Г. Спринджук[10,11] решил проблему Малера. Изложим кратко суть его метода. Наряду с неравенством (1), он рассмотрел неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1-\epsilon/2}. \tag{5}$$

Интервал $I_1(P) = \{x : |x - \alpha_1| < 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1},\ |P(x)| < H^{-n-\epsilon}\}$, в котором содержатся все x с ближайшим корнем α_1, находится внутри интервала $I_2(P) = \{x : |x - \alpha_1| < 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1},\ |P(x)| < H^{-n+1-\epsilon/2}\}$. Неравенства (1) и (5) будем рассматривать для класса многочленов, у которых старший коэффициент фиксирован, а остальные a_j, $0 \leq j \leq n-1$, лежат в промежутке $[-H, H]$. Если при этом интервалы $I_2(P)$ пересекаются незначительно и $x \in [a, b]$, то $\sum_P \mu_1(I_2(P)) \leq 2(b-a)$. Поскольку $\mu_1(I_1(P)) < H^{-1-\epsilon/2}\mu_1(I_2(P))$, то

$$\sum_P \mu_1(I_1(P)) \leq 2(b-a)H^{-1-\epsilon/2}. \tag{6}$$

---

[10] *Спринджук В.Г.* О гипотезе Малера // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 154, №4. – С. 783–786.

[11] *Спринджук В.Г.* Еще о гипотезе Малера // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 155, №1. – С. 54–56.

Ряд, состоящий из правых частей неравенства (6), сходится, что завершает доказательство. Если мера пересечения интервалов $I_2(P_1)$ и $I_2(P_2)$, $P_1 \neq P_2$, больше половины длины $I_2(P_1)$, то на пересечении $I_2(P_1)$ и $I_2(P_2)$ для многочлена $R(x) = P_2(x) - P_1(x)$ верно неравенство $|R(x)| < 2H^{-n+1-\epsilon/2}$, $\deg R \leq n-1$. Тем самым, проведен индуктивный переход к многочленам степени $n-1$. Для многочленов P, $\deg P \leq 3$, проблема Малера была уже решена.

Гипотеза Бейкера. Вскоре А. Бейкер[12] получил усиление теоремы Спринджука. Он доказал, что при монотонно убывающей функции Ψ_3 неравенство

$$|P(x)| < \Psi_3^n(H(P)) \tag{7}$$

имеет для почти всех x конечное число решений, если ряд

$$\sum_{H=1}^{\infty} \Psi_3(H) \tag{8}$$

сходится. Бейкер также пользовался методом математической индукции, и поэтому при переходе в неравенстве (7) от многочленов степени k к многочленам степени $k-1$ происходила потеря на логарифмический множитель, который должен был обеспечить сходимость ряда. Это приводило к избыточности условия на сходимость. В этой же работе он высказал гипотезу, согласно которой множество решений неравенства

$$|P(x)| < H(P)^{-n+1}\Psi_3(H(P)) \tag{9}$$

остается нулевой меры Лебега при сходимости ряда (8). Различие между теоремой Бейкера и гипотезой Бейкера становится хорошо заметным, если взять функцию $\Psi_3(x) = x^{-1}(\log x)^{-\gamma}$, $\gamma > 1$. Тогда в теореме Бейкера правая часть в неравенстве (7) будет иметь вид $H^{-n}\log^{-\gamma n} H$, а в гипотезе Бейкера $H^{-n}\log^{-\gamma} H$.

Гипотеза Бейкера была решена в 1989 году В.И. Берником[13]. Им была предложена новая классификация многочленов в зависимости от взаимного расположения корней многочленов. При условии $H^v < |P'(x)| \ll H$, $1/2 < v < 1$, в классе целочисленных многочленов степени n и высоты H фиксировались все коэффициенты, кроме коэффициента a_0. На интервале длины $c(n)|P'(\alpha_1)|^{-1}$ при $c(n) < c_1$ многочлены P, удовлетворяющие неравенству (9), принимают значения $|P(x)| < 1/2$, и поэтому интервалы длины $c_1|P'(\alpha_1)|^{-1}$, построенные для различных многочленов P_1 и P_2, не пересекаются. Это позволяет точно просуммировать меры множества

---

[12] *Baker A.* On a theorem of Sprindzuk // Proc. Roy. Soc., London Ser. A. – 1966. – Vol. 292. – P. 92–104.

[13] *Берник В.И.* О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов // Acta Arith. – 1989. – T. 53. – C. 17–28.

решений (9) и получить сходящийся ряд. Применение леммы Бореля-Кантелли завершает доказательство. Если $|P'(x)| \leq H^{v_1}$, $v_1 \leq v$, то можно применить неравенство $\Psi_3(H) < c_2 H^{-1}$ и рассматривать систему неравенств

$$|P(x)| < c_2 H(P)^{-n}, \;\; |P'(x)| \leq H^{v_1}. \tag{10}$$

В дальнейшем важно как мера тех x, для которых выполняется система неравенств (10), зависит от изменения правой части в первом неравенстве (10). Если эта зависимость линейная, то правую часть в (10) увеличиваем и оснанавливаемся при наступлении нелинейности. При этом незначительно увеличивается и правая часть во втором неравенстве (10). Берник[13] доказал, что для неприводимых многочленов P_1 и P_2 при наступлении нелинейности получившаяся система неравенств невозможна. Отсюда можно посчитать число интервалов и затем умножить это число на оценку меры множества решений (9) для фиксированного многочлена P. Вновь получим сходящийся ряд и лемма Бореля-Кантелли завершает доказательство.

В гипотезе Бейкера, как и в теореме Хинчина, подразумевалось, что при расходимости ряда (8) множество x, для которых неравенство (9) имеет бесконечное множество решений, будет иметь полную меру. Это действительно так, что доказал В.В. Берсневич[14].

Регулярные системы и гипотеза Спринджука. Бейкером и Шмидтом[15] было введено понятие регулярной системы.

Определение 1. *Счетное множество* Γ *действительных чисел вместе с нормировочной функцией* $N : \Gamma \to \mathbb{R}^+$ *называется регулярной системой точек на интервале* J_0*, если существует постоянная* $C_1 = C_1(\Gamma, N)$ *такая, что для любого конечного интервала* $J \subset J_0$ *существует положительное число* $T_0 = T_0(\Gamma, N, J)$ *такое, что для любого* $T \geq T_0$ *найдутся числа* $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \Gamma \cap J$ *такие, что*

$$\begin{gathered} N(\alpha_i) \leq T \;\; (1 \leq i \leq t), \\ |\alpha_i - \alpha_j| \geq T^{-1} \;\; (1 \leq i < j \leq t), \\ t \geq C_1 T |J|. \end{gathered}$$

Затем они доказали, что множество действительных алгебраических чисел α степени n и высоты $H = H(\alpha)$ вместе с функцией $N(\alpha) = H^{n+1}(\alpha) \log^{-\gamma} H(\alpha)$ образует регулярную систему при $\gamma = 3n(n+1)$. Берник[13] доказал, что можно взять $\gamma = n + 1$, а Бересневич[14] доказал регулярность при $\gamma = 0$. Результата Бейкера и Шмидта оказалось достаточно,

---

[14] *Beresnevich V. V.* On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith. – 1999. – Vol. 90, №2. – P. 97–112.

[15] *Baker A., Schmidt W.M.* Diophantine approximation and Hausdorff dimension // Proc. London Math. Soc. – 1970. – Vol. 21. – P. 1–11.

чтобы получить точную оценку снизу для размерности Хаусдорфа множества действительных чисел x, для которых при $w > n$ неравенство $|P(x)| < H^{-w}$ имеет бесконечное число решений. Для получения аналога теоремы Хинчина в случае расходимости в задаче (9) необходимо иметь $\gamma = 0$ или, другими словами, оптимальную регулярную систему.

В монографии Спринджук[16] поставил проблему об обобщении проблемы Малера с многочленов на более общие функции: $(n+1)$-раз непрерывно дифференцируемые и для которых вронскиан для производных почти везде отличен от нуля. Еще ранее В. Шмидт[17] рассмотрел случай $n = 2$. Шмидт параметризовал кривую $F = (f_1(x), f_2(x))$, заменив x на аргумент, связанный с длиной кривой, а затем с помощью методов геометрии чисел он оценил количество целых коэффициентов (a_0, a_1, a_2) функции $F(x) = a_2 f_2(x) + a_1 f_1(x) + a_0$ при условии $\max_{0 \le i \le n} |a_i| \le Q$ и одновременной малости $|F(x)|$ и $|F'(x)|$. Гипотеза Спринджука для $n = 3$ была решена Берником и Бересневичем[18]. Вскоре Д. Клейнбок и Г. Маргулис[19] получили полное решение проблемы Спринджука и обобщили свой результат на гиперболические приближения, в которых правая часть в неравенствах выражается не через максимум модулей коэффициентов, а через произведение модулей ненулевых коэффициентов. К решению задач метрической теории диофантовых приближений Д. Клейнбок и Г. Маргулис применили методы теории динамических систем. Их основной результат состоял в том, что аппроксимация нуля функцией $F(x) = a_n f_n(x) + a_{n-1} f_{n-1}(x) + \ldots + a_1 f_1(x) + a_0$ в любой действительной точке x с помощью принципа Дирихле является наилучшей. Если в показателе степени правой части вычтем любое $\epsilon > 0$, то новая, уже более сильная аппроксимация, возможна бесконечно часто только на множестве нулевой меры. Приведем формулировку результата Д. Клейнбока и Г. Маргулиса для кривых, удовлетворяющих условиям в гипотезе Спринджука (отметим, что они исследовали многообразия из более широкого класса).

Теорема 2. *При любом $\epsilon > 0$ для почти всех чисел $x \in I$ неравенство*

$$|a_n f_n(x) + \ldots + a_1 f_1(x) + a_0| < H(F)^{-n-\epsilon}$$

имеет лишь конечное число решений в $\bar{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$.

---

[16] *Спринджук В.Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел. – Мн.: Наука и Техника, 1967. – 184 с.

[17] *Schmidt W.* Metrische Sätze über simultane Approximation abhängiger Grössen // Monatsch. Math. – 1964. – Vol. 63. – P. 154–166.

[18] *Beresnevich V. V., Bernik V. I.* On a metrical theorem of W. Schmidt // Acta Arith. – 1996. – Vol. 75, №3. – P. 219–233.

[19] *Kleinbock D., Margulis G. A.* Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. of Math. – 1998. – Vol. 148, №2. – P. 339–360.

Далее возникла ситуация аналогичная проблеме Малера. Можно ли функцию $H^{-n-\epsilon}$ в правой части неравенства несколько увеличить и довести ее до правой части в неравенстве (9)? Какой результат можно ожидать в случае расходимости ряда? Эти обе задачи были решены. В случае сходимости ряда было получено два полных, абсолютно одинаковых, результата[20,21], но совершенно разными методами. Затем объединившись авторы доказали и случай расходимости[22]. Вскоре был решен комплексный аналог[23] гипотезы Спринджука и p-адический[24].

Выше кратко описаны результаты и методы метрической теории диофантовых приближений на многообразиях. Дальнейшие причины и примеры актуальности тематики объяснены в более конкретных задачах в главах 1–4 и приложении. В каждой из последующих глав остановимся на результатах и методах более специальных исследований.

Цель работы

Обобщить метрическую теорему Хинчина о приближении действительных чисел рациональными на приближения алгебраическими числами в пространстве действительных, комплексных и p-адических чисел. Доказать метрические теоремы с условием сходимости рядов из значений немонотонных функций. Рассмотреть неоднородные приближения в $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Построить регулярные и повсеместные системы из точек Ω с алгебраическими координатами, в том числе и в коротких интервалах.

Научная новизна

В диссертации созданы новые методы, позволяющие исследовать совместные диофантовы приближения в полях действительных, комплексных и p-адических чисел. Для доказательства теорем типа Хинчина-Грошева в случае сходимости применяется новая модификация метода существенных и несущественных областей. Решенные в диссертации задачи возникают в теории вероятностей, теории дифференциальных уравнений, в задачах математической физики. Перечислим основные результаты.

---

[20] *Beresnevich V. V.* A Groshev type theorem for convergence on manifolds // Acta Math. Hungar. – 2002. – Vol. 94. – P. 99–130.

[21] *Bernik V.I., Kleinbock D. Y., Margulis G. A.* Khintchine–type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions // Internat. Res. Notices. – (2001). – Vol. 9. – P. – 453–486.

[22] *Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kleinbock D. Y., Margulis G. A.* Metric Diophantine approximation: the Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds // Mosc. Math. J. – 2002. – Vol. 2. – P. 203–225.

[23] *Kleinbok D.* Baker-Sprindzuk conjectures for complex analytic manifolds // Algebraic groups and arithmetic, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai. – 2004. – P. 539 –553.

[24] *Mohammadi A., Salehi Golsefidy A.*, Simultaneous Diophantine Approximation in Non-degenerate p-adic manifolds // Israel J. Math. – 2012. – Vol. 188. – P. 231–258.

1. Получен полный аналог теоремы Хинчина в случае сходимости для многочленов произвольной степени при совместных приближениях в полях действительных, комплексных и p-адических чисел.

2. Построена оптимальная регулярная система из точек с алгебраическими координатами, на основе которой доказан аналог теоремы Хинчина в случае расходимости для совместных приближений в $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Доказана регулярность алгебраических чисел в коротких интервалах.

3. В пространствах $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{R} \times \prod_{i=1}^{t-1} \mathbb{Q}_{p_i}$ решены метрические задачи с немонотонной функцией аппроксимации, что является усилением теорем типа Хинчина.

