Дальневосточное отделение Российской Академии Наук

Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики

На правах рукописи

Бударина Наталья Викторовна

Метрическая теория совместных диофантовых приближений в полях действительных, комплексных и p-адических чисел

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант: профессор, доктор физ.-мат. наук
Берник Василий Иванович

Хабаровск - 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
$\mathbb{Z}$	множество целых рациональных чисел
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	множество неотрицательных целых рациональных чисел
$\mathbb{Q}$	множество рациональных чисел
$\mathbb{R}$	множество действительных чисел
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел
$\mathbb{Q}_p$	множество $p-$ адических чисел
$\mathbb{Z}_p$	множество целых $p-$ адических чисел
$\mathcal{A}_n$	множество действительных алгебраических чисел степени n
$\mathcal{P}_n$	множество ненулевых многочленов степени не больше n с целыми рациональными коэффициентами
$\mathcal{P}'_n$	множество ненулевых многочленов степени n с целыми рациональными коэффициентами
$\mathcal{P}_n(Q)$	множество ненулевых многочленов степени не больше n с целыми рациональными коэффициентами высоты не больше Q
$\#A$	число элементов во множестве A
$\|x\|_p$	$p-$ адическая норма числа $x \in \mathbb{Q}_p$
$[x]$	целая часть числа $x \in \mathbb{R} : [x] = \max\{a \in \mathbb{Z} : a \leq x\}$
$H(P)$	высота многочлена $P \in \mathbb{R}[x],$ численно равна максимуму абсолютных величин коэффициентов многочлена P
$\deg P$	степень многочлена P
$H(\alpha)$	высота алгебраического числа $\alpha,$ численно равна высоте минимального многочлена для α (неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена с целыми коэффициентами наименьшей высоты, корнем которого является α)
$\deg \alpha$	степень алгебраического числа $\alpha,$ численно равна степени минимального многочлена для α
$X \ll Y$	символ Виноградова, который означает, что существует постоянная C такая, что $X \leq CY$ (C может зависеть от некоторых параметров, но не от переменных X и Y)
$X \gg Y$	эквивалентно $Y \ll X$
$X \asymp Y$	эквивалентно одновременному выполнению $X \ll Y$ и $X \gg Y$
$B(x_0, r)$	шар с центром в x_0 радиуса r
cB	шар $B(x_0, cr),$ полученный из шара $B = B(x_0, r)$ растяжением/сжатием с коэффициентом $c > 0$
$\mu_1(E)$ или $\|E\|$	мера Лебега в $\mathbb{R}$ измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы.

В настоящей работе изучаются проблемы метрической теории диофантовых приближений, связанные с диофантовыми приближениями зависимых величин в различных метриках. В теории диофантовых приближений традиционно выделяют три подхода: глобальный, индивидуальный и метрический. Глобальный подход связан с исследованием диофантовых свойств всех чисел или наборов чисел из конкретного класса, например, теорема Дирихле. Индивидуальный подход подразумевает исследование диофантовых свойств конкретных чисел или наборов чисел, например, трансцендентность π, и алгебраическая независимость π и e^{π}. В метрической теории диофантовых приближений изучаются диофантовы свойства всех чисел или наборов чисел, за исключением множеств малой или нулевой меры Лебега (меры Хаара). Исключительные множества могут далее изучаться с помощью меры и размерности Хаусдорфа.

Теорема Хинчина. Метрическая теория диофантовых приближений началась с работ А.Я. Хинчина и Э. Бореля. В 1924 году А.Я. Хинчин [102] доказал классическую теорему о приближении действительных чисел рациональными числами. Далее $\mu_1(A)$ – мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал.

Теорема 0.1 (Хинчин)**.** *Пусть $\Psi(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – функция такая, что $q\Psi(q)$ монотонно убывает. Обозначим через $\mathcal{L}_1(\Psi)$ множество таких $x \in I$, для которых неравенство*

$$|x - p/q| < \frac{\Psi(q)}{q} \quad \textit{или} \quad |qx - p| < \Psi(q)$$

имеет бесконечное число решений в числах $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Тогда

$$\mu_1(\mathcal{L}_1(\Psi)) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) < \infty, \\ \mu_1(I), & \textit{если} \quad \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) = \infty. \end{cases}$$

Теорема Хинчина показывает, что при любых $\epsilon > 0$ и $k \geq 2$ множества $\mathcal{L}_1(\Psi_1)$ и $\mathcal{L}_1(\Psi_2)$ для

$$\Psi_1(q) = q^{-1} \log^{-1} q (\log\log q)^{-1} \ldots (\underbrace{\log\log\ldots\log}_{k} q)^{-1-\epsilon},$$

$$\Psi_2(q) = q^{-1} \log^{-1} q (\log\log q)^{-1} \ldots (\underbrace{\log\log\ldots\log}_{k} q)^{-1}$$

имеют совершенно разные метрические характеристики (нулевую и полную меру на I).

Заметим, что доказательство теоремы Хинчина в случае сходимости значительно легче. Оно справедливо без дополнительного требования монотонности и было проведено ранее Э. Борелем [66] в общем случае, а для $\Psi(q) = q^{-2}$ в 1898 году им же. Теорема Хинчина была обобщена им самим [104] и Грошевым [29] на многомерный случай. В указанных работах все переменные входили в первой степени. Хотя такие задачи, как правило, проще, но до сих пор здесь остаются нерешенные задачи. Более подробно результаты метрической теории диофантовых приближений отражены в монографиях [97, 124].

Пусть
$$P(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_1 f + a_0$$
– целочисленный многочлен с $a_n \neq 0$, степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество целочисленных многочленов степени не превосходящей n и через $\mathcal{P}'_n$ – множество целочисленных многочленов степени n.

Отметим один, редко цитируемый результат Хинчина об усилении теоремы Минковского для кривой Веронезе $\mathcal{V}_n = (x, x^2, \ldots, x^n)$ [103]: при любом $\epsilon > 0$ и почти всех $x \in \mathbb{R}$ неравенство
$$|P(x)| < \epsilon H^{-n}$$
имеет бесконечное число решений в целочисленных многочленах P, $\deg P \leq n$, и высоты H. Этот результат сыграл определенную роль в становлении метрической теории линейных приближений, в первую очередь, в связи с решением проблемы Малера.

Проблема Малера. В 30-е годы 20 века К. Малером [112] и Ф. Коксмой [107] были предложены две близкие классификации действительных и комплексных чисел. Пусть x - вещественное или комплексное число. Малер построил классификацию чисел x, основанную на приближении нуля значениями многочленов в x. Определим
$$w(x) = \limsup_{n \to \infty} \frac{w_n(x)}{n},$$
где $w_n(x)$ - супремум множества действительных чисел w, для которых существует бесконечно много целочисленных многочленов $P \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих условию
$$0 < |P(x)| \leq H(P)^{-w}.$$
Если $w(x) = \infty$ и существует такой индекс $\eta = \eta(x)$, что $w_\eta(x) = \infty$, то пусть η и будет наименьшим индексом, для которого это верно; в противном

случае, полагаем $\eta(x) = \infty$. Малер ввел следующие классы чисел:

$$\begin{array}{llll} A- & \text{числа,} & \text{если} & w(x) = 0, \\ S- & \text{числа,} & \text{если} & 0 < w(x) < \infty, \\ T- & \text{числа,} & \text{если} & w(x) = \infty \quad \text{и} \quad \eta(x) = \infty, \\ U- & \text{числа,} & \text{если} & w(x) = \infty \quad \text{и} \quad \eta(x) < \infty. \end{array}$$

Алгебраические числа составляют класс $A-$чисел, все трансцендентные числа попадают в классы $S, T, U-$ чисел.

В основе классификаци Коксмы лежит приближение чисел x алгебраическими числами. Пусть

$$w^*(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{w_n^*(x)}{n},$$

где $w_n^*(x)$ - супремум множества действительных чисел w, для которых существует бесконечно много действительных алгебраических чисел α степени не превосходящей n, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - \alpha| \le H(\alpha)^{-w-1}.$$

Классы S, T, U из классификации трансцендентных чисел Малера совпадают с классами S^*, T^*, U^* из классификации трансцендентных чисел Коксма, что говорит о наличии связи между полиномиальной и алгебраической аппроксимациями. Однако эта связь неоднозначна: например, легко доказать (используя принцип Дирихле) существование многочлена P, принимающего малое значение $|P(x)|$ в точке x, но трудно доказать существование точной алгебраической аппроксимации (см. гипотезу Вирзинга).

Гипотеза Вирзинга. Для каждого $\epsilon > 0$ существует постоянная $c(n, x, \epsilon) > 0$, для которой существует бесконечно много алгебраических чисел α степени $\le n$ с условием

$$|x - \alpha| \le c(n, x, \epsilon) H(\alpha)^{-n-1+\epsilon}.$$

Вирзинг [132] доказал разрешимость неравенства с показателем $-n/2 - 1$. В случае $n = 2$ гипотеза Вирзинга была доказана Давенпортом и Шмидтом [93] в 1967 г. Более поздние результаты относительно данной гипотезы можно найти в работе Берника и Тищенко [12], а также в книге Бюжо [86].

Важную роль для дальнейшего развития метрической теории диофантовых приближений сыграла гипотеза Малера о мере множества S-чисел.

Гипотеза Малера. Для любого $\epsilon > 0$ неравенство

$$|P(x)| < H(P)^{-n-\epsilon} \tag{0.1}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P \le n$, только на множестве нулевой меры.

Сам Малер доказал [111] более слабое утверждение: если в (0.1) показатель степени $-n-\epsilon$ заменить на $-4n$, то множество решений получившегося неравенства будет иметь нулевую меру. Доказательство Малера было основано на представлении результанта $R(P,P')$ неприводимого многочлена P и его производной в виде

$$R(P,P') = P(x)Q_1(x) + P'(x)Q_2(x). \tag{0.2}$$

Поскольку P – неприводимый многочлен, то $R(P,P') \neq 0$ и, значит, $|R(P,P')| \geq 1$. В представлении (0.2) известны оценки степени и высоты целочисленных многочленов Q_1 и Q_2. Следовательно, $P(x)$ и $P'(x)$ не могут быть одновременно слишком малыми. Согласно (0.1), значение $|P(x)|$ мало, поэтому из (0.1) и (0.2) получаем оценку снизу для $|P'(x)|$. Если α_1 – ближайший к x корень многочлена P, то нетрудно получить оценки

$$|x-\alpha_1| < 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}, \quad |x-\alpha_1| \leq n|P(x)||P'(x)|^{-1}. \tag{0.3}$$

Осталось просуммировать вторую оценку по всем многочленам высоты H. Затем новую полученную оценку просуммировать по всем H; получится сходящийся ряд. По лемме Бореля-Кантелли множество решений (0.1) имеет нулевую меру.

Оценка Малера неоднократно улучшалась. Вначале Коксма [107] показал, что $\sup_{n\geq 1}\frac{w_n(x)}{n} \leq 3$ для почти всех действительных чисел x, а затем Левек [108] на основе леммы Н.И. Фельдмана [42] получил неравенство $\sup_{n\geq 1}\frac{w_n(x)}{n} \leq 2$ для почти всех чисел. Позднее Каш и Фолькман [99] получили $w_n(x) \leq 2n-2$ для почти всех действительных чисел x и $n \geq 2$. Уточняя рассуждения Каша и Фолькмана, Шмидт [121] доказал $w_n(x) \leq 2n - 7/3$ для почти всех чисел x и $n \geq 3$. Позднее Фолькман [129, 130] показал, что $w_n(x) \leq 4n/3$ для почти всех чисел x и $n \geq 2$. В [34] Спринджук получил более сильный результат, чем Фолькман, $w_n(x) \leq 5n/4 - 3/8$ для $2 \leq n \leq 7$ и $w_n(x) \leq 4n/3 - 1$ для $n \geq 8$.

Из первого неравенства (0.3) при $|P'(\alpha_1)| > c(n)H^{-n+1}$ и $|P(x)| < H^{-w}$ можно получить оценку $|x-\alpha_1| < c(n)H^{-w+n-1}$. Если зафиксировать H, то количество многочленов с фиксированным H не превышает $(2H+1)^n$. Потребуем сходимость ряда $\sum_H H^{-w+n-1+n}$, что приводит к неравенству $w > 2n$. Для дальнейшего улучшения результата Малера Б. Фолькман использовал оценку

$$|P'(\alpha_1)| > c(n)H^{-n/3} \tag{0.4}$$

и получил сходимость при $w > 4n/3$. Если $|P'(\alpha_1)| \leq c(n)H^{-n/3}$, то можно показать, что таких многочленов немного, используя результант двух неприводимых многочленов P_1 и P_2, для каждого из которых выполняется неравенство, противоположное (0.4).

Равенство $w_1(x) = 1$ для почти всех действительных чисел следует из теоремы Хинчина. Равенство $w_2(x) = 2$ для почти всех чисел доказал Кубилюс [31], применяя метод тригонометрических сумм. Фолькман [131], опираясь на результаты Давенпорта [92] о бинарных кубических формах, получил равенство $w_3(x) = 3$ для почти всех чисел.

Теорема Спринджука. В 1964 году В.Г. Спринджук решил проблему Малера [36, 37, 38]. Изложим кратко суть его метода. Наряду с неравенством (0.1), он рассмотрел неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1-\epsilon/2}. \tag{0.5}$$

Интервал $I_1(P) = \{x : |x - \alpha_1| < 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1},\ |P(x)| < H^{-n-\epsilon}\}$, в котором содержатся все x с ближайшим корнем α_1, находится внутри интервала $I_2(P) = \{x : |x - \alpha_1| < 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1},\ |P(x)| < H^{-n+1-\epsilon/2}\}$. Неравенства (0.1) и (0.5) будем рассматривать для класса многочленов, у которых старший коэффициент фиксирован, а остальные a_j, $0 \le j \le n-1$, лежат в промежутке $[-H, H]$. Если при этом интервалы $I_2(P)$ пересекаются незначительно и $x \in [a, b]$, то $\sum_P \mu_1(I_2(P)) \le 2(b-a)$. Поскольку $\mu_1(I_1(P)) < H^{-1-\epsilon/2}\mu_1(I_2(P))$, то

$$\sum_P \mu_1(I_1(P)) \le 2(b-a)H^{-1-\epsilon/2}. \tag{0.6}$$

Ряд, состоящий из правых частей неравенства (0.6), сходится, что завершает доказательство. Если мера пересечения интервалов $I_2(P_1)$ и $I_2(P_2)$, $P_1 \ne P_2$, больше половины длины $I_2(P_1)$, то на пересечении $I_2(P_1)$ и $I_2(P_2)$ для многочлена $R(x) = P_2(x) - P_1(x)$ верно неравенство $|R(x)| < 2H^{-n+1-\epsilon/2}$, $\deg R \le n-1$. Тем самым, проведен индуктивный переход к многочленам степени $n-1$. Для многочленов P, $\deg P \le 3$, проблема Малера была уже решена.

Гипотеза Бейкера. Вскоре А. Бейкер [46] получил усиление теоремы Спринджука. Он доказал, что при монотонно убывающей функции Ψ_3 неравенство

$$|P(x)| < \Psi_3^n(H(P)) \tag{0.7}$$

имеет для почти всех x конечное число решений, если ряд

$$\sum_{H=1}^{\infty} \Psi_3(H) \tag{0.8}$$

сходится. Бейкер также пользовался методом математической индукции, и поэтому при переходе в неравенстве (0.7) от многочленов степени k к многочленам степени $k-1$ происходила потеря на логарифмический множитель, который должен был обеспечить сходимость ряда. Это приводило к избыточности условия на сходимость. В этой же работе он высказал гипотезу, согласно которой множество решений неравенства

$$|P(x)| < H(P)^{-n+1}\Psi_3(H(P)) \tag{0.9}$$

остается нулевой меры Лебега при сходимости ряда (0.8). Различие между теоремой Бейкера и гипотезой Бейкера становится хорошо заметным, если взять функцию $\Psi_3(x) = x^{-1}(\log x)^{-\gamma}$, $\gamma > 1$. Тогда в теореме Бейкера правая часть в неравенстве (0.7) будет иметь вид $H^{-n}\log^{-\gamma n} H$, а в гипотезе Бейкера $H^{-n}\log^{-\gamma} H$.

Гипотеза Бейкера была решена в 1989 году В.И. Берником [11]. Им была предложена новая классификация многочленов в зависимости от взаимного расположения корней многочленов. При условии $H^v < |P'(x)| \ll H$, $1/2 < v < 1$, в классе целочисленных многочленов степени n и высоты H фиксировались все коэффициенты, кроме коэффициента a_0. На интервале длины $c(n)|P'(\alpha_1)|^{-1}$ при $c(n) < c_1$ многочлены P, удовлетворяющие неравенству (0.9), принимают значения $|P(x)| < 1/2$, и поэтому интервалы длины $c_1|P'(\alpha_1)|^{-1}$, построенные для различных многочленов P_1 и P_2, не пересекаются. Это позволяет точно просуммировать меры множества решений (0.9) и получить сходящийся ряд. Применение леммы Бореля-Кантелли завершает доказательство. Если $|P'(x)| \leq H^{v_1}$, $v_1 \leq v$, то можно применить неравенство $\Psi_3(H) < c_2H^{-1}$ и рассматривать систему неравенств

$$|P(x)| < c_2H(P)^{-n}, \;\; |P'(x)| \leq H^{v_1}. \tag{0.10}$$

В дальнейшем важно как мера тех x, для которых выполняется система неравенств (0.10), зависит от изменения правой части в первом неравенстве (0.10). Если эта зависимость линейная, то правую часть в (0.10) увеличиваем и оснанавливаемся при наступлении нелинейности. При этом незначительно увеличивается и правая часть во втором неравенстве (0.10). В [11] Берником доказано, что для неприводимых многочленов P_1 и P_2 при наступлении нелинейности получившаяся система неравенств невозможна. Отсюда можно посчитать число интервалов и затем умножить это число на оценку меры множества решений (0.9) для фиксированного многочлена P. Вновь получим сходящийся ряд и лемма Бореля-Кантелли завершает доказательство.

В гипотезе Бейкера, как и в теореме Хинчина, подразумевалось, что при расходимости ряда (0.8) множество x, для которых неравенство (0.9) имеет бесконечное множество решений, будет иметь полную меру. Это действительно так, что доказал В.В. Бересневич [49].

Регулярные системы и гипотеза Спринджука. Бейкером и Шмидтом [47] было введено понятие регулярной системы.

Определение 0.1. *Счетное множество* Γ *действительных чисел вместе с нормировочной функцией* $N : \Gamma \to \mathbb{R}^+$ *называется регулярной системой* *точек на интервале J_0, если существует постоянная $C_1 = C_1(\Gamma, N)$ такая, что для любого конечного интервала $J \subset J_0$ существует положительное число $T_0 = T_0(\Gamma, N, J)$ такое, что для любого $T \geq T_0$ найдутся числа $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Gamma \cap J$ такие, что*

$$N(\alpha_i) \leq T \ \ (1 \leq i \leq t),$$
$$|\alpha_i - \alpha_j| \geq T^{-1} \ \ (1 \leq i < j \leq t),$$
$$t \geq C_1 T|J|.$$

Затем они доказали, что множество действительных алгебраических чисел α степени n и высоты $H = H(\alpha)$ вместе с функцией $N(\alpha) = H^{n+1}(\alpha)\log^{-\gamma} H(\alpha)$ образует регулярную систему при $\gamma = 3n(n+1)$. Берник [11] доказал, что можно взять $\gamma = n+1$, а Бересневич доказал регулярность при $\gamma = 0$. Результата Бейкера и Шмидта оказалось достаточно, чтобы получить точную оценку снизу для размерности Хаусдорфа множества действительных чисел x, для которых при $w > n$ неравенство $|P(x)| < H^{-w}$ имеет бесконечное число решений. Для получения аналога теоремы Хинчина в случае расходимости в задаче (0.9) необходимо иметь $\gamma = 0$ или, другими словами, оптимальную регулярную систему [49].

В монографии [40] Спринджук поставил проблему об обобщении проблемы Малера с многочленов на более общие функции: $(n+1)$-раз непрерывно дифференцируемые и для которых вронскиан для производных почти везде отличен от нуля. Еще ранее в работе [122] В. Шмидт рассмотрел случай $n = 2$. Шмидт параметризовал кривую $F = (f_1(x), f_2(x))$, заменив x на аргумент, связанный с длиной кривой, а затем с помощью методов геометрии чисел он оценил количество целых коэффициентов (a_0, a_1, a_2) функции $F(x) = a_2 f_2(x) + a_1 f_1(x) + a_0$ при условии $\max_{0 \leq i \leq n} |a_i| \leq Q$ и одновременной малости $|F(x)|$ и $|F'(x)|$. Гипотеза Спринджука для $n = 3$ была решена Берником и Бересневичем [48]. Вскоре Д. Клейнбок и Г. Маргулис [106] получили полное решение проблемы Спринджука и обобщили свой результат на гиперболические приближения, в которых правая часть в неравенствах выражается не через максимум модулей коэффициентов, а через произведение модулей ненулевых коэффициентов. К решению задач метрической теории диофантовых приближений Д. Клейнбок и Г. Маргулис применили методы теории динамических систем. Их основной результат состоял в том, что аппроксимация нуля функцией $F(x) = a_n f_n(x) + a_{n-1} f_{n-1}(x) + \ldots + a_1 f_1(x) + a_0$ в любой действительной точке x с помощью принципа Дирихле является наилучшей. Если в показателе степени правой части вычтем любое $\epsilon > 0$, то новая, уже более сильная аппроксимация, возможна бесконечно часто только на множестве нулевой меры. Приведем формулировку результата Д. Клейнбока и Г. Маргулиса для кривых, удовлетворяющих условиям в гипотезе Спринджука (отметим, что они исследовали многообразия из более широкого класса).

Теорема 0.2. *При любом $\epsilon > 0$ для почти всех чисел $x \in I$ неравенство*

$$|a_n f_n(x) + \ldots + a_1 f_1(x) + a_0| < H(F)^{-n-\epsilon}$$

имеет лишь конечное число решений в $\bar{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$.

Далее возникла ситуация аналогичная проблеме Малера. Можно ли функцию $H^{-n-\epsilon}$ в правой части неравенства несколько увеличить и довести ее до правой части в неравенстве (0.9)? Какой результат можно ожидать в случае расходимости ряда? Эти обе задачи были решены. В случае сходимости ряда было получено два полных, абсолютно одинаковых, результата, но совершенно разными методами в [50] и [62]. Затем объединившись авторы доказали и случай расходимости [51]. Вскоре был решен комплексный аналог [105] гипотезы Спринджука и p-адический [117].

Выше кратко описаны результаты и методы метрической теории диофантовых приближений на многообразиях. В каждой из последующих глав остановимся на результатах и методах более специальных исследований.

Цель работы.

Обобщить метрическую теорему Хинчина о приближении действительных чисел рациональными на приближения алгебраическими числами в пространстве действительных, комплексных и p-адических чисел. Доказать метрические теоремы с условием сходимости рядов из значений немонотонных функций. Рассмотреть неоднородные приближения в $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Построить регулярные и повсеместные системы из точек Ω с алгебраическими координатами, в том числе и в коротких интервалах.

Научная новизна.

В диссертации созданы новые методы, позволяющие исследовать совместные диофантовы приближения в полях действительных, комплексных и p-адических чисел. Для доказательства теорем типа Хинчина-Грошева в случае сходимости применяется новая модификация метода существенных и несущественных областей. Решенные в диссертации задачи возникают в теории вероятностей, теории дифференциальных уравнений, в задачах математической физики. Перечислим основные результаты.

1. Получен полный аналог теоремы Хинчина в случае сходимости для многочленов произвольной степени при совместных приближениях в полях действительных, комплексных и p-адических чисел.

2. Построена оптимальная регулярная система из точек с алгебраическими координатами, на основе которой доказан аналог теоремы Хинчина в случае расходимости для совместных приближений в $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Доказана регулярность алгебраических чисел в коротких интервалах.

3. В пространствах $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{R} \times \prod_{i=1}^{t-1} \mathbb{Q}_{p_i}$ решены метрические задачи с немонотонной функцией аппроксимации, что является усилением теорем типа Хинчина.

4. Доказан аналог теоремы Хинчина в случае расходимости для неоднородных совместных приближений в $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Для действительного случая при сходимости ряда решен аналог теоремы Хинчина для неоднородных приближений и немонотонной функции аппроксимации.

5. Доказано существование целочисленных многочленов с близкими сопряженными корнями и найдена оценка снизу для числа многочленов, у которых модули дискриминантов не превосходят заданной величины и делятся на большую степень простого числа.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в спецкурсах на математических факультетах университетов. Разработанные в диссертации методы могут быть использованы при дальнейшем развитии метрической теории диофантовых приближений, а также при нахождении распределения алгебраических чисел, их дискриминантов и результантов. Они имеют отношение к метрическим аспектам, возникающим в задачах с резонансными явлениями. Вопрос о разрешимости граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными связан с так называемой проблемой малых знаменателей [1, 32]. Впервые она возникла в небесной механике в XVIII веке при исследовании дифференциальных уравнений, описывающих движения планетных систем в ньютоновских гравитационных полях [28]. Влияние малых знаменателей состоит в том, что в решениях дифференциальных уравнений, представленных рядами Фурье, имеется бесконечно много членов с коэффициентами, знаменатели которых сколь угодно близки к нулю, что может привести к расходимости данных рядов; с динамической точки зрения в движениях планет появляются эффекты, называемые в физике резонансными. В задачах такого типа малые знаменатели имеют вид линейной формы $l(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, где $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; при этом точка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ лежит на некотором подмногообразии $M \subset \mathbb{R}^n$. Метрический подход к проблеме малых знаменателей состоит в том, что анализ сходимости рядов в решениях дифференциальных уравнений проводится только для множества точек $\mathbf{x}$, удовлетворяющих некоторым оценкам снизу

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \geq \psi(\mathbf{a}),$$

(где ψ – некоторая функция от коэффициентов a_i линейной формы $l(\mathbf{a}, \mathbf{x})$) которые выполняются для всех $\mathbf{x} \in M$, за исключением некоторого множества нулевой меры.

Результат Гурвица, теоремы типа Хинчина и Грошева для случая сходимости [50, 62] нашли применение в разработке новых способов передачи данных на передающей стороне и выравнивании интерференции на приемной стороне системы связи [118].

Апробация работы.

Результаты, полученные в диссертации, докладывались на российских и международных конференциях: V Международная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" (Тула, 19–24 мая 2003), Международная конференция "Diophantine analysis, uniform distributions and applications" (Минск, Беларусь, 25–30 августа 2003), VI Международная конференция, посвященная 100-летию Н.Г. Чудакова (Саратов, 13–17 сентября 2004), IX Белорусская математическая конференция (Гродно, Беларуссия, 3–6 ноября 2004), Международная конференция "Аналитические методы в теории чисел, теории вероятностей и математической статистике" (Санкт-Петербург, 25–29 апреля 2005), 5th International Algebraic Conference in Ukraine (Одесса, Украина, 20–27 июля 2005), Международная конференция "Аналитические и вероятностные методы в теории чисел" (Паланга, Литва, 25–29 сентября 2006), Международная конференция "Диофантовы и аналитические проблемы теории чисел" (Москва, 29 января – 2 февраля 2007), 59th British Mathematical Colloquium (Суонси, Великобритания, 16–19 апреля 2007), XXXII Дальневосточная математическая школа-семинара имени акад. Е.В. Золотова (Владивосток, 29 августа – 4 сентября 2007), 60th British Mathematical Colloquium (Йорк, Великобритания, 25–28 марта 2008), "International Conference on Number Theory" (Шяуляй, Литва, 11–15 августа 2008), XXXIV Дальневосточная математическая школа-семинара имени акад. Е.В. Золотова "Фундаментальные проблемы математики и информационных наук"(Хабаровск, 25–30 июня 2009), VII Международная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" (Тула, 11–16 мая 2010), Международная конференция "27th Journees Arithmetiques" (Вильнюс, Литва, 27 июня – 1 июля 2011), Международная конференция "Диофантовы приближения. Современное состояние и приложения" (Минск, Беларусь, 3–8 июля 2011), IX Международная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" (Тула, 24–26 апреля 2012), Международная конференция "Диофантов анализ" (Астрахань, 30 июля – 3 августа 2012), Международная конференция "Torus Actions: Topology, Geometry and Number Theory"(Хабаровск, 2–7 сентября 2013).

Результаты обсуждались на специализированных семинарах: под руководством чл.- корр. РАН Ю.В. Нестеренко и д.ф.-м.н. Н.Г. Мощевитина в МГУ

(2003 – 2013), под руководством чл.- корр. РАН В.А. Быковского в ХО ИПМ ДВО РАН (2007–2013), под руководством д.ф.-м.н. В.И. Берника в Национальной Академии Наук Беларуси (2003 – 2012), под руководством д.ф.-м.н. В.Г. Журавлева в ВГУ (2000 – 2013), под руководством д.ф.-м.н. Л.А. Шеметкова в Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины (2011), в университете Мейнута (Ирландия, 2005 – 2013), университете Ливерпуля (Великобритания, 2007), университете Корка (Ирландия, 2013), университете Билефельда (Германия, 2013) и университете Йорка (Великобритания, 2006 – 2013).

1 Теорема Хинчина в случае сходимости для совместных приближений

1.1 Основные результаты главы

Метрические задачи в поле комплексных чисел начали рассматриваться практически одновременно с задачами в поле действительных чисел. Уже упомянутая проблема Малера доказывалась параллельно для действительных и комплексных чисел. В комплексном случае Малер [111] показал, что $\sup_{n\geq 1}\frac{w_n(x)}{n}\leq 7/2$ для почти всех комплексных чисел. В дальнейшем Коксма [107] получил $\sup_{n\geq 1}\frac{w_n(x)}{n}\leq 5/2$, а Левек [108] улучшил до $\sup_{n\geq 1}\frac{w_n(x)}{n}\leq 3/2$. Позднее Каш и Фолькман [99] получили $w_n(x)\leq n-1$ для $n\geq 2$, а затем Фолькман [130] получил более точное неравенство $w_n(x)\leq 2n/3-1/2$ для $n\geq 2$. Спринджук [34] получил $w_n(x)\leq 5n/8-11/16$ для $2\leq n\leq 7$ и $w_n(x)\leq 2n/3-1$ для $n\geq 8$. Каш [98] доказал, что $w_2(x)=1/2$, а Фолькман [128], что $w_3(x)=1$ для почти всех комплексных чисел.

Попытка доказать аналог проблемы Малера в поле p-адических чисел для многочленов третьей степени была предпринята в [101], но в доказательстве оказался существенный пробел. Частичные результаты относительно p-адического аналога гипотезы Малера были получены Туркстром [125], Локом [109], Кашем и Фолькманом [100], и Спринджуком [35]. В.Г. Спринджук решил проблему Малера, а также ее аналог в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}_p$ [39, 40].