4. Доказан аналог теоремы Хинчина в случае расходимости для неоднородных совместных приближений в $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Для действительного случая при сходимости ряда решен аналог теоремы Хинчина для неоднородных приближений и немонотонной функции аппроксимации.

5. Доказано существование целочисленных многочленов с близкими сопряженными корнями и найдена оценка снизу для числа многочленов, у которых модули дискриминантов не превосходят заданной величины и делятся на большую степень простого числа.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в спецкурсах на математических факультетах университетов. Разработанные в диссертации методы могут быть использованы при дальнейшем развитии метрической теории диофантовых приближений, а также при нахождении распределения алгебраических чисел, их дискриминантов и результантов. Они имеют отношение к метрическим аспектам, возникающим в задачах с резонансными явлениями. Вопрос о разрешимости граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными связан с так называемой проблемой малых знаменателей[25,26]. Впервые она возникла в небесной механике в XVIII веке при исследовании дифференциальных уравнений, описывающих движения планетных систем в ньютоновских гравитационных полях[27]. Влияние малых знаменателей состоит в том, что в решениях дифференциальных уравнений, представленных рядами Фурье, имеется бесконечно много членов

---

[25] *Арнольд В.И.* Малые знаменатели. Об отображении окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат. – 1961. – Т. 25, №1. – С. 21–86.

[26] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наукова думка, 1984. – 264 с.

[27] *Гребенников Е.А., Рябов Ю.А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. – М.: Наука, 1976. – 127 с.

с коэффициентами, знаменатели которых сколь угодно близки к нулю, что может привести к расходимости данных рядов; с динамической точки зрения в движениях планет появляются эффекты, называемые в физике резонансными. В задачах такого типа малые знаменатели имеют вид линейной формы $l(\mathbf{a},\mathbf{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, где $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; при этом точка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ лежит на некотором подмногообразии $M \subset \mathbb{R}^n$. Метрический подход к проблеме малых знаменателей состоит в том, что анализ сходимости рядов в решениях дифференциальных уравнений проводится только для множества точек $\mathbf{x}$, удовлетворяющих некоторым оценкам снизу

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \geq \psi(\mathbf{a}),$$

(где ψ – некоторая функция от коэффициентов a_i линейной формы $l(\mathbf{a},\mathbf{x})$) которые выполняются для всех $\mathbf{x} \in M$, за исключением некоторого множества нулевой меры.

Результат Гурвица, теоремы типа Хинчина и Грошева для случая сходимости[20,21] нашли применение в разработке новых способов передачи данных на передающей стороне и выравнивании интерференции на приемной стороне системы связи[28].

Апробация работы

Результаты, полученные в диссертации, докладывались на российских и международных конференциях: V Международная конференция “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения” (Тула, 19–24 мая 2003), Международная конференция “Diophantine analysis, uniform distributions and applications” (Минск, Беларусь, 25–30 августа 2003), VI Международная конференция, посвященная 100-летию Н.Г. Чудакова (Саратов, 13–17 сентября 2004), IX Белорусская математическая конференция (Гродно, Беларуссия, 3–6 ноября 2004), Международная конференция “Аналитические методы в теории чисел, теории вероятностей и математической статистике” (Санкт-Петербург, 25–29 апреля 2005), 5th International Algebraic Conference in Ukraine (Одесса, Украина, 20–27 июля 2005), Международная конференция “Аналитические и вероятностные методы в теории чисел” (Паланга, Литва, 25–29 сентября 2006), Международная конференция “Диофантовы и аналитические проблемы теории чисел” (Москва, 29 января – 2 февраля 2007), 59th British Mathematical Colloquium (Суонси, Великобритания, 16–19 апреля 2007), XXXII Дальневосточная математическая школа-семинара имени акад. Е.В. Золотова (Владивосток, 29 августа – 4 сентября 2007), 60th

---

[28] *Motahari A.S., Gharan S.O., Maddah-Ali M.A., Khandani A.K.* Real interference alignment: Exploiting the potential of single antenna systems // *arXiv:0908.2282.*

British Mathematical Colloquium (Йорк, Великобритания, 25–28 марта 2008), “International Conference on Number Theory” (Шяуляй, Литва, 11–15 августа 2008), XXXIV Дальневосточная математическая школа-семинара имени акад. Е.В. Золотова “Фундаментальные проблемы математики и информационных наук”(Хабаровск, 25–30 июня 2009), VII Международная конференция “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения” (Тула, 11–16 мая 2010), Международная конференция “27th Journees Arithmetiques” (Вильнюс, Литва, 27 июня – 1 июля 2011), Международная конференция “Диофантовы приближения. Современное состояние и приложения” (Минск, Беларусь, 3–8 июля 2011), IX Международная конференция “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения” (Тула, 24–26 апреля 2012), Международная конференция “Диофантов анализ” (Астрахань, 30 июля – 3 августа 2012), Международная конференция “Torus Actions: Topology, Geometry and Number Theory”(Хабаровск, 2–7 сентября 2013).

Результаты обсуждались на специализированных семинарах: под руководством чл.- корр. РАН Ю.В. Нестеренко и д.ф.-м.н. Н.Г. Мощевитина в МГУ (2003 – 2013), под руководством чл.- корр. РАН В.А. Быковского в ХО ИПМ ДВО РАН (2007–2013), под руководством д.ф.-м.н. В.И. Берника в Национальной Академии Наук Беларуси (2003 – 2012), под руководством д.ф.-м.н. В.Г. Журавлева в ВГУ (2000 – 2013), под руководством д.ф.-м.н. Л.А. Шеметкова в Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины (2011), в университете Мейнута (Ирландия, 2005 – 2013), университете Ливерпуля (Великобритания, 2007), университете Корка (Ирландия, 2013), университете Билефельда (Германия, 2013) и университете Йорка (Великобритания, 2006 – 2013).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-27], список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, списка обозначений, четырех глав и приложения, списка цитируемой литературы. Список литературы состоит из 133 наименований. Полный объем диссертации составляет 192 страницы.

Содержание работы

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов.

Глава 1. Теорема Хинчина в случае сходимости для совместных приближений

Метрические задачи в поле комплексных чисел начали рассматриваться практически одновременно с задачами в поле действительных чисел. Уже упомянутая проблема Малера доказывалась параллельно для действительных и комплексных чисел. В комплексном случае Малер[9] показал, что $\sup_{n\geq 1}\frac{w_n(x)}{n} \leq 7/2$ для почти всех комплексных чисел. В дальнейшем Коксма получил $\sup_{n\geq 1}\frac{w_n(x)}{n} \leq 5/2$, а Левек улучшил до $\sup_{n\geq 1}\frac{w_n(x)}{n} \leq 3/2$. Позднее Каш и Фолькман получили $w_n(x) \leq n-1$ для $n \geq 2$, а затем Фолькман получил более точное неравенство $w_n(x) \leq 2n/3 - 1/2$ для $n \geq 2$. Спринджук получил $w_n(x) \leq 5n/8 - 11/16$ для $2 \leq n \leq 7$ и $w_n(x) \leq 2n/3 - 1$ для $n \geq 8$. Каш доказал, что $w_2(x) = 1/2$, а Фолькман, что $w_3(x) = 1$ для почти всех комплексных чисел.

Попытка доказать аналог проблемы Малера в поле p-адических чисел для многочленов третьей степени была предпринята Кашем и Фолькманом[29], но в доказательстве оказался существенный пробел. Частичные результаты относительно p-адического аналога гипотезы Малера были получены Туркстром, Локом, Кашем и Фолькманом, и Спринджуком. В.Г. Спринджук[16,30] решил проблему Малера, а также ее аналог в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}_p$.

Спринджук[30] поставил задачу об обобщении проблемы Малера на совместные приближения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, $2 \leq k < n$, которая была решена Берником[31]. Спринджук[32] сформулировал гипотезу о справедливости гипотезы Малера в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Гипотеза была доказана Ф. Желудевичем[33]. Однако методы работ Берника[31] и Желудевича[33] принципиально не позволяли доказать аналог теоремы Хинчина для полиномиальных кривых, поскольку существенно опирались на специальный степенной вид правых частей неравенств.

В первой главе диссертации решаются две задачи, обобщающие теорему Хинчина в случае сходимости.

---

[29] *Kasch F., Volkman B.* Metrische Sarze uber transzendente Zahlen in p-adishen Korpern, II // Math. Zeitschr. – 1962. – Vol. 78, №2. – P. 171–174.

[30] *Спринджук В.Г.* Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел // Изв. АН СССР. – 1965. – Т. 29, №2. – С. 379–436.

[31] *Берник В.И.* Совместные приближения нуля значениями целочисленных многочленов //Изв. АН СССР, Сер. физ.-мат. – 1980. – Т. 44, №1. – С. 24–45.

[32] *Спринджук В.Г.* Достижения и проблемы теории диофантовых приближений // Успехи мат. наук. – 1980. – Т. 35, №2. – С. 3–68.

[33] *Zeludevich F.* Simultane diophantishe Approximationen abhängiger Grössen in mehreren Metriken // Acta Arith. – 1986. – Vol. 46. – P. 285–296.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\mu_2(A_2)$ – мера Лебега измеримого множества $A_2 \subset \mathbb{C}$; $\mu_3(A_3)$ обозначает меру Хаара измеримого множества $A_3 \subset \mathbb{Q}_p$. Используя эти определения, определим произведение мер μ на $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$, полагая $\mu(A) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\mu_3(A_3)$ для множества $A = A_1 \times A_2 \times A_3$, где $A_1 \subset \mathbb{R}$, $A_2 \subset \mathbb{C}$ и $A_3 \subset \mathbb{Q}_p$. Зафиксируем параллелепипед $T_0 = I \times K \times D$, где I – интервал в $\mathbb{R}$, K – круг в $\mathbb{C}$ и D – цилиндр в $\mathbb{Q}_p$. Пусть $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – векторы с действительными координатами, где $\lambda_i > 0$ и $v_i \geq 0$, такие что $v_1 + 2v_2 + v_3 = n - 3$ и $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Далее, пусть $\mathcal{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ обозначает множество точек $(x, z, w) \in T_0$, для которых система неравенств

$$\begin{array}{rcl} |P(x)| & \leq & H(P)^{-v_1}\Psi^{\lambda_1}(H(P)), \\ |P(z)| & \leq & H(P)^{-v_2}\Psi^{\lambda_2}(H(P)), \\ |P(w)|_p & \leq & H(P)^{-v_3}\Psi^{\lambda_3}(H(P)), \end{array} \qquad (11)$$

выполняется для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n$.

Теорема 3. *Пусть $n \geq 3$. Если Ψ – положительная монотонно убывающая функция вещественного переменного, такая, что $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$, тогда*

$$\mu(\mathcal{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0.$$

Рассмотренная в данной главе задача принципиально отличается от предшествующих метрических задач, решенных Спринджуком, Берником, Бересневичем, Маргулисом, Клейнбоком и Ковалевской. В задачах, ими решенных, показатели степени в аппроксимации были близки к степени рассматриваемых многочленов. Это приводило к тому, что даже в несколько расширенных интервалах(кругах, цилиндрах) могли оказаться один или два корня, поэтому оценку мер достаточно было проводить по первой и второй производной. В данной задаче из-за произвольности правых частей неравенств происходит разделение показателей аппроксимации на малые значения, и тогда в расширенных областях может оказаться много корней. В таком случае для оценки мер надо привлекать производные высоких порядков, поскольку оценки по первой и второй производной могут оказаться хуже тривиальных. В главе вводится новое понятие линейных и нелинейных систем диофантовых неравенств по типу аппроксимации нуля значениями производных в окрестности корней многочленов. Благодаря этому, появилась возможность создать метрическую теорию диофантовых совместных приближений в различных метриках. В главе предложена модификация метода существенных и несущественных областей, основанная на обобщении метода Берника[13] и леммы Гельфонда из теории трансцендентных чисел.

Сначала проводится сведение к неприводимым примитивным многочленам

P, удовлетворяющим условиям

$$\begin{array}{c} H(P) < c(n)|a_n|, \ \ c(n) \geq 1, \\ |a_n|_p > c(n). \end{array} \tag{12}$$

Обозначим через $\mathcal{P}_n(H)$ множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n$, для которых $H(P) = H$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена $P \in \mathcal{P}_n(H)$ в $\mathbb{C}$ и $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ – корни в $\mathbb{Q}_p^*$, где $\mathbb{Q}_p^*$ – наименьшее поле, содержащее $\mathbb{Q}_p$ и все алгебраические числа. Поскольку множество алгебраических чисел счетно, то в поле $\mathbb{Q}_p^*$ можно определить нормирование, продолжающее нормирование в $\mathbb{Q}_p$. Норму $r \in \mathbb{Q}_p^*$ обозначаем $|r|_p$.