В [39] он поставил задачу об обобщении проблемы Малера на совместные приближения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, $2\leq k<n$, которая была решена в [8]. В [41] Спринджук сформулировал гипотезу о справедливости гипотезы Малера в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$. Гипотеза была доказана Ф. Желудевичем [133]. Однако методы работ [8, 133] принципиально не позволяли доказать аналог теоремы Хинчина для полиномиальных кривых, поскольку существенно опирались на специальный степенной вид правых частей неравенств.

В первой главе диссертации решаются две задачи, обобщающие теорему Хинчина в случае сходимости.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\mu_2(A_2)$ – мера Лебега измеримого множества $A_2\subset\mathbb{C}$; $\mu_3(A_3)$ обозначает меру Хаара измеримого множества $A_3\subset\mathbb{Q}_p$ (конструкция и свойства меры Хаара описаны в [40]). Будем рассматривать нормированную меру Хаара μ_3 в $\mathbb{Q}_p$ так, что $\mu_3(\mathbb{Z}_p)=1$ (поэтому $\mathbb{Z}_p$ можно рассматривать как аналог отрезка $[0,1]$ в $\mathbb{R}$). Используя эти определения, определим произведение мер μ на $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$, полагая $\mu(A)=\mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\mu_3(A_3)$ для множества $A=A_1\times A_2\times A_3$, где $A_1\subseteq\mathbb{R}$, $A_2\subseteq\mathbb{C}$ и $A_3\subseteq\mathbb{Q}_p$. Зафиксируем параллелепипед $T_0=I\times K\times D\subset\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$, где I – интервал в $\mathbb{R}$, K – круг в $\mathbb{C}$ и D – цилиндр в $\mathbb{Q}_p$. Пусть $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – векторы с действительными координатами, где $\lambda_i > 0$ и $v_i \geq 0$, такие что $v_1 + 2v_2 + v_3 = n - 3$ и $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Далее, пусть $\mathcal{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ обозначает множество точек $(x, z, w) \in T_0$, для которых система неравенств

$$\begin{array}{rcl} |P(x)| & \leq & H(P)^{-v_1}\Psi^{\lambda_1}(H(P)), \\ |P(z)| & \leq & H(P)^{-v_2}\Psi^{\lambda_2}(H(P)), \\ |P(w)|_p & \leq & H(P)^{-v_3}\Psi^{\lambda_3}(H(P)), \end{array} \tag{1.1}$$

выполняется для бесконечно числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n$.

Теорема 1.1. *Пусть $n \geq 3$. Если Ψ – положительная монотонно убывающая функция вещественного переменного, такая, что $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$, тогда*

$$\mu(\mathcal{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0.$$

Рассмотренная в данной главе задача принципиально отличается от предшествующих метрических задач, решенных Спринджуком, Берником, Бересневичем, Маргулисом, Клейнбоком и Ковалевской. В задачах, ими решенных, показатели степени в аппроксимации были близки к степени рассматриваемых многочленов. Это приводило к тому, что даже в несколько расширенных интервалах(кругах, цилиндрах) могли оказаться один или два корня, поэтому оценку мер достаточно было проводить по первой и второй производной. В данной задаче из-за произвольности правых частей неравенств происходит разделение показателей аппроксимации на малые значения, и тогда в расширенных областях может оказаться много корней. В таком случае для оценки мер надо привлекать производные высоких порядков, поскольку оценки по первой и второй производной могут оказаться хуже тривиальных. В главе вводится новое понятие линейных и нелинейных систем диофантовых неравенств по типу аппроксимации нуля значениями производных в окрестности корней многочленов. Благодаря этому, появилась возможность создать метрическую теорию диофантовых совместных приближений в различных метриках. В главе предложена модификация метода существенных и несущественных областей, основанная на обобщении метода работы [11] и леммы Гельфонда [27] из теории трансцендентных чисел.

Изучение поведения производных многочленов (и вообще, линейных форм гладких функций) было крайне важно при доказательстве теорем типа Хинчина. Исследуем метрические свойства множества

$$\mathcal{A}_n(\Psi_4, \Psi_5) = \left\{ x \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] : \begin{array}{rcll} |P(x)| & < & \Psi_4(H(P)) & \text{для бесконечного} \\ |P'(x)| & < & \Psi_5(H(P)) & \text{числа } P \in \mathcal{P}_n \end{array} \right\}. \tag{1.2}$$

Опираясь на результаты Клейнбока и Маргулиса [106], в 2001 Берник, Клейнбок и Маргулис [62] получили обобщение теоремы Спринджука (гипотезы Малера), включающее условие на производные. Этот результат доказан для линейных форм невырожденных семейств функций и в случае многочленов сводится к следующему утверждению.

Теорема 1.2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$\mu_1(\mathcal{A}_n(\Psi_4, \Psi_5)) = 0, \tag{1.3}$$

где $\Psi_4(h) = h^{-w-\lambda}$ и $\Psi_5(h) = h^{1-\lambda}$ для некоторого $\lambda \geq 0$ и $w > n - 2\lambda$.

В той же работе Берник, Клейнбок и Маргулис поставили гипотезу о нахождении оптимальных условий для функций Ψ_4 и Ψ_5, опеспечивающих справедливость (1.3). Другими словами, они поставили проблему о доказательстве теоремы типа Хинчина для $\mathcal{A}_n(\Psi_4, \Psi_5)$. В следующей теореме получено решение этой проблемы в случае сходимости для функций Ψ_4 и Ψ_5 специального вида.

Теорема 1.3. *Пусть функции $\Psi_4, \Psi_5 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что $\Psi_4\Psi_5$ – монотонно убывающая функция. Пусть $n \geq 2$ – целое число. Предположим, что $\Psi_5(h) \geq h^{1/2+\epsilon}$, $\epsilon > 0$, тогда*

$$\mu_1(\mathcal{A}_n(\Psi_4, \Psi_5)) = 0, \quad \textit{если} \ \sum_{h=1}^{\infty} h^{n-2}\Psi_4(h)\Psi_5(h) < \infty.$$

Наибольшая трудность при доказательстве гипотезы возникала при значениях правой части неравенства для производной вблизи ее верхней границы. Введение новой классификации целочисленных векторов позволило уменьшить величину модуля производной. Далее стало возможным применение леммы Клейнбока-Маргулиса [106].

Отметим, что в случае, когда мера множеств равна нулю, естественно возникает вопрос о размерности Хаусдорфа таких множеств. В работах автора [67, 74, 80] получены оценки для размерности Хаусдорфа множеств точек полиномиальных кривых и поверхностей.

Настоящая глава основана на работах [17, 23, 68, 69, 77, 78].

1.2 Вспомогательные леммы и результаты

В силу того, что функция Ψ^λ монотонна и ряд $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H)$ сходится, нетрудно показать, что $\Psi(H) < cH^{-1}$, где константа c не зависит от H. Следовательно, в некоторых случаях для простоты вычислений вместо системы (1.1) будет рассмотрена более слабая система

$$\begin{array}{rcl} |P(x)| & \ll & H(P)^{-v_1-\lambda_1}, \\ |P(z)| & \ll & H(P)^{-v_2-\lambda_2}, \\ |P(w)|_p & \ll & H(P)^{-v_3-\lambda_3}. \end{array} \tag{1.4}$$

Здесь и далее $A \ll B$ означает, что существует константа $C > 0$ такая, что $A \leq CB$; выражение $A \asymp B$ эквивалентно $A \ll B \ll A$.

В общем случае, положительные константы, зависящие только от n, будем обозначать через $c(n)$; обычные формальные правила применимы к константам так, что $c(n) + c(n) = c(n)$ и $c(n)c(n) = c(n)$. Если необходимо, то константы будем нумеровать $c_j(n)$, $j = 1, 2, \ldots$.

В этом подразделе сначала будет показано, что достаточно рассмотреть лишь неприводимые многочлены $P \in \mathbb{Z}[x]$. Это следует непосредственно из нижеприведенной леммы, доказанной в [133].

Лемма 1.1. *Пусть $G(v)$ – множество точек (x, z, w), для которых неравенство*

$$|P(x)||P(z)|^2|P(w)|_p < H^{-v}, \quad n = \deg P \geq 2, \quad H = H(P),$$

имеет бесконечно много решений в многочленах $P \in \mathbb{Z}[x]$. Тогда для $v > n - 2$

$$\mu(G(v)) = 0.$$

Пусть $P = P_1P_2$ – приводимый многочлен, удовлетворяющий (1.1). Пусть $\deg P_1 = d \leq n - 1$. Тогда, без ограничения общности, можем считать, что

$$|P_1(x)||P_1(z)|^2|P_1(w)|_p \ll H(P_1)^{-n+3}\Psi(H(P_1)) \ll H(P_1)^{-d+1}.$$

В силу леммы 1.1, мера множества (x, z, w), для которых неравенство (1.1) имеет бесконечное число решений в приводимых многочленах P, равна нулю.

Далее будем полагать, что P – неприводимый примитивный многочлен, поскольку при переходе от непримитивного к примитивному многочлену получим более сильное в совокупности условие.

Многочлен P называется *ведущим*, если он удовлетворяет условиям

$$\begin{array}{c} H(P) < c(n)|a_n|, \;\; c(n) \geq 1, \\ |a_n|_p > c(n). \end{array} \tag{1.5}$$

В следующей лемме будет показано, что используя сдвиги и находя обратные величины (если необходимо), каждый многочлен P может быть преобразован в многочлен T, удовлетворяющий (1.5). Поскольку существует конечное число возможных сдвигов, то каждая точка x, удовлетворяющая условию (1.1) бесконечно часто, также удовлетворяет этому условию для бесконечного числа ведущих многочленов для каждого сдвига. Подобное сведение к специального вида многочленам было сделано в [40] отдельно в каждой из рассматриваемых метрик. Поскольку такое сведение одновременно в нескольких метриках немного сложнее, то приведем его ниже.

Лемма 1.2. *Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – множество различных простых чисел и $P \in \mathbb{Z}[x]$ – примитивный неприводимый многочлен. Пусть $Q(x) = P(x+m)$ и $T(x) = x^n Q(\frac{1}{x})$. Тогда существует натуральное число $m \leq C(n, p_1, \ldots, p_k)$ такое, что многочлен $T(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$ удовлетворяет следующим условиям*

$$|b_n| \gg H(T), \;\; |b_n|_{p_i} \gg 1, \;\; i = 1, \ldots, k.$$

Доказательство. Предположим, что для некоторого d выполняется система неравенств

$$\max_{1 \leq k \leq n+1} |P(k)|_{p_1} < p_1^{-d}. \tag{1.6}$$

Следовательно, для каждого $i = 1, \ldots, n+1$

$$i^n a_n + i^{n-1} a_{n-1} + \cdots + i a_1 + a_0 = p_1^d |\theta_i|_{p_1}, \tag{1.7}$$

где $\theta_i = p_1^{d_i}\theta_i'$, $d_i \geq 1$, $\theta_i \in \mathbb{N}$ и $(p_1, \theta_i') = 1$. Поскольку P – примитивный многочлен, то существует j_0, $0 \leq j_0 \leq n$, такое, что $|a_{j_0}|_{p_1} = 1$. Решим систему (1.7) относительно a_{j_0}, и найдем

$$a_{j_0} = \frac{\Delta_{j_0}}{\Delta},$$

где Δ – определитель матрицы (b_{ij}) размера $(n+1) \times (n+1)$ и $b_{ij} = i^{j-1}$, $1 \leq i, j \leq n+1$. Нетрудно проверить, что $\Delta = \prod_{k=0}^{n-1}(n-k)!$.

Если p_1^r делит $k!$, то

$$r \leq \left[\frac{k}{p_1}\right] + \left[\frac{k}{p_1^2}\right] + \ldots \leq k \sum_{j=1}^{\infty} p_1^{-j} \leq k.$$

Следовательно, Δ содержит степень p_1 не большую, чем n^n. Нетрудно показать, что p^d делит Δ_{j_0}, и, следовательно, p^{d-n^n} делит a_{j_0}. Если $d > n^n$, то получаем противоречие с фактом, что $|a_{j_0}|_{p_1} = 1$, и, следовательно, равенство (1.6) противоречиво. Поэтому, существует $m_0 \in \{1, \ldots, n+1\}$ такое, что $|P(m_0)|_{p_1} \gg 1$.

Определим целое число l_1 так, что $|P(m_0)|_{p_1} = p_1^{-l_1}$ и выберем $l_1' > l_1$. Далее рассмотрим числа вида $r_1(m_1) = m_1 p_1^{l_1'} + m_0$, $1 \leq m_1 \leq n+1$. Ясно, что $|P(r_1(m_1))|_{p_1} = |P(m_0)|_{p_1} \gg 1$. Приведенный выше алгоритм для неравенства (1.6), применим к числам $r_1(m_1)$, $1 \leq m_1 \leq n+1$. Предположим, что существует такое число d, что $|P(r_1(m_1))|_{p_2} < p_2^{-d}$. Пусть Δ' – определитель матрицы (b_{ij}), где $b_{ij} = (ip_1^{l_1'} + m_0)^{j-1}$, $1 \le i, j \le n+1$, тогда

$$\Delta' = (p_1^{l_1'})^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} (n-k)!.$$

Следовательно, получаем существование такого числа $m_1' \in \{1, \ldots, n+1\}$, что $|P(r_1(m_1'))|_{p_2} \gg 1$; т.е. существует l_2, удовлетворяющее равенству $|P(r_1(m_1'))|_{p_2} = p_2{}^{-l_2}$.

Опять воспользуемся вышеприведенным алгоритмом; для $l_2' > l_2$ рассмотрим числа $r_2(m_2) = m_2 p_1^{l_1'} p_2^{l_2'} + m_1' p_1^{l_1'} + m_0$, $1 \le m_2 \le n+1$. По построению получаем, что $|P(r_2(m_2))|_{p_1} \gg 1$ и $|P(r_2(m_2))|_{p_2} \gg 1$. Следуя алгоритму также получаем, что $|P(r_2(m_2)|_{p_3} \gg 1$. Продолжим применять этот алгоритм, и в итоге получим существование такого числа m_{k-1}', $1 \le m_{k-1}' \le n+1$, что $|P(r_{k-1}(m_{k-1}'))|_{p_i} \gg 1$ для $i = 1, \ldots, k$.

Аналогично для архимедовой метрики рассмотрим числа

$$r_k(m_k) = m_k p_1^{l_1'} \cdots p_k^{l_k'} + \ldots + m_2' p_1^{l_1'} p_2^{l_2'} + m_1' p_1^{l_1'} + m_0$$

для $m_k = 1, \ldots, n+1$. Покажем, что среди $n+1$ чисел найдется число m_k' такое, что $|P(r_k(m_k'))| \gg H$. Предположим, что система неравенств

$$\max_{1 \le m_k \le n+1} |P(r_k(m_k))| \le c_0 H. \tag{1.8}$$

выполняется для некоторой константы $c_0 > 0$ (будет выбрана позднее). Поскольку $P \in \mathcal{P}_n(H)$, то существует i_0, $0 \le i_0 \le n$, такое, что $|a_{i_0}| = H$. Решим систему (1.7) относительно a_{i_0}, и получим, что $P(r_k(m_k)) = \xi_j c_1 H$, где $|\xi_j| \le 1$, $1 \le j \le n+1$, и

$$a_{i_0} = \frac{\Delta_{i_0}''}{\Delta''}.$$

Здесь Δ'' – определитель матрицы (b_{ij}), где

$$b_{ij} = (ip^{l_1'} \ldots p^{l_k'} + \cdots + m_2' p_1^{l_1'} p_2^{l_2'} + m_1' p_1^{l_1'} + m_0)^{j-1}, 1 \le i, j \le n+1,$$

таким образом,

$$\Delta'' = (p_1^{l_1'} \cdots p_k^{l_k'})^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} (n-k)!.$$

Справедливо равенство $\Delta_{i_0}'' = c_0 c_0' H$ для некоторой константы $c_0' > 0$. Выберем c_0 так, что $c_0 c_0' < 1$. Так как $|a_{i_0}| = H$, то неравенство (1.8) противоречиво. Следовательно, существует m_k' такое, что $|P(r_k(m_k'))| \gg H$.

Определим многочлены $Q(x) = P(x + r_k(m_k')) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, где $b_0 = P(r_k(m_k'))$, и $T(x) = x^n Q(\frac{1}{x}) = g_n x^n + g_{n-1} x^{n-1} + \ldots + g_1 x + g_0$, где $g_n = P(r_k(m_k'))$. Тогда для высот многочленов справедлива следующая оценка $H(T) \asymp H(Q) \asymp H(P)$, и многочлен T удовлетворяет всем условиям леммы. $\square$

Приведем некоторые понятия из p-адического анализа. Зафиксируем простое число $p \geq 2$; $|w|_p$ – p-адическая норма $w \in \mathbb{Q}_p$. Известны следующие свойства p-адической нормы:

(1)$|w|_p \geq 0$ и $|w|_p = 0$ тогда и только тогда, когда $w = 0$;
(2)$|w_1 w_2|_p = |w_1|_p |w_2|_p$;
(3)$|w_1 + w_2|_p \leq \max\{|w_1|_p, |w_2|_p\}$, причем, если $|w_1|_p \neq |w_2|_p$, то $|w_1 + w_2|_p = \max\{|w_1|_p, |w_2|_p\}$.

Множество $K(\gamma, r) = \{w \in \mathbb{Q}_p : |w - \gamma|_p \leq r\}$ называют кругом (диском или цилиндром) в $\mathbb{Q}_p$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $\gamma \in \mathbb{Q}_p$. Мера Хаара круга $K(\gamma, p^{-k})$ равна p^{-k}. Для произвольного $r > 0$, очевидно, найдется целое число k такое, что $p^{-k} \leq r < p^{-k+1}$. Тогда $K(\gamma, r) = K(\gamma, p^{-k})$ и, следовательно, $\mu_3(K(\gamma, r)) = p^{-k} = p^{[\log_p r]} \asymp r$.

Обозначим через $\mathcal{P}_n^*(H)$ множество ведущих неприводимых примитивных многочленов $P \in \mathcal{P}_n$, для которых $H(P) = H$. Пусть $\mathcal{P}_n^* = \cup_{H=1}^{\infty} \mathcal{P}_n^*(H)$ и $L_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ – множество точек (x, z, w), для которых система неравенств (1.1) выполняется для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n^*$. Используя лемму 10 [40, стр. 93] и ее аналог в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ получаем, что если $\mu(\mathcal{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) > 0$, то множество $L_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ также имеет положительную меру. Следовательно, для доказательства того, что $\mu(\mathcal{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$ достаточно доказать, что $\mu(L_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – корни многочлена $P \in \mathcal{P}_n^*(H)$ в $\mathbb{C}$ и $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ – корни в $\mathbb{Q}_p^*$, где $\mathbb{Q}_p^*$ – наименьшее поле, содержащее $\mathbb{Q}_p$ и все алгебраические числа. Поскольку множество алгебраических чисел счетно, то в поле $\mathbb{Q}_p^*$ можно определить нормирование, продолжающее нормирование в $\mathbb{Q}_p$. Используя неравенства (1.5), нетрудно показать, что

$$|\alpha_i| \ll 1, \quad |\gamma_i|_p \ll 1, \quad i = 1, \ldots, n; \tag{1.9}$$

т.е. корни ограничены. Определим множества для корней многочлена $P \in \mathcal{P}_n^*$

$$\begin{aligned} S_1(\alpha_j) &= \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha_j| = \min_{1 \leq i \leq n} |x - \alpha_i|\}, \\ S_2(\alpha_s) &= \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha_s| = \min_{1 \leq i \leq n} |z - \alpha_i|\}, \\ S_3(\gamma_k) &= \{w \in \mathbb{Q}_p : |w - \gamma_k|_p = \min_{1 \leq i \leq n} |w - \gamma_i|_p\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим множества $S_1(\alpha_j)$, $S_2(\alpha_s)$, $S_3(\gamma_k)$ для фиксированного набора j, s, k, и для упрощения обозначений будем полагать, что $j = 1$, $\alpha_s = \beta_1$ и $k = 1$, где множество корней $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ является перестановкой множества корней $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Упорядочим остальные корни P так, что

$$\begin{array}{rcccl}
|\alpha_1-\alpha_2| & \leq & |\alpha_1-\alpha_3| & \leq\ldots\leq & |\alpha_1-\alpha_n|,\\
|\beta_1-\beta_2| & \leq & |\beta_1-\beta_3| & \leq\ldots\leq & |\beta_1-\beta_n|,\\
|\gamma_1-\gamma_2|_p & \leq & |\gamma_1-\gamma_3|_p & \leq\ldots\leq & |\gamma_1-\gamma_n|_p.
\end{array}$$

Для многочлена $P \in \mathcal{P}_n^*(H)$ определим действительные числа ρ_{ij}, $i = 1,2,3$, из соотношений

$$\begin{array}{rcl}
|\alpha_1-\alpha_j| & = & H^{-\rho_{1j}},\quad 2\leq j\leq n,\quad \rho_{12}\geq\rho_{13}...\geq\rho_{1n},\\
|\beta_1-\beta_j| & = & H^{-\rho_{2j}},\quad 2\leq j\leq n,\quad \rho_{22}\geq\rho_{23}...\geq\rho_{2n},\\
|\gamma_1-\gamma_j|_p & = & H^{-\rho_{3j}},\quad 2\leq j\leq n,\quad \rho_{32}\geq\rho_{33}...\geq\rho_{3n}.
\end{array}$$

Для заданного достаточно малого числа $\epsilon_1>0$ определим $a=[\varepsilon_1^{-1}]$. В силу того, что корни $|\alpha_j|$, $|\beta_s|$, $|\gamma_k|_p$ ограничены, получаем, что $\rho_{ij}\geq-\frac{\epsilon_1}{2}(1\leq i\leq 3,\ 2\leq j\leq n)$ для достаточно большого H. Определим целые числа $k_j=[a\rho_{1j}]+1$, $l_j=[a\rho_{2j}]+1$ и $m_j=[a\rho_{3j}]+1$, $2\leq j\leq n$, из неравенств

$$\frac{k_j-1}{a}\leq\rho_{1j}<\frac{k_j}{a},\qquad \frac{l_j-1}{a}\leq\rho_{2j}<\frac{l_j}{a},\qquad \frac{m_j-1}{a}\leq\rho_{3j}<\frac{m_j}{a},$$
$$k_2\geq k_3\geq...\geq k_n\geq 0,\quad l_2\geq l_3\geq...\geq l_n\geq 0,\quad m_2\geq m_3\geq...\geq m_n\geq 0.$$

Далее определим числа q_i, r_i и s_i

$$\begin{array}{rcl}
q_i & = & \dfrac{k_{i+1}+\ldots+k_n}{a},\quad (1\leq i\leq n-1)\\
r_i & = & \dfrac{l_{i+1}+\ldots+l_n}{a},\quad (1\leq i\leq n-1)\\
s_i & = & \dfrac{m_{i+1}+\ldots+m_n}{a},\quad (1\leq i\leq n-1).
\end{array}\tag{1.10}$$

Положим $q_n=r_n=s_n=0$. С каждым многочленом $P\in\mathcal{P}_n^*(H)$ будем связывать три целочисленных вектора $\mathbf{q}=(k_2,\ldots,k_n)$, $\mathbf{r}=(l_2,\ldots,l_n)$ и $\mathbf{s}=(m_2,\ldots,m_n)$. Число таких векторов конечно (и зависит только от n, p и a), см. [40, лемма 24, стр. 46 и лемма 12, стр. 99]. Многочлены $P\in\mathcal{P}_n^*(H)$ с одним и тем же набором векторов $(\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s})$ объединим в подмножество $\mathcal{P}_n(H,\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s})$ и образуем множество $\mathcal{P}_n(\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s})=\cup_{H=1}^{\infty}\mathcal{P}_n(H,\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s})$.

Без ограничения общности, будем считать, что $x\in S_1(\alpha_1)$, $z\in S_2(\beta_1)$ и $w\in S_3(\gamma_1)$. В ходе доказательства теоремы будем оценивать значения многочленов, часто используя разложение в ряд Тейлора. Для получения оценок сверху для членов разложения в ряд Тейлора (и для других целей) будем использовать следующие две леммы (доказанные в [8] и [30]).

Лемма 1.3. *Пусть $P \in \mathcal{P}_n^*$. Тогда*

$$\begin{aligned}
|u-\alpha| &\leq 2^n|P(u)||P'(\alpha)|^{-1}, \\
|w-\gamma_1|_p &\leq |P(w)|_p|P'(\gamma_1)|_p^{-1}, \\
|u-\alpha| &\leq \min_{2\leq j\leq n}\left(2^{n-j}|P(u)||P'(\alpha)|^{-1}\prod_{k=2}^{j}|\alpha-\alpha_k|\right)^{\frac{1}{j}}, \\
|w-\gamma_1|_p &\leq \min_{2\leq j\leq n}\left(|P(w)|_p|P'(\gamma_1)|_p^{-1}\prod_{k=2}^{j}|\gamma_1-\gamma_k|_p\right)^{\frac{1}{j}}
\end{aligned}$$

где $u = x$ или $u = z$ и $\alpha = \alpha_1$ или $\alpha = \beta_1$ соответственно.

Лемма 1.4. *Пусть $P \in \mathcal{P}_n(H, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$. Тогда*

$$\begin{aligned}
|P^{(l)}(\alpha_1)| &< c(n)H^{1-q_l+(n-l)\varepsilon_1}, \\
|P^{(l)}(\beta_1)| &< c(n)H^{1-r_l+(n-l)\varepsilon_1}, \\
|P^{(l)}(\gamma_1)|_p &< c(n)H^{-s_l+(n-l)\varepsilon_1},
\end{aligned}$$

где $1 \leq l \leq n-1$, и

$$|P'(\alpha_1)| > H^{1-q_1}, \;\; |P'(\beta_1)| > H^{1-r_1}, |P'(\gamma_1)|_p > H^{-s_1}. \tag{1.11}$$

Следующие две леммы будут использоваться на протяжении всей работы.

Лемма 1.5. *Пусть $P \in \mathcal{P}_n'$ и $z \in S_2(\beta_1)$. Тогда*

$$|z-\beta_1| \leq n|P(z)||P'(z)|^{-1} \quad \text{при} \;\; P'(z) \neq 0. \tag{1.12}$$

Доказательство. Используя представление $P(z) = a_n(z-\beta_1)\dots(z-\beta_n)$ и $P'(z) = a_n\sum_{j=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{n}(z-\beta_i)}{z-\beta_j}$, а также факт, что $z \in S_2(\beta_1)$, получаем

$$|P'(z)||P(z)|^{-1} = \sum_{i=1}^{n}|z-\beta_i|^{-1} \leq n|z-\beta_1|^{-1},$$

откуда следует (1.12). □

Аналогично, в действительном и p-адическом случаях справедливы неравенства:

$$\begin{aligned}
&|x-\alpha_1| \leq n|P(x)||P'(x)|^{-1} \quad \text{при} \;\; x \in S_1(\alpha_1) \;\; \text{и} \;\; P'(x) \neq 0, \\
&|w-\gamma_1|_p \leq |P(w)|_p|P'(w)|_p^{-1} \quad \text{при} \;\; w \in S_3(\gamma_1) \;\; \text{и} \;\; P'(w) \neq 0.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Лемма 1.6. *Если корни α_i, $i = 1, \dots, n$, многочлена $P \in \mathcal{P}_n'$ удовлетворяют условию $|\alpha_i| < c$, $c > 0$, то $|a_n| \gg H(P)$.*

Доказательство. Во-первых, покажем, что существует множество корней $\alpha_{i_1}\ldots,\alpha_{i_s}$, $s\geq 1$, $\alpha_{i_k}\neq\alpha_{i_l}$, многочлена $P=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, удовлетворяющих неравенству

$$|\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_s}|\gg H(P)|a_n|^{-1}. \tag{1.14}$$

Пусть $H(P)=a_j$ для некоторого $0\leq j\leq n$. Из равенства

$$P(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

выразим коэффициент a_j и получим

$$H(P)=(-1)^{n-j}a_n(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-j}+\ldots+\alpha_{j+1}\alpha_{j+2}\ldots\alpha_n). \tag{1.15}$$

Число слагаемых в (1.15) равно C_n^j. Если абсолютное значение каждой из сумм меньше чем $(C_n^j)^{-1}|a_n|^{-1}H(P)$, то получаем противоречие.

Во-вторых, поскольку корни многочлена P ограничены сверху, то в силу (1.14) и условия $|\alpha_i|<c$ имеем

$$1\gg|\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_s}|\gg H(P)|a_n|^{-1}.$$

Следовательно, $|a_n|\gg H(P)$. $\square$

В следующей лемме, обобщающей результат Гельфонда [27], доказано, что два многочлена без общих корней не могут быть малы во всех метриках на параллелепипедах в $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$.

Лемма 1.7 ([15]). *Пусть P_1 и P_2 – два целочисленных многочлена степени не выше n без общих корней и $\max(H(P_1),H(P_2))\leq H$. Пусть $\delta>0$ и $\eta_i>0$, $i=1,2,3$. Пусть $I\subset\mathbb{R}$ – интервал, $K\subset\mathbb{C}$ – круг и $D\subset\mathbb{Q}_p$ – цилиндр, где $\mu_1(I)=H^{-\eta_1}$, $\mathrm{diam}K=H^{-\eta_2}$ и $\mu_3(D)=H^{-\eta_3}$. Если существуют такие $\tau_1>-1$, $\tau_2>-1$ и $\tau_3>0$, что для всех $(x,z,w)\in I\times K\times D$ выполняются неравенства*

$$|P_j(x)|<H^{-\tau_1},\ \ |P_j(z)|<H^{-\tau_2},\ \ |P_j(w)|_p<H^{-\tau_3},$$

для $j=1,2$, то

$$\tau_1+2\tau_2+\tau_3+3+2\max(\tau_1+1-\eta_1,0)+4\max(\tau_2+1-\eta_2,0)+2\max(\tau_3-\eta_3,0)<2n+\delta.$$

Далее сформулируем два классических результата. Первый из них является модификацией признака Коши, второй – лемма Бореля–Кантелли.

Лемма 1.8. *Пусть $\Psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ – монотонно убывающая функция. Тогда ряды*

$$\sum_{h=1}^{\infty}\Psi(h)\quad \textit{и}\ \sum_{k=0}^{\infty}2^k\Psi(2^k)$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Используя условие, что Ψ – монотонно убывающая функция, получим следующее двойное неравенство

$$2^{k+1}\Psi(2^{k+1}) \ll \sum_{2^k \le h < 2^{k+1}} \Psi(h) \ll 2^k\Psi(2^k).$$

Суммирование по всем $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ приводит к тому, что указанные в лемме ряды сходятся или расходятся одновременно. □

Лемма 1.9 (Борель–Кантелли)**.** *Пусть Ω – некоторое множество, на котором определена σ-адитивная мера λ. Пусть $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ – последовательность λ-измеримых подмножеств Ω. Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) < \infty,$$

то множество

$$E = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{l=k}^{\infty} E_l = \limsup_{k\to\infty} E_k$$

имеет нулевую λ-меру.