Используя неравенства (12), нетрудно показать, что

$$|\alpha_i| \ll 1, \quad |\gamma_i|_p \ll 1, \quad i = 1, \dots, n;$$

т.е. корни P ограничены во всех метриках. Определим множества

$$\begin{aligned} S_1(\alpha_j) &= \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha_j| = \min_{1 \leq i \leq n} |x - \alpha_i|\}, \\ S_2(\alpha_s) &= \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha_s| = \min_{1 \leq i \leq n} |z - \alpha_i|\}, \\ S_3(\gamma_k) &= \{w \in \mathbb{Q}_p : |w - \gamma_k|_p = \min_{1 \leq i \leq n} |w - \gamma_i|_p\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим множества $S_1(\alpha_j)$, $S_2(\alpha_s)$, $S_3(\gamma_k)$ для фиксированного набора j, s, k, и для упрощения обозначений будем полагать, что $j = 1$, $\alpha_s = \beta_1$ и $k = 1$, где множество корней $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ является перестановкой множества корней $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Упорядочим остальные корни P так, что

$$\begin{array}{ccccc} |\alpha_1 - \alpha_2| & \leq & |\alpha_1 - \alpha_3| & \leq \dots \leq & |\alpha_1 - \alpha_n|, \\ |\beta_1 - \beta_2| & \leq & |\beta_1 - \beta_3| & \leq \dots \leq & |\beta_1 - \beta_n|, \\ |\gamma_1 - \gamma_2|_p & \leq & |\gamma_1 - \gamma_3|_p & \leq \dots \leq & |\gamma_1 - \gamma_n|_p. \end{array}$$

Для многочлена $P \in \mathcal{P}_n(H)$ определим действительные числа ρ_{ij} $(i = 1, 2, 3)$ из соотношений

$$\begin{aligned} |\alpha_1 - \alpha_j| &= H^{-\rho_{1j}}, \quad 2 \leq j \leq n, \quad \rho_{12} \geq \rho_{13} ... \geq \rho_{1n}, \\ |\beta_1 - \beta_j| &= H^{-\rho_{2j}}, \quad 2 \leq j \leq n, \quad \rho_{22} \geq \rho_{23} ... \geq \rho_{2n}, \\ |\gamma_1 - \gamma_j|_p &= H^{-\rho_{3j}}, \quad 2 \leq j \leq n, \quad \rho_{32} \geq \rho_{33} ... \geq \rho_{3n}. \end{aligned}$$

В силу того, что корни $|\alpha_j|$, $|\beta_s|$, $|\gamma_k|_p$ ограничены, получаем, что существует постоянная $\varepsilon_1 > 1$ такая, что $\rho_{ij} \geq -\frac{\epsilon_1}{2}$ для $i = 1, 2, 3$ и $2 \leq j \leq n$. Возьмем достаточно малое число $\varepsilon > 0$, так что $\varepsilon_1 = \varepsilon N^{-1}$ для достаточно большого N, и пусть $a = [\varepsilon_1^{-1}]$. Найдем целые числа k_j, l_j и m_j, $2 \leq j \leq n$, из неравенств

$$\frac{k_j - 1}{a} \leq \rho_{1j} < \frac{k_j}{a}, \qquad \frac{l_j - 1}{a} \leq \rho_{2j} < \frac{l_j}{a}, \qquad \frac{m_j - 1}{a} \leq \rho_{3j} < \frac{m_j}{a},$$
$$k_2 \geq k_3 \geq ... \geq k_n \geq 0, \ \ l_2 \geq l_3 \geq ... \geq l_n \geq 0, \ \ m_2 \geq m_3 \geq ... \geq m_n \geq 0.$$

Далее определим числа q_i, r_i и s_i $(1 \leq i \leq n-1)$:

$$q_i = \frac{k_{i+1}+\ldots+k_n}{a}, \;\; r_i = \frac{l_{i+1}+\ldots+l_n}{a}, \;\; s_i = \frac{m_{i+1}+\ldots+m_n}{a}.$$

С каждым многочленом $P \in \mathcal{P}_n(H)$ будем связывать три целочисленных вектора $\mathbf{q} = (k_2,\ldots,k_n)$, $\mathbf{r} = (l_2,\ldots,l_n)$ и $\mathbf{s} = (m_2,\ldots,m_n)$. Число таких векторов конечно (и зависит только от n, p и a). Многочлены $P \in \mathcal{P}_n(H)$ с одним и тем же набором векторов $(\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s})$ объединим в подмножество $\mathcal{P}_n(H,\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s})$.

Без ограничения общности, будем считать, что $x \in S_1(\alpha_1)$, $z \in S_2(\beta_1)$ и $w \in S_3(\gamma_1)$. В ходе доказательства теоремы будем оценивать значения многочленов, часто используя разложение в ряд Тейлора. Для получения оценок сверху для членов разложения в ряд Тейлора (и для других целей) будем использовать оценки для расстояний от аргумента до ближайшего корня и оценки сверху модулей производных в корне.

В следующей лемме[34], обобщающей результат Гельфонда, доказано, что два многочлена без общих корней не могут быть малы во всех метриках на параллелепипедах в $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$.

Лемма 1. *Пусть* P_1 *и* P_2 *– два целочисленных многочлена степени не выше* n *без общих корней и* $\max(H(P_1),H(P_2)) \leq H$. *Пусть* $\delta > 0$ *и* $\eta_i > 0$, $i = 1,2,3$. *Пусть* $I \subset \mathbb{R}$ *– интервал,* $K \subset \mathbb{C}$ *– круг и* $D \subset \mathbb{Q}_p$ *– цилиндр, где* $\mu_1(I) = H^{-\eta_1}$, $\mathrm{diam} K = H^{-\eta_2}$ *и* $\mu_3(D) = H^{-\eta_3}$. *Если* $H > H_0(\delta)$ *и существуют такие* $\tau_1 > -1$, $\tau_2 > -1$ *и* $\tau_3 > 0$, *что для всех* $(x,z,w) \in I \times K \times D$ *выполняются неравенства*

$$|P_j(x)| < H^{-\tau_1}, \; |P_j(z)| < H^{-\tau_2}, \; |P_j(w)|_p < H^{-\tau_3},$$

для $j = 1,2$, *то*

$$\tau_1+2\tau_2+\tau_3+3+2\max(\tau_1+1-\eta_1,0)+4\max(\tau_2+1-\eta_2,0)+2\max(\tau_3-\eta_3,0) < 2n+\delta.$$

При $n = 3$ первоначальная система неравенств легко анализируется. Все действительные и комплексные корни удалены друг от друга, и значения модулей производных в соответствующих корнях многочленов принимают максимальные по порядку значения. Это приводит к получению наилучших оценок сверху для $|x-\alpha|$ и $|z-\beta_j|$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Оставшиеся неравенства для p-адических переменных анализируются как в работе Бересневича, Берника и Ковалевской[35].

---

[34] *Берник В.И., Калоша Н.И.* Приближение нуля значениями целочисленных полиномов в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$ // Вести НАН Беларуси. Сер. физ-мат. наук. – 2004. – №1. – С. 121–123.

[35] *Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kovalevskaya E.I.* On approximation of p-adic numbers by p-adic algebraic numbers // Journal of Number Theory. – 2005. – Vol. 111. – P. 33–56.

Следующая классификация многочленов является ключевой для доказательства. Многочлен $P \in \mathcal{P}_n(H, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ будем называть (i_1, i_2, i_3)–линейным и $i_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, если выполняется система неравенств

$$\begin{aligned} q_1 + k_2 a^{-1} &< v_1 + \lambda_1 + 1, \\ r_1 + l_2 a^{-1} &< v_2 + \lambda_2 + 1, \\ s_1 + m_2 a^{-1} &< v_3 + \lambda_3, \end{aligned} \tag{13}$$

и $i_j = 1$, $j = 1, 2, 3$, если все знаки неравенств в (13) заменяются на $\geq$. Пусть $\mathcal{P}_n^{(i_1,i_2,i_3)}$, $i_j = 0, 1$, $j = 1, 2, 3$, обозначает класс (i_1, i_2, i_3)–линейных многочленов $P \in \mathcal{P}_n$. Если $(x, z, w) \in \mathcal{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$, то существует бесконечно много многочленов для по крайней мере одного из восьми типа линейности. Пусть $\mathcal{L}_n^{(i_1,i_2,i_3)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ обозначает множество точек $(x, z, w) \in T_0$, для которых система неравенств (11) выполняется для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(i_1,i_2,i_3)}$. Очевидно, что $\mathcal{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi) = \cup_{i_1,i_2,i_3=0,1} \mathcal{L}_n^{(i_1,i_2,i_3)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$. Для доказательства теоремы покажем, что каждое множество $\mathcal{L}_n^{(i_1,i_2,i_3)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ имеет нулевую меру.

Величины

$$d_1 = q_1 + 2r_1 + s_1 \quad \text{и} \quad d_2 = (k_2 + 2l_2 + m_2)a^{-1}$$

будут использоваться на протяжении всего доказательства, которое разбивается на ряд предложений с различными условиями линейности и различными диапазонами значений величины $d_1 + d_2$. Наиболее принципиальными из них являются два случая: $(0, 0, 0)$-линейность и $(1, 1, 1)$-линейность.

Случай 1: $(0, 0, 0)$-линейность. Для доказательства $\mu(\mathcal{L}_n^{(0,0,0)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$ рассмотрим четыре подслучая, каждый из которых соответствует различным значения величины $d_1 + d_2$: $d_1 + d_2 < \epsilon$, $\epsilon \leq d_1 + d_2 < 4 - \epsilon$, $4 - \epsilon \leq d_1 + d_2 \leq n + \epsilon$, $d_1 + d_2 > n + \epsilon$. Если $(x, z, w) \in \mathcal{L}_n^{(0,0,0)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$, то существует бесконечно много многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, удовлетворяющих системе неравенств (11) и одному из условий для $d_1 + d_2$. Докажем, что множество точек, для которых существует бесконечное число многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, удовлетворяющих системе (11) в каждом диапазоне значений величины $d_1 + d_2$, имеет меру нуль. Наиболее трудная и длинная часть доказательства связана со значениями d_1 и d_2 из диапазона $4 - \epsilon \leq d_1 + d_2 \leq n + \epsilon$. Для таких d_1 и d_2 создан специальный новый метод понижающий степени исходных многочленов до таких значений, при которых уже может применяться лемма 1.

Случай 2: $(1, 1, 1)$-линейность. Этот случай является обобщением классов второго рода, введенного Спринджуком при доказательстве гипотезы Малера. При подходящем введении параллелепипедов доказательство проводится непосредственным подсчетом мер, если в параллелепипеде содержатся малые значения одного многочлена. Применение леммы 1 показывает, что малые значения двух многочленов эти параллелепипеды содержать не могут.

Случай 3: “смешанные” линейности. Остальные шесть случаев линейности рассматриваются следующим образом. По каждой переменной проводим расширение первоначальных параллелепипедов $\sigma(P)$ до параллелепипедов $\sigma_1(P)$, на которых уже происходит совпадение порядка аппроксимации и показателя степени производной в ближайшем корне. Если внутри расширенного параллелепипеда оказывается небольшое количество многочленов, то завершение доказательства происходит простым подсчетом мер. Если же число многочленов велико, то по принципу Дирихле у этих многочленов должны совпадать несколько старших коэффициентов. Разложим все многочлены в ряд Тейлора в окрестности корней на расширенных параллелепипедах и оценим их сверху. Выделим из совокупности многочленов один многочлен и рассмотрим новые многочлены, образованные разностями оставшихся многочленов и выделенного многочлена. В итоге получим многочлены меньшей степени, которые с заданным новым порядком аппроксимируют нуль. Если среди них окажутся два неприводимых многочлена, то воспользуемся леммой 1 и получим противоречие. Для приводимых многочленов можно воспользоваться неравенством $\Psi(H) \ll H^{-1}$. Тогда получим системы неравенств близкие к тем, который рассматривали Берник[31] и Желудевич[33]. От системы неравенств можно перейти к произведению значений модулей многочленов; затем выделить неприводимый многочлен с тем же порядком аппроксимирующий нуль. Степень же многочлена уменьшилась по крайней мере на единицу. В итоге получим новую систему неравенств, со значительно более сильными условиями на аппроксимацию, чем первоначальная.

Изучение поведения производных многочленов (и вообще, линейных форм гладких функций) было крайне важно при доказательстве теорем типа Хинчина. Исследуем метрические свойства множества

$$\mathcal{A}_n(\Psi_4, \Psi_5) = \left\{ x \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} \right] : \begin{array}{lcll} |P(x)| & < & \Psi_4(H(P)) & \text{для бесконечного} \\ |P'(x)| & < & \Psi_5(H(P)) & \text{числа } P \in \mathcal{P}_n \end{array} \right\}.$$

Опираясь на результаты Клейнбока и Маргулиса[19], в 2001 Берник, Клейнбок и Маргулис[21] получили обобщение теоремы Спринджука (гипотезы Малера), включающее условие на производные. Этот результат доказан для линейных форм невырожденных семейств функций и в случае многочленов сводится к следующему утверждению.

Теорема 4. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_1(\mathcal{A}_n(\Psi_4, \Psi_5)) = 0, \tag{14}$$

где $\Psi_4(h) = h^{-w-\lambda}$ *и* $\Psi_5(h) = h^{1-\lambda}$ *для некоторого* $\lambda \geq 0$ *и* $w > n - 2\lambda$.

В той же работе Берник, Клейнбок и Маргулис поставили гипотезу о нахождении оптимальных условий для функций Ψ_4 и Ψ_5, опеспечивающих справедливость (14). Другими словами, они поставили проблему о доказательстве теоремы типа Хинчина для $\mathcal{A}_n(\Psi_4, \Psi_5)$. В следующей теореме получено решение этой проблемы в случае сходимости для функций Ψ_4 и Ψ_5 специального вида.

Теорема 5. *Пусть функции* $\Psi_4, \Psi_5 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *такие, что* $\Psi_4\Psi_5$ *– монотонно убывающая функция. Пусть* $n \geq 2$ *– целое число. Предположим, что* $\Psi_5(h) \geq h^{1/2+\epsilon}$, $\epsilon > 0$, *тогда*

$$\mu_1(\mathcal{A}_n(\Psi_4, \Psi_5)) = 0, \quad \textit{если} \sum_{h=1}^{\infty} h^{n-2}\Psi_4(h)\Psi_5(h) < \infty.$$

Наибольшая трудность при доказательстве гипотезы возникала при значениях правой части неравенства для производной вблизи ее верхней границы. Введение новой классификации целочисленных векторов позволило уменьшить величину модуля производной. Далее применяется лемма Клейнбока-Маргулиса[19].