1.3 Доказательство теоремы 1.1

Поскольку $|\alpha_i| \ll 1$ и $|\gamma_i|_p \ll 1$, $1 \le i \le n$, то используя лемму 1.3 (при $j = n$ и $H \le H_0$), получаем, что множество $L_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ является подмножеством множества $\mathbf{T} = I \times K \times D$, где $I = [-c(n), c(n)]$, $K = \{z : |z| \le c(n)\}$ и $D = \{w : |w|_p \ll 1\}$. Зафиксируем $\delta_1 > 0$.

Удалим из параллелепипеда $\mathbf{T}$ множество малой меры так, чтобы в оставшейся части выполнялось неравенство $|\operatorname{Im} z| \ge \delta_1$. Используя лемму 1.3 при $j = n$, получаем, что $|z - \beta| < H(P)^{-\nu}$, где $\nu > 0$; поскольку правая часть неравенства стремится к нулю при $H(P) \to \infty$, то существует корень β такой, что $|\operatorname{Im} \beta| > \frac{1}{2}\delta_1$. В данном случае, существует также сопряженный корень $\bar{\beta}$ многочлена P такой, что $|\beta - \bar{\beta}| > \delta_1$, и для каждого действительного корня α многочлена P справедливы оценки $|\beta - \alpha| = |\bar{\beta} - \alpha| > \frac{1}{2}\delta_1$. Объединяя вышесказанное, получаем

$$|\operatorname{Im} \beta| > \frac{1}{2}\delta_1, \quad |\operatorname{Im} z| \ge \delta_1, \quad |\beta - \bar{\beta}| > \delta_1, \quad |\beta - \alpha| > \frac{1}{2}\delta_1. \tag{1.16}$$

1.3.1 Случай $n = 3$

Сначала докажем, что теорема справедлива при $n = 3$.

Лемма 1.10. *Если $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$, то $\mu(L_3(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$.*

Доказательство. Система (1.1) при $n = 3$ примет вид

$$|P(x)| < \Psi^{\lambda_1}(H), \quad |P(z)| < \Psi^{\lambda_2}(H), \quad |P(w)|_p < \Psi^{\lambda_3}(H). \tag{1.17}$$

В правых частях неравенств стоят величины, стремящиеся к нулю при $H \to \infty$. Поэтому, используя лемму 1.3, нетрудно показать, что при $H > H_0$ существуют действительный корень α многочлена P, комплексный корень β и его сопряженный корень $\bar{\beta}$, близкие к x, z и $\bar{z}$ соответственно. В силу неравенств (1.5) и (1.16), модули разностей $|\alpha - \beta| = |\alpha - \bar{\beta}|$ и $|\beta - \bar{\beta}|$ ограничены снизу величиной $c(\delta_1)$. Поэтому

$$\min(|P'(\alpha)|, |P'(\beta)|) > c(n, \delta_1)H(P).$$

При $|P'(\gamma)|_p < c(n, \delta_1)$ возникшая ситуация полностью аналогична задаче о неравенстве $|P(w)|_p < H^{-3}\Psi(H)$, которая рассмотрена в [30, 54]. Поэтому далее считаем, что

$$|P'(\gamma)|_p > c(n, \delta_1), \;\; w \in S_3(\gamma).$$

Зафиксируем H. Для многочлена $P \in \mathcal{P}_3^*(H)$ обозначим через $\sigma(P)$ множество точек $(x, z, w) \in \mathbf{T} \cap S_1(\alpha) \times S_2(\beta) \times S_3(\gamma)$, удовлетворяющих (1.17). Пусть $A_H = \cup_{P \in \mathcal{P}_3^*(H)} \sigma(P)$. Тогда, $L_3(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ – множество точек, принадлежащих бесконечному числу множеств A_H. Используя лемму 1.3 и два вышеприведенных неравенства, получаем, что мера множества $\sigma(P)$ удовлетворяет условию

$$\mu(\sigma(P)) < c(n)H^{-3}\Psi(H).$$

Суммируя последнюю оценку по трем оставшимся коэффициентам многочленов P, получаем $\mu(A_H) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_3^*(H)} \mu(\sigma(P)) < c(n)\Psi(H)$. Таким образом, в силу условия $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$ имеем

$$\sum_{H=1}^{\infty} \mu(A_H) \ll \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty,$$

применение леммы Бореля-Кантелли дает требуемый результат, т.е. $\mu(L_3(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$. $\square$

1.3.2 Случай $(0, 0, 0)$-линейности

Напомним, что далее рассматриваем неприводимые примитивные многочлены $P \in \mathcal{P}_n^*(H)$, удовлетворяющие (1.5), и $n \geq 4$. Многочлен $P \in \mathcal{P}_n(H, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ будем называть (i_1, i_2, i_3)–линейным и $i_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, если выполняется система неравенств

$$\begin{aligned} q_1 + k_2 a^{-1} &< v_1 + \lambda_1 + 1, \\ r_1 + l_2 a^{-1} &< v_2 + \lambda_2 + 1, \\ s_1 + m_2 a^{-1} &< v_3 + \lambda_3, \end{aligned} \tag{1.18}$$

и $i_j = 1$, $j = 1, 2, 3$, если все знаки неравенств в (1.18) заменяются на $\geq$. Например, $(0, 1, 1)$–линейность означает, что в системе неравенств (1.18) в первом неравенстве знак сохраняется, а во втором и третьем – заменяется на $\geq$. В теореме, в зависимости от соотношений между порядком аппроксимации по каждой переменной и величиной производной в ближайшем корне, возникает 2^3 типов линейности. Наиболее принципиальными из них являются два случая: $(0, 0, 0)$-линейность и $(1, 1, 1)$-линейность. Пусть $\mathcal{P}_n^{(i_1,i_2,i_3)}$, $i_j = 0, 1$, $j = 1, 2, 3$, обозначает класс (i_1, i_2, i_3)–линейных многочленов $P \in \mathcal{P}_n^*$. Если $(x, z, w) \in L_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$, то существует бесконечно много многочленов для по крайне мере одного из восьми типа линейности. Пусть $L_n^{(i_1,i_2,i_3)}(v, \lambda, \Psi)$ обозначает множество точек $(x, z, w) \in \mathbf{T}$, для которых система неравенств (1.1) выполняется для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(i_1,i_2,i_3)}$. Очевидно, что $L_n(v, \lambda, \Psi) = \cup_{i_1,i_2,i_3=0,1} L_n^{(i_1,i_2,i_3)}(v, \lambda, \Psi)$. Следовательно, для доказательства теоремы покажем, что каждое множество $L_n^{(i_1,i_2,i_3)}(v, \lambda, \Psi)$ имеет нулевую меру.

Величины

$$d_1 = q_1 + 2r_1 + s_1 \quad \text{и} \quad d_2 = (k_2 + 2l_2 + m_2)a^{-1}$$

будут использоваться на протяжении всего доказательства, которое разбивается на ряд предложений с различными условиями линейности и различными диапазонами значений величины $d_1 + d_2$.

Сначала рассмотрим $(0, 0, 0)$-линейные многочлены. Для доказательства $\mu(L_n^{(0,0,0)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$ рассмотрим четыре подслучая, каждый из которых соответствует различным значения величины $d_1 + d_2$. Если $(x, z, w) \in L_n^{(0,0,0)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$, то существует бесконечно много многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, удовлетворяющих системе неравенств (1.1) и одному из условий для $d_1 + d_2$. Таким образом, если мы докажем, что множество точек, для которых существует бесконечное число многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, удовлетворяющих системе (1.1) и каждому диапазону значений величины $d_1 + d_2$, имеет меру нуль, то мы докажем, что $\mu(L_n^{(0,0,0)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$.

Предложение 1.1. *Пусть* $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$. *Множество точек* $(x, z, w) \in \mathbf{T}$, *для которых система неравенств* (1.1) *выполняется для бесконечного числа многочленов* $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, *удовлетворяющих условию* $d_1 + d_2 > n + \varepsilon$, *имеет меру нуль.*

Доказательство. Для каждого $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ определим множество

$$\mathcal{P}_0^t = \{P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)} : \ 2^t \leq H(P) < 2^{t+1}\} = \cup_{2^t \leq H < 2^{t+1}} \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}(H).$$

Класс многочленов $P \in \mathcal{P}_0^t$, удовлетворяющих условию $d_1 + d_2 > n + \varepsilon$, обозначим $\mathcal{P}_1^t$. Пусть $\sigma(P)$ обозначает множество точек $\mathbf{u} = (x, z, w) \in \mathbf{T} \cap$

$S_1(\alpha_1)\times S_2(\beta_1)\times S_3(\gamma_1)$, удовлетворяющих (1.4). В силу (1.11) и леммы 1.3 каждая точка $\mathbf{u}\in\sigma(P)$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} |x-\alpha_1| &\ll 2^{-t(v_1+\lambda_1+1-q_1)},\\ |z-\beta_1| &\ll 2^{-t(v_2+\lambda_2+1-r_1)},\\ |w-\gamma_1|_p &\ll 2^{-t(v_3+\lambda_3-s_1)}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Пусть $A_t=\cup_{P\in\mathcal{P}_1^t}\sigma(P)$. Тогда множество точек, удовлетворяющих условиям в предложении 1.1, есть множество точек, принадлежащих бесконечному числу A_t. Для того, чтобы воспользоваться леммой Бореля-Кантелли, нужно показать, что $\sum_{t=1}^{\infty}\mu(A_t)<\infty$.

Поделим параллелепипед $\mathbf{T}$ на параллелепипеды $M=I_M\times K_M\times D_M$ такие, что

$$\mu_1(I_M)=2^{-tk_2a^{-1}},\quad \mathrm{diam}(K_M)=2^{-tl_2a^{-1}},\quad \mu_3(D_M)=2^{-tm_2a^{-1}}. \tag{1.20}$$

Будем говорить, что многочлен P *принадлежит* параллелепипеду M, если найдется точка $\mathbf{u}\in M$, в которой выполняется система неравенств (1.4). Предположим, что P принадлежит M. Далее разложим $P\in\mathcal{P}_1^t$ на M в ряд Тейлора по каждой координате. Учитывая, что $P(\alpha_1)=P(\beta_1)=P(\gamma_1)=0$ и

$$P(t)=\sum_{j=1}^{n}(j!)^{-1}P^{(j)}(\zeta_1)(t-\zeta_1)^j$$

для $t=x,z,w$ и $\zeta_1=\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ соответсвенно, оценим сверху значения $|P(x)|$, $|P(z)|$ и $|P(w)|_p$. Например, оценим $|P(z)|$. Воспользуемся следующими неравенствами

$$r_j+jl_2a^{-1}=r_j+l_2a^{-1}+(j-1)l_2a^{-1}\geq r_j+l_2a^{-1}+(l_2+\ldots+l_j)a^{-1}=r_1+l_2a^{-1},$$

которые непосредственно следуют из (1.10). Далее, используя (1.20) и лемму 1.4, получаем

$$|P'(\beta_1)||z-\beta_1|\ll 2^{t(1-r_1+(n-1)\varepsilon_1-l_2a^{-1})}\ll 2^{-t(r_1+l_2a^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)}$$

и

$$|P^{(j)}(\beta_1)||z-\beta_1|^j\ll 2^{t(1-r_j+(n-j)\varepsilon_1-jl_2a^{-1})}\ll 2^{-t(r_1+l_2a^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)},\quad 2<j\leq n.$$

Следовательно, выполняется неравенство $|P(z)|\ll 2^{-t(r_1+l_2a^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)}$ для любой точки $z\in K_M$. Нетрудно получить аналогичные оценки для $|P(x)|$ и $|P(w)|_p$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} |P(x)| &\ll 2^{-t(q_1+k_2a^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)},\\ |P(z)| &\ll 2^{-t(r_1+l_2a^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)},\\ |P(w)|_p &\ll 2^{-t(s_1+m_2a^{-1}-(n-1)\varepsilon_1)} \end{aligned} \tag{1.21}$$

для любой точки $(x, z, w) \in M$.

Сначала рассмотрим параллелепипеды M, которым принадлежит два и более многочленов. Эти многочлены неприводимые примитивные и имеют высоту, не превосходящую 2^{t+1}, и их степень не превосходит n. Для таких многочленов на M выполняется система неравенств (1.21). Используя лемму 1.7 для двух различных многочленов P_1 и P_2, где

$$\begin{aligned} \tau_1 &= q_1 + k_2 a^{-1} - 1 - (n-1)\varepsilon_1, \quad & \eta_1 = k_2 a^{-1}, \\ \tau_2 &= r_1 + l_2 a^{-1} - 1 - (n-1)\varepsilon_1, \quad & \eta_2 = l_2 a^{-1}, \\ \tau_3 &= s_1 + m_2 a^{-1} - (n-1)\varepsilon_1, \quad & \eta_3 = m_2 a^{-1}, \end{aligned}$$

получаем, что

$$3q_1 + k_2 a^{-1} + 6r_1 + 2l_2 a^{-1} + 3s_1 + m_2 a^{-1} - 12(n-1)\varepsilon_1 < 2n + \delta.$$

Поскольку $q_1 \geq k_2 a^{-1}$, $2r_1 \geq 2l_2 a^{-1}$ и $s_1 \geq m_2 a^{-1}$, предыдущее неравенство принимает вид

$$2(d_1 + d_2) - 12(n-1)\varepsilon_1 < 2n + \delta.$$

Для достаточно малого числа δ последнее неравенство противоречиво ввиду условия для $d_1 + d_2$ в предложении 1.1.

Теперь рассмотрим параллелепипеды M, которым принадлежит не более одного многочлена $P \in \mathcal{P}_1^t$. Число таких параллелепипедов, а, следовательно, и число многочленов не более чем $c(n)2^{t(k_2+2l_2+m_2)a^{-1}} = c(n)2^{td_2}$. Используя неравенства (1.19), получаем

$$\mu(A_t) \ll 2^{-t(v_1+2v_2+v_3+\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+3-d_1-d_2)} \ll 2^{-t(n+1-d_1-d_2)}.$$

Из (1.18) следует, что $d_1 + d_2 < n+1$ и $\sum_{t=1}^{\infty} \mu(A_t) \ll \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t(n+1-d_1-d_2)} < \infty$, применяя лемму Бореля-Кантелли, завершаем доказательство предложения 1.1.

Предложение 1.2. *Пусть* $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$. *Множество точек* $(x, z, w) \in \mathbf{T}$, *для которых система неравенств* (1.1) *выполняется для бесконечного числа многочленов* $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, *удовлетворяющих условию* $d_1 + d_2 < \varepsilon$, *имеет меру нуль.*

Доказательство. Пусть $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, $2^t \leq H(P) < 2^{t+1}$ и $d_1 + d_2 < \varepsilon$. Класс таких многочленов P обозначим $\mathcal{P}_2^t$. В силу того, что $d_1 + d_2 < \varepsilon$, следует, что $q_1 < \varepsilon$, $r_1 < \varepsilon$ и $s_1 < \varepsilon$. Для многочлена P определим множество $\sigma_2(P)$, состоящее из точек $(x, z, w) \in \mathbf{T} \cap S_1(\alpha_1) \times S_2(\beta_1) \times S_3(\gamma_1)$, удовлетворяющих (1.1). Согласно лемме 1.3, каждая точка в $\sigma_2(P)$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} |x - \alpha_1| &\ll 2^{-tv_1} \Psi^{\lambda_1}(2^t) |P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ |z - \beta_1| &\ll 2^{-tv_2} \Psi^{\lambda_2}(2^t) |P'(\beta_1)|^{-1}, \\ |w - \gamma_1|_p &\ll 2^{-tv_3} \Psi^{\lambda_3}(2^t) |P'(\gamma_1)|_p^{-1}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Пусть $A_t = \cup_{P\in\mathcal{P}_2^t}\sigma_2(P)$. Тогда множество точек, удовлетворяющих условиям предложения 1.2, есть множество точек, принадлежащих бесконечному числу A_t. Аналогично, как и в предложении 1.1, наша цель – доказать, что $\sum_{t=1}^{\infty}\mu(A_t) < \infty$, и затем воспользоваться леммой Бореля-Кантелли.

Для достаточно большого числа t определим параллелепипед $\sigma_3(P)$, $P \in \mathcal{P}_2^t$, как множество точек $(x,z,w) \in \mathbf{T} \cap S_1(\alpha_1)\times S_2(\beta_1)\times S_3(\gamma_1)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{aligned} |x-\alpha_1| &< c_1(n)|P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ |z-\beta_1| &< c_1(n)|P'(\beta_1)|^{-1}, \\ |w-\gamma_1|_p &< c_1(n)|P'(\gamma_1)|_p^{-1}, \end{aligned}$$

содержащий $\sigma_2(P)$. Значение величины $c_1(n)$ будет приведено позднее.

Зафиксируем вектор $\mathbf{b} = (a_3, a_4, \ldots, a_n)$, где a_j – j-ый коэффициент $P \in \mathcal{P}_2^t$. Подмножество многочленов из $\mathcal{P}^t$ с одним и тем же вектором $\mathbf{b}$ обозначим $\mathcal{P}_{2,\mathbf{b}}^t$. Разложим многочлены из $\mathcal{P}_{2,\mathbf{b}}^t$ на $\sigma_3(P)$ в ряд Тейлора и оценим сверху значения $|P(x)|$, $|P(z)|$ и $|P(w)|_p$. Проделаем это только для действительной переменной. Используя лемму 1.4 и факт, что $q_j \le q_1 < \varepsilon$ для $j \ge 2$, получаем

$$|P'(\alpha_1)||x-\alpha_1| < c_1(n)c(n),$$

и

$$|P^{(j)}(\alpha_1)||x-\alpha_1|^j < 2^{t(1-q_j+(n-j)\varepsilon_1-j+jq_1)}c_1(n)c(n) < c_1(n)c(n),\ 2 \le j \le n.$$

Аналогично получаются оценки для $|P(z)|$ и $|P(w)|_p$, поэтому на $\sigma_3(P)$ выполняется следующая система неравенств

$$|P(x)| < c_1(n)c(n),\ \ |P(z)| < c_1(n)c(n),\ \ |P(w)|_p < c_1(n)c(n).$$

Покажем, что параллелепипеды $\sigma_3(P_1)$ и $\sigma_3(P_2)$, где $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{2,\mathbf{b}}^t$, $P_1 \ne P_2$, не пересекаются при достаточно малом значении $c_1(n)$. Предположим противное, т.е.

$$\sigma_3(P_1,P_2) = \sigma_3(P_1)\cap\sigma_3(P_2) \ne \emptyset.$$

Пусть $R(f) = P_1(f) - P_2(f)$, т.е. R – многочлен вида $R(f) = b_2f^2 + b_1f + b_0$, $|b_i| \le 2^{t+2}$, $i = 0,1,2$. Ясно, что

$$\max(|R(x)|, |R(z)|) < c_1(n)c(n).$$

Последнюю систему неравенств перепишем в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} b_2x^2+b_1x+b_0 &= \theta_1(x)c_1(n)c(n), \\ b_2z^2+b_1z+b_0 &= \theta_2(z)c_1(n)c(n), \\ b_2\bar{z}^2+b_1\bar{z}+b_0 &= \overline{\theta_2(z)}c_1(n)c(n), \end{aligned} \tag{1.23}$$

где $|\theta_k| \le 1$, $k = 1, 2$. Определитель Δ предыдущей системы равен $\Delta = 2z_2(z_2^2 + (x - z_1)^2)i$, где $z = z_1 + iz_2$ и $\bar{z} = z_1 - iz_2$. Из (1.16) следует, что $|\Delta| > 2\delta_1^3$. Разрешим систему уравнений (1.23) относительно одного из коэффициентов $b_j \ne 0$, $0 \le j \le 2$. Получим неравенство $1 \le |b_j| < c_1(n)c(n)\delta_1^{-3}$, которое при достаточно малом $c_1(n) = c_1(n, \delta_1)$ противоречиво. Таким образом, параллелепипеды $\sigma_3(P_1)$ и $\sigma_3(P_2)$ не пересекаются и

$$\sum_{P \in P_{2,\mathbf{b}}^t} \mu(\sigma_3(P)) \le \mu(\mathbf{T}).$$

Из определения $\sigma_2(P)$ и $\sigma_3(P)$ можно получить, что

$$\begin{aligned} \mu(\sigma_2(P)) &< c_1(n)^{-4}c(n)^4\mu(\sigma_3(P))2^{-t(v_1+2v_2+v_3)}\Psi^{\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3}(2^t) \\ &\ll \mu(\sigma_3(P))2^{-t(n-3)}\Psi(2^t). \end{aligned}$$

Поскольку число различных классов $\mathcal{P}_{2,\mathbf{b}}^t$ не превосходит $c(n)2^{t(n-2)}$, то используя вышеприведенные два неравенства и лемму 1.8, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \mu(A_t) &\le \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{b}} \sum_{P \in P_{2,\mathbf{b}}^t} \mu(\sigma_2(P)) < \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{b}} \sum_{P \in P_{2,\mathbf{b}}^t} \mu(\sigma_3(P))2^{-t(n-3)}\Psi(2^t) \\ &\ll \sum_{t=0}^{\infty} 2^t\Psi(2^t)\mu(\mathbf{T}) < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, применяя лемму Бореля-Кантелли, завершаем доказательство.

Предложение 1.3. *Пусть* $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$. *Множество точек* $(x, z, w) \in \mathbf{T}$, *для которых система неравенств* (1.1) *выполняется для бесконечного числа многочленов* $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, *удовлетворяющих условию* $\varepsilon \le d_1 + d_2 < 4 - \varepsilon$, *имеет меру нуль.*

Доказательство. Пусть $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, $2^t \le H(P) < 2^{t+1}$ и $\varepsilon \le d_1 + d_2 < 4 - \varepsilon$. Класс таких многочленов P обозначим $\mathcal{P}_3^t$. Для многочлена $P \in \mathcal{P}_3^t$ определим $\sigma_2(P)$ как и в предложении 1.2, и пусть $A_t = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_3^t} \sigma_2(P)$. Как и ранее, множество точек, удовлетворяющих условиям предложения 1.3, есть множество точек, принадлежащих бесконечному числу A_t. Далее покажем, что $\sum_{t=1}^{\infty} \mu(A_t) < \infty$ и затем воспользуемся леммой Бореля-Кантелли.

Выберем числа V_1, V_2 и V_3, такие, что $V_1 + 2V_2 + V_3 = 1$ и

$$\begin{aligned} q_1 + k_2a^{-1} + (n-1)\varepsilon_1 &< V_1 + 1 < v_1 + \lambda_1 + 1, \\ r_1 + l_2a^{-1} + (n-1)\varepsilon_1 &< V_2 + 1 < v_2 + \lambda_2 + 1, \\ s_1 + m_2a^{-1} + (n-1)\varepsilon_1 &< V_3 < v_3 + \lambda_3. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Такой выбор возможен в силу следующего аргумента. Система неравенств (1.24) задает параллелепипед. Рассмотрим пересечение параллелепипеда с плоскостями, задаваемыми уравнениями $V_1 + 2V_2 + V_3 = k$, где k – изменяющийся параметр. В "верхней правой" вершине параллелепипеда имеем $V_1 + 2V_2 + V_3 = n - 2 > 1$. В "нижней левой" вершине параллелепипеда получаем

$$\begin{aligned} V_1 + 2V_2 + V_3 &= q_1 + 2r_1 + s_2 + (k_2 + 2l_2 + m_2)a^{-1} + 4(n-1)\varepsilon_1 - 3 \\ &= d_1 + d_2 + 4(n-1)\varepsilon_1 - 3 < 1 - \varepsilon/2 \end{aligned}$$

так как $d_1 + d_2 < 4 - \varepsilon$. Таким образом, по непрерывности, плоскость $V_1 + 2V_2 + V_3 = 1$ пересекает параллелепипед, и мы можем выбрать числа V_1, V_2, V_3, принадлежащие пересечению.

Определим параллелепипед $\sigma_4(P)$ как множество точек $(x, z, w) \in \mathbf{T} \cap S_1(\alpha_1) \times S_2(\beta_1) \times S_3(\gamma_1)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{aligned} |x - \alpha_1| &< 2^{-tV_1}|P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ |z - \beta_1| &< 2^{-tV_2}|P'(\beta_1)|^{-1}, \\ |w - \gamma_1|_p &< 2^{-tV_3}|P'(\gamma_1)|_p^{-1}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Очевидно, $\sigma_2(P) \subset \sigma_4(P)$. Снова разложим многочлен P на $\sigma_4(P)$ в ряд Тейлора и оценим каждый член разложения сверху. Проделаем это для комплексной переменной. Используя (1.10), (1.24), (1.25), лемму 1.3 и лемму 1.4, получаем

$$\begin{aligned} |P'(\beta_1)||z - \beta_1| &\ll 2^{-tV_2}, \\ |P''(\beta_1)||z - \beta_1|^2 &\ll 2^{t(1 - r_2 + (n-2)\varepsilon_1 - 2V_2 - 2 + 2r_1)} \\ &\ll 2^{t(r_1 + l_2 a^{-1} + (n-2)\varepsilon_1 - 2V_2 - 1)} \ll 2^{-tV_2}, \\ |P^{(j)}(\beta_1)||z - \beta_1|^{(j)} &\ll 2^{t(1 - r_j + (n-j)\varepsilon_1 - jV_2 - j + jr_1)} \ll 2^{-tV_2},\ 3 \le j \le n. \end{aligned}$$

Аналогично получаются оценки для $|P(x)|$ и $|P(w)|_p$, что приводит к системе неравенств

$$|P(x)| \ll 2^{-tV_1},\ \ |P(z)| \ll 2^{-tV_2},\ \ |P(w)|_p \ll 2^{-tV_3}. \tag{1.26}$$

Далее оценим $P'(x) = \sum_{i=1}^{n} (i!)^{-1} P^{(i)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^{i-1}$ на $\sigma_4(P)$. Как и ранее, рассмотрим отдельно каждый член разложения, используя лемму 1.3, лемму 1.4, (1.10) и (1.24). Тогда получаем

$$\begin{aligned} |P'(\alpha_1)| &\ll 2^{-t(1 - q_1 + (n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P^{(i)}(\alpha_1)||x - \alpha_1|^{i-1} &\ll 2^{t(1 - q_i + (n-i)\varepsilon_1 - (i-1)V_1 - (i-1)(1-q_1))} \\ &\ll 2^{t(1 - q_1 + (n-1)\varepsilon_1)},\ 2 \le i \le n. \end{aligned}$$

Из последних неравенств и аналогичных неравенств для $P'(z)$ на $\sigma_4(P)$ получаем

$$|P'(x)| \ll 2^{t(1 - q_1 + (n-1)\varepsilon_1)},\ \ |P'(z)| \ll 2^{t(1 - r_1 + (n-1)\varepsilon_1)}. \tag{1.27}$$

Если выполняются одновременно оба неравенства $q_1 < \varepsilon/2$ и $r_1 < \varepsilon/2$, то доказательство проводится как в предложении 1.2. Поэтому далее в предложении 1.3 мы предполагаем, что $\max(q_1, r_1) \geq \varepsilon/2$. Пусть максимум достигается на q_1, тогда дополнительно к условиям предположения 1.3 имеем $q_1 \geq \varepsilon/2$. Зафиксируем вектор $\mathbf{d} = (a_4, a_5, \ldots, a_n)$, $|a_j| \leq 2^{t+1}$ и обозначим через $\mathcal{P}^t_{3,\mathbf{d}}$ подмножество многочленов $P \in \mathcal{P}^t_3$ с одним и тем же вектором $\mathbf{d}$. Далее будем использовать метод существенных и несущественных областей Спринджука (см. [40]). Параллелепипед $\sigma_4(P_1)$ назовем *существенным*, если для любого другого многочлена $P_2 \in \mathcal{P}^t_{3,\mathbf{d}}$, $P_2 \neq P_1$, выполняется неравенство

$$\mu(\sigma_4(P_1) \cap \sigma_4(P_2)) < \frac{1}{2}\mu(\sigma_4(P_1)).$$

Если же существует $P_2 \in \mathcal{P}^t_{3,\mathbf{d}}$, $P_2 \neq P_1$, такой, что

$$\mu(\sigma_4(P_1) \cap \sigma_4(P_2)) \geq \frac{1}{2}\mu(\sigma_4(P_1)),$$

то параллелепипед $\sigma_4(P_1)$ будем называть *несущественным*. Если $\mathbf{u}$ принадлежит бесконечному числу параллелепипедов $\sigma_2(P)$, то $\mathbf{u}$ принадлежит бесконечному числу существенных или несущественных параллелепипедов $\sigma_4(P)$. Обозначим множество многочленов $P \in \mathcal{P}^t_{3,\mathbf{d}}$, для которых $\sigma_4(P)$ является существенным, через $\mathcal{E}^t_{3,\mathbf{d}}$, и множество $P \in \mathcal{P}^t_{3,\mathbf{d}}$, для которых $\sigma_4(P)$ является несущественным, через $\mathcal{I}^t_{3,\mathbf{d}}$.

Во-первых, предположим, что $P \in \mathcal{E}^t_{3,\mathbf{d}}$. Тогда имеем $\sum_{P_1 \in \mathcal{E}^t_{3,\mathbf{d}}} \mu(\sigma_4(P_1)) \ll \mu(\mathbf{T})$. Из (1.22) и (1.25) получаем

$$\mu(\sigma_2(P_1)) \ll \mu(\sigma_4(P_1)) 2^{t(-v_1-2v_2-v_3+V_1+2V_2+V_3)}\Psi(2^t) = \mu(\sigma_4(P_1))2^{t(-n+4)}\Psi(2^t).$$

Используя последнее неравенство, лемму 1.8 и факт, что число различных классов $\mathcal{P}^t_{3,\mathbf{d}}$ не превосходит $c(n)2^{t(n-3)}$, получаем

$$\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{d}}\sum_{P_1 \in \mathcal{E}^t_{3,\mathbf{d}}} \mu(\sigma_2(P_1)) \ll \sum_{t=1}^{\infty} 2^t\Psi(2^t)\mu(\mathbf{T}) < \infty.$$

Следовательно, согласно лемме Бореля-Кантелли множество точек, принадлежащих бесконечному числу параллелепипедов $\sigma_2(P)$, $P \in \mathcal{E}^t_{3,\mathbf{d}}$, имеет меру нуль.

Далее предположим, что $P \in \mathcal{I}^t_{3,\mathbf{d}}$, т.е. существует многочлен $\tilde{P} \in \mathcal{P}^t_{3,\mathbf{d}}$ такой, что

$$\sigma_4(P, \tilde{P}) = \sigma_4(P) \cap \sigma_4(\tilde{P}), \quad \text{и} \quad \mu(\sigma_4(P, \tilde{P})) \geq \frac{1}{2}\mu(\sigma_4(P)).$$

Системы неравенств (1.4) и (1.27) выполняются одновременно на $\sigma_4(P, \tilde{P})$ для P и $\tilde{P}$. Поэтому, если $R(f) = \tilde{P}(f) - P(f) = b_3f^3 + b_2f^2 + b_1f + b_0$, то многочлен R удовлетворяет условиям

$$\begin{array}{c} |R(x)| \ll 2^{-tV_1}, \;\; |R(z)| \ll 2^{-tV_2}, \;\; |R(w)|_p \ll 2^{-tV_3}, \\ |R'(x)| \ll 2^{t(1-q_1+(n-1)\varepsilon_1)}, \;\; |R'(z)| \ll 2^{t(1-r_1+(n-1)\varepsilon_1)}, \end{array} \tag{1.28}$$

где $q_1 \geq \varepsilon/2$. Если $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{C}$ – корни многочлена R, то

$$R(f) = b_3(f-\theta_1)(f-\theta_2)(f-\theta_3),$$

и

$$R'(\theta_1) = b_3(\theta_1-\theta_2)(\theta_1-\theta_3).$$

Из (1.5) следует, что один из корней обязательно действительный, а два других – комплексно сопряженные. Пусть $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_3 = \bar{\theta}_2$, и будем считать, что $|b_3| \asymp H(R)$ (если необходимо воспользуемся сведением к ведущим многочленам как в разделе 1.2). В силу (1.16) величина $|\theta_1 - \theta_2|$ не может стремиться к нулю. Следовательно, корни θ_1, θ_2, и $\bar{\theta}_2$ удовлетворяют неравенству $|\theta_1 - \theta_2| = |\theta_1 - \bar{\theta}_2| > c_2(\delta_1)$ для некоторой константы $c_2(\delta_1)$, и

$$|R'(\theta_1)| > c_2(\delta_1)H(R).$$

Откуда, используя (1.5) и лемму 1.3, получаем

$$|x - \theta_1| \ll 2^{-tV_1}H^{-1}(R)$$

для $x \in \sigma_4(P_1, P_2)$. В силу (1.25) неравенство $|R(x)| \ll 2^{-tV_1}$ выполняется на интервале длины $c(n)2^{-tV_1}|P'(\alpha_1)|^{-1}$. Далее, используя лемму 1.4, имеем $2^{-tV_1}H^{-1}(R) \gg 2^{-t(V_1+1-q_1+(n-1)\epsilon_1)}$ и $H(R) < 2^{t(1-q_1+(n-1)\epsilon_1)}$. Перейдем от величины 2^t к высоте $H(R)$ в (1.5) и получим, что $|R(x)||R(z)|^2|R(w)|_p \ll H(R)^{-1/(1-q_1+(n-1)\epsilon_1)} \ll H(R)^{-v}$, где $v > 1$, поскольку $q_1 \geq \varepsilon/2$ и выберем $\epsilon_1 < \frac{\epsilon}{2(n-1)}$. Полученное неравенство с применением леммы 1.7 показывает, что множество точек $\mathbf{u}$, принадлежащих бесконечному числу несущественных параллелепипедов, имеет меру нуль. Вместе с результатом для существенных параллелепипедов, это завершает доказательство предложения 1.3.

Предложение 1.4. *Пусть* $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H) < \infty$. *Множество точек* $(x, z, w) \in \mathbf{T}$, *для которых система неравенств* (1.1) *выполняется для бесконечного числа многочленов* $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, *удовлетворяющих условию*

$$4 - \varepsilon \leq d_1 + d_2 \leq n + \varepsilon, \tag{1.29}$$

имеет меру нуль.

Доказательство. Результаты этого предложения будут использоваться и в других случаях линейности. Перейдем от системы неравенств (1.1) к системе неравенств (1.4), и будем следовать доказательству предложения 1.1 до системы (1.21) включительно. Пусть $P \in \mathcal{P}_n^{(0,0,0)}$, $2^t \leq H(P) < 2^{t+1}$ и

$4-\varepsilon \le d_1+d_2 \le n+\varepsilon$. Обозначим это множество $\mathcal{P}_4^t$. Пусть $A_t = \cup_{P\in\mathcal{P}_4^t}\sigma(P)$, где $\sigma(P)$ определен в (1.19).

Пусть $u = n+1-d_1-d_2$ и зафиксируем $\theta = u-\varepsilon_2$, где $\varepsilon_2 > 0$ – достаточно малое число. Предположим, что существует не более $2^{t\theta}$ многочленов, принадлежащих каждому параллелепипеду M. Тогда согласно лемме 1.3, мера множества A_t не превосходит меры параллелепипеда $\sigma(P)$, умноженной на число параллелепипедов M и на число многочленов, т.е.

$$\mu(A_t) \ll 2^{-t(v_1+2v_2+v_3+\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+3-d_1-d_2-\theta)} \ll 2^{-t(n+1-d_1-d_2-\theta)} \ll 2^{-t\varepsilon_2}.$$

Поэтому $\sum_{t=1}^{\infty}\mu(A_t) \ll \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t(n+1-d_1-d_2-\theta)} < \infty$. Следовательно, мера множества точек, принадлежащих бесконечному числу множеств A_t, имеет меру нуль согласно лемме Бореля-Кантелли.

Далее будем считать, что существует параллелепипед M содержащий не менее $2^{t\theta}$ многочленов. Из (1.29) следует, что $1-\varepsilon \le u \le n-3+\varepsilon$. Пусть $u_1 = u-d$, где $d = 0.23$. Запишем u_1 в виде суммы целой и дробной части $[u_1]+\{u_1\}$ и вычислим

$$n-[u_1] = d_1+d_2-1+\{u_1\}+d > 3. \tag{1.30}$$

Согласно принципу ящиков Дирихле, существует $k \ge c(n)2^{t(d+\{u_1\}-\varepsilon_2)}$ многочленов $P_1,\dots,P_k$ среди не менее $2^{t\theta}$ многочленов, у которых коэффициенты при $x^n, x^{n-1},\dots,x^{n-[u_1]+1}$ совпадают. Рассмотрим $k-1$ многочленов $R_j(f) = P_j(f)-P_1(f)$, $2\le j\le k$. Согласно (1.21), имеем

$$\begin{aligned} |R_j(x)| &\ll 2^{t(1-q_1-k_2a^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)},\\ |R_j(z)| &\ll 2^{t(1-r_1-l_2a^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)},\\ |R_j(w)|_p &\ll 2^{t(-s_1-m_2a^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)}, \end{aligned} \tag{1.31}$$

где $2\le j\le k$, $\deg R_j \le n-[u_1]$ и $H(R)\le 2^{t+2}$. Теперь многочлены $R_j(f) = b_{n-[u_1]}f^{n-[u_1]}+\dots+b_1f+b_0$ поделим на классы. Поделим значения коэффициентов $b_{n-[u_1]},\dots,b_1$ многочленов $R_j(f)$ на интервалы длины $2^{t(1-h_1)}$, где $h_1 = \{u_1\}(n-[u_1])^{-1}$. Ясно, что существует 2^{th_1} интервалов для каждого коэффициента. Снова воспользуеся принципом ящиков Дирихле и получим, что существует $m \ge 2^{t(d-\varepsilon_2)}$ многочленов R_j в каждом таком интервале. Занумеруем многочлены $R_1,\dots,R_m$. Снова рассмотрим разность этих многочленов и определим многочлены $S_i(f) = R_{i+1}(f)-R_1(f)$, удовлетворяющие

$$\begin{aligned} |S_i(x)| &\ll 2^{t(1-q_1-k_2a^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)},\\ |S_i(z)| &\ll 2^{t(1-r_1-l_2a^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)},\\ |S_i(w)|_p &\ll 2^{t(-s_1-m_2a^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)}, \end{aligned} \tag{1.32}$$

где $1 \le i \le m-1$, $\deg S_i \le n-[u_1]$, $H(S_i) \ll 2^{t(1-h_1)}$. Коэффициент $b_0'(S_i)$ примет малые значения $\ll 2^{t(1-h_1)}$ автоматически из-за малости правых частей в системе (1.32).

Рассмотрим более детально многочлены S_i, при этом необходимо рассмотреть три типа многочленов S_i. Отметим, что аналогичный аргумент будет использоваться при доказательстве предложения 1.6 и предложения 1.7.

Случай А. Все многочлены S_i имеют вид $i_1S_0, i_2S_0, \ldots, i_{m-1}S_0$ для некоторого фиксированного многочлена S_0. Тогда $i' = \max_{1\le j\le m-1}|i_j| \gg 2^{t(d-\varepsilon_2)}$ и выполняется система неравенств (1.32) для $i'S_0$, где $H(S_0) \ll 2^{t(1-h_1-d+\varepsilon_2)}$. Из (1.32) получаем

$$|S_0(x)||S_0(z)|^2|S_0(w)|_p \ll 2^{t(3-d_1-d_2-3d+4(n-1)\varepsilon_1)}. \qquad (1.33)$$

Из (1.29) и (1.30) имеем

$$d_1+d_2-3+3d-4(n-1)\varepsilon_1 > (n-[u_1]-2)(1-h_1-d+\varepsilon_2).$$

Таким образом, согласно лемме 1.1 множество точек $\mathbf{u}$, удовлетворяющих (1.32) для бесконечного числа таких многочленов S, имеет меру нуль.

Случай Б. Один из многочленов S_i, $1 \le i \le m-1$ (скажем, S_1), является приводимым, т.е. $S_1 = S_1^{(1)}S_1^{(2)}$. Из системы (1.32), получаем

$$|S_1(x)||S_1(z)|^2|S_1(w)|_p \ll 2^{t(3-d_1-d_2+4(n-1)\varepsilon_1)}.$$

Заметим, что $H(S_1) \asymp H(S_1^{(1)})H(S_1^{(2)})$. Тогда для одного из многочленов $S_1^{(1)}$ или $S_2^{(2)}$ выполняется неравенство

$$|S_1^{(i)}(x)||S_1^{(i)}(z)|^2|S_1^{(i)}(w)|_p \ll H(S_1^{(i)})^{3-d_1-d_2+4(n-1)\varepsilon_1}$$

и $\deg S_1^{(i)}(f) \le n-[u_1]-1$. Нетрудно показать, что неравенство

$$d_1+d_2-3-4(n-1)\varepsilon_1 > (n-[u_1]-3)(1-h_1) \qquad (1.34)$$

справедливо для $d = 0.23$ и достаточно малых ε, ε_1. Снова воспользуемся леммой 1.1 и получим, что множество точек, удовлетворяющих (1.32) для бесконечного числа таких многочленов S, имеет меру нуль.

Случай В. Все многочлены S_i являются неприводимыми и по крайней мере два из них, например, S_1 и S_2, не имеют общих корней. Наша цель в данном случае – получить противоречие с леммой 1.7. Пусть $h = 1-h_1$, перейдем к высоте многочленов S_i в (1.32) и (1.20) и определим

$$\tau_1 = (q_1+k_2a^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)h^{-1}, \quad \eta_1 = k_2a^{-1}h^{-1},$$
$$\tau_2 = (r_1+l_2a^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)h^{-1}, \quad \eta_2 = l_2a^{-1}h^{-1},$$
$$\tau_3 = (s_1+m_2a^{-1}-(n-1)\varepsilon_1)h^{-1}, \quad \eta_3 = m_2a^{-1}h^{-1}.$$

Согласно лемме 1.7, должно выполняться следующее неравенство

$3q_1+k_2a^{-1}+6r_1+2l_2a^{-1}+3s_1+m_2a^{-1}-12(n-1)\varepsilon_1-9h_1<2(n-[u_1])h+\delta.$

Поскольку $q_1 \geq k_2a^{-1}$, $2r_1 \geq 2l_2a^{-1}$ и $s_1 \geq m_2a^{-1}$, то используя (1.30), получаем

$$2(d_1+d_2)-12(n-1)\varepsilon_1-\frac{9\{u_1\}}{n-[u_1]}<2(d_1+d_2)-2+2d+\delta.$$

Последнее неравенство противоречиво при $d=0.23$, $n-[u_1]\geq 6$ и достаточно малых δ и ε_1. Следовательно, множество точек (x,z,w), для которых неравенства выполняются для бесконечного числа таких многочленов S_i, удовлетворяющих $n-[u_1]\geq 6$, имеет меру нуль.

Осталось доказать справедливость результата для $n-[u_1]=4$ или 5. Пусть $p=n-[u_1]$. Вернемся к многочленам R_j, удовлетворяющим (1.31). Первое неравенство системы (1.31) выполняется для каждого многочлена R_j на интервале I_M, где $M=I_M\times K_M\times D_M$. Поскольку $R_j=P_j-P_1$, разложим производные $P_j^{(i)}(x)$ для каждого многочлена P_j, $j=1,\ldots,k$, в ряд Тейлора на I_M. Пусть α_{1j} – соответствующий корень многочлена P_j. Тогда

$$P_j^{(i)}(x)=P_j^{(i)}(\alpha_{1j})+P_j^{(i+1)}(\alpha_{1j})(x-\alpha_{1j})+\frac{1}{2}P_j^{(i+2)}(\alpha_{1j})(x-\alpha_{1j})^2+\ldots$$

и по лемме 1.4

$$\begin{aligned}|P_j^{(i)}(\alpha_{1j})| &\ll 2^{t(1-q_i+(n-i)\varepsilon_1)},\\ |P_j^{(i+i_1)}(\alpha_{1j})||x-\alpha_{1j}|^{i_1} &\ll 2^{t(1-q_{i+i_1}+(n-i-i_1)\varepsilon_1-i_1k_2a^{-1})}\ll 2^{t(1-q_i+(n-i-1)\varepsilon_1)},\end{aligned}$$

$2\leqslant i_1\leqslant p-i$, что означает

$$|P_j^{(i)}(x)|\ll 2^{t(1-q_i+(n-1)\varepsilon_1)},\ 1\leqslant i\leqslant p, 1\leq j\leq k,$$

на I_M. Последнее позволяет получить

$$|R_j^{(i)}(x)|\ll 2^{t(1-q_i+(n-1)\varepsilon_1)},\ 1\leqslant i\leqslant p,$$

на I_M.

Пусть x_0 – центр интервала I_M. Каждый диапазон значений многочлена R_j и его производной в точке x_0 разделим на 2^{tv} интервалов, где $v=\{u_1\}(p+1)^{-1}$. Из (1.31) следует, что интервал $[-c(n)2^{t(1-q_1-k_2a^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)}, c(n)2^{t(1-q_1-k_2a^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)}]$ делится на 2^{tv} интервалов одинаковой длины $c(n)2^{t(1-q_1-k_2a^{-1}+(n-1)\varepsilon_1-v)}$, и диапазон значений l-ой производной $(1\leqslant l\leqslant p)$ вида $[-c(n)2^{t(1-q_l+(n-1)\varepsilon_1)}, c(n)2^{t(1-q_l+(n-1)\varepsilon_1)}]$ делится на интервалы длины $c(n)2^{t(1-q_l+(n-1)\varepsilon_1-v)}$. В результате, существует не более $c(n)2^{t(p+1)v}$ различных комбинаций малых интервалов. Используя принцип ящиков Дирихле, получаем, что существует как минимум $2^{t(d-\varepsilon_2)}$ многочленов R_j, принадлежащих некоторой фиксированной комбинации интервалов, где $\varepsilon_2 > 0$.

Ясно, что для каждой точки $x \in I_M$ многочлены $T_j(x) = R_{j+1}(x) - R_1(x)$ удовлеворяют неравенствам

$$\begin{aligned} T_j(x_0) = |R_{j+1}(x_0) - R_1(x_0)| &\ll 2^{t(1-q_1-k_2a^{-1}+(n-1)\varepsilon_1-\{u_1\}(p+1)^{-1})}, \\ T_j^{(i)}(x_0) = |R_{j+1}^{(i)}(x_0) - R_1^{(i)}(x_0)| &\ll 2^{t(1-q_i+(n-1)\varepsilon_1-\{u_1\}(p+1)^{-1})}, \ \ 1 \leqslant i \leqslant p, \end{aligned}$$

где R_{j+1} и R_1 принадлежат одной и той же комбинации интервалов. Разложим многочлен T_j в ряд Тейлора на I_M в окрестности точки x_0:

$$T_j(x) = \sum_{i=0}^{p} (i!)^{-1} T_j^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i.$$

Используя вышеприведенные оценки и (1.10), получаем

$$\begin{aligned} |T_j^{(i)}(x)||x - x_0|^i &\ll 2^{t(1-q_i-ik_2a^{-1}+(n-1)\varepsilon_1-\{u_1\}(p+1)^{-1})} \\ &\ll 2^{t(1-q_1-k_2a^{-1}+(n-1)\varepsilon_1-\{u_1\}(p+1)^{-1})}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|T_j(x)| \ll 2^{t(1-q_1-k_2a^{-1}+(n-1)\varepsilon_1-\{u_1\}(p+1)^{-1})} \tag{1.35}$$

для $1 \le j \le m-1$, $m \ge 2^{t(d-\varepsilon_2)}$ и $x \in I_M$.

Как и ранее в этом предложении, необходимо рассмотреть три случая (аналогично *случаям А, Б* и *В* для многочленов T_j). Поэтому ниже некоторые детали будут опущены.

Случай А. Все многочлены T_j имеют вид sT_0, для некоторого многочлена T_0. Следовательно, существует такое число s, что $|s| \gg 2^{t(d-\varepsilon_2)}$ (так как существует не менее $2^{t(d-\varepsilon_2)}$ многочленов T_j) и $H(T_0) \le 2^{t(1-d+\varepsilon_2)}$, а также выполняется система неравенств

$$\begin{aligned} |T_0(x)| &\ll H(T_0)^{(1-q_1-k_2a^{-1}-d+(n-1)\varepsilon_1-\{u_1\}(p+1)^{-1})(1-d+\varepsilon_2)^{-1}}, \\ |T_0(z)| &\ll H(T_0)^{(1-r_1-l_2a^{-1}-d+(n-1)\varepsilon_1)(1-d+\varepsilon_2)^{-1}}, \\ |T_0(w)|_p &\ll H(T_0)^{(-s_1-m_2a^{-1}+(n-1)\varepsilon_1)(1-d+\varepsilon_2)^{-1}}. \end{aligned}$$

Здесь первое неравенство следует из (1.35), а два других получаются из (1.31). Далее неравенство

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 - 3 + \{u_1\}(p+1)^{-1} + 3d - 4(n-1)\varepsilon_1 > (n - [u_1] - 2)(1 - d + \varepsilon_2) = \\ = (d_1 + d_2 - 3 + d + \{u_1\})(1 - d + \varepsilon_2) \end{aligned}$$

выполняется для $n - [u_1] \le 5$, $d = 0.23$, и достаточно малых ε, ε_1, ε_2. Следовательно, используя лемму 1.1, получаем, что множество точек, удовлетворяющих системе выше для бесконечного числа таких многочленов T, имеет меру нуль.

Случай Б. Все многочлены T_j приводимы. Если для каждого многочлена T_j существует делитель $T_j^{(k)}$ степени $\le n-[u_1]-2$ и удовлетворяющий неравенству (которое следует из (1.31) и (1.35)):

$$|T_j^{(k)}(x)||T_j^{(k)}(z)|^2|T_j^{(k)}(w)|_p \ll 2^{t(1-q_1-k_2a^{-1}-\{u_1\}(p+1)^{-1}+2(1-r_1-l_2a^{-1})-s_1-m_2a^{-1}+4(n-1)\varepsilon_1)},$$

то как и выше лемма 1.1 будет применена непосредственно к многочленам $T_j^{(k)}$.

С другой стороны, каждый многочлен T_j является произведением линейного множителя и множителя степени $n-[u_1]-1$. Если линейные множители одинаковы для двух многочленов, т.е. $T_1 = T_0T_1'$ и $T_2 = T_0T_2'$, то многочлены T_1' и T_2' не имеют общих корней, и противоречие с леммой 1.7 может быть получено. Следовательно, далее мы предполагаем, что все линейные множители различны, поэтому существует многочлен T_j с линейным множителем высоты не менее $2^{t\left(\frac{d-\varepsilon_2}{2}\right)}$ (так как число различных многочленов T_j не менее $2^{t(d-\varepsilon_2)}$). В силу того, что $|\mathrm{Im}\, z| > \delta_1$, имеем $|az+b|^2 \gg a^2$. Используя прямой подсчет мер множеств, получаем, что множество точек (x,z,w), удовлетворяющих $|ax+b||az+b|^2|aw+b|_p \ll 2^{-t\varepsilon_1}$, имеет меру нуль. Следовательно, мы можем предположить, что для линейного множителя $T_0(f) = af+b$, где $|a| > 2^{t(d-\varepsilon_2)/2}$, выполняется неравенство

$$|ax+b||az+b|^2|aw+b|_p \gg 2^{-t\epsilon_1}$$

для любого ϵ_1. Пусть $T_j = T_0t_j$. Тогда высота многочлена t_j не более $2^{t(1-(d-\varepsilon_2)/2)}$ и t_j удовлетворяет неравенству (в силу (1.31), (1.35) и предыдущего неравенства):

$$|t_j(x)||t_j(z)|^2|t_j(w)|_p \ll H(t_j)^{(1-q_1-k_2a^{-1}-\{u_1\}(p+1)^{-1}+2(1-r_1-l_2a^{-1})-s_1-m_2a^{-1}+4n\varepsilon_1)(1-(d-\varepsilon_2)/2)^{-1}}.$$

Для $p \le 5$ и достаточно малых ε_1, ε_2, ε имеем

$$d_1+d_2-3+\{u_1\}(p+1)^{-1}-4n\varepsilon_1 > (d_1+d_2-4+d+\{u_1\})(1-(d-\varepsilon_2)/2).$$

Таким образом, в силу леммы 1.1, получаем, что множество точек, для которых существует бесконечное число таких многочленов T, имеет меру нуль.

Случай В. Существует пара неприводимых многочленов T_1 и T_2 без общих корней. Второе и третье неравенства системы (1.31) оставляем без изменения и первое неравенство заменяем неравенством (1.35). Определим числа $\tau_1 = q_1+k_2a^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1+\{u_1\}(p+1)^{-1}$, $\tau_2 = r_1+l_2a^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1$ и $\tau_3 = s_1+m_2a^{-1}-(n-1)\varepsilon_1$. Тогда в силу леммы 1.7, справедливо неравенство

$$3q_1+k_2a^{-1}+6r_1+2l_2a^{-1}+3s_1+m_2a^{-1}-12(n-1)\varepsilon_1+\frac{3\{u_1\}}{p+1} < 2(n-[u_1])+\delta.$$

Однако, так как $q_1 \ge k_2a^{-1}$, $r_1 \ge l_2a^{-1}$, $s_1 \ge m_2a^{-1}$, то для $d = 0.23$, $p \le 5$ и достаточно малых величин ε_1 и δ последнее неравенство противоречиво. Доказательство предложения 1.4 закончено.

Объединяя первые четыре предложения, получаем, что $\mu(L_n^{(0,0,0)}(\mathbf{v},\lambda,\Psi))=0$.

1.3.3 Случай $(1,1,1)$-линейности

Предположим, что выполняется следующая система

$$\begin{array}{rcl} q_1+k_2a^{-1} & \geq & 1+v_1+\lambda_1, \\ r_1+l_2a^{-1} & \geq & 1+v_2+\lambda_2, \\ s_1+m_2a^{-1} & \geq & v_3+\lambda_3, \end{array} \tag{1.36}$$

одновременно с системой (1.4).

Предложение 1.5. *Если* $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H)<\infty$, *то* $\mu(L_n^{(1,1,1)}(\mathbf{v},\lambda,\Psi))=0$.

Доказательство. Воспользуемся системой (1.4) и леммой 1.3 и получим

$$\begin{array}{rcl} |x-\alpha_1| & \ll & \min_{2\leq j\leq n} 2^{-t\left(\frac{v_1+\lambda_1+1-q_j}{j}\right)}=2^{-t\mu_1}, \\ |z-\beta_1| & \ll & \min_{2\leq j\leq n} 2^{-t\left(\frac{v_2+\lambda_2+1-r_j}{j}\right)}=2^{-t\mu_2}, \\ |w-\gamma_1|_p & \ll & \min_{2\leq j\leq n} 2^{-t\left(\frac{v_3+\lambda_3-s_j}{j}\right)}=2^{-t\mu_3}. \end{array} \tag{1.37}$$

Используя (1.36), нетрудно показать, что $\mu_1>v_1+\lambda_1+1-q_1$. Пусть минимум в первом неравенстве в (1.37) достигается при j_1, во втором – при j_2, в третьем – при j_3. Система неравенств (1.37) определяет некоторый палаллелепипед $\sigma_5(P)$. Множество многочленов $P\in\mathcal{P}_n^{(1,1,1)}$, где $2^t\leq H(P)<2^{t+1}$, обозначим $\mathcal{P}_5^t$. Пусть $A_t=\bigcup_{P\in\mathcal{P}_5^t}\sigma_5(P)$.

Разделим параллелепипед $\mathbf{T}$ на параллелепипеды M со сторонами $2^{-t(\mu_1-\gamma)}$, $2^{-t\mu_2}$, $2^{-t\mu_3}$, где $\gamma=(10n)^{-1}$. Предположим, что P принадлежит M и разложим P на M в ряд Тейлора. Как и ранее, оценим сверху все члены разложения. Приведем оценки для действительной переменной. Используя лемму 1.4, получаем

$$\begin{array}{rcl} |P'(\alpha_1)||x-\alpha_1| & \ll & 2^{t\gamma}|P'(\alpha_1)2^{-t\mu_1}|\ll 2^{t(\gamma+1-q_1+(n-1)\varepsilon_1-v_1-\lambda_1-1+q_1)} \\ & \ll & 2^{t(-v_1-\lambda_1+n\gamma+(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P^{(j)}(\alpha_1)||x-\alpha_1|^{(j)} & \ll & 2^{jt\gamma}|P^{(j)}(\alpha_1)2^{-jt\mu_1}|\ll 2^{t(j\gamma+1-q_j+(n-j)\varepsilon_1-v_1-\lambda_1-1+q_j)} \\ & \ll & 2^{t(-v_1-\lambda_1+n\gamma+(n-1)\varepsilon_1)}, \end{array}$$

для $2\leq j\leq n$.

Аналогично оценим сверху значения $|P(z)|$, $|P(w)|_p$ и получим

$$\begin{array}{rcl} |P(x)| & \ll & 2^{-t(v_1+\lambda_1-0.1-(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P(z)| & \ll & 2^{-t(v_2+\lambda_2-(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P(w)|_p & \ll & 2^{-t(v_3+\lambda_3-(n-1)\varepsilon_1)}. \end{array} \tag{1.38}$$

Рассмотрим параллелепипеды M, каждому из которых принадлежит два и более многочлена P_1 и P_2 (напомним, что мы можем предположить, что P_1 и P_2 неприводимы и примитивны). Для обоих многочленов справедлива система неравенств (1.38), и они не имеют общих корней. Мы намерены получить противоречие с леммой 1.7, для этого определим

$$\begin{gathered} \tau_1 = v_1 + \lambda_1 - 0.1 - (n-1)\varepsilon_1, \;\; \eta_1 = \tfrac{v_1+\lambda_1+1-q_{j_1}}{j_1} - \gamma, \\ \tau_2 = v_2 + \lambda_2 - (n-1)\varepsilon_1, \;\; \eta_2 = \tfrac{v_2+\lambda_2+1-r_{j_2}}{j_2}, \\ \tau_3 = v_3 + \lambda_3 - (n-1)\varepsilon_1, \;\; \eta_3 = \tfrac{v_3+\lambda_3-s_{j_3}}{j_3}. \end{gathered}$$

Тогда, применяя лемму 1.7 и выбирая $j_1 = j_2 = j_3 = 2$ (это дает наиболее слабую оценку), имеем

$$2v_1+2\lambda_1-0.3+2\gamma+4v_2+4\lambda_1+2v_3+2\lambda_3-12(n-1)\varepsilon_1+6+(q_{j_1}+2r_{j_2}+s_{j_3})-3 < 2n+\delta,$$

поэтому

$$\delta > 2\gamma + 0.7 - 12(n-1)\varepsilon_1 + (q_{j_1} + 2r_{j_2} + s_{j_3}).$$

Последнее неравенство при малом δ и достаточно малом ε_1 противоречиво. Таким образом, не существует параллелепипедов M, содержащих два и более неприводимых многочлена.

Следовательно, мы можем предположить, что не более одного многочлена $P \in \mathcal{P}_5^t$ принадлежит каждому параллелепипеду M. Число таких параллелепипедов равно $c(n)2^{t(\mu_1+2\mu_2+\mu_3-\gamma)}$. Используя (1.37), находим

$$\mu(A_t) \ll 2^{-t(\mu_1+2\mu_2+\mu_3-\mu_1-2\mu_2-\mu_3+\gamma)} \ll 2^{-t\gamma}.$$

В силу того, что $L_n^{(1,1,1)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ – множество точек, принадлежащих бесконечному числу множеств A_t, и $\sum_{t=0}^{\infty} \mu(A_t) \ll \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t\gamma} < \infty$, то снова обращаемся к лемме Бореля-Кантелли, и этого достаточно, чтобы завершить доказательство.

1.3.4 Случай $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$-линейностей

Рассмотрим только случай $(1,0,0)$–линейности, так как доказательство в двух других случаях аналогично.

Предложение 1.6. *Если $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$, то $\mu(L_n^{(1,0,0)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$.*

Доказательство. Условие $(1,0,0)$-линейности означает, что вместе с системой (1.4) выполняется система неравенств

$$\begin{array}{rcl} q_1 + k_2 a^{-1} & \geq & 1 + v_1 + \lambda_1, \\ r_1 + l_2 a^{-1} & < & 1 + v_2 + \lambda_2, \\ s_1 + m_2 a^{-1} & < & v_3 + \lambda_3. \end{array} \qquad (1.39)$$

Сначала заменим два последних неравенства в (1.39) на следующие неравенства

$$\begin{aligned} 0.9+v_2+\lambda_2 &< r_1+l_2a^{-1}<1+v_2+\lambda_2, \\ -0.1+v_3+\lambda_3 &< s_1+m_2a^{-1}<v_3+\lambda_3. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Далее следуем схеме доказательства предложения 1.5. Поделим параллелепипед $\mathbf{T}$ на параллелепипеды M со сторонами $2^{-t\mu_1}$, $2^{-t(l_2a^{-1}-\varepsilon_1)}$ и $2^{-t(m_2a^{-1}-\varepsilon_1)}$, где $\mu_1=\max_{2\le j\le n}(v_1+\lambda_1+1-q_j)j^{-1}$ и пусть максимум достигается при $j=j_1$.

Рассмотрим сначала такие параллелепипеды M, которым принадлежит не менее двух многочленов. Разложим эти многочлены в ряд Тейлора на M и оценим сверху каждый член разложения. В силу того, что многочлены неприводимы и не имеют общих корней, то можем применить лемму 1.7. В силу (1.40) получаем противоречие (аналогично как и в предложении 1.5).