Глава 2. Теорема Хинчина в случае расходимости для совместных приближений

Доказательство случая сходимости в теореме Хинчина достаточно простое и является следствием леммы Бореля-Кантелли. В случае расходимости доказательство значительно сложнее. А.Я. Хинчин использовал для доказательства случая расходимости теорию цепных дробей. К настоящему времени ситуация во многом изменилась: были введены понятия регулярных систем и повсеместных систем. Понятие регулярной системы точек было введено в теорию диофантовых приближений А. Бейкером и В. Шмидтом[15], чтобы охарактеризовать равномерность распределения счетных подмножеств на прямой, в частности, множества алгебраических чисел фиксированной степени. Повсеместные системы были введены М. Додсоном, Ринном и Виккерсом[36] для изучения приближений точек $\mathbb{R}^n$ рациональными гиперплоскостями. Рин[37] показал, что регулярные системы и повсеместные

---

[36] *Dodson M.M., Rynne B.P., Vickers J.A.G.* Diophantine approximation and a lower bound for Hausdorff dimension // Mathematika. – 1990. – Vol. 37. – P. 59—73.

[37] *Rynne B.P.* Regular and ubiquitous systems, and $\mathcal{M}^s_\infty$-dense sequences // Mathematika. – 1992. – Vol. 39. – P. 234–243.

системы эквивалентны в случае приближений рациональными числами. Оказалось, что если удается доказать регулярность или повсеместность систем, то отсюда получаются оценки снизу для размерности Хаусдорфа диофантовых множеств. Дальнейшее развитие регулярные и повсеместне системы нашли в, так называемых, оптимальных регулярных системах[38], регулярных системах резонансных множеств[39] и локально повсеместных системах[40], введение которых позволяет доказывать аналоги теоремы Хинчина в случае расходимости.

В данной главе оптимальные регулярные системы и локально повсеместные системы применены для доказательсва аналогов теоремы Хинчина в случае расходимости. Первый результат – это обобщение теоремы Хинчина на совместные приближения в пространствах действительных, комплексных и p-адических чисел, а второй – это теорема типа Хинчина для приближений нуля значениями многочленов и их первых производных.

Пусть $\mathcal{L}'_n(\mathbf{v},\lambda,\Psi)$ обозначает множество $\mathcal{L}_n(\mathbf{v},\lambda,\Psi)$ при специальном выборе параметров

$$v_1 = v_2 = v_3 - 1 = \frac{n}{4} - 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{4}.$$

Теорема 6. *Пусть* $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *– монотонно убывающая функция, и* $n \geq 3$. *Тогда при расходимости ряда* $\sum_{r=1}^{\infty} \Psi(r)$ *множество* $\mathcal{L}'_n(\mathbf{v},\lambda,\Psi)$ *имеет полную меру в* T_0, *т.е.* $\mu(T_0 \setminus \mathcal{L}'_n(\mathbf{v},\lambda,\Psi)) = 0$.

Одним из основных моментов доказательства теоремы 6 является построение оптимальной регулярной системы из наборов корней (α,β,γ) целочисленных многочленов P, т.е. $P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = 0$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Im}\,\beta| > \frac{1}{2}\delta_1$, $\gamma \in \mathbb{Q}_p$. Используя определение оптимальной регулярной системы[41], дадим явную ее конструкцию.

Пусть $\prod_+(\mathbf{a}) = \max(1,|a_1|)\max(1,a_2^2)\max(1,|a_3|)$ для вектора $\mathbf{a} = (a_1,a_2,a_3)$. Пусть дана точка $\mathbf{u_0} = (x_0,z_0,w_0) \in \Omega$ и набор $\mathbf{r} = (r_x,r_z,r_w)$ положительных чисел. Множество

$$T(\mathbf{u_0},\mathbf{r}) = \{(x,z,w) \in \Omega : \ |x-x_0| \leq r_x, \ \ |z-z_0| \leq r_z, \ \ |w-w_0|_p \leq r_w\},$$

будем называть параллелепипедом в Ω. Легко видеть, что $\mu(T(\mathbf{u_0},\mathbf{r})) \asymp \prod_+(\mathbf{r})$.

---

[38] *Береснсвич В.В.* Application of the consept of regular systems in the Metric theory of numbers // Vestsi Nats. Acad. Navuk Belarusi. Ser. Fiz.-Mat. Navuk. – 2000. – №1.– С. 35 – 39.

[39] *Береснсвич В.В.* Регулярные системы и линейные диофантовы приближения на многообразиях // Доклады НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, №5. – С. 37 -– 39.

[40] *Beresnevich V. V., Dickinson D., Velani S.* Measure theoretic laws for lim sup sets // Mem. Amer. Math. Soc. – 2006. – Vol. 179. – 91 p.

[41] *Береснсвич В.В.* О построении регулярных систем точек с вещественными, комплексными и p-адическими алгебраическими координатами // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2003. – №1. – С. 22–27.

Определение 2. *Пусть даны счетное множество* $R \subset \Omega$*, параллелепипед* $T_0 \subset \Omega$*, функция* $h : R \to \mathbb{N}$*, называемая высотой, и монотонно убывающие функции* $d_x, d_z, d_w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$*. Тройка* $(R, h, \mathbf{d})$ *будет называться регулярной системой точек в* T_0*, если существует постоянная* $c_3 > 0$ *такая, что для любого параллелепипеда* $T \subset T_0$ *найдется достаточно большое число* $r_0 > 0$ *такое, что для любого* $r > r_0$ *можно выбрать набор точек* $\boldsymbol{\nu}_1, \ldots, \boldsymbol{\nu}_t \in R$ *такой, что*

$$T(\boldsymbol{\nu}_i, \mathbf{d}(r)) \subset T,\ 1 \le i \le t,$$

$$h(\boldsymbol{\nu}_i) \le r,\ 1 \le i \le t,$$

$$T(\boldsymbol{\nu}_i, \mathbf{d}(r)) \cap T(\boldsymbol{\nu}_j, \mathbf{d}(r)) = 0,\ 1 \le i < j \le t,$$

$$t \ge c_3 \frac{\mu(T)}{\prod_+(\mathbf{d}(r))}.$$

Определение 3. *Регулярную систему точек* $(R, h, \mathbf{d})$ *назовем оптимальной, если для любого параллелепипеда* $T \subset T_0$ *выполняется условие*

$$\limsup_{r\to\infty} \left(\prod_{+} (\mathbf{d}(r)) \# \{ \boldsymbol{\nu} \in R \cap T : h(\boldsymbol{\nu}) \le r \} \right) < \infty.$$

Пусть $R := \{\boldsymbol{\nu} = (\alpha, \beta, \gamma) \in T_0 : \exists P \in \mathcal{P}'_n, P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = 0\}$. Тогда для $\boldsymbol{\nu} \in R$ величину $H(\boldsymbol{\nu}) := \min\{H(P) | P \in \mathcal{P}'_n, P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = 0\}$ будем рассматривать как высоту $\boldsymbol{\nu}$, а сам многочлен P будем называть *квазиминимальным.*

Доказательство теоремы 6 основано на следующей теореме.

Теорема 7. *Пусть* T_0 *– ограниченный параллелепипед в* $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$*. Определим* R *как множество наборов* $\boldsymbol{\nu}_P = (\alpha, \beta, \gamma)$*, где* α *– действительный,* β *– комплексный,* γ *– p-адический корни многочлена* $P(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i \in \mathbb{Z}[f]$*. Пусть выполнены условия*

$$w_1 + 2w_2 + w_3 = n - 2, \quad w_1 \ge 0,\ w_2 \ge 0,\ \ w_3 \ge 1,$$

и

$$d_x(r) = r^{-(w_1+1)},\ \ d_z(r) = r^{-(w_2+1)},\ \ d_w(r) = r^{-w_3},\ \ h(\boldsymbol{\nu}_P) = H(P).$$

Тогда $(R, h, \mathbf{d})$ *– регулярная система в* T_0*.*

Замечание 1. *Заметим, что теорема 7 позволяет строить регулярные системы в пространстве* Ω *без дополнительных условий связи между вектором* $\mathbf{v}$ *и числом рассматриваемых пространств.*

Для натурального числа $Q > 1$ определим класс многочленов $\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathcal{P}_n, H(P) \leq Q\}$.

Основой для доказательства теоремы 7 является следующий метрический результат.

Теорема 8. *Для каждого $n \geq 3$ существуют постоянные δ_0 и c_0, зависящие только от n и p (и не зависящие от Q), обладающие следующим свойством. Для любого множества $T \subset T_0$ и для любых w_1, w_2, w_3, удовлетворяющих условиям*

$$w_1 + 2w_2 + w_3 = n - 2, \quad w_1, w_2 \geq 0, \ w_3 \geq 1,$$

существует измеримое множество $B_1(Q,T) \subset T$ такое, что для каждой точки $(x, z, w) \in B_1(Q,T)$ существует многочлен $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, удовлетворяющий системе

$$\begin{array}{lll} |P(x)| < c_0 Q^{-w_1}, & |P(z)| < c_0 Q^{-w_2}, & |P(w)|_p < c_0 Q^{-w_3}, \\ |P'(x)| \geq \delta_0 Q, & |P'(z)| \geq \delta_0 Q, & |P'(w)|_p \geq \delta_0, \end{array}$$

и для $Q > Q_0$ верна оцена меры

$$\mu(B_1(Q,T)) \geq s\mu(T),$$

где $s \in \mathbb{R}$ и $0 < s < 1$.

Методика получения результатов типа теоремы Хинчина в случае расходимости разрабатывается давно. В монографии Спринджука[16] приведена схема доказательства случая расходимости. В основе ее лежит следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть дано множество Ω_0, на котором задана σ–аддитивная конечная мера μ_0, и пусть дана последовательность E_i измеримых подмножеств Ω_0. Пусть множество E состоит из точек $w \in \Omega_0$, которые попадают в бесконечное число множеств E_i. Тогда, если $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(E_i) = \infty$, то*

$$\mu_0(E) \geq \limsup_{N\to\infty} \frac{(\sum_{i=1}^{N} \mu_0(E_i))^2}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mu_0(E_i \bigcap E_j)}. \qquad (15)$$

Бересневич[14] показал, что алгебраические числа степени n образуют оптимальную регулярную систему в $\mathbb{R}$. В этом случае множества действительных чисел $\sigma_i = \sigma_i(\alpha_i) = \{x : |x - \alpha_i| < \epsilon(\alpha_i)\}$ с действительными алгебраическими числами α_i и величинами $\epsilon(\alpha_i)$, связанными с правыми частями диофантовых неравенств, не пересекаются в широком диапазоне значений α_i, и поэтому нетрудно найти точный порядок роста $\sum_{i \leq N} \epsilon(\alpha_i)$ к бесконечности при $N \to \infty$. С другой стороны, множество значений индексов (i,j) при $|i-j| < c(n)$ невелико, а при $|i-j| \geq c(n)$ один из интервалов σ_i оказывается значительно меньше другого, и можно точно вычислить меру пересечения $\sigma_i \cap \sigma_j$. В неравенстве (15) оценки числителя и знаменателя получаются одинакового порядка, что приводит к оценке $\mu_1(E(I)) > c(n)\mu_1(I)$. Поскольку такое неравенство верно для любого интервала I, то несложное рассуждение приводит к тому, что множество $E(I)$ имеет полную меру.

Таким образом, построение оптимальной регулярной системы является основной проблемой в задачах расходимости. В этой главе мы строим регулярную систему из троек (α, β, γ), где α – действительный, β – комплексный, $\gamma \in \mathbb{Q}_p$ – p-адический корни одного и того же многочлена P. В доказательстве регулярности используются методы главы 1. Однако непосредственное применение результатов главы 1 еще не дает нужного результата. Необходимо еще доказать, что корни α_i – действительные $(\operatorname{Im}\alpha_i = 0)$, и $\gamma_j \in \mathbb{Q}_p$, а не алгебраическому расширению $\mathbb{Q}_p^*$. Объяснение этому простое: при $\operatorname{Im}\alpha_i \neq 0$ и/или $\gamma_i \in \mathbb{Q}_p^* \setminus \mathbb{Q}_p$ области σ_i могут оказаться пустыми. Для α_i доказательство проводится с использованием леммы Лагранжа о конечных приращениях, а в p-адическом случае с использованием леммы Гензеля.

Второй результат этой главы – это доказательство гипотезы Берника-Клейнбока-Маргулиса для множества $\mathcal{A}_n(\Psi_4, \Psi_5)$ в случае расходимости для специального вида функций Ψ_4 и Ψ_5. Прежде чем сформулировать результат, введем некоторые вспомогательные функции, которые определяются через Ψ_4 и Ψ_5 и отвечают различным "техническим" ограничениям на Ψ_4 и Ψ_5:

$$\bar{\Psi}_4(h) = \min\{\Psi_4(h),\ \Psi_5^{-1}(h)h^{1-n}\},$$

$$\psi(h) = K^{-1}\bar{\Psi}_4(h)\Psi_5^{-1}(h), \quad \rho(h) = K^2 h^{-n+1}\Psi_5^{-2}(h),$$

где K – достаточно большая постоянная.