Следовательно, осталось рассмотреть случай, когда не более одного многочлена принадлежит каждому параллелепипеду M. Множество многочленов $P\in\mathcal{P}_n^{(1,0,0)}$, $2^t\le H(P)<2^{t+1}$, удовлетворяющих (1.39) и (1.40) обозначим $\mathcal{P}_6^t$. Пусть $\sigma(P)$ – множество точек $\mathbf{u}$, для которых система (1.4) выполняется. Пусть $A_t=\bigcup_{P\in\mathcal{P}_6^t}\sigma(P)$. Для фиксированного многочлена $P\in\mathcal{P}_6^t$ мера точек $\mathbf{u}$, для которых выполняется (1.4), оценивается как $c(n)2^{t(-\mu_1-(2v_2+2\lambda_2+2-2r_1)-(v_3+\lambda_3-s_1))}$. Число параллелепипедов M не превосходит $2^{t(\mu_1+(2l_2+m_2)a^{-1}-3\varepsilon_1)}$. Следовательно, используя (1.39) и вышеприведенные оценки, получаем

$$\mu(A_t)\ll 2^{-t(2v_2+2\lambda_2+2-2(r_1+l_2a^{-1})+v_3+\lambda_3-(s_1+m_2a^{-1})+3\varepsilon_1)}\ll 2^{-3\varepsilon_1 t}.$$

В силу того, что $\sum_{t=1}^{\infty}\mu(A_t)\ll\sum_{t=1}^{\infty}2^{-3\varepsilon_1 t}<\infty$, множество точек, удовлетворяющих (1.4), (1.39) и (1.40) бесконечно часто, имеет меру нуль по лемме Бореля-Кантелли.

Далее исследуем случай, когда выполняется по крайней мере одно из следующих неравенств

$$\begin{aligned} r_1+l_2a^{-1} &\le 0.9+v_2+\lambda_2, \\ s_1+m_2a^{-1} &\le -0.1+v_3+\lambda_3. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Эти случаи аналогичны, поэтому проведем доказательство, например, для случая, когда выполняются оба неравенства. Обозначим множество многочленов $\mathcal{P}_n^{(1,0,0)}$, $2^t\le H(P)<2^{t+1}$, удовлетворяющих (1.39) и (1.41), через $\mathcal{P}_7^t$. Разделим параллелепипед $\mathbf{T}$ на параллелепипеды M со сторонами $2^{-t\mu_1}$, $2^{-tl_2a^{-1}}$ и $2^{-tm_2a^{-1}}$. Зафиксируем $u=n-v_1-\lambda_1-(2r_1+s_1)-(2l_2+m_2)a^{-1}$, и пусть $\theta=u-\varepsilon_2$ для некоторой достаточно малой величины ε_2. Предположим, что параллелепипеду M принадлежит не более $2^{t\theta}$ многочленов. Пусть

$A_t = \cup_{P\in\mathcal{P}_7^t}\sigma(P)$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu(A_t) &\ll 2^{-t(\mu_1+2(v_2+\lambda_2+1-r_1)+(v_3+\lambda_3-s_1)-\mu_1-2l_2a^{-1}-m_2a^{-1}-\theta)}\\ &\ll 2^{-t(u-\theta)} \ll 2^{-t\varepsilon_2}.\end{aligned}$$

Ясно, что ряд $\sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t\varepsilon_2}$ сходится и применение леммы Бореля-Кантелли завершает доказательство.

Далее предположим, что существует параллелепипед M, которому принадлежит не менее $2^{t\theta}$ многочленов. Пусть $u = u_1 + d$, где $0 < d < 1$. Вычислим

$$n - [u_1] = n - u + \{u_1\} + d = v_1 + \lambda_1 + d_1' + d_2' + \{u_1\} + d$$

и

$$n - u_1 = v_1 + \lambda_1 + d_1' + d_2' + d,$$

где $d_1' = 2r_1 + s_1$ и $d_2' = (2l_2 + m_2)a^{-1}$. (Использовали факт, что $n - 2 = v_1 + 2v_2 + v_3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3$.) Используя формулу Тейлора и (1.39), получаем

$$|P(x)| \ll 2^{-t(v_1+\lambda_1-(n-1)\varepsilon_1)}.$$

Заменим первое неравенство (1.21) предыдущим неравенством и получим систему

$$\begin{aligned}|P(x)| &\ll 2^{-t(v_1+\lambda_1-(n-1)\varepsilon_1)}.\\ |P(z)| &\ll 2^{-t(r_1+l_2a^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)},\\ |P(w)|_p &\ll 2^{-t(s_1+m_2a^{-1}-(n-1)\varepsilon_1)}.\end{aligned}$$

Далее проведем доказательство, аналогичное доказательству предложения 1.4, заменив систему (1.21) вышеприведенной системой. Рассмотрим многочлены $R_j(f) = P_j(f) - P_1(f)$, $2 \le j \le k$, $k \ge c(n)2^{t(\{u_1\}+d-\varepsilon_2)}$, у которых совпадают первые $[u_1]$ старших коэффициентов. Далее уменьшим высоту многочленов R_j за счет $\{u_1\}$, т.е. каждый коэффициент R_j будет лежать в интервале длины $2^{t(1-h_1)}$, где $h = \{u_1\}(n-[u_1])^{-1}$. Перенумеруем многочлены R_j и затем рассмотрим многочлены $S_i = R_{i+1} - R_1$. Перейдем от высоты многочлена P к высоте многочленов S_i, $1 \le i \le m-1$, $m \ge 2^{t(d-\varepsilon_2)}$, тогда следующие неравенства

$$\begin{aligned}|S_i(x)| &\ll 2^{-t(v_1+\lambda_1-(n-1)\varepsilon_1)},\\ |S_i(z)| &\ll 2^{-t(r_1+l_2a^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)},\\ |S_i(w)|_p &\ll 2^{-t(s_1+m_2a^{-1}-(n-1)\varepsilon_1)},\end{aligned} \tag{1.42}$$

справедливы на M, где $\deg S_i \le n - [u_1]$, $H(S_i) \ll 2^{t(1-h_1)}$.

Далее, как и при доказательстве предложения 1.4, рассмотрим три случая.

Случай A. Вместо неравенства (1.33) получим

$$\begin{aligned}|S_0(x)||S_0(z)|^2|S_0(w)|_p &\ll 2^{t(-v_1-\lambda_1-2r_1-2l_2a^{-1}+2-s_1-m_2a^{-1}-3d+4(n-1)\varepsilon_1)}\\ &\ll 2^{-t(v_1+\lambda_1+d_1'+d_2'-2-4(n-1)\varepsilon_1+3d)}.\end{aligned}$$

Чтобы применить лемму 1.1 надо доказать неравенство

$$v_1 + \lambda_1 + d_1' + d_2' - 2 - 4(n-1)\varepsilon_1 + 3d > (n - [u_1] - 2)(1 - d - h_1 + \varepsilon_2).$$

Нетрудно показать, что для $n - [u_1] \geq 3$, $d = 0.23$ и достаточно малых величин ε_1, ε_2 последнее неравенство справедливо. Условие $n - [u_1] \geq 3$ следует из (1.42), поскольку каждый многочлен, удовлетворяющий (1.42), должен иметь действительный и два комплексно-сопряженных корня.

Случай Б. Когда среди многочленов S_i есть приводимые, то снова можно применить лемму 1.1, если верно неравенство

$$v_1 + \lambda_1 + d_1' + d_2' - 2 - 4(n-1)\varepsilon_1 > (n - [u_1] - 3)(1 - h_1),$$

аналогичное неравенству (1.34). В силу леммы 1.7, для $n - [u_1] - 1 \geq 3$, $d = 0.23$ и достаточно малого ε_1 вышеприведенное неравенство выполняется.

Случай В. Если существует два неприводимых многочлена S_1 и S_2, не имеющих общих корней, то применим лемму 1.7. Здесь

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (v_1 + \lambda_1 - (n-1)\varepsilon_1)h^{-1}, \quad & \eta_1 &= \mu_1 h^{-1}, \\ \tau_2 &= (r_1 + l_2 a^{-1} - (n-1)\varepsilon_1 - 1)h^{-1}, \quad & \eta_2 &= l_2 a^{-1} h^{-1}, \\ \tau_3 &= (s_1 + m_2 a^{-1} - (n-1)\varepsilon_1)h^{-1}, \quad & \eta_3 &= m_2 a^{-1} h^{-1}. \end{aligned}$$

Получим неравенство

$$\begin{aligned} &2v_1 + 2\lambda_1 + 2 + 6r_1 + 2l_2 a^{-1} + 3s_1 + m_2 a^{-1} - 12(n-1)\varepsilon_1 + q_2(S) - \frac{9\{u_1\}}{n - [u_1]} \\ &\qquad < 2(n - [u_1])\left(1 - \frac{\{u_1\}}{n - [u_1]}\right) + \delta = 2(v_1 + \lambda_1 + d_1' + d_2' + d) + \delta, \end{aligned}$$

наиболее слабая форма которого получается при $j_1 = 2$. Аналогично, как при доказательстве предложения 1.4, мы получаем доказательство в случае $n - [u_1] \geq 6$. Если же $n - [u_1] = 4$ или $n - [u_1] = 5$, то усиливая аппроксимацию по переменной x, как в предложении 1.4, мы завершаем доказательство.

1.3.5 Случай $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ и $(0,1,1)$-линейностей

Доказательство этих трех случаев аналогично, поэтому проведем его только для случая $(1,0,1)$–линейности.

Предложение 1.7. *Если* $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$, *то* $\mu(L_n^{(1,0,1)}(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$.

Доказательство. Условие $(1,0,1)$–линейности означает, что вместе с системой неравенств (1.4) выполняется система

$$\begin{aligned} q_1 + k_2 a^{-1} &\geq 1 + v_1 + \lambda_1, \\ r_1 + l_2 a^{-1} &< 1 + v_2 + \lambda_2, \\ s_1 + m_2 a^{-1} &\geq v_3 + \lambda_3. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Вначале введем дополнительное ограничение, добавив к системе (1.43) условие

$$0.7 + v_2 + \lambda_2 < r_1 + l_2 a^{-1}. \tag{1.44}$$

Определим

$$\mu_1 = \max_{2 \le j \le n} (1 + v_1 + \lambda_1 - q_j) j^{-1}$$

и

$$\mu_3 = \max_{2 \le j \le n} (v_3 + \lambda_3 - s_j) j^{-1},$$

и пусть максимальные значения достигаются при j_1 и j_3 соответственно. Доказательство этого предложения следует из доказательств предложений 1.4, 1.5, 1.6 с небольшими изменениями. Множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(1,0,1)}$, $2^t \le H(P) < 2^{t+1}$, удовлетворяющих (1.43) и (1.44), обозначим $\mathcal{P}_8^t$. Разделим параллелепипед $\mathbf{T}$ на параллелепипеды M со сторонами $2^{-t\mu_1}$, $2^{-t(l_2 a^{-1} - \varepsilon_1)}$ и $2^{-t\mu_3}$.

Следуя предложению 1.5, предположим, что существует параллелепипед M, содержащий два и более многочленов. Разложим их в ряд Тейлора и получим оценки сверху для каждого члена разложения. В силу того, что многочлены P неприводимы и не имеют общих корней, то можно применить лемму 1.7. Вместе с условием (1.44) это приведет к противоречию. Таким образом, можем предположить, что не более одного многочлена принадлежит каждому параллелепипеду M. Тогда

$$\mu(A_t) \ll 2^{-t(\mu_1 + 2v_2 + 2\lambda_2 + 2 - 2r_1 + \mu_3 - \mu_1 - \mu_3 - 2l_2 a^{-1} - 2\varepsilon_1)} \ll 2^{-2t\varepsilon_1}.$$

Снова получаем $\sum_{t=1}^{\infty} \mu(A_t) < \infty$, и доказательство завершается в данном случае, применяя лемму Бореля-Кантелли.

Далее в системе неравенств (1.43) заменим второе неравенство на следующее

$$r_1 + l_2 a^{-1} \le 0.7 + v_2 + \lambda_2. \tag{1.45}$$

Обозначим множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n^{(1,0,1)}$, $2^t \le H(P) < 2^{t+1}$, удовлетворяющих (1.43) и (1.45), через $\mathcal{P}_9^t$. Пусть $A_t = \cup_{P \in \mathcal{P}_9^t} \sigma(P)$.

Разделим параллелепипед $\mathbf{T}$ на параллелепипеды M со сторонами $2^{-t\mu_1}$, $2^{-tl_2 a^{-1}}$ и $2^{-t\mu_3}$. Зафиксируем $u = 2(v_2 + \lambda_2 + 1 - r_1 - l_2 a^{-1})$ и $\theta = u - \varepsilon_2$ для достаточно малой величины $\varepsilon_2 > 0$. Рассмотрим те параллелепипеды M, которым принадлежит не более $2^{t\theta}$ многочленов. Тогда

$$\mu(A_t) \ll 2^{-t(\mu_1 + \mu_3 + 2v_2 + 2\lambda_2 + 2 - 2r_1 - \mu_1 - \mu_3 - 2l_2 a^{-1} - \theta)} \ll 2^{-t(u-\theta)} \ll 2^{-t\varepsilon_2}.$$

Получаем $\sum_{t=1}^{\infty} \mu(A_t) < \infty$, поэтому мера точек, принадлежащих бесконечному числу множеств A_t, имеет меру нуль согласно лемме Бореля-Кантелли.

Далее рассмотрим параллелепипеды M, которым принадлежит более чем $2^{t\theta}$ многочленов. Пусть $u = u_1 + d$, где $0 < d < 1$, и предположим, что

P принадлежит M. Разложив многочлен P в ряд Тейлора на M и оценив сверху каждый член разложения, получим

$$\begin{aligned} |P(x)| &\ll 2^{-t(v_1+\lambda_1-(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P(z)| &\ll 2^{-t(r_1+l_2a^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)}, \\ |P(w)|_p &\ll 2^{-t(v_3+\lambda_3-(n-1)\varepsilon_1)}. \end{aligned}$$

Снова следуем схеме доказательства предложения 1.6, используя вышеприведенную систему вместо (1.21). От многочленов P перейдем к многочленам $R_j = P_j - P_1$, $2 \le j \le k$, $k \ge 2^{t(d+\{u_1\}-\varepsilon_2)}$, затем перенумеруем многочлены R_j и перейдем к многочленам $S_i = R_{i+1} - R_1$, $1 \le i \le m-1$, $m \ge 2^{t(d-\varepsilon_2)}$, как в (1.31) и (1.32). Получим

$$\begin{aligned} |S_i(x)| &\ll 2^{-t(v_1+\lambda_1-(n-1)\varepsilon_1)h^{-1}}, \\ |S_i(z)| &\ll 2^{-t(r_1+l_2a^{-1}-1-(n-1)\varepsilon_1)h^{-1}}, \\ |S_i(w)|_p &\ll 2^{-t(v_3+\lambda_3-(n-1)\varepsilon_1)}, \end{aligned}$$

где $\deg S_i \le n - [u_1]$ и $H(S_i) \ll 2^{t(1-h_1)}$.

Вновь рассмотрим три случая.

Случай А. Во-первых, от системы перейдем к неравенству

$$|S_0(x)||S_0(z)|^2|S_0(w)|_p \ll 2^{-t(v_1+v_3+\lambda_1+\lambda_3+2r_1+2l_2a^{-1})-2-4(n-1)\varepsilon_1)},$$

полученному таким же способом, как и (1.33). Аналогично тому, как была показана справедливость неравенства (1.34), доказывается справедливость неравенства

$$v_1+v_3+\lambda_1+\lambda_3+2r_1+2l_2a^{-1}-2-4(n-1)\varepsilon_1+3d > (n-[u_1]-2)(1-d-h_1)$$

для $d = 0.23$ и достаточно малых величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Таким образом, применима лемма 1.1.

Случай Б. Далее предположим, что существуют приводимые многочлены среди многочленов S_i. Тогда справедливо неравенство

$$v_1+v_3+\lambda_1+\lambda_3+2r_1+2l_2a^{-1}-2-4(n-1)\varepsilon_1 > (n-[u_1]-3)(1-h_1)$$

для $d = 0.23$ и достаточно малого ε_1. Доказательство последнего неравенства совпадает с доказательством неравенства (1.34), и далее снова применяем лемму 1.1.

Случай В. Применим лемму 1.7 к двум неприводимым многочленам S_1 и S_2, не имеющим общих корней. Пусть

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (v_1+\lambda_1-(n-1)\varepsilon_1)h^{-1}, & \eta_1 &= \mu_1 h^{-1}, \\ \tau_2 &= (r_1+l_2a^{-1}-(n-1)\varepsilon_1-1)h^{-1}, & \eta_2 &= l_2a^{-1}h^{-1}, \\ \tau_3 &= (v_3+\lambda_3-(n-1)\varepsilon_1)h^{-1}, & \eta_3 &= \mu_3 h^{-1}. \end{aligned}$$

Наиболее слабая форма неравенства в лемме 1.7 получается при $j_1 = j_3 = 2$ и имеет вид

$$2v_1 + 2\lambda_1 + 2v_3 + 2\lambda_3 + 2 + 6r_1 + 2l_2 a^{-1} + q_2(S) + s_2(S) - 12(n-1)\varepsilon_1 - \frac{9\{u_1\}}{n - [u_1]}$$
$$< 2(v_1 + \lambda_1 + v_3 + \lambda_3 + 2r_1 + 2l_2 a^{-1} + d) + \delta.$$

Последнее неравенство противоречиво при $d = 0.23$, $n - [u_1] \geq 6$ и достаточно малых δ и ε_1. Доказательство в случае $n - [u_1] = 4$ и $n - [u_1] = 5$ проводится отдельно и аналогично как в предложении 1.4. Предложение 1.7 доказано.

Объединяя все предложения, получаем доказательство теоремы 1.1.

1.4 Доказательство гипотезы Берника-Клейнбока-Маргулиса в случае сходимости

Прежде всего отметим, что поскольку ряд $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2}\Psi_4(H)\Psi_5(H)$ сходится и $\Psi_4\Psi_5$ – монотонно убывающая функция, то

$$2^{-n+1}h^{n-1}\Psi_4(h)\Psi_5(h) \leq \sum_{h/2 \leq l \leq h} l^{n-2}\Psi_4(l)\Psi_5(l) \to 0 \text{ при } h \to \infty.$$

Поэтому можно предполагать, что выполнено неравенство

$$\Psi_4(h)\Psi_5(h) \leq h^{-n+1} \tag{1.46}$$

для всех достаточно больших h; это неравенство будет использоваться в дальнейшем.

Пусть $\Psi_5(H) \geq H^{1/2+\epsilon}$, $\epsilon > 0$. Далее будем различать два случая в зависимости от значения первой производной: $|P'(x)| < H(P)^{1/2}$ и $H(P)^{1/2} \leq |P'(x)| < \Psi_5(H(P))$.

1.4.1 Случай I: $|P'(x)| < H(P)^{1/2}$

В этом случае воспользуемся результатом Берника, Клейнбока и Маргулиса [62]. Используя обозначения теоремы 1.4 [62], выберем $\mathbf{f} = (x, x^2, \ldots, x^n)$, $d = 1$, $T_1 = \ldots = T_n = H$, и получим следующий результат.

Лемма 1.11. *Пусть $I \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in I$. Тогда существует интервал $J \subset I$, содержащий x_0, такой что для любого интервала $B \subset J$ существует постоянная $E > 0$ такая, что для любого выбора действительных чисел ω, K, T, удовлетворяющих неравенствам*

$$0 < \omega \leq 1,\ T \geq 1,\ K > 0,\ \omega K T^{n-1} \leq 1,$$

множество

$$S(\omega, K, T) := \left\{ x \in B : \exists P \in \mathcal{P}_n \text{ такой, что } \begin{array}{l} |P(x)| < \omega, \\ |P'(x)| < K, \\ 0 < H(P) < T \end{array} \right\}$$

имеет меру не превосходящую $E\epsilon^{\frac{1}{2n-1}}\mu(B)$, *где*

$$\epsilon := \max\left(\omega, \left(\omega K T^{n-1}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right). \tag{1.47}$$

Поскольку $\Psi_5(H) \geq H^{1/2+\epsilon}$ и $\Psi_4(H) \leq \Psi_5(H)^{-1}H^{-n+1}$ в силу (1.46), то получаем

$$|P(x)| < \Psi_4(H) \leq H^{-n+1/2-\epsilon}$$

для всех достаточно больших $H \in \mathbb{N}$.

Пусть $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Выберем окрестность $J \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ точки x_0 и рассмотрим интервал B, содержащий точку x_0. Для неотрицательного целого числа r обозначим через $\mathcal{A}(r)$ множество точек $x \in B$, для которых существует многочлен $P \in P_n$ такой, что выполнена система неравенств

$$|P(x)| < H(P)^{-n+1/2-\epsilon}, \ |P'(x)| < H(P)^{1/2}, \tag{1.48}$$

где $2^{r-1} \leq H(P) < 2^r$. Применяя лемму 1.11, получаем $\mu_1(\mathcal{A}(r)) \ll 2^{\frac{-\epsilon r}{(n+1)(2n-1)}}$, где $\epsilon > 0$. Множество точек $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, для которых существует бесконечно много многочленов $P \in P_n$, удовлетворяющих (1.48), состоит из точек $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, принадлежащих бесконечному числу множеств $\mathcal{A}(r)$. Ряд $\sum_{r=1}^{\infty} \mu_1(\mathcal{A}(r))$ сходится, и из леммы Бореля-Кантелли следует, что почти все точки B принадлежат не более чем конечному числу множеств $\mathcal{A}(r)$. Используя факт, что $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ покрывается конечным или счетным числом интервалов B, завершаем доказательство в данном случае.

1.4.2 Случай II: $H(P)^{1/2} \leq |P'(x)| < \Psi_5(H(P))$

Пусть $H > 0$ – достаточно большое число. Обозначим через $P_n(H)$ множество многочленов $P \in P_n$ таких, что $H(P) = H$. Очевидно, что $P_n = \cup_{H=1}^{\infty} P_n(H)$.

Для фиксированного многочлена $P \in P_n(H)$, имеющего корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, определим множества $S_1(\alpha_j)$, $1 \leq j \leq n$, как и ранее. При исследовании меры множества точек $x \in \mathcal{P}_n(\Psi_4, \Psi_5)$, без ограничения общности, будем считать, что x принадлежит $S_1(\alpha_j)$ многочлена P, удовлетворяющего неравенствам (1.2), для фиксированного j. Для упрощения вычислений будем считать, что $j = 1$.

Пусть $P \in P_n(H)$ и $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cap S_1(\alpha_1)$, где $P(\alpha_1) = 0$. Нетрудно проверить, что $|\alpha_1| < H^{-1} + 1/2 \leq 1$ для $H \geq 2$. Слеловательно, $|P^{(k)}(\alpha_1)| \ll H$ для

$k = 1, 2, \ldots, n$ и $H \geq 2$. Используя (1.13) и оценки для Ψ_4 и $|P'(x)|$, получаем

$$|x - \alpha_1| \leq n|P(x)||P'(x)|^{-1} < n\Psi_4(H)H^{-1/2} \leq n\Psi_5(H)^{-1}H^{-n+1/2}. \qquad (1.49)$$

Сначала покажем, что производная в корне, ближайшем к x, имеет тот же самый порядок, что и $|P'(x)|$. Разложим многочлен P' в ряд Тейлора в окрестности корня α_1, т.е.

$$P'(x) = \sum_{j=1}^{n}((j-1)!)^{-1}P^{(j)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^{j-1}.$$

Используя (1.49) и факт, что $\Psi_5(H) \geq H^{1/2+\epsilon}$, оценим каждый член разложения:

$$\begin{array}{lcl} |P''(\alpha_1)(x-\alpha_1)| & < & n^4\Psi_5(H)^{-1}H^{3/2-n} \leq n^4H^{1-n-\epsilon}, \\ |((j-1)!)^{-1}P^{(j)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^{j-1}| & < & n^6H^{1-2n-2\epsilon}, \quad 3 \leq j \leq n, \end{array}$$

для $H > H_0$. Тогда из последнего тождества для $n \geq 2$ и достаточно большого H получаем

$$\tfrac{1}{2}H^{1/2} < |P'(\alpha_1)| < 2\Psi_5(H). \qquad (1.50)$$

Для фиксированного многочлена $P \in P_n(H)$ определим множества

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}_1(P) = \{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cap S_1(\alpha_1) : \ |P(x)| < \Psi_4(H), \ H^{1/2} \leq |P'(x)| < \Psi_5(H)\}, \\ \mathcal{L}_2(P) = \{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cap S_1(\alpha_1) : \ |P(x)| < \Psi_4(H), \ \frac{1}{2}H^{1/2} \leq |P'(\alpha_1)| < 2\Psi_5(H)\}. \end{array}$$

Далее покажем, что $\mu_1(\cap_{N=1}^{\infty} \cup_{H \geq N} \cup_{P \in P_n(H)} \mathcal{L}_2(P)) = 0$. Используя лемму 1.3 и факт, что $|P(x)| < \Psi_4(H)$, получаем

$$|x - \alpha_1| < 2^n\Psi_4(H)|P'(\alpha_1)|^{-1}. \qquad (1.51)$$

Для фиксированного многочлена $P \in P_n(H)$ обозначим через $\sigma(P)$ множество решений неравенства (1.51). Очевидно, что $\mathcal{L}_1(P) \subseteq \mathcal{L}_2(P) \subseteq \sigma(P)$.

Для $P \in P_n(H)$ рассмотрим интервал $\sigma_1(P)$, определяемый как множество точек $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, удовлетворяющих неравенству

$$\sigma_1(P) : \ |x - \alpha_1| < \tfrac{1}{4n^{5/2}}|P'(\alpha_1)|^{-1}. \qquad (1.52)$$

Справедливо включение $\sigma(P) \subset \sigma_1(P)$ для всех $H > H_0$, где H_0 – достаточно большое число, зависящее от n.

Во-первых, рассмотрим многочлены $P \in P_n(H)$ такие, что $a_j = H$ для некоторого $j \geq 2$. Коэффициент a_1 многочлена $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in P_n(H)$ запишем в виде $a_1 = [10\Psi_5(H)]k + t$, где $0 \leq t \leq [10\Psi_5(H)] - 1$ и $|k| < \left[H(10\Psi_5(H) - 1)^{-1}\right]$.

Два многочлена

$$\begin{array}{l} P_1(x) = a_{1,n}x^n + \ldots + Hx^j + \ldots + a_{1,2}x^2 + ([10\Psi_5(H)]k_1 + t_1)x + a_{1,0}, \\ P_2(x) = a_{2,n}x^n + \ldots + Hx^j + \ldots + a_{2,2}x^2 + ([10\Psi_5(H)]k_2 + t_2)x + a_{2,0}, \end{array}$$

принадлежат одному классу $P_{b_t}(H)$, если они имеют один и тот же вектор $b_t = (a_{1,n}, a_{1,n-1}, \ldots, H, \ldots, a_{1,2}, t_1)$, где

$$a_{1,n} = a_{2,n},\ a_{1,n-1} = a_{2,n-1}, \ldots, a_{1,j} = a_{2,j} = H,\ \ldots, a_{1,2} = a_{2,2},\ t_1 = t_2.$$

Число различных классов $P_{b_t}(H)$ не превосходит $\ll H^{n-2}\Psi_5(H)$.

Зафиксируем вектор $b_t = (a_n, a_{n-1}, \ldots, H, \ldots, a_2, t)$. Разложим многочлен $P \in P_{b_t}(H)$ в ряд Тейлора на $\sigma_1(P)$, т.е.

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} (j!)^{-1} P^{(j)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^j.$$

Для получения оценки сверху для $|P(x)|$, оценим каждый член разложения

$$\begin{array}{l} |P'(\alpha_1)||x-\alpha_1| < \frac{1}{4n^{5/2}}, \\ 1/j!|P^{(j)}(\alpha_1)||x-\alpha_1|^j < \frac{1}{8n^2}, 2 \le j \le n. \end{array}$$

Тогда, имеем

$$|P(x)| < \frac{3}{8n}. \tag{1.53}$$

Далее разложим многочлен P' в ряд Тейлора на $\sigma_1(P)$. Используя (1.50), (1.52), $\Psi_5(H) \ge H^{1/2+\epsilon}$, и оценивая каждый член разложения, получаем

$$|P'(x)| \le 2\Psi_5(H) + n^{1/2}H^{1/2}/2 + (n-2)/(8n) < 3\Psi_5(H) \tag{1.54}$$

для достаточно большого H.

Далее покажем, что интервалы $\sigma_1(P)$ и $\sigma_1(Q)$ не пересекаются, где $P, Q \in P_{b_t}(H)$ и $P \neq Q$. Предположим противное, т.е. $\sigma_1(P) \cap \sigma_1(Q) \neq \emptyset$. Пусть $R(x) = P(x) - Q(x) \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, тогда многочлен R имеет вид $R(x) = b_1 x + b_0$, где $|b_1| = |a_1(P) - a_1(Q)| = [10\Psi_5(H)]|k(P) - k(Q)|$. Применяя неравенства (1.53) и (1.54), находим

$$\begin{array}{l} |b_1 x + b_0| < \frac{3}{4n}, \\ |b_1| < 6\Psi_5(H). \end{array} \tag{1.55}$$

Поскольку $|b_1| = [10\Psi_5(H)]|k_1| \ge [10\Psi_5(H)]$, где $k_1 \in \mathbb{Z}/\{0\}$, то получили противоречие с неравенством (1.55). Это означает, что $\sigma_1(P) \cap \sigma_1(Q) = \emptyset$. Тогда имеем оценку

$$\sum_{P \in P_{b_t}(H)} \mu_1(\sigma_1(P)) \ll 1.$$

Кроме того, из (1.51) и (1.52) следует, что

$$\mu_1(\sigma(P)) \ll \mu_1(\sigma_1(P))\Psi_4(H).$$

Поскольку число различных классов $P_{b_t}(H)$ не превосходит $c(n)H^{n-2}\Psi_5(H)$, то из последних двух неравенств получаем

$$\sum_{b_t} \sum_{P \in P_{b_t}(H)} \mu_1(\sigma(P)) \ll H^{n-2}\Psi_4(H)\Psi_5(H).$$

По условию теоремы, ряд $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2}\Psi_4(H)\Psi_5(H)$ сходится, следовательно, по лемме Бореля-Кантелли множество точек x, принадлежащих бесконечному числу множеств $\sigma(P)$, имеет меру нуль.