Будем говорить, что функция f является 2-*регулярной*[40], если существует положительная постоянная $\lambda < 1$ такая, что $f(2^{t+1}) \leq \lambda f(2^t)$ для всех достаточно больших t. Также будем говорить, что функция f является *квазимонотонной*, если существуют постоянные c_4 и c_5 такие, что $0 < c_4 < 1 \leq c_5$ и $f(c_4 x) \leq c_5 f(x)$ для всех достаточно больших x.

Теорема 9. *Пусть функции $\Psi_4, \Psi_5 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что $\Psi_4\Psi_5$ – монотонно убывающая функция. Пусть $n \geq 2$ – целое число. Предположим, что $Kh^{\frac{-n+2}{3}} \leq \Psi_5(h) < k_0 K h$ и ψ или ρ является 2-регулярной функцией, где k_0 – положительная постоянная, зависящая только от n. Кроме того,* *предположим, что ψ является квази-монотонной функцией. Тогда*

$$\mu_1(\mathcal{A}_n(\Psi_4, \Psi_5)) = 1, \quad \textit{если } \sum_{h=1}^{\infty} h^{n-2}\Psi_4(h)\Psi_5(h) = \infty.$$

В основе доказательства теоремы 9 лежит два метода: метод повсеместных систем[40] и построение множеств близких сопряженных алгебраических чисел[42]. Приведем определение локально повсеместных систем. Пусть I – интервал в $\mathbb{R}$ и $\mathcal{R} := (r_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ – множество точек $r_\alpha \in I$, занумерованных элементами счетного множества $\mathcal{J}$. Пусть функция $\beta : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^+ : \alpha \mapsto \beta_\alpha$ задана на $\mathcal{J}$ и определяет 'вес' β_α точек r_α. Для $t \in \mathbb{N}$ пусть $\mathcal{J}(t) := \{\alpha \in \mathcal{J} : \beta_\alpha \le 2^t\}$, и будем всегда полагать, что множество $\mathcal{J}(t)$ конечно.

Функцию $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющую условию $\lim_{t\to\infty}\rho(t) = 0$, назовем *повсеместной функцией*. Система $(\mathcal{R}; \beta)$ называется *локально повсеместной в I относительно ρ*, если существует абсолютная постоянная $m_0 > 0$ такая, что для любого интервала $J \subset I$ справедливо неравенство

$$\liminf_{t\to\infty} \mu_1\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}(t)} B\big(r_\alpha, \rho(2^t)\big) \cap J\Big) \ \ge\ m_0\,|J|\,.$$

Для функции $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ определим множество

$$\Lambda_{\mathcal{R}}(\psi) \ := \ \{x \in I : |x - r_\alpha| < \psi(\beta_\alpha) \ \text{ для бесконечного числа } \alpha \in \mathcal{J}\}\,.$$

Последствием определения локально повсеместных систем является следующий ключевой результат[40].

Лемма 3. *Пусть $(\mathcal{R}, \beta)$ –локально повсеместная система в J_0 относительно ρ. Пусть функция ψ или функция ρ является 2-регулярной. Тогда $\mu_1(\Lambda_{\mathcal{R}}(\psi)) = |J_0|$, если $\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\psi(2^t)}{\rho(2^t)} = \infty$.*

Глава 3. Диофантовы приближения с немонотонной функцией аппроксимации

Случай сходимости в теореме Хинчина справедлив без условия монотонности функции ψ. Однако, условие монотонности функции нельзя опустить в случае расходимости[5]. Естественно возникает вопрос о необходимости условия монотонности функции в случае сходимости для многообразий. В 2005 Бересневич[43] показал, что это условие можно опустить для кривой $\mathcal{V}_n = (x, x^2, \dots, x^n)$, $x \in \mathbb{R}$. В той же работе он сформулировал

---

[42] *Beresnevich V. V., Bernik V. I., Götze F.* The distribution of close conjugate algebraic numbers // Compositio Math. – 2010. – Vol. 146. – P. 1165–1179.

[43] *Beresnevich V. V.* On a theorem of V. Bernik in the metric theory of Diophantine approximation // Acta Arith. – 2005. – Vol. 117, №1. – P. 71–80.

гипотезу о том, что условие монотонности функции можно опустить в случае невырожденных многообразий. В данной главе доказываем эту гипотезу для невырожденных кривых заданных над $\mathbb{R}$, для нормальных по Малеру кривых над кольцом p-адических чисел, для кривых $\mathcal{V}_n$ заданных над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{p_1} \times \ldots \times \mathbb{Q}_{p_{t-1}}$.

Обозначим через $\mathcal{F}_n$ множество функций вида

$$a_n f_n(x) + \ldots + a_1 f_1(x) + a_0,$$

определенных на интервале I, где $n \geq 2$, $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C^n(I)$ и Вронскиан функций $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ отличен от нуля почти везде на I. Для каждой функции $F \in \mathcal{F}_n$ определим ее высоту как $H = H(F) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$.

Результат, приведенный ниже, является аналогом теоремы Грошева для кривой $\{(f_1(x), \ldots, f_n(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ в случае сходимости без условия монотонности функции аппроксимации.

Теорема 10. *Пусть $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ – произвольная функция (необязательно монотонная) такая, что ряд $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\Psi(h)$ сходится. Пусть $\mathcal{M}_n(\Psi)$ обозначает множество точек $x \in \mathbb{R}$ таких, что существует бесконечно много функций $F \in \mathcal{F}_n$, удовлетворяющих неравенству*

$$|F(x)| < \Psi(H(F)). \tag{16}$$

Тогда $\mu_1(\mathcal{M}_n(\Psi)) = 0$.

Доказательство теоремы состоит из нескольких частей в зависимости от значений величины производной $|F'(x)|$. Если модуль производной принимает малые значения, то существенным элементом доказательства является следующая лемма, являющаяся модификацией результата Клейнбока и Маргулиса[19], основанного на геометрии решеток евклидового пространства.

Лемма 4. *Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал и $\beta \in I$. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$ – набор из n функций $f_i \in C^n(I)$, невырожденный в точке β. Тогда существует интервал $I_0 \subset I$, содержащий β и постоянную $E > 0$, такой, что*

$$\left| \bigcup_{F \in F_n,\, 0 < H(F) \leq H} \{x \in I_0 :\ |F(x)| < H^{-n+1},\ |F'(x)| < H^{-v}\} \right| \leq E H^{\frac{-v}{(n+1)(2n-1)}} |I_0|.$$

В случае, когда производная принимает большие значения поступаем следующим образом. Множество решений (16) на I состоит из не более чем n интервалов. Каждый из этих интервалов разделим на интервалы, на которых

F' монотонна (не более $n-1$ таких интервалов). Каждый из этих новых интервалов разделим на интервалы, на которых $F'(x)$ больше или меньше, чем H^{-v}. Любой интервал, на котором $F'(x) < H^{-v}$, уже был рассмотрен в первом случае. Для $F \in \mathcal{F}_n$, пусть $I_j(F)$ – один из оставшихся интервалов; таким образом, F и F' – монотонные функции на $I_j(F)$, и $F'(x) > H^{-v}$ для всех точек $x \in I_j(F)$. Ясно, что число интервалов $I_j(F)$ конечно. Обозначим через $\bar{I}_j(F)$ замыкание $I_j(F)$, и через α_j точку из $\bar{I}_j(F)$ такую, что

$$|F'(\alpha_j)| = \min_{x \in \bar{I}_j(F)} |F'(x)|.$$

Далее доказательство распадается на три случая в зависимости от значений величины $|F'(\alpha_j)|$. В каждом из случаев используются различные модификации метода существенных и несущественных областей Спринджука[16].

Теорема 10 обобщена на кольцо p-адических чисел для нормальных по Малеру кривых. Здесь существенное значение имеет обобщение[24] леммы 4. Согласно Малеру[44], функция $g : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ называется *нормальной*, если g имеет вид

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (w-\alpha)^n,$$

где $|\alpha|_p \leq 1$, $|\alpha_n|_p \leq 1$ для всех n и $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n|_p = 0$. Более того, для нормальной над $\mathbb{Z}_p$ функции имеет место разложение в ряд Тейлора. Пусть U_p – фиксированный цилиндр в $\mathbb{Z}_p$. Обозначим через $\mathcal{G}_n$ множество ненулевых линейных форм с целыми рациональными коэффициентами вида

$$a_n g_n(w) + \ldots + a_2 g_2(w) + a_1 g_1(w) + a_0,$$

где $g_i : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ $(i = 1, \ldots, n)$ являются нормальными функциями, и $1, g_1, g_2, \ldots, g_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}_p$ в точках любого подмножества U_p. Очевидно, что каждая функция $G \in \mathcal{G}_n$ является нормальной. Для $G \in \mathcal{G}_n$ определим $H(G) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$.

Теорема 11. *Пусть $n \geq 2$ и $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – произвольнвя функция (необязательно монотонная) такая, что ряд $\sum_{h=1}^{\infty} h^n \Psi(h)$ сходится. Пусть $\mathcal{N}_n(\Psi)$ обозначает множество точек $w \in \mathbb{Z}_p$ таких, что существует бесконечно много функций $G \in \mathcal{G}_n$, удовлетворяющих неравенству*

$$|G(w)|_p < \Psi(H(G)).$$

Тогда $\mu_3(\mathcal{N}_n(\Psi)) = 0$.

---

[44] *Mahler K.* Über Transcendente p-adisce Zahlen // Composito Math. – 1935. – Vol. 2. – P. 259–275.

В поле комплексных чисел мы проводим доказательство без применения аналога леммы 4. Обозначим через $\mathcal{P}_n''(H)$ множество неприводимых примитивных многочленов $P \in \mathcal{P}_n'$ высоты $H(P) = H$, удовлетворяющей условию $a_n = H(P)$. Также введем класс многочленов $\mathcal{P}_n'' = \cup_{H=1}^{\infty}\mathcal{P}_n''(H)$.

Теорема 12. *Пусть* $\Psi(x)$ *– положительная функция положительного аргумента* x *такая, что ряд* $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2}\Psi^2(H)$ *сходится. Тогда для почти всех* $z \in \mathbb{C}$ *и* $n \geq 3$ *неравенство*

$$|P(z)| < \Psi(H(P))$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P \in \mathcal{P}_n''$ *только для множества нулевой меры.*

Доказательство теоремы основанно на методе доказательства гипотезы А. Бейкера[13], и использующее новый прием при рассмотрении классов второго рода[16]. Поскольку ряд $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2}\Psi^2(H) = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{2^t \leq H < 2^{t+1}} H^{n-2}\Psi^2(H)$ сходится, то выражения $H^{n-2}\Psi^2(H)$ и $\sum_{2^t \leq H < 2^{t+1}} H^{n-2}\Psi^2(H)$ стремятся к 0 при $H \to \infty$ и $t \to \infty$ соответственно. Поэтому,

$$\Psi^2(H) = o(H^{-n+2}) \ \text{ при } \ H \to \infty$$

и

$$\sum_{2^t \leq H < 2^{t+1}} \Psi^2(H)H^{n-2} = o(1) \ll 1 \ \text{ при } \ t \to \infty. \tag{17}$$

В случае, когда $\Psi^2(H) \ll H^{-n+1}$ теорема была доказана[45]. Поэтому далее будем полагать, что $H^{-n+1} \ll \Psi^2(H) \ll H^{-n+2}$ для $H > H_0$. Положим $M = [\epsilon_1^{-1}]$ и разделим область значения $\Psi^2(H)$ на М частей вида

$$H^{-n+1+i/M} \ll \Psi^2(H) \ll H^{-n+1+(i+1)/M}, \quad i = 0, \ldots, M-1. \tag{18}$$

Пусть число значений H, для которых выполняется неравенство (18), будет больше H^{θ}. Выберем достаточно большое число t и рассмотрим H из интервала $2^t \leq H < 2^{t+1}$; тогда

$$\sum_{2^t \leqslant H < 2^{t+1}} \Psi^2(H)H^{n-2} > 2^{t(-n+1+i/M+n-2+\theta)} > 2^{t(\theta-1+i/M)}.$$

Если $\theta - 1 + i/M > 0$, то получаем противоречие с (17). Поэтому будем считать, что

$$0 \leqslant \theta < 1 - i/M.$$

---

[45] *Берник В.И., Васильев Д.В.* Теорема Хинчина для целочисленных полиномов комплексной переменной // Труды ИМ НАН Беларуси. – 1999. – №3. – С. 10–20.

Далее рассмотрим два случая, в зависимости от того, какая оценка в следующей системе является наилучшей:

$$\begin{aligned}|z-\beta_1| &\ll \Psi(H)H^{-1+p_1} \ll 2^{t(p_1-n/2-1/2+(i+1)/2M)},\\ |z-\beta_1| &\ll (\Psi(H)H^{-1+p_1}H^{-\rho_2})^{1/2} \ll 2^{t/4(2p_2-n-1+(i+1)/M+2\epsilon_1)}.\end{aligned}$$

Доказательство первого случая аналогично доказательству Спринджуком гипотезы Малера[16] для классов первого рода, а второго случая – для классов второго рода.

Обобщение[46] леммы 4 на пространство $\Lambda = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{p_1} \times \ldots \times \mathbb{Q}_{p_{t-1}}$, позволяет получить обобщение метрических теорем на Λ с немонотонной функцией аппроксимации. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_{t-1}$ – различные простые числа и $\mathbb{Q}_{p_i}$ – поле p_i-адических чисел, $i = 1, \ldots, t-1$. Обозначим через $\mu_{3,p_i}(U_{p_i})$ меру Хаара измеримого множества $U_{p_i} \subset \mathbb{Q}_{p_i}$, $i = 1, \ldots, t-1$. Используя эти определения, определим произведение мер μ_4 на Λ, полагая $\mu_4(U) = \mu_1(U_1)\mu_{3,p_1}(U_{p_1}) \ldots \mu_{3,p_{t-1}}(U_{p_{t-1}})$ для множества $U = U_1 \times U_{p_1} \times \ldots \times U_{p_{t-1}} \subset \Lambda$.

Теорема 13. *Пусть* $n \geq 3t+1$, U *– открытое подмножество* Λ *и* $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *– произвольная функция (необязательно монотонная) такая, что ряд* $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\Psi^t(H)$ *сходится. Пусть* $\mathcal{K}_n(\Psi)$ *обозначает множество точек* $\mathbf{x} = (x, w_1, \ldots, w_{t-1}) \in U$ *таких, что существует бесконечно много многочленов* $P \in \mathcal{P}_n$*, удовлетворяющих системе неравенств*

$$|P(x)| < \Psi(H(P)),\ |P(w_1)|_{p_1} < \Psi(H(P)),\ \ldots,\ |P(w_{t-1})|_{p_{t-1}} < \Psi(H(P)).$$

Тогда $\mu_4(\mathcal{K}_n(\Psi)) = 0$.

Глава 4. Метрическая теория совместных неоднородных приближений

При доказательстве гипотезы Малера Спринджуком[16], целочисленные многочлены $P \in \mathcal{P}_n$ проходили первоначально через ряд упрощающих процедур. Они разделялись на конечное число классов, в каждом из которых значения многочленов в окрестности их корней, а также значения всех производных в корне многочлена, отличались незначительно. Кроме того, сами многочлены были уже неприводимы, а модуль их старшего коэффициента не более чем в $c(n)$ раз отличался от высоты многочлена.

Если вместо многочлена P взять многочлен $P + d$ при иррациональном d, то уже одна из первых процедур – переход к неприводимым многочленам становится невозможной. Нельзя будет получить оценки снизу для

---

[46] *Mohammadi A., Salehi Golsefidy A.* S–Arithmetic Khintchine–Type Theorem // Geom. Funct. Anal. – 2009. – Vol. 19. – P. 1147-1170.

дискриминанта $D(P) \neq 0$, поскольку дискриминант может принимать сколь угодно близкие к нулю значения. При $d = 0$ это была оценка $|D(P)| \geq 1$. Начиная с первых публикаций, метрические задачи с добавленными в левую часть неравенств иррациональными числами, а позднее и функциями, стали называться неоднородными задачами. О важности неоднородных задач говорит уже такой факт, что задача о приближении действительных чисел целыми алгебраическими числами приводит к исследованию малых значений многочленов вида

$$\bar{P}(x) = x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{Z}.$$

С точки зрения диофантовых приближений, это неоднородная задача.

Естественный способ в решении неоднородных задач в случае сходимости ряда – освободиться от величины d. Это можно сделать различными методами, наиболее общий из которых предложен Бересневичем и Вилани[47]. В случае расходимости ряда прямого пути, получить в точке x малые значения $\bar{P}(x)$ и большие значения $\bar{P}'(x)$, нет. Бюжо[48] предложил следующий метод. При $x_1 \in B_2 \subset I$, $\mu(B_2) > 3\mu(I)/4$, неравенство $|P(x_1)| \leq n^{-1}2^{-n-5}Q^{-n+1}$, как доказал Бересневич[14], не имеет решений в целочисленных многочленах P, $\deg P \leq n$, $H(P) \leq Q$. Следовательно, в точке x_1 выпуклое тело γK, где $K = \{(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |P(x_1)| \leq Q^{-n},\ |a_i| \leq Q,\ 1 \leq i \leq n\}$, γ – коэффициент гомотетии равный $1/8$, не содержит целой точки. Это означает, что для первого последовательного минимума λ_1 тела K справедливо неравенство $\lambda_1 \geq 1/8$. По теореме Минковского о последовательных минимумах заключаем, что $\lambda_{n+1} \leq 8^n$ и неравенству $|P(x_1)| \leq 8^n Q^{-n}$ удовлетворяют $n+1$ линейно независимых над Q многочленов $T_1, \ldots, T_{n+1}$, $\deg T_i \leq n$, $H(T_i) \leq 8^n Q$. С помощью таких многочленов можно построить монический многочлен вида $\bar{P}$, удовлетворяющий условиям $|\bar{P}(x_1)| < c_1(n)Q^{-n}$, $|\bar{P}'(x_1)| > c_2(n)Q$. Из корней таких многочленов, которые являются целыми алгебраическими числами, можно построить оптимальную регулярную систему. Затем, как в работе Бересневича[14], завершить доказательство случая расходимости.

Идея указанного метода может быть перенесена и на совместные неоднородные задачи диофантовых приближений. Пусть $d_1 \in \mathbb{R}$, $d_2 \in \mathbb{C}$, $d_3 \in \mathbb{Z}_p$.

Теорема 14. *Пусть* $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *– монотонно убывающая функция. Пусть* $n \geq 4$, $v_1 = v_2 = v_3 - 1 = \frac{n-4}{4}$ *и* $\lambda_i = \frac{1}{4}$, $i = 1, 2, 3$. *Если*

---

[47] *Beresnevich V. V., Velani S.* An inhomogeneous transference principle and Diophantine approximation // Proc. Lond. Math. Soc. – 2010. – Vol. 101, №3. – P. 821–851.

[48] *Bugeaud Y.* Approximation by algebraic integers and Hausdorff dimension // J. Lond. Math. Soc. – 2002. – Vol. 65. – P. 547–559.

$\sum_{h=1}^{\infty}\Psi(h) = \infty$, *то для почти всех* $\mathbf{u} = (x, z, w) \in T_0 \subset \Omega$ *система неравенств*

$$\begin{aligned} |P(x) + d_1| &< H(P)^{-v_1}\Psi^{\lambda_1}(H(P)), \\ |P(z) + d_2| &< H(P)^{-v_2}\Psi^{\lambda_2}(H(P)), \\ |P(w) + d_3|_p &< H(P)^{-v_3}\Psi^{\lambda_3}(H(P)) \end{aligned}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P \in \mathcal{P}_n$.

Пусть $(x, z, w) \in B_3 \subset T_0$, где $\mu(B_3) > s\mu(T_0)$, $0 < s < 1$, и действительные числа $w_1, w_2 \geq 0$, $w_3 \geq 1$ удовлетворяют условию $w_1 + 2w_2 + w_3 = n - 2$. Множество точек $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющих условиям $|P(x)| < c_0 Q^{-w_1}$, $|P(z)| < c_0 Q^{-w_2}$, $|P'(x)| < Q$, $|P'(z)| < Q$, $|a_i| \leq Q$, $6 \leq i \leq n$, образует выпуклое тело V в $\mathbb{R}^{n+1}$, симметричное относительно нуля. Через Γ обозначим решетку в $\mathbb{Z}^{n+1}$, определяемую неравенствами $|P(w)|_p < c_0 Q^{-w_3}$, $|P'(w)|_p \leq 1$. Сначала доказывается, что первый последовательный минимум $\mu_1(V, \Gamma)$ тела V относительно решетки Γ больше некоторой константы, величина которой находится из метрической теоремы, согласно которой мера множества решений системы

$$\begin{gathered} |P(x)| < c_0 Q^{-w_1}, \ \ |P(z)| < c_0 Q^{-w_2}, \ \ |P(w)|_p < c_0 Q^{-w_3}, \\ \min(|P'(x)|, |P'(w)|, Q|P'(w)|_p) < \delta' Q \end{gathered}$$

при $\delta' < \delta_0$ не превосходит $(1 - s)\mu(T_0)$. Затем, как и в случае монических многочленов, используем обобщение теоремы Минковского о последовательных минимумах на пространство Ω. Согласно определению $\mu_{n+1}(V, \Gamma)$, получаем, что существует $n + 1$ линейно независимых многочленов $P_1, \ldots, P_{n+1}$, которые удовлетворяют несколько измененной системе неравенств

$$\begin{gathered} |P_i(x)| < c_6 Q^{-w_1}, \ \ |P_i(z)| < c_6 Q^{-w_2}, \ \ |P_i(w)|_p < c_0 Q^{-w_3}, |P_i'(x)| < c_6 Q, \\ |P_i'(z)| < c_6 Q, \ \ |P_i'(w)|_p \leq 1, \ \ H(P_i) \ll Q. \end{gathered}$$

С помощью линейных комбинаций многочленов P_i, $1 \leq i \leq n + 1$, строится целочисленный многочлен P, и добиваемся разрешимости неоднородной системы неравенств

$$\begin{gathered} |P(x) + d_1| < c_7 Q^{-w_1}, \ \ |P(z) + d_2| < c_7 Q^{-w_2}, \ \ |P(w) + d_3|_p < c_7 Q^{-w_3}, \\ \min(|P'(x)|, |P'(w)|, Q|P'(w)|_p) > c_8 \delta_0 Q, \ \ H(P) \ll Q. \end{gathered} \tag{19}$$

Используя (19), оценим расстояние от x, z, w до ближайших корней и получим

$$|x - \alpha_1| \ll Q^{-w_1-1}, \ \ |z - \beta_1| \ll Q^{-w_2-1}, \ \ |w - \gamma_1|_p \ll Q^{-w_3},$$

где α_1 – действительный корень $P(x) + d_1$, β_1 – комплексный корень $P(z) + d_2$, γ_1 – корень $P(w) + d_3$ в $\mathbb{Q}_p$. Последнее доказывается с помощью леммы Гензеля. Далее из нулей $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ можно построить, как в главе 2, регулярную систему и при указанной в теореме специализации v_i и λ_i, $i = 1, 2, 3$, закончить доказательство.

В главе 4 также рассматривается задача о приближении действительных чисел корнями неоднородных многочленов в случае немонотонной функции аппроксимации. На протяжении всего раздела, d обозначает фиксированное действительное число. Определим функцию $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ и обозначим через $\mathcal{L}_{n,d}(\Psi)$ множество точек $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство

$$|P(x) + d| < \Psi(H(P))$$

выполнено для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n$.

Теорема 15. *Пусть $n \geq 2$ и $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – произвольная функция (необязательно монотонная) такая, что ряд $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\Psi(h)$ сходится, тогда*

$$\mu_1(\mathcal{L}_{n,d}(\Psi)) = 0.$$

В теореме 15 результат главы 3 (теорема 10) обобщен на неоднородные приближения для кривой $\mathcal{V}_n$. Отметим, что для $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ теорема 10 (положив $\mathbf{f} = (1, x, x^2, \ldots, x^n, d)$ и $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 1) \in \mathbb{Z}^{n+2}$) позволяет доказать, что $\mu(\mathcal{L}_{n,d}(\Psi)) = 0$ при $\sum_{h=1}^{\infty} h^n\Psi(h) < \infty$. Условие $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\Psi(h) < \infty$, сформулированное в теореме 15, является менее ограничительным требованием.

При доказательстве в случае большой производной воспользуемся методами главы 1. При доказательстве в случае малой производной воспользуемся неоднородным принципом переноса[47] , позволяющий переносить утверждения для однородных множеств, имеющих меру нуль, на неоднородные множества. Кратко опишем его действие в данном случае. Рассмотрим два счетных индексных множества $\mathbf{T} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\mathbf{A} = \mathcal{P}_n$. Пусть J обозначает конечный (открытый) интервал в $\mathbb{R}$ с замыканием обозначаемым $\bar{J}$. Обозначим через $\mathcal{H}$ и $\mathcal{I}$ два отображения из $(\mathbb{N} \cup \{0\}) \times \mathcal{P}_n \times \mathbb{R}^+$ в множество открытых подмножеств $\mathbb{R}$ такие, что

$$\mathcal{H}(t, P, \epsilon) = \mathcal{I}_0^t(P, \epsilon) \quad \text{и} \quad \mathcal{I}(t, P, \epsilon) = \mathcal{I}_d^t(P, \epsilon).$$

В нашем случае определим множесва $\mathcal{I}_0^t(P, \epsilon)$ и $\mathcal{I}_d^t(P, \epsilon)$ следующим образом:

$$\mathcal{I}_d^t(P, \epsilon) = \begin{cases} \{x \in I : |P(x) + d| < 2^{t(-n+1)}\epsilon;\ |P'(x)| < 2^{-tv}\epsilon\}, & \text{если} \quad P \in \mathcal{P}_n^t, \\ \emptyset, & \text{если} \quad P \notin \mathcal{P}_n^t, \end{cases}$$

и

$$\mathcal{I}_0^t(P, \epsilon) = \begin{cases} \{x \in I : |P(x)| < 2^{t(-n+1)}\epsilon;\ |P'(x)| < 2^{-tv}\epsilon\}, & \text{если} \quad P \in \bigcup_{s=0}^{t+1} \mathcal{P}_n^s, \\ \emptyset, & \text{если} \quad P \notin \bigcup_{s=0}^{t+1} \mathcal{P}_n^s, \end{cases}$$

где $\mathcal{P}_n^t := \{P \in \mathcal{P}_n,\ 2^t \le H(P) < 2^{t+1}\}$.