Во-вторых, рассмотрим многочлены $P \in P_n(H)$ такие, что $a_0 = H$ или $a_1 = H$. Зафиксируем $\theta > 0$. В силу произвольности θ, можем полагать без ограничения общности, что любое действительное число x из интервала $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ удовлетворяет условию $|x| \geq \theta$. При $n = 2$ доказательство проводится аналогично как и в [40]. При $n \geq 3$ перейдем от многочлена P к многочлену вида $Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$. При таком преобразовании и ему обратном мера решений x изменяется в $c(n, \theta)$ раз. Используя оценки $H(P) = H(Q)$, $\Psi_5(H) \geq H^{1/2+\epsilon}$, $\theta \leq |x| \leq 1/2$ и (1.46), убеждаемся, что $|Q(x)| \ll \Psi_4(H)$ и $|Q'(x)| \ll \Psi_5(H)$. Далее используем для многочлнов Q те же рассуждения, что и для многочленов P, приведенные выше. Доказательство теоремы 1.3 завершено.

2 Теорема Хинчина в случае расходимости для совместных приближений

2.1 Основные результаты главы

Доказательство случая сходимости в теореме Хинчина достаточно простое и является следствием леммы Бореля-Кантелли. В случае расходимости доказательство значительно сложнее. А.Я. Хинчин использовал для доказательства случая расходимости теорию цепных дробей. К настоящему времени ситуация во многом изменилась: были введены понятия регулярных систем и повсеместных систем. Понятие регулярной системы точек было введено в теорию диофантовых приближений А. Бейкером и В. Шмидтом [47], чтобы охарактеризовать равномерность распределения счетных подмножеств на прямой, в частности, множества алгебраических чисел фиксированной степени. Повсеместные системы были введены М. Додсоном, Ринном и Виккерсом [95] для изучения приближений точек $\mathbb{R}^n$ рациональными гиперплоскостями. В [120] показано, что регулярные системы и повсеместные системы эквивалентны в случае приближений рациональными числами. Оказалось, что если удается доказать регулярность или повсеместность систем, то отсюда получаются оценки снизу для размерности Хаусдорфа диофантовых множеств [10, 26, 47, 95, 94, 115]. Дальнейшее развитие регулярные и повсеместне системы нашли в, так называемых, оптимальных регулярных системах [4], регулярных системах резонансных множеств [3] и локально повсеместных системах [55], введение которых позволяет доказывать аналоги теоремы Хинчина в случае расходимости (см. [6, 49, 51, 54, 55, 56, 117]).

В данной главе оптимальные регулярные системы и локально повсеместные системы применены для доказательсва аналогов теоремы Хинчина в случае расходимости. Первый результат – это обобщение теоремы Хинчина на совместные приближения в пространствах действительных, комплексных и p-адических чисел, а второй – это теорема типа Хинчина для приближений нуля значениями многочленов и их первых производных.

Пусть $\mathcal{L}'_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ обозначает множество $\mathcal{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ при специальном выборе параметров

$$v_1 = v_2 = v_3 - 1 = \frac{n}{4} - 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{4}.$$

Теорема 2.1. *Пусть $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – монотонно убывающая функция, и $n \geq 3$. Тогда при расходимости ряда $\sum_{r=1}^{\infty} \Psi(r)$ множество $\mathcal{L}'_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ имеет полную меру в T_0, т.е. $\mu(T_0 \setminus \mathcal{L}'_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)) = 0$.*

Одним из основных моментов доказательства теоремы 2.1 является построение оптимальной регулярной системы из наборов корней (α, β, γ) целочисленных многочленов P, т.е. $P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = 0$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Im}\,\beta| > \frac{1}{2}\delta_1$, $\gamma \in \mathbb{Q}_p$. В работе [5] дано определение оптимальной регулярной системы. Дадим явную конструкцию оптимальной регулярной системы.

Пусть $\prod_+(\mathbf{a}) = f(a_1)f^2(a_2)f(a_3)$ для вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, где

$$f(a) = \begin{cases} |a| & \text{для} \quad a \neq 0, \\ 1 & \text{для} \quad a = 0. \end{cases}$$

Пусть дана точка $\mathbf{u_0} = (x_0, z_0, w_0) \in \Omega$ и набор $\mathbf{r} = (r_x, r_z, r_w)$ положительных чисел. Множество

$$T(\mathbf{u_0}, \mathbf{r}) = \{(x, z, w) \in \Omega : \ |x - x_0| \le r_x, \ \ |z - z_0| \le r_z, \ \ |w - w_0|_p \le r_w\},$$

будем называть параллелепипедом в Ω. Легко видеть, что $\mu(T(\mathbf{u_0}, \mathbf{r})) \asymp \prod_+(\mathbf{r})$.

Определение 2.1. *Пусть даны счетное множество $R \subset \Omega$, параллелепипед $T_0 \subset \Omega$, функция $h : R \to \mathbb{N}$, называемая высотой, и монотонно убывающие функции $d_x, d_z, d_w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Тройка $(R, h, \mathbf{d})$ будет называться регулярной системой точек в T_0, если существует постоянная $c_3 > 0$ такая, что для любого параллелепипеда $T \subset T_0$ найдется достаточно большое число $r_0 > 0$ такое, что для любого $r > r_0$ можно выбрать набор точек $\boldsymbol{\nu}_1, \ldots, \boldsymbol{\nu}_t \in R$ такой, что*

$$T(\boldsymbol{\nu}_i, \mathbf{d}(r)) \subset T, \ 1 \le i \le t, \tag{2.1}$$

$$h(\boldsymbol{\nu}_i) \le r, \ 1 \le i \le t, \tag{2.2}$$

$$T(\boldsymbol{\nu}_i, \mathbf{d}(r)) \cap T(\boldsymbol{\nu}_j, \mathbf{d}(r)) = 0, \ 1 \le i < j \le t, \tag{2.3}$$

$$t \ge c_3 \frac{\mu(T)}{\prod_+(\mathbf{d}(r))}. \tag{2.4}$$

Определение 2.2. *Регулярную систему точек $(R, h, \mathbf{d})$ назовем оптимальной, если для любого параллелепипеда $T \subset T_0$ выполняется условие*

$$\limsup_{r\to\infty} \left(\prod_+ (\mathbf{d}(r)) \#\{\boldsymbol{\nu} \in R \cap T : \ h(\boldsymbol{\nu}) \le r\} \right) < \infty. \tag{2.5}$$

Пусть $R := \{\boldsymbol{\nu} = (\alpha, \beta, \gamma) \in T_0 : \exists P \in \mathcal{P}'_n, \ P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = 0\}$. Для $\boldsymbol{\nu} \in R$ величину $H(\boldsymbol{\nu}) := \min\{H(P) |\, P \in \mathcal{P}'_n, \ P(\alpha) = P(\beta) \ = \ P(\gamma) \ = \ 0 \ \}$ будем рассматривать как высоту $\boldsymbol{\nu}$, а сам многочлен P будем называть *квазиминимальным.*

Доказательство теоремы 2.1 основано на следующей теореме.

Теорема 2.2. *Пусть T_0 – ограниченный параллелепипед в $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Определим R как множество наборов $\boldsymbol{\nu}_P = (\alpha, \beta, \gamma)$, где α – действительный, β*

– *комплексный,* γ *– p-адический корни многочлена* $P(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i \in \mathbb{Z}[f]$. *Пусть выполнены условия*

$$w_1 + 2w_2 + w_3 = n - 2, \quad w_1 \geq 0, \; w_2 \geq 0, \;\; w_3 \geq 1,$$

и

$$d_x(r) = r^{-(w_1+1)}, \;\; d_z(r) = r^{-(w_2+1)}, \;\; d_w(r) = r^{-w_3}, \;\; h(\boldsymbol{\nu}_P) = H(P).$$

Тогда $(R, h, \mathbf{d})$ *– регулярная система в* T_0.

Замечание 2.1. *Заметим, что теорема 2.2 позволяет строить регулярные системы в пространстве* Ω *без дополнительных условий связи между вектором* $\mathbf{v}$ *и числом рассматриваемых пространств.*

Для натурального числа $Q > 1$ определим класс многочленов $\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathcal{P}_n, H(P) \leq Q\}$.

Основой для доказательства теоремы 2.2 является следующий метрический результат.

Теорема 2.3. *Для каждого* $n \geq 3$ *существуют постоянные* δ_0 *и* c_0, *зависящие только от* n *и* p *(и не зависящие от* Q*), обладающие следующим свойством. Для любого множества* $T \subset T_0$ *и для любых* w_1, w_2, w_3, *удовлетворяющих условиям*

$$w_1 + 2w_2 + w_3 = n - 2, \quad w_1, w_2 \geq 0, \; w_3 \geq 1,$$

существует измеримое множество $B_1(Q, T) \subset T$ *такое, что для каждой точки* $(x, z, w) \in B_1(Q, T)$ *существует многочлен* $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, *удовлетворяющий системе*

$$|P(x)| < c_0 Q^{-w_1}, \;\; |P(z)| < c_0 Q^{-w_2}, \;\; |P(w)|_p < c_0 Q^{-w_3}, \tag{2.6}$$

$$|P'(x)| \geq \delta_0 Q, \;\; |P'(z)| \geq \delta_0 Q, \;\; |P'(w)|_p \geq \delta_0, \tag{2.7}$$

и для $Q > Q_0$ *верна оцена меры*

$$\mu(B_1(Q, T)) \geq s\mu(T), \tag{2.8}$$

где $s \in \mathbb{R}$ *и* $0 < s < 1$.

Методика получения результатов типа теоремы Хинчина в случае расходимости разрабатывается давно. В монографии Спринджука [40] приведена схема доказательства случая расходимости.

Второй результат этой главы – это доказательство гипотезы Берника-Клейнбока-Маргулиса для множества $\mathcal{A}_n(\Psi_4, \Psi_5)$ в случае расходимости для специального вида функций Ψ_4 и Ψ_5.

Прежде чем сформулировать основной результат, введем некоторые вспомогательные функции, которые определяются через Ψ_4 и Ψ_5 и отвечают различным “техническим” ограничениям на Ψ_4 и Ψ_5:

$$\bar{\Psi}_4(h) = \min\{\Psi_4(h),\ \Psi_5^{-1}(h)h^{1-n}\},$$

$$\psi(h) = K^{-1}\bar{\Psi}_4(h)\Psi_5^{-1}(h),\ \ \rho(h) = K^2 h^{-n+1}\Psi_5^{-2}(h),$$

где K – достаточно большая постоянная.

Следуя определению в [55], будем говорить, что функция f является 2-*регулярной*, если существует положительная постоянная $\lambda < 1$ такая, что $f(2^{t+1}) \le \lambda f(2^t)$ для всех достаточно больших t. Также будем говорить, что функция f является *квази-монотонной*, если существуют постоянные c_4 и c_5 такие, что $0 < c_4 < 1 \le c_5$ и $f(c_4 x) \le c_5 f(x)$ для всех достаточно больших x.

Теорема 2.4. *Пусть функции $\Psi_4, \Psi_5 :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что $\Psi_4\Psi_5$ – монотонно убывающая функция. Пусть $n \ge 2$ – целое число. Предположим, что $Kh^{\frac{-n+2}{3}} \le \Psi_5(h) < k_0 K h$ и ψ или ρ является 2-регулярной функцией, где k_0 – положительная постоянная, зависящая только от n. Кроме того, предположим, что ψ является квази-монотонной функцией. Тогда*

$$\mu_1(\mathcal{A}_n(\Psi_4, \Psi_5)) = 1, \quad \text{если} \ \sum_{h=1}^{\infty} h^{n-2}\Psi_4(h)\Psi_5(h) = \infty.$$

В основе доказательства теоремы 2.4 лежит два метода: метод повсеместных систем [55] и построение множеств близких сопряженных алгебраических чисел [57].

Теоремы в случае расходимости допускают уточнения, в которых указывается асимптотика числа решений соответствующих диофантовых неравенств или систем неравенств. Однако, в случае приближений зависимых величин асимптотическая формула получена только в работе [7] для почти всех точек многообразия Γ, являющегося топологическим произведением $m \ge 4$ плоских кривых $\Gamma_i = (t, f_i(t))$, $1 \le i \le m$. Возможно, этот результат можно обобщить и на многообразия, задаваемые квадратичными формами; для этого будут полезны результаты работ [16, 21, 76].

Настоящая глава основана на работах [17, 24, 71, 78].

2.2 Доказательство теоремы 2.1

2.2.1 Получение эффективной оценки меры множества

Настоящий раздел посвящен доказательству теоремы 2.3. Зафиксируем $\delta_1 > 0$. Удалим из параллелепипеда T_0 множество малой меры так, чтобы в оставшейся части выполнялось неравенство $|\mathrm{Im}\, z| \ge \delta_1$, тогда справедливы неравенства (1.16). Далее зафиксируем произвольный параллелепипед $T \subset T_0$. Сначала покажем, используя принцип ящиков Дирихле, что при $c_0 = c_0(n,p,T)$ для каждой точки $\mathbf{u}$ множества T существует ненулевой многочлен $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ удовлетворяющий (2.6). Затем докажем существование постоянной δ_0, что является главной трудностью при доказательстве теоремы.

Определим множество $B_2(Q,T)$ как множество точек $\mathbf{u} \in T$, для которых существует хотя бы один ненулевой многочлен $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, удовлетворяюший системе неравенств (2.6).

Предложение 2.1. *Для любого множества T в T_0 существует постоянная c_0, зависящая только от n, p и T такая, что для всех достаточно больших Q имеет место равенство $B_2(Q,T) = T$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $\mathbf{u} \in T$. Поскольку множество T ограничено, значения функций f^i и их производных на T ограничены (по абсолютной величине и p-адической норме соответственно) некоторой постоянной, зависящей только от T и n. Следовательно, для любого многочлена $P(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i \in \mathcal{P}_n(Q)$ точка $M_P = (P(x), P(z), P(w))$ будет принадлежать параллелепипеду $T' = (\mathbf{0}, \mathbf{r}')$, где $\mathbf{r}' = ((n+1)c_2Q, c_2(n+1)Q, p^{-l})$, $c_2 > 0$ – постоянная зависящая от T.

Пусть $x \in [-c_2, c_2]$. Интервал $[-(n+1)c_2Q, (n+1)c_2Q]$ в $\mathbb{R}$ можно покрыть $[2(n+1)c_2Q/(c_0Q^{-w_1})] + 1$ интервалами длины $c_0Q^{-w_1}$. Обозначим эти интервалы через l_{x,b_1}, тогда

$$1 \le b_1 \le [2(n+1)c_2Q/(c_0Q^{-w_1})] + 1 \le 3c_0^{-1}(n+1)c_2Q^{1+w_1}$$

при Q достаточно большом.

Пусть $z \in C(0, c_2)$. Круг радиуса $(n+1)c_2Q$ в $\mathbb{C}$ содержится в квадрате $[-(n+1)c_2Q, (n+1)c_2Q]^2$ в $\mathbb{C}$. Каждую из сторон этого квадрата можно покрыть отрезками длины $c_0Q^{-w_2}2^{-1/2}$, при этом число отрезков на каждой из сторон не превосходит $[2(n+1)c_2Q(c_0Q^{-w_2}2^{-1/2})^{-1}] + 1$. Разбиение каждой из сторон индуцирует покрытие всего квадрата квадратами, каждый из которых покрывается кругом диаметра $c_0Q^{-w_2}$. Обозначим эти круги через l_{z,b_2}, тогда число кругов b_2 не превосходит

$$([2(n+1)c_2Q(c_0Q^{-w_2}2^{-1/2})^{-1}] + 1)^2 \le 9(n+1)^2c_2^2c_0^{-2}Q^{2+2w_2}$$

при Q достаточно большом.

Далее построим покрытие цилиндра D радиуса c_2 в $\mathbb{Q}_p$ цилиндрами l_{w,b_3} радиуса $c_0Q^{-w_3}$. Каждое p-адическое число из данного цилиндра удовлетворяет условию $|w|_p \le c_2 = p^{\log_p c_2}$, откуда $|w|_p \le p^{l_0}$, где $l_0 = [\log_p c_2]$. Таким образом, $w = \sum_{j=-l_0}^{\infty} w^{(j)}p^j$, $w^{(j)} \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. В качестве цилиндров покрытия возьмем цилиндры радиуса $c_0 Q^{-w_3}$ с центрами в точках $w' = \sum_{j=-l_0}^{m_0} w^{(j)} p^j$, $m_0 = [-\log_p(c_0 Q^{-w_3})]$, $w^{(j)} \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. По построению для любой точки $w = \sum_{j=-l_0}^{\infty} w^{(j)} p^j \in D$ точка $w^{(j)} \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ будет удовлетворять $w - w' = \sum_{j=m_0+1}^{\infty} w^{(j)} p^j$ и $|w - w'|_p \le p^{-(m_0+1)} < c_0 Q^{-w_3}$. Таким образом, число цилиндров b_3 в этом покрытии равно

$$p^{l_0+m_0+1} < pc_2 c_0^{-1} Q^{w_3}.$$

Следовательно, набор параллелепипедов $l_{x,b_1} \times l_{z,b_2} \times l_{w,b_3}$ образует покрытие T, число элементов в котором не более

$$27 c_0^{-4} (n+1)^3 p c_2^4 Q^{3+w_1+2w_3+w_3} = 27 c_0^{-4} (n+1)^3 p c_2^4 Q^{n+1}.$$

Положим $c_0 = (27(n+1)^3 2^{-(n+1)} p c_2^4)^{\frac{1}{4}}$. Поскольку число различных многочленов $\#P = (2Q+1)^{n+1}$, то найдется параллелепипед $l_{x,b_1} \times l_{z,b_2} \times l_{w,b_3}$, содержащий по крайней мере две точки: M_{P_1} и M_{P_2}. Легко видеть, что многочлен $P = P_1 - P_2$ удовлетворяет системе (2.6). $\Box$

Для некоторых $0 < v_i' < 1$, $i = 1, 2, 3$, которые будут выбраны позднее, определим следующие множества:

$$\begin{aligned}
L_0(Q,T) := \{\mathbf{u} \in B_2(Q,T) \ &: \ \exists P \in \mathcal{P}_n(Q) \text{ такой, что } |P'(x)| > Q^{v_1'},\\
&\quad |P'(z)| > Q^{v_2'},\ |P'(w)|_p > Q^{-v_3'}\},\\
L_1(Q,T) := \{\mathbf{u} \in L_0(Q,T) \ &: \ \exists P \in \mathcal{P}_n(Q) \text{ такой, что } Q^{v_1'} < |P'(x)| < \delta_0 Q,\\
&\quad |P'(z)| > Q^{v_2'},\ |P'(w)|_p > Q^{-v_3'}\},\\
L_2(Q,T) := \{\mathbf{u} \in L_0(Q,T) \ &: \ \exists P \in \mathcal{P}_n(Q) \text{ такой, что } |P'(x)| > Q^{v_1'},\\
&\quad Q^{v_2'} < |P'(z)| < \delta_0 Q,\ |P'(w)|_p > Q^{-v_3'}\},\\
L_3(Q,T) := \{\mathbf{u} \in L_0(Q,T) \ &: \ \exists P \in \mathcal{P}_n(Q) \text{ такой, что } |P'(x)| > Q^{v_1'},\\
&\quad |P'(z)| > Q^{v_2'},\ Q^{-v_3'} < |P'(w)|_p < \delta_0\}.
\end{aligned}$$

Рассматривая случаи линейности/нелинейности как при доказательстве теоремы 1.1 получим, что $\mu(B_2(Q,T) \setminus L_0(Q,T)) \to 0$ при $Q \to \infty$, поэтому при достаточно большом Q мера множества будет не превосходить $(1-s)\mu(T)/2$, $0 < s < 1$. Поскольку $L_0(Q,T) \setminus B_1(Q,T) \subset \cup_{j=1}^{3} L_j(Q,T)$ и $B_2(Q,T) = T$, то при условии $\mu(L_j(Q,T)) < (1-s)\mu(T)/6$, $j = 1, 2, 3$, получим требуемый результат $\mu(B_1(Q,T)) \ge s\mu(T)$. Далее покажем, что $\mu(L_1(Q,T)) < (1-s)\mu(T)/6$, результат для оставшихся двух множеств доказывается аналогично.

Предложение 2.2. *Для любого множества $T \subset T_0$ существует постоянная δ_0 такая, что верна оценка меры*

$$\mu(L_1(Q,T)) < \frac{1-s}{6}\mu(T)$$

для всех достаточно больших Q .

Доказательство. Достаточно провести доказательство для целочисленных неприводимых примитивных многочленов $P \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих условиям
$$|a_n| > c(n)H(P), \quad |a_n|_p > p^{-n}.$$
Сведение многочленов к таким специальным многочленам обосновано при доказательстве теоремы 1.1.

Зафиксируем многочлен $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. Пусть α_1 – ближайший корень многочлена P к точке x, β_1 – ближайший корень P к z, и γ – ближайший корень P к w, где $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$. Покажем, что производные многочлена P в корнях и производные многочлена P в ближайших к корням точках f ($f = x, z, w$ соответственно) одного порядка. Разложим многочлен P' в ряд Тейлора в окрестности корней α_1 , β_1 и γ_1. Используя (1.12), (1.13), (2.6) и определение множества $L_1(Q,T)$, получаем
$$\begin{array}{l} |x-\alpha_1| \leq \frac{n|P(x)|}{|P'(x)|} < nc_0Q^{-w_1-v_1'}, \\ |z-\beta_1| \leq \frac{n|P(z)|}{|P'(z)|} < nc_0Q^{-w_2-v_2'}, \\ |w-\gamma_1|_p \leq \frac{|P(w)|_p}{|P'(w)|_p} < c_0Q^{-w_3+v_3'}. \end{array} \tag{2.9}$$
Оценивая каждый член из разложения $P'(x) = \sum_{i=1}^{n}((i-1)!)^{-1}P^{(i)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^{i-1}$, находим
$$\begin{array}{c} |P''(\alpha_1)||x-\alpha_1| < c(n,T)c_0Q^{1-w_1-v_1'} < \frac{Q^{v_1'}}{4}, \\ |((j-1)!)^{-1}P^{(j)}(\alpha_1)||x-\alpha_1|^{j-1} < c(n,T)c_0^{j-1}((j-1)!)^{-1}Q^{1-(j-1)(w_1+v_1')} < \frac{Q^{v_1'}}{4(n-2)} \end{array}$$
для $2v_1' > 1-w_1$ (и $w_1 \geq -1$), $j = 3,\dots,n$ и достаточно большого Q. Отсюда следует, что
$$\frac{Q^{v_1'}}{2} < \frac{|P'(x)|}{2} < |P'(\alpha_1)| < 2|P'(x)| < 2\delta_0 Q. \tag{2.10}$$
В p-адическом случае, используя оценки $|P^{(j)}(\gamma_1)|_p < c'$ and $|(k!)^{-1}|_p \leq p^k$, находим
$$\begin{array}{rcl} |P''(\gamma_1)|_p|w-\gamma_1|_p &<& c'c_0Q^{-w_3+v_3'} < Q^{-v_3'}, \\ |((j-1)!)^{-1}P^{(j)}(\gamma_1)|_p|w-\gamma_1|_p^{j-1} &<& c'c_0^{j-1}p^{j-1}Q^{(j-1)(-w_3+v_3')} < Q^{-v_3'}, \end{array}$$
для $2v_3' < w_3$ (и $w_3 \geq 0$), $j = 3,\dots,n$ и достаточно большого Q. Заключаем, что $|P'(\gamma_1)|_p = |P'(w)|_p$. Таким образом, в комплексном (аналогично как и в действительном случае и используя (2.9)) и p-адическом случаях, для $2v_2' > 1-w_2$ (и $w_2 \geq -1$), $2v_3' < w_3$ (и $w_3 \geq 0$), и достаточно большого Q получаем
$$\tfrac{Q^{v_2'}}{2} < \tfrac{|P'(z)|}{2} < |P'(\beta_1)| < 2|P'(z)|, \;\; Q^{-v_3'} < |P'(w)|_p = |P'(\gamma_1)|_p. \tag{2.11}$$
Для многочлена P решения $\mathbf{u}$ системы неравенств в определении множества $L_1(Q,T)$ и удовлетворяющие (2.10) и (2.11), принадлежат параллелепипеду

$\sigma(P)$:

$$\begin{aligned}
&|x-\alpha_1| < 2nc_0Q^{-w_1}|P'(\alpha_1)|^{-1},\\
&|z-\beta_1| < 2nc_0Q^{-w_2}|P'(\beta_1)|^{-1},\\
&|w-\gamma_1|_p < c_0Q^{-w_3}|P'(\gamma_1)|_p^{-1}.
\end{aligned}$$

Для некоторой постоянной $\bar{c}_1 > 0$ (условия на которую будут наложены позднее) рассмотрим другой параллелепипед $\sigma_1(P)$, содержащий параллелепипед $\sigma(P)$:

$$\begin{aligned}
&|x-\alpha_1| < \bar{c}_1Q^{u_1}|P'(\alpha_1)|^{-1},\\
&|z-\beta_1| < \bar{c}_1Q^{u_2}|P'(\beta_1)|^{-1},\\
&|w-\gamma_1|_p < \bar{c}_1Q^{-u_3}|P'(\gamma_1)|_p^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Параллелепипеды $\sigma_1(P)$ и $\sigma(P)$ корректно определены, если выполняются следующие условия:

$$v'_1 > u_1 \geq -w_1, \quad v'_2 > u_2 \geq -w_2, \quad v'_3 < u_3 \leq w_3,$$

и дополнительное условие $\bar{c}_1 > 2nc_0$ в случае выполнения хотя бы одного из равенств: $u_1 = 0$ или $u_2 = 0$ или $u_3 = 1$. Разложим многочлен P в ряд Тейлора на $\sigma_1(P)$ в окрестности корней α_1 , β_1, γ_1 и оценим его значения сверху. Оценивая каждый член из разложения $P(x) = P'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + \sum_{i=2}^{n}(i!)^{-1}P^{(i)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^i$, получим

$$\begin{aligned}
|P'(\alpha_1)||x-\alpha_1| &< \bar{c}_1Q^{u_1},\\
|(j!)^{-1}P^{(j)}(\alpha_1)||x-\alpha_1|^j &< c(n,T)(j!)^{-1}(\bar{c}_1)^j2^jQ^{1+j(u_1-v'_1)} < \frac{\bar{c}_1Q^{u_1}}{n-1}
\end{aligned}$$

для $u_1 < 2v'_1 - 1$, $u_1 < v'_1$, $j = 2,\ldots,n$ и достаточно большого Q. Таким образом, находим на $\sigma_1(P)$:

$$|P(x)| < 2\bar{c}_1Q^{u_1}. \tag{2.13}$$

В p-адическом случае, используя оценки $|P^{(j)}(\gamma_1)|_p < c'$ и $|(k!)^{-1}|_p \leq p^k$, получаем

$$\begin{aligned}
|P'(\gamma_1)|_p|w-\gamma_1|_p &< \bar{c}_1Q^{-u_3},\\
|(j!)^{-1}P^{(j)}(\gamma_1)|_p|w-\gamma_1|_p^j &< c'(\bar{c}_1)^jp^jQ^{j(-u_3+v'_3)} < \bar{c}_1Q^{-u_3},
\end{aligned}$$

для $u_3 > 2v'_3$, $v'_3 < u_3$, $j = 2,\ldots,n$ и достаточно большого Q. Следовательно, имеем $|P'(w)|_p \leq \max_{1\leq j\leq n}|(j!)^{-1}P^{(j)}(\gamma_1)|_p|w-\gamma_1|_p^j < \bar{c}_1Q^{-u_3}$. Таким образом, в комплексном (по аналогии с действительным случаем) и p-адическом случаях для $u_2 < 2v'_2 - 1$, $u_2 < v'_2$, $u_3 > 2v'_3$, $v'_3 < u_3$, и достаточно большого Q находим

$$\begin{aligned}
|P(z)| &< 2\bar{c}_1Q^{u_2},\\
|P(w)|_p &< \bar{c}_1Q^{-u_3}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Дополнительно оценим $P'(x)$ на $\sigma_1(P)$. По формуле Лагранжа имеем равенство

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + P''(\theta_1)(x - \alpha_1),$$

где θ_1 – точка между x и α_1. Согласно (2.10), для $v_1' > u_1$ и достаточно большого Q находим

$$\begin{aligned} |P'(\alpha_1)| &< 2\delta_0 Q, \\ |P''(\theta_1)(x - \alpha_1)| &< c(n,T)\bar{c}_1 Q^{1+u_1-v_1'} < \delta_0 Q. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$|P'(x)| < 3\delta_0 Q, \quad x \in \sigma_1(P). \tag{2.15}$$

Выбор параметров

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = 1 \tag{2.16}$$

удовлетворяет всем условиям на u_j, $j = 1, 2, 3$. Принимая во внимание условия $1/2 < v_1', v_2' < 1$, $0 < v_3' < 1/2$, которые следуют из неравенств, связывающих величины v_j' и u_j, $j = 1, 2, 3$, выберем

$$v_1' = v_2' = 1/2 + 2\epsilon, \quad v_3' = 2\epsilon. \tag{2.17}$$

Зафиксируем вектор $\mathbf{b_1} = (a_n, \ldots, a_5, a_4)$ и обозначим через $P_n^{\mathbf{b_1}}(Q)$ подкласс многочленов из $\mathcal{P}_n(Q)$ с одним и тем же вектором $\mathbf{b_1}$. Далее будем использовать метод существенных и несущественных областей Спринджука (см. [40]). Параллелепипед $\sigma_1(P)$ будем называть *существенным*, если для любого другого параллелепипеда $\sigma_1(\bar{P})$, $\bar{P} \in P_n^{\mathbf{b_1}}(Q)$ справедливо

$$\mu(\sigma_1(P, \bar{P})) = \mu(\sigma_1(P) \cap \sigma_1(\bar{P})) \le \frac{1}{2}\mu(\sigma_1(P)). \tag{2.18}$$

В противном случае параллелепипед $\sigma_1(P)$ будем называть *несущественным*.