Пусть Φ обозначает множество функций $\phi : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ : t \to \phi(t)$. Для функции $\phi \in \Phi$ определим множество

$$\mathcal{I}_d^t(\phi) = \cup_{P \in \mathcal{P}_n} \mathcal{I}_d^t(P, \phi(t)) = \cup_{P \in \mathcal{P}_n^t} \mathcal{I}_d^t(P, \phi(t)).$$

Обозначим через $\Lambda_{\mathcal{I}}(\phi)$ следующее множество

$$\Lambda_{\mathcal{I}}(\phi) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{t=N}^{\infty} \mathcal{I}_d^t(\phi).$$

Определим также однородное множество

$$\Lambda_{\mathcal{H}}(\phi) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{t=N}^{\infty} \mathcal{I}_0^t(\phi),$$

где

$$\mathcal{I}_0^t(\phi) = \cup_{P \in \mathcal{P}_n} \mathcal{I}_0^t(P, \phi(t)) = \cup_{s=0}^{t+1} \cup_{P \in \mathcal{P}_n^s} \mathcal{I}_0^t(P, \phi(t)).$$

Далее сформулируем два свойства, одно из которых говорит о том, что пересечение двух неоднородных множеств содержится в однородном множестве, а другое накладывает специальное условие на меру μ_1 относительно $(\mathcal{I}, \Phi)$.

Свойство пересечения: Говорят, что тройка множеств $(\mathcal{H}, \mathcal{I}, \Phi)$ удовлетворяет *свойству пересечения*, если для любой функции $\phi \in \Phi$ существует функция $\phi^* \in \Phi$ такая, что для всех $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, за исключением конечного числа, и всех различных многочленов $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_n$ справедливо включение

$$\mathcal{I}_d^t(P, \phi(t)) \cap \mathcal{I}_d^t(\tilde{P}, \phi(t)) \subset \mathcal{I}_0^t(\phi^*).$$

Свойство сжатия: Говорят, что мера μ_1 является *сжимаемой относительно* $(\mathcal{I}, \Phi)$, если для любой функции $\phi \in \Phi$ существует функция $\phi^+ \in \Phi$ и последовательность положительных чисел $\{k_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ такая, что

$$\sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} k_t < \infty$$

и для всех t, за исключением конечного числа, и для всех многочленов $P \in \mathcal{P}_n$ существует набор $C_{t,P}$ шаров B, ценры которых расположены в $\bar{J}$, удовлетворяющий следующим трем условиям:

$$\bar{J} \cap \mathcal{I}_d^t(P, \phi(t)) \subset \cup_{B \in C_{t,P}} B,$$

$$\bar{J} \cap \cup_{B \in C_{t,P}} B \subset \mathcal{I}_d^t(P, \phi^+(t)),$$

$$\mu_1(5B \cap \mathcal{I}_d^t(P, \phi(t))) \le k_t \mu_1(5B).$$

Свойства пересечения и сжатия позволяют переносить утверждения для однородных множеств $\Lambda_{\mathcal{H}}(\phi)$, имеющих меру нуль, на неоднородные множества $\Lambda_{\mathcal{I}}(\phi)$.

Теорема 16 (Неоднородный принцип переноса[47]). *Предположим, что* $(\mathcal{H}, \mathcal{I}, \Phi)$ *удовлетворяет свойству пересечения и* μ_1 *является сжимаемой относительно* $(\mathcal{I}, \Phi)$. *Тогда*

$$\forall \phi \in \Phi \quad \mu_1(\Lambda_{\mathcal{H}}(\phi)) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall \phi \in \Phi \quad \mu_1(\Lambda_{\mathcal{I}}(\phi)) = 0.$$

Приложение

О числе многочленов с малыми дискриминантами в $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$. В первом разделе изучается распределение дискриминантов целочисленных многочленов. В частности, получена нижняя оценка для числа полиномов с малыми дискриминантами одновременно в Евклидовой и p-адической метриках. Поскольку p-адическая норма таких дискриминантов мала, то ясно, что они делятся на большую степень простого числа p. Это дает некоторую информацию относительно распределения корней полиномов и показывает, что существует большое число целочисленных полиномов, имеющих корни, одновременно близкие по p-адической и Евклидовой норме. Этот и другие, тесно связанные с данным вопросом, были впервые поставлены и изучались Малером[49] в 1964 г.

Пусть $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ и определим подкласс полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q, v_1, v_2) = \{P \in \mathcal{P}_n(Q), 1 \le |D(P)| < Q^{2n-2-2v_1}, |D(P)|_p < Q^{-2v_2}\},$$

где $D(P)$ – дискриминант многочлена P. Определим произведение мер μ_5 на $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$, полагая $\mu_5(E) = \mu_1(E_1)\mu_3(E_2)$ для множества $E = E_1 \times E_2$, где $E_1 \subset \mathbb{R}$ и $E_2 \subset \mathbb{Q}_p$.

Теорема 17. *Пусть* $n \ge 3$ *и* $0 \le v_1 < 1/3$. *Тогда для всех достаточно больших* $Q > 1$ *верно*

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v_1, v_1) \gg Q^{n+1-4v_1}.$$

В работе[50] было доказано, что $\#\mathcal{P}_n(Q, v_1, 0) \gg Q^{n+1-2v_1}$, а в работе[51] получена оценка $\#\mathcal{P}_n(Q, 0, v_2) \gg Q^{n+1-2v_2}$. Эти результаты вытекают из

---

[49] *Mahler K.* An inequality for the discriminant of a polynomial // Michigan Math. J. – 1964. – Vol. 11. – P. 257–262.

[50] *Bernik V., Götze F., Kukso O.* Lower bounds for the number of integral polynomials with given order of discrimants // Acta Arith. – 2008. – Vol. 133. – P. 375–390.

[51] *Bernik V., Götze F., Kukso O.* On the divisibility of the discriminant of an integral poly nomial by prime powers // Lith. Math. J. – 2008. – Vol. 48. – P. 380–396.

метрических теорем о диофантовых приближениях в поле действительных чисел и поле p-адических чисел соответственно. Для доказательства теоремы 17 необходимо доказать метрическую теорему о совместных диофантовых приближениях в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}_p$. Отметим, что для $n=2$ дискриминант равен $D(P) = a_1^2 - 4a_0a_2$ и оценку для числа многочленов можно получить непосредственно. Для $n \geq 3$ рассмотрим подмножество $\bar{\mathcal{P}}_n(Q) \subset \mathcal{P}_n(Q)$, где $\bar{\mathcal{P}}_n(Q)$ – множество неприводимых многочленов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, удовлетворяющих условиям

$$|a_n|_p \gg 1, \quad |a_n| \geq H(P)/2, \quad \gcd(a_0, \dots, a_n) = 1. \tag{20}$$

Зафиксируем множество $I\times K$, где I – интервал, содержащийся в $[0,1) \subset \mathbb{R}$, и K – цилиндр в $\mathbb{Z}_p$. Далее зафиксируем действительные числа v_0 и v_1, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq v_1 < 1/3 \quad \text{и} \quad v_0 + v_1 = n/2. \tag{21}$$

Для действительных чисел c_0, δ_0 и $Q \in \mathbb{N}$ определим следующее множество. Обозначим через $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0, Q)$ множество точек $(x, w) \in I \times K$, для которых существует многочлен $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$ такой, что выполнена система неравенств

$$|P(x)| < c_0 Q^{-v_0}, \quad |P(w)|_p < c_0 Q^{-v_0} \tag{22}$$

$$\delta_0 Q^{1-v_1} < |P'(x)| < c_0 Q^{1-v_1}, \quad \delta_0 Q^{-v_1} < |P'(w)|_p < c_0 Q^{-v_1}. \tag{23}$$

Теорема 17 будет следовать из теоремы 18, приведенной ниже.

Теорема 18. *Пусть $n \geq 3$. Тогда для каждого действительного числа κ', где $0 < \kappa' < 1$, существуют постоянные δ_0 и c_0 такие, что*

$$\mu_5(\mathcal{K}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0, Q)) > \kappa' \mu_5(I \times K)$$

для достаточно большого Q.

С помощью принципа Дирихле нетрудно доказать существование $c_0 = (n+1)^{3/4}$, что оценки сверху в (22) и (23) выполняются для всех $(x, w) \in I \times K$. Доказательство существования δ_0 является основной трудностью.

Расстояние между сопряженными алгебраическими числами в $\mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p^*$. Определим λ_n как инфимум действительных чисел w, для которых неравенство

$$|\alpha_1 - \alpha_2| > H(P)^{-w}$$

справедливо для любых корней $\alpha_1 \neq \alpha_2$ каждого неприводимого многочлена $P \in \mathcal{P}'_n$ с достаточно большой высотой $H(P)$. В 1964 г. Малер[49] доказал верхнюю оценку $\lambda_n \leq n-1$. Нетрудно проверить, что $\lambda_2 = 1$. Эвертс[52] и Шенхаге[53] независимо доказали, что $\lambda_3 = 2$. Бюжо и Миньот[54] построили специальные классы многочленов P и показали, что $\lambda_n \geq \frac{n+2}{4}$ для нечетных $n \geq 5$ и $\lambda_n \geq \frac{n}{2}$ для четных $n \geq 4$. Позднее, Бюжо и Дюжела[55] улучшили известные оценки снизу для λ_n, показав, что $\lambda_n \geq \frac{n}{2} + \frac{n-2}{4(n-1)}$ для $n \geq 4$. Классы многочленов, построенные в вышеприведенных работах, весьма экзотичны, и о их количестве ничего не известно. Альтернативный подход был предложен в работе[42] и было доказано, что $\lambda_n \geq (n+1)/3$ для всех $n \geq 2$. В работе[42] получена оценка для числа многочленов, у которых "близки" по крайней мере два действительных корня. Более точно, в следствии 2 показано, что существует не менее $Q^{\frac{n+1}{3}}$ многочленов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, корни которых удовлетворяют неравенству

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \ll Q^{-\frac{n+1}{3}}.$$

В данном разделе доказывается, что существует большое количество многочленов, у которых одновременно близки комплексные и p-адические корни.

Теорема 19. *Пусть $n \geq 3$, $0 \leq v_1 < 1/3$. Обозначим через N количество многочленов $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$, у которых по крайней мере два корня $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ и по крайней мере два корня $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Q}_p^*$ удовлетворяют условиям*

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \ll Q^{-v_1}, \qquad |\gamma_1 - \gamma_2|_p \ll Q^{-v_1}.$$

Пусть $Q_0 = Q_0(n) \in \mathbb{R}$ – достаточно большое число. Тогда для всех $Q > Q_0$ верно

$$N \gg Q^{n+1-4v_1}.$$

Зафиксируем действительные числа v_0 и v_1, удовлетворяющие условиям (21). Для действительных чисел c_0, δ_0 и $Q \in \mathbb{N}$ определим следующее множество. Обозначим через $\mathcal{L}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0, Q)$ множество точек $(x, w) \in I \times K$, для которых существует многочлен $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$ такой, что выполнены неравенства (22) и (23) одновременно с неравенствами

$$|P''(x)| > \delta_0 Q, \quad |P''(w)|_p > \delta_0. \tag{24}$$

Далее определим множество $\mathcal{P}_n^{\mathcal{L}}(Q)$, состоящее из многочленов $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$, удовлетворяющих (22),(23) и (24) для некоторой точки $(x, w) \in I \times K$.

---

[52] *Evertse J. H.* Distances between the conugates of an algebraic number // Publ. Math. Debrecen. – 2004. – Vol. 65. – P. 3–340.

[53] *Schoönhage A.* Polynomial root separation examples // J. Symbolic Comput. – 2006. – Vol. 41. – P. 1080–1090.

[54] *Bugeaud Y., Mignotte M.* On the distance between roots of integer polynomials // Proc. Edinb. Math. Soc. – 2004. – Vol. 47, №2. – P. 553–556.

[55] *Bugeaud Y., Dujella A.* Root separation for irreducible integer polynomials // Bull. Lond. Math. Soc. – 2011. – Vol. 43, №6. – P. 1239–1244.

Будет показано, что если $P \in \mathcal{P}_n^{\mathcal{L}}(Q)$, то по крайней мере существует по два близких корня в каждой из рассматриваемых метриках; таким образом, для доказательства теоремы 19 достаточно получить только нижную оценку для мощности множества $\mathcal{P}_n^{\mathcal{L}}(Q)$. Используя теорему 18, докажем следующий метрический результат.

Теорема 20. *Для каждого действительного числа κ, где $0 < \kappa < 1$, существуют постоянные δ_0 и c_0, зависящие только от n, такие, что*

$$\mu_5(\mathcal{L}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0, Q)) > \kappa\mu_5(I \times K)$$

для достаточно большого Q.

Об условии, при котором ближайший корень многочлена к действительной точке является действительным числом. Пусть $P \in \mathcal{P}_n'$. Из неравенства $|P(x)| < H(P)^{-w}$ можно получить оценки сверху для модуля разности $|x - \alpha_1|$, где α_1 – ближайший к $x \in \mathbb{R}$ корень многочлена P. Однако для некоторых важных задач теории трансцендентных чисел необходимо знать является ли α_1 действительным или комплексным числом. Знание того, что α_1 – действительный корень, позволяет строить регулярные системы точек, важные при решении следующих проблем: нахождение размерности Хаусдорфа множества $x \in \mathbb{R}$, для которых при $w > n$ неравенство $|P(x)| < H(P)^{-w}$ имеет бесконечно много решений в многочленах P; обобщение случая расходимости в теореме Хинчина на многочлены P степени $\deg P \geq 2$; разрешимость неравенства $|x - \alpha_1| < H(\alpha_1)^{-w}$ в целых алгебраических числах α_1 для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Данный раздел посвящен исследованию задачи о принадлежности корня α_1 многочлена P полю действительных чисел в зависимости от величины w. Аналогичная задача в поле p-адических чисел решена Ю.В. Нестеренко[56]. Отметим, что рассматриваемая задача тесно связана с вопросом о разделении корней целочисленных многочленов[52,53,54,55,57].