Сначала рассмотрим случай существенных параллелепипедов $\sigma_1(P)$. Из определения $\sigma(P)$ и $\sigma_1(P)$ следует, что

$$\mu(\sigma(P)) < 2^3 n^3 c_0^4 (\bar{c}_1)^{-4} Q^{-(w_1+2w_2+w_3)-(u_1+2u_2-u_3)} \mu(\sigma_1(P)). \tag{2.19}$$

В силу (2.18), (2.16) и последней оценки, имеем

$$\sum_{\substack{P \in P_n^{\mathbf{b_1}}(Q) \\ \sigma_1(P) \ \text{существенный}}} \mu(\sigma_1(P)) \le 2^3 \mu(T)$$

и

$$\sum_{\substack{P \in P_n^{\mathbf{b_1}}(Q) \\ \sigma_1(P) \ \text{существенный}}} \mu(\sigma(P)) < 2^6 n^3 c_0^4 (\bar{c}_1)^{-4} Q^{-n+3} \mu(T).$$

Просуммировав последную оценку по всем векторам $\mathbf{b_1}$, число которых $\#\mathbf{b_1} = (2Q+1)^{n-3}$, находим

$$\sum_{\mathbf{b_1}} \sum_{\substack{P \in P_n^{\mathbf{b_1}}(Q) \\ \sigma_1(P) \ \text{существенный}}} \mu(\sigma(P)) < 2^6 3^{n-3} n^3 c_0^4 (\bar{c}_1)^{-4} \mu(T).$$

Следовательно, мера множества точек, принадлежащих параллелепипам $\sigma(P)$, содержащихся в соответствующих существенных параллелепипедах, не превосходит $\frac{1-s}{12}\mu(T)$ при

$$\bar{c}_1 > \max(2nc_0, (2^8 3^{n-2} n^3 c_0^4 (1-s)^{-1})^{1/4}). \tag{2.20}$$

Далее рассмотрим случай несущественных параллелепипедов и покажем, что объединение таких параллелепипедов имеет малую меру. На пересечении $\sigma_1(P, \bar{P})$ для многочленов P и $\bar{P}$ выполняются неравенства (2.13), (2.14) и (2.15), поэтому для многочлена $R(f) = \bar{P}(f) - P(f)$ имеем

$$R(f) = b_3^3 + b_2 f^2 + b_1 f + b_0, \quad |b_j| \le 2Q, \ 0 \le j \le 3,$$

и справедливы оценки

$$|R(x)| < 4\bar{c}_1 Q^{u_1}, \ \ |R(z)| < 4\bar{c}_1 Q^{u_2}, \ \ |R(w)|_p < \bar{c}_1 Q^{-u_3}, \ \ |R'(x)| < 6\delta_0 Q. \tag{2.21}$$

Обозначим через μ_1, μ_2, μ_3 корни многочлена R, $\deg R_1 = 3$. Многочлен R имеет действительный и два комплексно сопряженных корня поскольку неравенство (2.21.1) справедливо, если x близко к μ_1 и неравенство (2.21.2) справедливо, если z близко к μ_2 или к его сопряженному корню μ_3. Согласно (1.16), имеем

$$|\mu_1 - \mu_2| > \delta_1, \quad |\mu_3 - \mu_2| > 2\delta_1.$$

По лемме 1.6, получаем

$$|R'(\mu_1)| = |b_3||\mu_1 - \mu_2||\mu_1 - \mu_3| > \delta_1^2 |b_3| > c_2 \delta_1^2 H(R). \tag{2.22}$$

Аналогично получим, что $|R'(\mu_2)| > c_3 \delta_1^2 H(R)$. Далее покажем, что

$$H(R) < 8\delta_0 \delta_1^{-2} c_2^{-1} Q \tag{2.23}$$

для $u_1 < 1$. В случае, когда $H(R) \ll Q^{2u_1 - 1}$, получаем $H(R) < 8\delta_0 \delta_1^{-2} c_2^{-1} Q$ для $u_1 < 1$. Если $H(R) \gg Q^{2u_1-1}$, то сначала докажем, что $|R'(\mu_1)| < 8\delta_0 Q$. Используя оценку

$$|x - \mu_1| < 6|R(x)||R'(\mu_1)|^{-1} < 24\bar{c}_1 c_2^{-1} \delta_1^{-2} Q^{u_1} H(R)^{-1},$$

и разложение в ряд Тейлора, получаем

$$
\begin{array}{rcl}
R'(x) & = & R'(\mu_1) + R''(\mu_1)(x-\mu_1) + R'''(\mu_1)(x-\mu_1)^2, \\
|R'(x)| & < & 6\delta_0 Q, \\
|R''(\mu_1)(x-\mu_1)| & < & c(n,T)H(R)24\bar{c}_1 c_2^{-1}\delta_1^{-2}Q^{u_1}H(R)^{-1} \\
 & < & \delta_0 Q \quad \text{для} \quad u_1 < 1, \\
|R'''(\mu_1)(x-\mu_1)^2| & < & c(n,T)H(R)(24\bar{c}_1 c_2^{-1}\delta_1^{-2}Q^{u_1}H(R)^{-1})^2 \\
 & < & \delta_0 Q \quad \text{для} \quad H(R) \gg Q^{2u_1-1}.
\end{array}
$$

Следовательно, $|R'(\mu_1)| < 8\delta_0 Q$ для $u_1 < 1$ и $H(R) \gg Q^{2u_1-1}$. Поскольку $|R'(\mu_1)| < 8\delta_0 Q$, то из (2.22) получаем, что $H(R) < 8\delta_0\delta_1^{-2}c_2^{-1}Q$.

Таким образом, в данном случае задача свелась к рассмотрению множества точек $\mathbf{u}$, для которых система неравенств (2.21) имеет решения в многочленах третьей степени, удовлетворяющих условию $H(R) < 8\delta_0\delta^{-2}c_2^{-1}Q$. Для многочлена R рассмотрим параллелепипед $\sigma_2(R)$:

$$
\begin{array}{l}
|x-\mu_1| < 24c_1c_2^{-1}\delta^{-2}Q^{u_1}H(R)^{-1}, \\
|z-\mu_2| < 24c_1c_3^{-1}\delta^{-2}Q^{u_2}H(R)^{-1}, \\
|w-\gamma_1(R)|_p < c_1Q^{-u_3}|R'(\gamma_1(R))|_p^{-1}.
\end{array} \tag{2.24}
$$

Далее определим параллелепипед $\sigma_3(R)$ как множество точек $\mathbf{u}$, удовлетворяющих системе

$$
\begin{array}{l}
|x-\mu_1| < 24c_1c_2^{-1}\delta^{-2}Q^{u_1}H(R)^{-1}, \\
|z-\mu_2| < 24c_1c_3^{-1}\delta^{-2}Q^{u_2}H(R)^{-1}, \\
|w-\gamma_1(R)|_p < c_4Q^{-u_3}|R'(\gamma_1(R))|_p^{-1}.
\end{array} \tag{2.25}
$$

Для $c_4 > c_1$ имеем $\sigma_2(R) \subset \sigma_3(R)$. Далее рассмотрим два случая.

Случай 1: $|R'(\gamma_1(R))|_p > Q^{-1/2+\epsilon}$. Оценивая каждый член из разложения

$$
R(w) = R'(\gamma_1(R))(w-\gamma_1(R)) + \sum_{i=2}^{3}(i!)^{-1}R^{(i)}(\gamma_1(R))(w-\gamma_1(R))^i,
$$

где $R(\gamma_1(R)) = 0$, получим $|R(w)|_p < c_4Q^{-u_3}$, $w \in \sigma_3(R)$. Зафиксируем вектор $\mathbf{b_2} = (b_3, b_2, b_1)$ и обозначим через $P_3^{\mathbf{b_2}}(8\delta_0\delta^{-2}c_2^{-1}Q)$ подкласс многочленов из $\mathcal{P}_3(8\delta_0\delta^{-2}c_2^{-1}Q)$ с одним и тем же вектором $\mathbf{b_2}$.

Пусть $R, \bar{R} \in P_3^{\mathbf{b_2}}(8\delta_0\delta^{-2}c_2^{-1}Q)$ и удовлетворяют условию $R - \bar{R} \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Предположим, что существует точка $\mathbf{u} \in \sigma_3(R) \cap \sigma_3(\bar{R})$. Рассмотрим многочлен $R_1(f) = R(f) - \bar{R}(f) = a_0'$, $0 \neq |a_0'| \leq 16\delta_0\delta^{-2}c_2^{-1}Q$. Поскольку $|R(w)|_p < c_4Q^{-1}$, получим $|a_0'|_p < c_4Q^{-1}$. При

$$
\delta_0 < 2^{-4}\delta^2c_2c_4^{-1}
$$

получаем противоречие. Это означает, что $\sigma_3(R) \cap \sigma_3(\bar{R}) = \emptyset$. Тогда имеем оценку $\sum_{R\in P_3^{\mathbf{b_2}}(8\delta_0\delta^{-2}c_2^{-1}Q)} \mu(\sigma_3(R)) \leq \mu(T)$. Из определения $\sigma_2(R)$ и $\sigma_3(R)$

следует, что

$$\mu(\sigma_2(R)) < 2^9 3^3 c_1^4 c_2^{-1} c_3^{-2} c_4^{-1} \delta^{-6} Q^{u_1+2u_2} H(R)^{-3} \mu_3(\sigma_{3,w}(R)).$$

В силу последней оценки и (2.16), имеем

$$\sum_{R \in P_3^{\mathbf{b_2}}(8\delta_0\delta^{-2}c_2^{-1}Q)} \mu(\sigma_2(R)) \le 2^9 3^3 c_1^4 c_2^{-1} c_3^{-2} c_4^{-1} \delta^{-6} H(R)^{-3} \mu_3(D).$$

Просуммировав последную оценку по всем векторам $\mathbf{b_2}$, число которых $\#\mathbf{b_2} = (2H(R)+1)^3$, находим

$$\begin{array}{rcl} \sum_{\mathbf{b_2}} \sum_{R \in P_3^{\mathbf{b_2}}(8\delta_0\delta^{-2}c_2^{-1}Q)} \mu(\sigma_2(R)) & < & 2^9 3^6 c_1^4 c_2^{-1} c_3^{-2} c_4^{-1} \delta^{-6} \mu_3(D) \\ & = & 2^9 3^6 c_1^4 c_2^{-1} c_3^{-2} c_4^{-1} \delta^{-6} c_6(T) \mu(T). \end{array} \tag{2.26}$$

Следовательно, мера множества точек, принадлежащих параллелепипам $\sigma_2(R)$, содержащихся в соответствующих существенных параллелепипедах, не превосходит $\frac{1-s}{12}\mu(T)$ при

$$c_4 > \max\{c_1, 2^{11} 3^7 c_1^4 c_2^{-1} c_3^{-2} \delta^{-6} c_6(T)(1-s)^{-1}\}.$$

Случай 2: $|R'(\gamma_1(R))|_p \le Q^{-1/2+\epsilon}$. В этом случае зафиксируем вектор $\mathbf{b_3} = (b_3, b_2)$. В случае существенных областей получим неравенство, аналогичное (2.26), а в случае несущественных областей перейдем к линейным многочленам как при доказательстве теоремы 1.1. □

2.2.2 Построение оптимальной регулярной системы

Данный раздел посвящен доказательству теоремы 2.2. Зафиксируем произвольный параллелепипед T в T_0. Пусть Q – достаточно большое число. Согласно теореме 2.3 существует множество $B_1(Q,T) \subset T$, удовлетворяющее условию $\mu(B_1(Q,T)) \ge s\mu(T)$. Пусть $(x,z,w) \in B_1(Q,T)$. Покажем, что существует точка $(\alpha,\beta,\gamma) \in R$ из корней многочлена P, хорошо приближающая точку (x,z,w), где $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ – решение системы (2.6) – (2.7) для данной точки (x,z,w). Рассмотрим приближения по каждой координате отдельно.

Пусть $y \in \mathbb{R}$ так, что $|y-x| = nc_0\delta_0^{-1}Q^{-w_1-1}$. Далее, по формуле Тейлора имеем

$$P(y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} P^{(i)}(x)(y-x)^i.$$

Используя неравенство $|P^{(i)}(x)| < c(n,T)Q$, убеждаемся, что

$$\left| P^{(i)}(x)(y-x)^i \right| < c(n,T)Q(nc_0\delta_0^{-1}Q^{-w_1-1})^i < c_0 Q^{-w_1} \quad \text{для } i \ge 2 \text{ и } w_1 > -1\,.$$

Кроме того, согласно (2.6), имеем $|P(x)| < c_0 Q^{-w_1}$. Таким образом,

$$\sum_{i \ne 1} \left| \tfrac{1}{i!} P^{(i)}(x)(y-x)^i \right| < c_0 Q^{-w_1} \sum_{i=0}^{n} \tfrac{1}{i!} < 3c_0 Q^{-w_1}. \tag{2.27}$$

С другой стороны,

$$|P'(x)(y-x)| \overset{(2.7)}{\geq} \delta_0 Q n c_0 \delta_0^{-1} Q^{-w_1-1} = n c_0 Q^{-w_1}. \qquad (2.28)$$

Из (2.27) и (2.28) следует, что $P(y)$ имеет разные знаки в точках $y = x \pm n c_0 \delta_0^{-1} Q^{-w_1-1}$ при условии, что $n \geq 3$. В силу непрерывности P, существует корень α_1 многочлена P на отрезке $|y-x| \leq n c_0 \delta_0^{-1} Q^{-w_1-1}$, поэтому справедливо неравенство

$$|x-\alpha_1| < n c_0 \delta_0^{-1} Q^{-w_1-1}\,. \qquad (2.29)$$

Обозначим через $\beta_1, \ldots, \beta_n$ комплексные корни многочлена P, занумерованные таким образом, что β_1 – ближайший к z комплексный корень P. Поскольку

$$\frac{|P'(z)|}{|P(z)|} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z-\beta_j|} \leq \frac{n}{|z-\beta_1|},$$

то используя (2.6), (2.7), получаем

$$|z-\beta_1| \leq \frac{n|P(z)|}{|P'(z)|} < n c_0 \delta_0^{-1} Q^{-w_2-1}. \qquad (2.30)$$

Поскольку $|Im\, z| \geq \delta_1$, то при достаточно большом Q получаем $|Im\, \beta_1| > \delta_1/2$.

Лемма 2.1 (Гензель). *Пусть $P \in \mathbb{Z}_p[x]$, $\xi = \xi_0 \in \mathbb{Z}_p$ и $|P(\xi)|_p < |P'(\xi)|_p^2$. Тогда при $n \to \infty$ последовательность $\xi_{n+1} = \xi_n - P(\xi_n)P'(\xi_n)^{-1}$ сходится к корню $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ многочлена P и $|\alpha - \xi|_p < |P(\xi)|_p |P'(\xi)|_p^{-2} < 1$.*

В p-адическом случае, используя лемму Гензеля, (2.6), (2.7), получаем, что существует корень $\gamma \in \mathbb{Z}_p$ многочлена P, удовлетворяющий условию

$$|w-\gamma|_p < c_0 \delta_0^{-2} Q^{-w_3}. \qquad (2.31)$$

Далее, положим $r = Q$. Из неравенств (2.29), (2.30) и (2.31) вытекает, что для любой точки $(x,z,w) \in B_1(Q,T)$ найдется точка $\boldsymbol{\nu} = (\alpha,\beta,\gamma) \in R$ такая, что $h(\boldsymbol{\nu}) \leq r$ и

$$(x,z,w) \in T(\boldsymbol{\nu}, c_5 \mathbf{d}(r)),$$

где $c_5 = \max\{n c_0 \delta_0^{-1}, c_0 \delta_0^{-2}\}$. Далее выберем максимальный набор $\boldsymbol{\nu}_1, \ldots, \boldsymbol{\nu}_t \in R$, удовлетворяющий (2.1)–(2.3). По построению и поскольку этот набор максимален, получаем

$$B_1(Q,T) \subset \cup_{i=1}^{t} T(\boldsymbol{\nu}_i, (c_5+1)\mathbf{d}(r)).$$

Используя (2.8), находим

$$s\mu(T) \leq \mu(B_1(Q,T)) \leq \sum_{i=1}^{t} \mu(T(\boldsymbol{\nu}_i, (c_5+1)\mathbf{d}(r))) \leq 2^3 (c_5+1)^4 t \prod_{+}(\mathbf{d}(r)),$$

откуда следует, что

$$t \geq 2^{-3}(c_5+1)^{-4} s\mu(T)/\prod_{+}(\mathbf{d}(r)) = 2^{-3}(c_5+1)^{-4} sQ^{n+1}\mu(T).$$

Следовательно, $(R, h, \mathbf{d})$ – регулярная система в T_0.

Далее покажем, что регулярная система в теореме 2.2 является оптимальной. Зафиксируем конечный параллелепипед T. Поскольку каждый многочлен из $\mathcal{P}_n$ имеет не более n корней, и поскольку число многочленов во множестве $\mathcal{P}_n(Q)$ не превосходит $(2Q+1)^{n+1}$, то число точек $\boldsymbol{\nu}$ в T не превосходит $n^3(2Q+1)^{n+1}\mu(T)$. Тогда $\#\{\boldsymbol{\nu} \in R \cap T : h(\boldsymbol{\nu}) \leq Q\} \ll Q^{n+1}$; следовательно, условие (2.5) выполнено и исследуемая регулярная система является оптимальной. $\square$

2.2.3 Приближения точками регулярных систем в $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$

Для каждой точки $\boldsymbol{\nu} = (\alpha, \beta, \gamma) \in R$ определим параллелепипед

$$T(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{d}(H, \Psi)) = \left\{ \mathbf{u} \in T_0 : \begin{array}{lcl} |x-\alpha| & \leq & H(\boldsymbol{\nu})^{-v_1-1}\Psi^{\lambda_1}(H(\boldsymbol{\nu})), \\ |z-\beta| & \leq & H(\boldsymbol{\nu})^{-v_2-1}\Psi^{\lambda_2}(H(\boldsymbol{\nu})), \\ |w-\gamma|_p & \leq & H(\boldsymbol{\nu})^{-v_3}\Psi^{\lambda_3}(H(\boldsymbol{\nu})) \end{array} \right\}.$$

Обозначим через $\hat{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ множество точек $\mathbf{u} \in T_0$, принадлежащих бесконечному числу параллелепипедов $T(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{d}(H, \Psi))$.

Сначала покажем, что множество $\hat{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi)$ имеет полную меру в T_0. Следующие три леммы будут использоваться при доказательстве теоремы. Первые две леммы являются обобщениями лемм, доказаных в [49] и [124] соответственно, на пространство $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$, и доказываются аналогично.

Лемма 2.2. *Пусть дано измеримое множество $A \subset \mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$ и открытое множество $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$. Если существует положительная постоянная $\eta < 1$ такая, что для любого параллелепипеда $B \subset U$ выполнено $\mu(A \bigcap B) > \eta\mu(B)$, то множество A имеет полную меру в U, т.е. $\mu(U \setminus A) = 0$.*

Лемма 2.3. *Пусть дано множество Ω, на котором задана σ–аддитивная конечная мера μ, и пусть дана последовательность E_i измеримых подмножеств Ω. Пусть множество E состоит из точек $w \in \Omega$, которые попадают в бесконечное число множеств E_i. Тогда, если $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i) = \infty$, то*

$$\mu(E) \geq \limsup_{N\to\infty} \frac{(\sum_{i=1}^{N}\mu(E_i))^2}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mu(E_i \bigcap E_j)}. \tag{2.32}$$

Лемма 2.4. *Пусть функция Ψ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, и определим функцию $\bar{\Psi}(h) = \min\{ch^{-1}, \Psi(h)\}$, где $c > 0$ – постоянная. Тогда $\bar{\Psi}$ – невозрастающая функция, и ряд $\sum_{h=1}^{\infty}\bar{\Psi}(h)$ расходится.*

Доказательство. Монотонность функции $\bar{\Psi}$ вытекает из следующего неравенства $\min\{ch_i^{-1}, \Psi(h_i)\} \geq \min\{ch_{i+1}^{-1}, \Psi(h_{i+1})\}$ для $h_i < h_{i+1}$. Предположим, что ряд $\sum_{h=1}^{\infty} \bar{\Psi}(h)$ сходится, тогда в силу монотонности функции $\bar{\Psi}$, имеем

$$r\bar{\Psi}(r) \ll \sum_{r/2 \leq h < r}^{\infty} \bar{\Psi}(h) \to 0 \text{ при } r \to \infty.$$

Откуда следует, что $r\bar{\Psi}(r) = \min\{c, r\Psi(r)\} \to 0$ при $r \to \infty$. Последнее возможно, если $r\Psi(r) \to 0$ при $r \to \infty$, откуда следует, что $\bar{\Psi}(r) = \Psi(r)$ для всех достаточно больших r. Следовательно, получаем, что и ряд $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h)$ сходится, что противоречит условию леммы. $\square$

Согласно лемме 2.4, без ограничения общности можем полагать, что для всех $h > 0$ выполнено неравенство:

$$\Psi(h) \leq h^{-1}/2. \tag{2.33}$$

Зафиксируем произвольный параллелепипед $T \subset T_0$, и пусть $Q = 2^l$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Все неравенсва, используемые при построении регулярной системы, перепишем в терминах 2^l. Следовательно, существуют положительные постоянные $l_0 = l_0(n, T)$ и $c_1 = c_1(n, T_0)$ такие, что для любого целого $l \geq l_0$ существует множество точек

$$A_l(T) = \{\boldsymbol{\nu}_1, \ldots, \boldsymbol{\nu}_{t_l}\} \in R \cap T,$$

такое, что

$$h(\boldsymbol{\nu}_i) \leq 2^l \tag{2.34}$$

для всех $\boldsymbol{\nu}_i \in A_l(T)$. Параллелепипеды

$$T(\boldsymbol{\nu}_i, \mathbf{d}(l)) := \left\{ \mathbf{u} \in T : \begin{array}{rcl} |x - \alpha^{(i)}| & \leq & 2^{-(w_1+1)l}, \\ |y - \beta^{(i)}| & \leq & 2^{-(w_2+1)l}, \\ |z - \gamma^{(i)}|_p & \leq & 2^{-w_3 l} \end{array} \right\} \tag{2.35}$$

не пересекаются ни при каких $\boldsymbol{\nu}_i \neq \boldsymbol{\nu}_j$, поэтому

$$c_1 2^{(n+1)l} \mu(T) \leq t_l \leq 2^{(n+1)l} \mu(T). \tag{2.36}$$

Для каждого натурального числа $l \geq l_0$ и $m \in \{1, ..., t_l\}$ определим параллелепипеды

$$E_l^{(m)} := \left\{ \mathbf{u} \in T : \begin{array}{rcl} |x - \alpha^{(m)}| & \leq & 2^{-(v_1+1)l} \Psi^{\lambda_1}(2^l), \\ |z - \beta^{(m)}| & \leq & 2^{-(v_2+1)l} \Psi^{\lambda_2}(2^l), \\ |w - \gamma^{(m)}|_p & \leq & 2^{-v_3 l} \Psi^{\lambda_3}(2^l) \end{array} \right\}, \tag{2.37}$$

и пусть

$$E_l = \bigcup_{m=1}^{t_l} E_l^{(m)}. \tag{2.38}$$

Согласно (2.37), имеем

$$\mu(E_l^{(m)}) = 2^3 2^{-ln}\Psi(2^l). \tag{2.39}$$

Рассмотрим множество $E(T) = \cap_{N=l_0}^{\infty} \cup_{l=N}^{\infty} E_l$. Условие монотонности функции Ψ вместе с условием (2.34) означают, что $E_l^{(m)} \subset T(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{d}(H, \Psi))$. Поскольку $\mu(E_l^{(m)}) \to 0$ при $l \to \infty$ и поскольку $A_l(T) \subset T$, то получаем

$$E(T) \subset \left(\hat{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi) \cup R\right) \cap T.$$

В силу того, что R счетно, и следовательно, имеет нулевую меру, имеем

$$\mu(\hat{L}_n(\mathbf{v}, \lambda, \Psi) \cap T) \geq \mu(E(T)). \tag{2.40}$$

Из (2.33) и (2.35) следует, что

$$E_l^{(i)} \bigcap E_l^{(j)} = 0$$

для $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq t_l$. Следовательно, находим $\mu(E_l) = \sum_{i=1}^{t_l} \mu(E_l^{(i)})$. Далее, используя (2.36) и (2.37), получаем

$$2^3 2^l c_1 \Psi(2^l)\mu(T) \leq \mu(E_l) \leq 2^3 2^l \Psi(2^l)\mu(T). \tag{2.41}$$

Определим последовательность $\phi_l = 2^l\Psi(2^l)$, тогда последнее неравенство примет вид

$$2^3 c_1 \phi_l \mu(T) \leq \mu(E_l) \leq 2^3 \phi_l \mu(T). \tag{2.42}$$

Поскольку ряд $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h)$ расходится, то применяя лемму 1.8, находим

$$\sum_{l=0}^{\infty} \phi_l = \infty. \tag{2.43}$$

Из (2.42) и (2.43) следует, что $\sum_{l=l_0}^{\infty} \mu(E_l) = \infty$. Поскольку множество T ограничено и все множества E_l содержатся в T, то применим лемму 2.3 к последовательности E_l. Далее получим оценки для числителя и знаменателя в (2.32).

При $L > l_0$ неравенство (2.42) означает, что

$$\sum_{l=l_0}^{L} \mu(E_l) \geq 2^3 c_1 \mu(T) \sum_{l=l_0}^{L} \phi_l. \tag{2.44}$$

Далее оценим меру множества $E_l \cap E_q$. Пусть $l_0 \leq l < q \leq L$, где $L > l_0$. Из (2.38) вытекает равенство

$$E_q \cap E_l^{(i)} = \bigcup_{j=1}^{t_q} E_q^{(j)} \cap E_l^{(i)}. \tag{2.45}$$

Для заданных $\mathbf{v}$ и λ в теореме 2.1 построим регулярную систему, где $w_i = v_i + \lambda_i$, $i = 1, 2, 3$.

Используя (2.39), получаем $\mu(E_q^{(j)} \cap E_l^{(i)}) \le 2^3\Psi(2^q)2^{-nq}$. Следовательно, имеем

$$\mu(E_q \cap E_l^{(i)}) \le 2^3\Psi(2^q)2^{-nq}n_0(q, l, i), \tag{2.46}$$

где $n_0(q, l, i)$ – число различных индексов j таких, что $E_q^{(j)} \cap E_l^{(i)} \ne 0$. Легко проверить, что

$$n_0(q, l, i) \le (2 + 2^{-v_3 l}\Psi^{\lambda_3}(2^l)2^{w_3 q}) \prod_{i=1}^{2} (2 + 2^{-(v_i+1)l}\Psi^{\lambda_i}(2^l)2^{(w_i+1)q})^i.$$

Пусть $v_1 = v_2 = \frac{n-4}{4}$, $v_3 = \frac{n}{4}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{4}$. Тогда получаем, что число $n_0(q, l, i)$ не превосходит

$$(2 + 2^{-\frac{nl}{4}}\Psi^{\frac{1}{4}}(2^l)2^{\frac{(n+1)q}{4}})^4. \tag{2.47}$$

Воспользовавшись неравенством

$$(a + b)^s \le \max\{2^{s-1}, 1\}(a^s + b^s), \quad a, b \ge 0, \quad s > 0,$$

получим

$$n_0(q, l, i) \le 2^7 + 2^{3-nl+(n+1)q}\Psi(2^l). \tag{2.48}$$

Из (2.46) и (2.48) вытекает, что

$$\mu(E_q \cap E_l^{(i)}) \le 2^3\Psi(2^q)2^{-nq}(2^7 + 2^{3-nl+(n+1)q}\Psi(2^l)). \tag{2.49}$$

Поскольку число различных множеств $E_l^{(i)}$ не превосходит t_l, то находим

$$\mu(E_q \cap E_l) \le t_l \cdot \max_{1 \le i \le t_l} \mu(E_q \cap E_l^{(i)}).$$

Используя (2.36), (2.49) и последнее неравенство, оценка для меры пересечения при любых различных q, l таких, что $l_0 \le q, l \le L$, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mu(E_q \cap E_l) &\le 2^{(n+1)l}\mu(T)2^3\Psi(2^q)2^{-nq}(2^7 + 2^3 2^{-nl}\Psi(2^l)2^{(n+1)q}) \\ &= (2^{10}2^{(n+1)(l-q)}\phi_q + 2^6\phi_l\phi_q)\mu(T). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Из условия (2.43) следует, что найдется достаточно большое число L' такое, что для всех натуральных чисел $L > L'$, справедливо неравенство

$$\sum_{l=l_0}^{L} \phi_l > 1. \tag{2.51}$$

Пусть $L > L'$. Применяя (2.42), (2.50) и (2.51), находим

$$\begin{aligned}\sum_{q=l_0}^L \sum_{l=l_0}^L \mu(E_q \cap E_l) &\leq 2^6\mu(T)\left(\sum_{q=l_0}^L \sum_{l=l_0}^L \phi_l\phi_q + \sum_{q=l_0}^L \sum_{l=l_0}^L 2^{4-(n+1)(q-l)}\phi_q\right)\\ &\leq 2^6\mu(T)\left(\sum_{q=l_0}^L \phi_q \sum_{l=l_0}^L \phi_l + \sum_{q=l_0}^L \phi_q \sum_{l=1}^\infty 2^{4-(n+1)(q-l)}\right)\\ &= 2^6\mu(T)\left(\left(\sum_{l=l_0}^L \phi_l\right)^2 + 2^{4-(n+1)}/(1-2^{-(n+1)})\sum_{q=l_0}^L \phi_q\right)\\ &\ll \mu(T)\left(\sum_{l=l_0}^L \phi_l\right)^2,\end{aligned}$$

где неявная постоянная не зависит ни от T, ни от L. Комбинируя последнюю оценку вместе с (2.44), получаем

$$\frac{(\sum_{l=l_0}^L \mu(E_l))^2}{\sum_{q=l_0}^L \sum_{l=l_0}^L \mu(E_q \bigcap E_l)} \gg \mu(T)$$

при $L > L'$.

По лемме 2.3, мера множества $E(T)$, состоящего из точек $\mathbf{u}$, принадлежащих бесконечному числу множеств E_l, по крайней мере $\frac{2^6K_1^2}{c_6}\mu(T)$. Согласно (2.40), имеем $\mu(\hat{L}_n(\mathbf{v},\lambda,\Psi)\cap T) \geq \frac{2^6K_1^2}{c_6}\mu(T)$ для любого параллелепипеда $T \subset T_0$. Согласно лемме 2.2, множество $\hat{L}_n(\mathbf{v},\lambda,\Psi)$ имеет полную меру в T_0.