Теорема 21. *Пусть $n \geq 2$ и $P \in \mathcal{P}_n'$ – многочлен высоты $H = H(P)$, дискриминант $D(P)$ которого отличен от нуля. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Тогда из неравенства*

$$|P(x)| < H^{-w} \tag{25}$$

при $w > 2n - 3$ и достаточно большом H следует, что ближайший к x корень α_1 многочлена P является действительным и

$$|x - \alpha_1| \ll H^{-w+n-2}. \tag{26}$$

---

[56] *Nesterenko Y.V.* Roots of polynomials in p-adic fields // Preprint. – 2008.

[57] *Bugeaud Y., Mignotte M.* Polynomial root separation // Intern. J. Number Theory. – 2010. – Vol. 6. – P. 587–602.

Замечание 2. *Рассмотрим неприводимые многочлены* $P \in \mathbb{Z}[x]$ *степени* $n \geq 2$. *Условие* $w > 2n-3$ *в теореме 21 является наилучшим для* $n = 2$ *и* $n = 3$, *что следует из результатов работ*[57,53]. *Для* $n \geq 4$, *используя работы*[42,[25]], *можно показать, что существует бесконечно много неприводимых многочленов* $P \in \mathcal{P}'_n$, *для которых существуют* $x = x(P) \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющие* $|P(x)| < H(P)^{-w}$, *где* $w < \frac{2n-1}{3}$, *и ближайший к* x *корень многочлена* P *является чисто комплексным.*

Следствие 1. *Пусть* $P(x) = \prod_{i=1}^{k} T_i^{s_i}(x) \in \mathcal{P}'_n$ *– многочлен высоты* $H = H(P)$ *с дискриманантом* $D(P) = 0$, *где* T_i *– неприводимый многочлен степени* n_i *и высоты* $H_i = H(T_i)$, $i = (1, \ldots, k)$. *Тогда из неравенства (25) при* $w > 2n-3$ *и достаточно большом* H_i *следует, что существует действительный корень* α_1 *многочлена* P *и*

$$|x - \alpha_1| \ll H_i^{-w+n_i-2} \text{ для некоторого } i,\ 1 \leq i \leq k. \tag{27}$$

Более того, утверждение справедливо при $w > 2n_i - 3$.

Важной проблемой в теории трансцендентных чисел является переход от неравенства (25) при $P(x) = \prod_{i=1}^{k} T_i^{s_i}(x)$ к неравенству, содержащему неприводимый многочлен T_i в левой части неравенства (25). Обычно переход от приводимого многочлена к его неприводимым сомножителям проводится с использованием леммы о связи высоты произведения многочленов с произведением высот сомножителей. Иногда такой метод приводит к результатам, близким к тривиальным, поэтому в следующей теореме используется другой подход.

Теорема 22. *Пусть* $n \geq 2$ *и* $P \in \mathcal{P}'_n$ *– многочлен высоты* $H = H(P)$ *с дискриминантом* $D(P) = 0$. *Пусть* $x \in \mathbb{R}$ *и справедливо неравенство* $|P(x)| < H^{-w}$, *тогда для* $w > 2n-3$ *и достаточно большого* H, *ближайший к* x *корень* α_1 *многочлена* P *является действительным и*

$$|x - \alpha_1| \ll H^{-(w+1)/n}.$$

Замечание 3. *Показатель степени* $-(w+1)/n$ *в теореме 22 является наилучшим.*

Регулярная система алгебраических чисел третьей степени в коротких интервалах. Ранее было дано определение регулярной системы. Следует отметить, что Бересневич[14] при построении регулярной системы на множестве алгебраических чисел степени n указал явный вид постоянной C_1, но не было вычислено значение $T_0(\Gamma, N, I)$, которые возникают в определении регулярной системы. Бюжо[8] показал, что для заданного интервала I в $[0,1]$ значение $T_0(\Gamma, N, I)$ равно

$$T_0(\mathbb{Q}, N, I) = 10^4 |I|^{-2} \log^2(100|I|^{-1})$$

для $n = 1$, и Берескевич[58] доказал, что

$$T_0(\mathcal{A}_2, N, I) = 72^3|I|^{-3}\log^3(72|I|^{-1})$$

для $n = 2$, где $\mathcal{A}_k$ – множество действительных алгебраических чисел степени k. В монографии Бюжо[8] отметил, что для $n \geq 3$ связь между $|I|$ и $T_0(\mathcal{A}_n, N, I)$ неизвестна в настоящее время.

В данном разделе для $n = 3$ изучается связь между $|I|$ и $T_0(\mathcal{A}_3, N, I)$, где $N(\alpha) = H^4(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}_3$, и установлено, что $T_0 = c_2|I|^{-4}$. Вероятно, что связь такого же типа сохраняется для любого n, т.е. $T_0(\mathcal{A}_n, N, I) = c_3|I|^{-(n+1)}$.

Теорема 23. *Пусть I – конечный интервал, содержащийся в $[-1/2, 1/2]$. Тогда существуют положительные постоянные C_1, c_4 и положительное число $T_0 = c_4|I|^{-4}$ такие, что для любого $T \geq T_0$ существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathcal{A}_3 \cap I$ такие, что*

$$\begin{gathered} H(\alpha_i) \leq T^{1/4} \ \ (1 \leq i \leq t), \\ |\alpha_i - \alpha_j| \geq T^{-1} \ \ (1 \leq i < j \leq t), \\ t \geq C_1 T|I|. \end{gathered} \tag{28}$$

Отметим, что из теоремы 23 следует, что множество действительных алгебраических чисел α третьей степени с функцией $N(\alpha) = H^4(\alpha)$ образует регулярную систему на $[-1/2, 1/2]$.

Пусть $\delta_0 \in \mathbb{R}^+$. Обозначим через $\bar{\mathcal{L}}_3 = \bar{\mathcal{L}}_3(Q, \delta_0, I)$ множество $x \in I$, для которых система неравенств

$$|P(x)| < Q^{-3}, \quad |P'(x)| < \delta_0 Q \tag{29}$$

имеет решение в многочленах $P \in \mathcal{P}'_3(Q)$. Доказательство теоремы 23 основано на следующем метрическом результате.

Теорема 24. *Для каждого действительного числа s, где $0 < s < 1$, существует постоянная δ_0, обладающая следующим свойством. Для любого интервала $I \subset [-1/2, 1/2]$ существует достаточно большое число $Q_0 = Q_0(I)$ и постоянная c_5, не зависящая от Q_0, такие, что*

$$|I| > c_5 Q_0^{-1}$$

и для всех $Q > Q_0$ верна оценка меры

$$|\bar{\mathcal{L}}_3| < s|I|. \tag{30}$$

---

[58] *Берескевич В.В.* Эффективные оценки мер множеств действительных чисел с заданным порядком аппроксимации квадратичными иррациональностями // Вести АН Беларуси. Сер. физ-мат. наук. – 1996. – №4.– С. 10–15.

Публикации в журналах из списка ВАК

[1] *Бударина Н.В.* Деформации диофантовых для квадратичных форм решетки корней A_n // Записки научн. семин. ПОМИ. –2004. – Т. 314. – С. 5–13.

[2] *Бударина Н.В., Диккинсон Х., Берник В.И.* Теорема Хинчина и приближение нуля значениями целочисленных многочленов в разных метриках // Доклады Академии Наук. – 2007. Т. 413, №2. – С. 151–153.

В работе [2] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теорем, соавторам принадлежит постановка задачи.

[3] *Budarina N., Bernik V.I., Dickinson D.* A divergent Khintchine Theorem in the real, complex and p-adic fields // Lithuanian Mathematical Journal. – 2008. – Vol. 48, №2. – P. 1–16.

В работе [3] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теорем, соавторам принадлежит постановка задачи.

[4] *Budarina N., Dickinson D.* Diophantine approximation on non–degenerate curves with non–monotonic error function // Bulletin London Math. Soc. – 2009. – Vol. 41, №1. – P. 137–146.

В работе [4] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теорем, соавтору принадлежит постановка задачи.

[5] *Budarina N.* On primitively universal quadratic forms // Lithuanian Mathematical Journal. – 2010. – Vol. 50, №2. – P. 140–163.

[6] *Budarina N., Bernik V.I., Dickinson D.* Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 2010. – Vol. 149, №2. – P. 193–216.

В работе [6] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теорем, соавторам принадлежит постановка задачи.

[7] *Бударина Н.В.* Совместные диофантовы приближения с немонотонными правыми частями // Доклады Академии Наук. – 2011. – Т. 437, №4. – С. 441–443.

[8] *Budarina N.* On a problem of Bernik, Kleinbock and Margulis // Glasgow Math. J. – 2011. – Vol. 53. – P. 669–681.

[9] *Budarina N.* Simultaneous diophantine approximation in the real and p-adic fields with nonmonotonic error function // Lithuanian Mathematical Journal. –

2011. – Vol. 51, №4. – 461–471.

[10] *Бударина Н.В.* О примитивно 2-универсальных квадратичных формах // Алгебра и анализ. – 2011. – Т. 23, №3. – С. 31–62.

[11] *Budarina N., Bugeaud Y., Dickinson D., O'Donnell H.* On simultaneous rational approximation to p-adic number and its integral powers// Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. – 2011. – Vol. 54. – P. 599–612.

В работе [11] Будариной Н.В. принадлежат формулировка и доказательство теоремы 2.3.

[12] *Budarina N., O'Donnell H.* On a problem of Nesterenko: when is the closest root of a polynomial a real number? // International Journal of Number Theory (IJNT). – 2012. – Vol. 8, №3. – P. 801–811.

В работе [12] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теоремы 1 и теоремы 2.

[13] *Budarina N., Dickinson D.* Simultaneous Diophantine Approximation in two metrics and the distance between conjugate algebraic numbers in $\mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ // Indagationes Mathematicae. – 2012. – Vol. 23. – P. 32–41.

В работе [13] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теорем, соавтору принадлежит постановка задачи.

[14] *Budarina N., Dickinson D., Jin Yuan* On the number of polynomials with small discriminants in the euclidean and p-adic metrics // Acta Mathematica Sinica. – 2012. – Vol. 28, №3. – P. 469–476.

В работе [14] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теорем, соавторам принадлежит постановка задачи.

[15] *Бударина Н.В.* Проблема Малера в поле комплексных чисел с немонотонной правой частью // Матем. Заметки. – 2013. – Т. 93, №6. – С. 812–820.

Прочие публикации

[16] *Budarina N., Dickinson D.* Simultaneous Diophantine approximation on surfaces defined by polynomial expressions $x_1^d + \ldots + x_m^d$ // Anal. Probab. Methoods Number Theory. – Vilnius: TEV. – 2006. – P. 1–7.

В работе [16] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теорем, соавтору принадлежит постановка задачи.

[17] *Budarina N., Bernik V.I., Dickinson D.* The Khinchine theorem and simultaneous approximation of zero by the integer polynomials in $R \times C$ // Veszi NAN Belarusi. Ser fiz-mat.nauk. – 2007. – Vol. 2. – P. 48–52.

В работе [17] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теорем, соавторам принадлежит постановка задачи.

[18] *Budarina N., Bernik V.I., Dickinson D.* Simultaneous approximation of real and complex numbers by algebraic numbers of special kind // Trudi Instituta matematiki NAN Belarusi. – 2007.– Vol. 15, №1. – P. 3–9.

В работе [18] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теорем, соавторам принадлежит постановка задачи.

[19] *Budarina N., Dickinson D.* p-adic Diophantine approximation on the Veronese curve with a non-monotonic error // Trudi Instituta matematiki NAN Belarusi. – 2007. – Vol. 15, №1. – P. 98–104.

В работе [19] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теорем, соавтору принадлежит постановка задачи.

[20] *Budarina N., Zorin E.* Non-homogeneous analogue of Khintchine theorem for divergence case for simultaneous approximations in the different metrics // Siauliai Math. Semin. – 2009. – Vol. 4, №12. – P. 21–33.

В работе [20] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теорем, соавтору принадлежит постановка задачи.

[21] *Бударина Н.В., Зорин Е.В.* Совместные приближения действительных и p-адических чисел целыми алгебраическими числами // Вестник Беларус. Гос. Унив. (БГУ). Сер. 1 Физ. Мат. Информ. – 2009. – Т. 2. – С. 104–109.

В работе [21] Будариной Н.В. принадлежат формулировка теоремы и доказательство метрической части теоремы.

[22] *Budarina N., Dickinson D., Levesley J.* Simultaneous Diophantine approximation on polynomial surfaces // Mathematika. – 2010. – Vol. 56, №1. – P. 77–85.

В работе [22] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теорем, соавторам принадлежит постановка задачи.

[23] *Бударина Н.В., Куксо О.С.* Совместные приближения нуля квадратичными иррациональностями в $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$ при немонотонных правых частях неравенств // Вести НАН Беларуси, Серия физ.-мат. наук. – 2010. – Т. 2. – С. 23–25.

В работе [23] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теорем, соавтору принадлежит постановка задачи.

[24] *Budarina N.* Diophantine approximation on the curves with non–monotonic error function in the p-adic case // Chebyshevskii Sb. –2010. – Vol. 11, №1. – P. 74–80.

[25] *Бударина Н.В., Берник В.И., Диккинсон Д.* Действительные и комплексные корни целочисленных полиномов в окрестности их малых значений // Доклады НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, №5. – С. 18–21.

В работе [25] Будариной Н.В. принадлежат формулировки и доказательства теорем, соавторам принадлежит постановка задачи.

[26] *Бударина Н.В.* Метрическая теория совместных диофантовых приближений в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$ // *Чебышевский сб.* – 2011. – Т. 12, №1. – С. 17–50.

[27] *Бударина Н.В.* Регулярные и повсеместные системы для совместных диофантовых приближений // *Чебышевский сб.* – 2011. – Т. 12, №4. – С. 2–32.