Далее покажем, что множество $\mathcal{L}'_n(\mathbf{v},\lambda,\Psi)$ имеет полную меру в T_0. Для $d > 1$ определим функцию $\tilde{\Psi}(h) = \Psi(h)/d$. Тогда функция $\tilde{\Psi}(h)$ также монотонно убывает и ряд $\sum_{h=1}^\infty \tilde{\Psi}(h)$ расходится. Согласно доказанному выше, множество $\hat{L}_n(\mathbf{v},\lambda,\tilde{\Psi})$ имеет полную меру в T_0. Для $\boldsymbol{\nu} = (\alpha,\beta,\gamma) \in R$ определим параллелепипед $\sigma_{T_0,\tilde{\Psi}}(\boldsymbol{\nu})$ как множество точек $\mathbf{u} \in T_0$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{aligned}&|x-\alpha| < H(\boldsymbol{\nu})^{-v_1-1}\tilde{\Psi}^{\lambda_1}(H(\boldsymbol{\nu})),\\ &|z-\beta| < H(\boldsymbol{\nu})^{-v_2-1}\tilde{\Psi}^{\lambda_2}(H(\boldsymbol{\nu})),\\ &|w-\gamma|_p < H(\boldsymbol{\nu})^{-v_3}\tilde{\Psi}^{\lambda_3}(H(\boldsymbol{\nu})).\end{aligned}$$

Тогда выполняется равенство

$$\hat{L}_n(\mathbf{v},\lambda,\tilde{\Psi}) \cap T_0 = \cap_{k=1}^\infty \cup_{\boldsymbol{\nu}\in R:\, H(\boldsymbol{\nu})>k}\, \sigma_{T_0,\tilde{\Psi}}(\boldsymbol{\nu}).$$

Далее, пусть $\boldsymbol{\nu} = (\alpha,\beta,\gamma) \in R$ и $\mathbf{u} \in \sigma_{T_0,\tilde{\Psi}}(\boldsymbol{\nu})$. Рассмотрим квазиминимальный многочлен $P_{\boldsymbol{\nu}}$ для $\boldsymbol{\nu}$; его можно представить в виде

$$P_{\boldsymbol{\nu}}(f) = (f-s)\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}P_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}(f-s)^{k-1},$$

где $f = \{x,z,w\}$ и $s = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ соответственно. Поскольку $\mathbf{u} \in \sigma_{T_0,\tilde{\Psi}}(\boldsymbol{\nu})$ и $\mathbf{u} \in T_0$, то справедлива система неравенств

$$|P_{\boldsymbol{\nu}}(x)| < CH(\boldsymbol{\nu})|x-\alpha|,\;\; |P_{\boldsymbol{\nu}}(z)| < CH(\boldsymbol{\nu})|z-\beta|,\;\; |P_{\boldsymbol{\nu}}(w)|_p < C|w-\gamma|_p,$$

где $C = C(T_0) > 1$. Положим $d^{\min_{1\le i\le 3}\lambda_i} = C$. Тогда, для каждого $\boldsymbol{\nu} = (\alpha,\beta,\gamma)\in R$ такого, что $\sigma_{T_0,\tilde\Psi}(\boldsymbol{\nu})\neq\emptyset$, и для любого $\mathbf{u}\in\sigma_{T_0,\tilde\Psi}(\boldsymbol{\nu})$ верно

$$\begin{array}{lllll}
|P_{\boldsymbol{\nu}}(x)| & < & CH(\boldsymbol{\nu})H(\boldsymbol{\nu})^{-v_1-1}\tilde\Psi^{\lambda_1}(H(\boldsymbol{\nu})) & < & H(P_{\boldsymbol{\nu}})^{-v_1}\Psi^{\lambda_1}(H(P_{\boldsymbol{\nu}})),\\
|P_{\boldsymbol{\nu}}(z)| & < & CH(\boldsymbol{\nu})H(\boldsymbol{\nu})^{-v_2-1}\tilde\Psi^{\lambda_2}(H(\boldsymbol{\nu})) & < & H(P_{\boldsymbol{\nu}})^{-v_2}\Psi^{\lambda_2}(H(P_{\boldsymbol{\nu}})),\\
|P_{\boldsymbol{\nu}}(w)|_p & < & CH(\boldsymbol{\nu})^{-v_3}\tilde\Psi^{\lambda_3}(H(\boldsymbol{\nu})) & < & H(P_{\boldsymbol{\nu}})^{-v_3}\Psi^{\lambda_3}(H(P_{\boldsymbol{\nu}})).
\end{array}$$

Поэтому, если $\mathbf{u}\in\sigma_{T_0,\tilde\Psi}(\boldsymbol{\nu})$, то $P_{\boldsymbol{\nu}}$ является решением системы неравенств (1.1). Следовательно, если $\mathbf{u}\in\hat L_n(\mathbf{v},\lambda,\tilde\Psi)\cap T_0$, т.е. принадлежит бесконечному числу параллелепипедов $\sigma_{T_0,\tilde\Psi}(\boldsymbol{\nu})$, то система неравенств (1.1) имеет бесконечное число решений, что означает $\mathbf{u}\in\mathcal{L}'_n(\mathbf{v},\lambda,\Psi)\cap T_0$. Тогда, верно включение

$$\hat L_n(\mathbf{v},\lambda,\tilde\Psi)\cap T_0\subset\mathcal{L}'_n(\mathbf{v},\lambda,\Psi)\cap T_0,$$

откуда следует, что множество $\mathcal{L}'_n(\mathbf{v},\lambda,\Psi)$ имеет полную меру в T_0. Теорема 2.1 доказана. □

2.3 Доказательство гипотезы Берника-Клейнбока-Маргулиса в случае расходимости

На протяжении всего раздела будем иметь дело с алгебраическими числами в $\mathbb{C}$. Пусть $n\ge 2$. Напомним, что комплексные алгебраические числа называются *сопряженными* (над $\mathbb{Q}$), если они являются корнями одного и того же неприводимого (над $\mathbb{Q}$) многочлена с целыми рациональными коэффициентами. Здесь и далее, через $H(\alpha)$ обозначим высоту алгебраического числа α, определяемую как высоту минимального многочлена для α над $\mathbb{Z}$.

2.3.1 Построение множеств близких сопряженных алгебраических чисел

Начнем доказательство с формулировки важного вспомогательного утверждения, установленного в лемме 4 в [57], опираясь на работу [59]. В дальнейшем, числа $\xi_0,\dots,\xi_n\in\mathbb{R}^+$ будут удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}
&\xi_i\ll 1 \quad \text{для } 0\le i\le m-1,\\
&\xi_i\gg 1 \quad \text{для } m\le i\le n,\\
&\xi_0<\varepsilon,\qquad \xi_n>\varepsilon^{-1}
\end{aligned}\tag{2.52}$$

для некоторого $0<m\le n$ и $\varepsilon>0$, где подразумеваемые постоянные зависят только от n. Предположим также, что

$$\prod_{i=0}^{n}\xi_i = 1.\tag{2.53}$$

Лемма 2.5. *Для каждого $n \geq 2$ существуют положительные постоянные θ_0 и τ_0, зависящие только от n и удовлетворяющие следующему свойству. Для любого интервала $J \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ существует достаточно малое число $\varepsilon = \varepsilon(n, J) > 0$ такое, что для любого набора чисел $\xi_0, \dots, \xi_n$, удовлетворяющих (2.52) и (2.53), существует измеримое множество $G_J \subset J$ меры*

$$\mu_1(G_J) \geq \frac{3}{4}|J| \tag{2.54}$$

такое, что для каждой точки $x \in G_J$ существует $n+1$ линейно независимых примитивных неприводимых многочленов $P \in \mathbb{Z}[x]$ степени n таких, что

$$\theta_0 \xi_i \leq |P^{(i)}(x)| \leq \tau_0 \xi_i \qquad \text{для всех } i = 0, \dots, n\,. \tag{2.55}$$

Далее, пусть $0 < \nu < 1$, $Q > 1$, и через $\mathcal{A}_{n,\nu}(Q)$ обозначим множество алгебраических чисел $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ степени n и высоты $H(\alpha_1)$, удовлетворяющей условию

$$\nu Q \leq H(\alpha_1) \leq \nu^{-1} Q, \tag{2.56}$$

таких, что

$$\nu \leq \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{Q^{-1}\Psi_5(Q)} \leq \nu^{-1} \quad \text{для некоторого } \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ сопряженного к } \alpha_1. \tag{2.57}$$

Следующая лемма обобщает [57, теорема 2] и является существенным шагом при доказательстве теоремы.

Лемма 2.6. *Пусть $n \geq 2$ – целое число, и пусть $\Psi_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ удовлетворяет неравенствам $Q^{\frac{-n+2}{3}} \leq \Psi_5(Q) < k_0 Q$ для всех $Q \in \mathbb{N}$ и некоторой постоянной $k_0 > 0$. Тогда существует постоянная $\nu > 0$, зависящая только от n, такая, что для любого интервала $J \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и для всех достаточно больших Q справедливо неравенство*

$$\mu_1 \left(\bigcup_{\alpha_1 \in \mathcal{A}_{n,\nu}(Q)} B(\alpha_1, Q^{-n+1}/\Psi_5^2(Q)) \cap J \right) \geq \frac{3}{4}|J|. \tag{2.58}$$

Доказательство. Доказательство проводится по аналогичной схеме как и в [57, Теорема 2]. Пусть постоянные θ_0 и τ_0 те же, что и в лемме 2.5. Определим следующие параметры:

$$\xi_0 = \eta Q^{-n+1}\Psi_5^{-1}(Q), \quad \xi_1 = \eta^{-n}\Psi_5(Q), \quad \xi_i = \eta Q \quad (2 \leq i \leq n), \tag{2.59}$$

где $0 < \eta < 1$ – достаточно малый фиксированный параметр, зависящий только от n, и который будет определен позднее. Зафиксируем интервал $J \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, и пусть постоянная $\varepsilon = \varepsilon(n, J)$ выбрана так же, как в лемме 2.5. Тогда, (2.52) выполняется для $m \in \{1, 2\}$ и для достаточно большого Q. Из (2.59) следует справедливость тождества (2.53). Пусть G_J – множество, описанное в лемме 2.5, и $x \in G_J$. Тогда, согласно лемме 2.5, существует примитивный неприводимый многочлен $P \in \mathbb{Z}[x]$ степени n, удовлетворяющий (2.55).

Поиск α_1. Пусть $y \in \mathbb{R}$ и $|y-x| = Q^{-n+1}\Psi_5^{-2}(Q)$. Используя факт, что $\Psi_5(Q) \geq Q^{\frac{-n+2}{3}}$, получим $|y-x| < 1$. Далее, по формуле Тейлора имеем

$$P(y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} P^{(i)}(x)(y-x)^i. \tag{2.60}$$

Используя неравенства $|x-y| < 1$, $\Psi_5(Q) \geq Q^{\frac{-n+2}{3}}$, (2.55) и (2.59), убеждаемся, что

$$\left|P^{(i)}(x)(y-x)^i\right| \leq \eta\tau_0 Q^{-n+1}\Psi_5^{-1}(Q) \qquad \text{для } i \geq 2\,. \tag{2.61}$$

Кроме того, согласно (2.55) и (2.59), имеем $|P(x)| \leq \eta\tau_0 Q^{-n+1}\Psi_5^{-1}(Q)$. Таким образом,

$$\sum_{i\neq 1} \left|\tfrac{1}{i!}P^{(i)}(x)(y-x)^i\right| \leq \eta\tau_0 Q^{-n+1}\Psi_5^{-1}(Q) \sum_{i=0}^{n} \tfrac{1}{i!} < 3\eta\tau_0 Q^{-n+1}\Psi_5^{-1}(Q). \tag{2.62}$$

С другой стороны,

$$|P'(x)(y-x)| \overset{(2.55),(2.59)}{\geq} \theta_0\eta^{-n}\Psi_5(Q)Q^{-n+1}\Psi_5^{-2}(Q) \geq \theta_0\eta^{-1}Q^{-n+1}\Psi_5^{-1}(Q). \tag{2.63}$$

Из (2.62) и (2.63) следует, что $P(y)$ имеет разные знаки в концах отрезка $|y-x| \leq Q^{-n+1}\Psi_5^{-2}(Q)$ при условии, что $\eta \leq \frac{1}{2}\theta_0^{1/2}\tau_0^{-1/2}$. В силу непрерывности P, существует корень α_1 многочлена P в этом интервале, т.е.

$$|x-\alpha_1| < Q^{-n+1}\Psi_5^{-2}(Q)\,. \tag{2.64}$$

Поиск α_2. Пусть $y_\rho = x + \rho Q^{-1}\Psi_5(Q)$, где $2 \leq |\rho| < Q^{1/2}\Psi_5^{-1/2}(Q)$. Следует наложить условие

$$\Psi_5(Q) < Q/4, \tag{2.65}$$

которое обеспечивает существование ρ. Снова воспользуемся (2.60), на этот раз взяв $y = y_\rho$. Используя неравенства $|x-y| < 1$, $|\rho| < Q^{1/2}\Psi_5^{-1/2}(Q)$, (2.55), и (2.59) получаем, что

$$\left|P^{(i)}(x)(y_\rho-x)^i\right| < \eta|\rho|\tau_0 Q^{-1}\Psi_5^{2}(Q) \qquad \text{для } i \geq 3\,. \tag{2.66}$$

Согласно (2.55), (2.59) и используя неравенства $\Psi_5(Q) \geq Q^{\frac{-n+2}{3}}$ и $|\rho| \geq 2$, имеем

$$|P(x)| \leq \eta\tau_0 Q^{-n+1}\Psi_5^{-1}(Q) \leq |\rho|\eta\tau_0 Q^{-1}\Psi_5^{2}(Q)$$

и
$$|P'(x)(y_\rho - x)| \le \eta^{-n}\tau_0\Psi_5(Q)|\rho|Q^{-1}\Psi_5(Q) = \eta^{-n}\tau_0|\rho|Q^{-1}\Psi_5^2(Q).$$
Последние две оценки вместе с (2.66) дают следующее неравенство
$$\sum_{i\neq 2}\left|\tfrac{1}{i!}P^{(i)}(x)(y_\rho - x)^i\right| \le \eta^{-n}|\rho|\tau_0 Q^{-1}\Psi_5^2(Q)\sum_{i=0}^{n}\tfrac{1}{i!} < 3\eta^{-n}|\rho|\tau_0 Q^{-1}\Psi_5^2(Q). \tag{2.67}$$
С другой стороны,
$$|\tfrac{1}{2!}P''(x)(y_\rho - x)^2| \overset{(2.55),(2.59)}{\ge} \frac{1}{2}\theta_0\eta Q|\rho|^2 Q^{-2}\Psi_5^2(Q) = \frac{1}{2}\theta_0\eta\rho^2 Q^{-1}\Psi_5^2(Q). \tag{2.68}$$
Из (2.67) и (2.68) следует, что $P(y)$ имеет один и тот же знак в точках $y_{\pm\rho_0}$ (тот же, что $P''(x)$), где $\rho_0 = 7\tau_0\eta^{-n-1}\theta_0^{-1}$. Очевидно, что ρ_0 должен удовлетворять неравенству $\rho_0 < Q^{1/2}\Psi_5^{-1/2}(Q)$. Это накладывает еще одно условие на Ψ_5. Вместе с оценкой (2.65) это дает
$$\Psi_5(Q) < k_0 Q, \qquad \text{где } k_0 = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{\rho_0^2}\right\}.$$

С другой стороны, рассуждая так же как в процедуре “Поиск α_1”, легко убедиться, что $P(y_2)$ и $P(y_{-2})$ имеют разные знаки. Таким образом, $P(y)$ меняет знак на одном из отрезков
$$[-\rho_0 Q^{-1}\Psi_5(Q), -2Q^{-1}\Psi_5(Q)] \qquad \text{или} \qquad [2Q^{-1}\Psi_5(Q), \rho_0 Q^{-1}\Psi_5(Q)].$$
В силу непрерывности P, существует корень α_2 многочлена P на этом отрезке, т.е.
$$2Q^{-1}\Psi_5(Q) \le |x - \alpha_2| < \rho_0 Q^{-1}\Psi_5(Q)\,. \tag{2.69}$$
Объединяя (2.64) и (2.69), получаем $Q^{-1}\Psi_5(Q) \le |\alpha_1 - \alpha_2| \le (\rho_0+1)Q^{-1}\Psi_5(Q)$, установив тем самым (2.57).

Оценка высоты. Используя (2.55), (2.59) и факт, что $|x| \le \frac{1}{2}$, получаем
$$\begin{aligned}
&|a_n| = |\tfrac{1}{n!}P^{(n)}(x)| \asymp Q,\\
&|a_{n-1}| = |\tfrac{1}{(n-1)!}P^{(n-1)}(x) - na_n x| \ll Q,\\
&|a_k| = |\tfrac{1}{k!}P^{(k)}(x) - \textstyle\sum_{i=k+1}^{n}\tfrac{i!}{k!(i-k)!}a_i x^{i-k}| \ll Q, \ \ 0 \le k \le n-2.
\end{aligned}$$
Следовательно, $H(\alpha_1) \asymp Q$. Это доказывает (2.56) и завершает доказательство леммы 2.6. □

Замечание 2.2. Из хорошо известного свойства, что $|\alpha_i| \ll H(\alpha_i)/|a_n|$ (см. [40]), и факта, что $|a_n| \asymp Q$, следует, что любой корень α_i сопряженный к α_1 ограничен постоянной, зависящей только от n.

Далее будем использовать технику повсеместных систем, которую сейчас опишем в упрощенной форме (см. [55, 60] для более подробной информации и [52] для определения регулярных систем, тесно связанных с повсеместными системами). Пусть I – интервал в $\mathbb{R}$ и $\mathcal{R} := (r_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ – множество точек $r_\alpha \in I$, занумерованных элементами счетного множества $\mathcal{J}$. Пусть функция $\beta : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^+ : \alpha \mapsto \beta_\alpha$ задана на $\mathcal{J}$ и определяет "вес" β_α точек r_α. Для $t \in \mathbb{N}$ пусть $\mathcal{J}(t) := \{\alpha \in \mathcal{J} : \beta_\alpha \le 2^t\}$, и будем всегда полагать, что множество $\mathcal{J}(t)$ конечно.

Функцию $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющую условию $\lim_{t\to\infty}\rho(t) = 0$, назовем *повсеместной функцией*. Система $(\mathcal{R};\beta)$ называется *локально повсеместной в I относительно ρ*, если существует абсолютная постоянная $m_0 > 0$ такая, что для любого интервала $J \subset I$ справедливо неравенство

$$\liminf_{t\to\infty}\ \mu_1\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}(t)} B\big(r_\alpha,\rho(2^t)\big)\cap J\Big)\ \ge\ m_0\,|J|\,. \tag{2.70}$$

Для функции $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ определим множество

$$\Lambda_{\mathcal{R}}(\psi)\ :=\ \{x\in I : |x-r_\alpha| < \psi(\beta_\alpha)\ \text{ для бесконечного числа } \alpha\in\mathcal{J}\}\,.$$

Последствием определения локально повсеместных систем является следующий ключевой результат [55].

Лемма 2.7. *Пусть $(\mathcal{R},\beta)$ – локально повсеместная система в J_0 относительно ρ. Пусть функция ψ или функция ρ является 2-регулярной. Тогда $\mu_1(\Lambda_{\mathcal{R}}(\psi)) = |J_0|$, если $\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\psi(2^t)}{\rho(2^t)} = \infty$.*

Рассмотрим функцию $\Psi_6(h) = \bar\Psi_4(h)\Psi_5(h)$, которая является невозрастающей. Монотонность функции Ψ_6 следует из неравенства $\min\{\Psi_4(h_1)\Psi_5(h_1); h_1^{1-n}\} \ge \min\{\Psi_4(h_2)\Psi_5(h_2); h_2^{1-n}\}$ для всех $h_2 \ge h_1$ и факта, что $\Psi_4\Psi_5$ – убывающая функция.

Далее покажем, что ряд

$$\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-2}\Psi_6(h) \tag{2.71}$$

расходится. Предположим, что ряд (2.71) сходится. Тогда, в силу монотонности функции Ψ_6, имеем

$$l^{n-1}\Psi_6(l) \ll \sum_{l/2\le h<l} h^{n-2}\Psi_6(h) \to 0 \text{ as } l\to\infty.$$

Отсюда следует, что $l^{n-1}\Psi_6(l) = \min\{l^{n-1}\Psi_4(l)\Psi_5(l); 1\} \to 0$ при $l\to\infty$. Это возможно только тогда, когда $l^{n-1}\Psi_4(l)\Psi_5(l) \to 0$ при $l\to\infty$. Откуда следует, что $\Psi_6(l) = \Psi_4(l)\Psi_5(l)$ для всех достаточно больших l. Таким образом, ряд $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-2}\Psi_4(h)\Psi_5(h)$ сходится, что противоречит тому, что этот ряд расходится.

Используя монотонность Ψ_6, получим следующее двойное неравенство

$$2^{(t+1)(n-1)}\Psi_6(2^{t+1}) \ll \sum_{2^t \le h < 2^{t+1}} h^{n-2}\Psi_6(h) \ll 2^{t(n-1)}\Psi_6(2^t).$$

Суммирование по всем $t \in \mathbb{N}$ приводит к тому, что ряды

$$\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-2}\Psi_6(h) \text{ и } \sum_{t=0}^{\infty} 2^{t(n-1)}\Psi_6(2^t) \tag{2.72}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Повсеместная система. Определим функции $\bar{\bar{\Psi}}_4(q) := \frac{\bar{\Psi}_4(q)}{K^2}$ и $\bar{\Psi}_5(q) := \frac{\Psi_5(q)}{K}$, где $q^{\frac{-n+2}{3}} \le \bar{\Psi}_5(q) < k_0 q$ и $K = (3\nu^{-1})^{n-1}c_1' n$ (см. ниже).

Пусть $n \ge 2$. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество алгебраических чисел $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ степени n таких, что

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \le \nu^{-1}H(\alpha_1)^{-1}\bar{\Psi}_5(H(\alpha_1)) \text{ для некоторого } \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ сопряженного к } \alpha_1 \tag{2.73}$$

и

$$|\alpha_i| \ll \nu^{-1} \text{ для любого } \alpha_i \in \mathbb{C}, \text{ сопряженного к } \alpha_1, \tag{2.74}$$

где подразумеваемые постоянные в символе Виноградова зависят только от n. Отождествим множество $\mathcal{J}$ с $\mathcal{R}$, т.е. формально $r_\alpha = \alpha$. Далее, пусть $\beta_\alpha = \nu H(\alpha)$ и $\rho(q) = q^{-n+1}/\bar{\Psi}_5^2(q)$. Тогда, согласно лемме 2.6 и замечания 2.2, существует постоянная ν такая, что система $(\mathcal{R}, \beta)$ является локально повсеместной в $I := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ относительно вышеприведенной функции ρ. Пусть $\psi(q) = \bar{\bar{\Psi}}_4(q)/\bar{\Psi}_5(q)$. Если ψ или ρ является 2-регулярной функцией, то воспользуемся леммой 2.7. Тогда $\frac{\psi(2^t)}{\rho(2^t)} = \bar{\bar{\Psi}}_4(2^t)\bar{\Psi}_5(2^t)2^{t(n-1)} = K^{-3}\Psi_6(2^t)2^{t(n-1)}$ и, следовательно, согласно (2.72), ряд $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\psi(2^t)}{\rho(2^t)}$ расходится.

Далее покажем, что

$$\Lambda_{\mathcal{R}}(\psi) \subset \mathcal{P}_n(\tau_0\bar{\bar{\Psi}}_4, \tau_0 n\bar{\Psi}_5) \subset \mathcal{P}_n(\bar{\Psi}_4, \Psi_5) \subseteq \mathcal{P}_n(\Psi_4, \Psi_5). \tag{2.75}$$

Во-первых, покажем, что $\Lambda_{\mathcal{R}}(\psi) \subset \mathcal{P}_n(\tau_0\bar{\bar{\Psi}}_4, \tau_0 n\bar{\Psi}_5)$. По определению, для каждой точки $x \in \Lambda_{\mathcal{R}}(\psi)$ существует бесконечно много действительных алгебраических чисел α_1 степени n, удовлетворяющих (2.73), (2.74) и

$$|x - \alpha_1| < \bar{\bar{\Psi}}_4(\nu H(\alpha_1))/\bar{\Psi}_5(\nu H(\alpha_1)). \tag{2.76}$$

Пусть ψ – квази-монотонная функция, тогда $\psi(\nu q) \le c_1'\psi(q)$ для некоторых $c_1' \ge 1$ и ν, $0 < \nu < 1$.

Пусть P – минимальный многочлен для α_1, тогда $P(x) = a_n \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$. Используя (2.73), (2.74) и (2.76), находим

$$|x - \alpha_1| < c_1' \bar{\bar{\Psi}}_4(H)/\bar{\Psi}_5(H),$$

$$|x - \alpha_2| \le |x - \alpha_1| + |\alpha_1 - \alpha_2| < c_1' \bar{\bar{\Psi}}_4(H)/\bar{\Psi}_5(H) + \nu^{-1}H^{-1}\bar{\Psi}_5(H),$$

$$|x - \alpha_k| \le |x - \alpha_1| + |\alpha_1 - \alpha_2| + |\alpha_2| + |\alpha_k| < c_1' \bar{\bar{\Psi}}_4(H)/\bar{\Psi}_5(H) + \\ + \nu^{-1}H^{-1}\bar{\Psi}_5(H) + 2\nu^{-1} \text{ для } 3 \le k \le n. \tag{2.77}$$

Используя оценки $\bar{\Psi}_5^2(H) \ge K^3 H \bar{\bar{\Psi}}_4(H)$, $\bar{\Psi}_5(H) < k_0 H$ и факт, что $|a_n| \le H(P)$, получаем

$$|P(x)| < H c_1' \bar{\bar{\Psi}}_4(H) \bar{\Psi}_5^{-1}(H) 2\nu^{-1} H^{-1} \bar{\Psi}_5(H) (3\nu^{-1})^{n-2} = \tau_0 \bar{\bar{\Psi}}_4(H),$$

где $\tau_0 = 2 \cdot 3^{n-2} c_1' \nu^{1-n}$.

Кроме того,

$$P'(x) = a_n \sum_{i=1}^{n} \frac{(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n)}{(x - \alpha_i)}. \tag{2.78}$$

Используя (2.77), оценим каждое слагаемое в (2.78):

$$|x - \alpha_2| \cdots |x - \alpha_n| < 2 \cdot 3^{n-2} \nu^{1-n} H^{-1} \bar{\Psi}_5(H),$$

$$|x - \alpha_1||x - \alpha_3| \cdots |x - \alpha_n| < c_1' \bar{\bar{\Psi}}_4(H)/\bar{\Psi}_5(H)(3\nu^{-1})^{n-2},$$

$$\frac{|x - \alpha_1| \ldots |x - \alpha_n|}{|x - \alpha_i|} < 2 \cdot 3^{n-3} \nu^{2-n} c_1' \bar{\bar{\Psi}}_4(H) H^{-1} \text{ для } 3 \le i \le n.$$

Снова, используя предыдущие неравенства, оценки $\bar{\Psi}_5^2(H) \ge K^3 H \bar{\bar{\Psi}}_4(H)$, $\bar{\bar{\Psi}}_4(H) \le \bar{\Psi}_5(H)$, $\bar{\Psi}_5(H) < k_0 H$, и факт, что $|a_n| \le H(P)$, получаем, что $|P'(x)| < \tau_0 n \bar{\Psi}_5(H)$.

Во-вторых, покажем, что $\mathcal{P}_n(\tau_0 \bar{\bar{\Psi}}_4, \tau_0 n \bar{\Psi}_5) \subset \mathcal{P}_n(\bar{\Psi}_4, \Psi_5)$. Используя факт, что $\bar{\Psi}_5(q) = K^{-1}\Psi_5(q)$, получаем

$$|P'(x)| < \tau_0 n \bar{\Psi}_5(H) = \tau_0 n K^{-1} \Psi_5(H) < \Psi_5(H) \quad \text{для} \quad K > \tau_0 n.$$

Аналогично получим, что

$$|P(x)| < \bar{\Psi}_4(H) \quad \text{для} \quad K > \tau_0^{1/2}.$$

В-третьих, по определению имеем $\mathcal{P}_n(\bar{\Psi}_4, \Psi_5) \subseteq \mathcal{P}_n(\Psi_4, \Psi_5)$. Таким образом, (2.75) доказано, и доказательство теоремы 2.4 завершено.

3 Диофантовы приближения с немонотонной функцией аппроксимации

3.1 Основные результаты главы

Случай сходимости в теореме Хинчина справедлив без условия монотонности функции ψ. Однако, условие монотонности функции нельзя опустить в случае расходимости (см. [97]). Естественно возникает вопрос о необходимости условия монотонности функции в случае сходимости для многообразий. В 2005 Бересневич [53] показал, что это условие можно опустить для кривой $\mathcal{V}_n = (x, x^2, \ldots, x^n)$, $x \in \mathbb{R}$. В той же работе он сформулировал гипотезу о том, что условие монотонности функции можно опустить в случае невырожденных многообразий. В данной главе доказываем эту гипотезу для невырожденных кривых заданных над $\mathbb{R}$, для нормальных по Малеру кривых над кольцом p-адических чисел, для кривых $\mathcal{V}_n$ заданных над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{p_1} \times \ldots \times \mathbb{Q}_{p_{t-1}}$.

Обозначим через $\mathcal{F}_n$ множество функций вида

$$a_n f_n(x) + \ldots + a_1 f_1(x) + a_0,$$

определенных на интервале I, где $n \geq 2$, $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C^n(I)$ и Вронскиан функций $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ отличен от нуля почти везде на I. Для каждой функции $F \in \mathcal{F}_n$ определим ее высоту как $H = H(F) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$.

Результат, приведенный ниже, является аналогом теоремы Грошева для кривой $\{(f_1(x), \ldots, f_n(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ в случае сходимости без условия монотонности функции аппроксимации.

Теорема 3.1. *Пусть $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ – произвольная функция (необязательно монотонная) такая, что ряд $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\Psi(h)$ сходится. Пусть $\mathcal{M}_n(\Psi)$ обозначает множество точек $x \in \mathbb{R}$ таких, что существует бесконечно много функций $F \in \mathcal{F}_n$, удовлетворяющих неравенству*

$$|F(x)| < \Psi(H(F)). \tag{3.1}$$

Тогда $\mu_1(\mathcal{M}_n(\Psi)) = 0$.

Доказательство теоремы состоит из нескольких случаев в зависимости от значений величины производной $|F'(x)|$. Если модуль производной принимает малые значения, то существенным элементом доказательства является лемма 1.11, являющаяся модификацией результата Клейнбока и Маргулиса [106], основанного на геометрии решеток евклидового пространства. В случае, когда производная принимает большие значения доказательство распадается на три случая в зависимости от значений величины $|F'(\alpha_j)|$. В каждом из случаев используются различные модификации метода существенных и несущественных областей Спринджука [40].

Теорема 3.1 обобщена на кольцо p-адических чисел для нормальных по Малеру кривых. Здесь существенное значение имеет обобщение леммы 1.11, полученное в [117]. Согласно Малеру [113], функция $g : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ называется *нормальной*, если g имеет вид

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (w-\alpha)^n,$$

где $|\alpha|_p \leq 1$, $|\alpha_n|_p \leq 1$ для всех n и $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n|_p = 0$. Более того, для нормальной над $\mathbb{Z}_p$ функции имеет место разложение в ряд Тейлора [43]. Пусть U_p – фиксированный цилиндр в $\mathbb{Z}_p$. Обозначим через $\mathcal{G}_n$ множество ненулевых линейных форм с целыми рациональными коэффициентами вида

$$a_n g_n(w) + \ldots + a_2 g_2(w) + a_1 g_1(w) + a_0,$$

где $g_i : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ $(i = 1, \ldots, n)$ являются нормальными функциями, и $1, g_1, g_2, \ldots, g_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}_p$ в точках любого подмножества U_p. Очевидно, что каждая функция $G \in \mathcal{G}_n$ является нормальной. Для $G \in \mathcal{G}_n$ определим $H(G) = \max_{0\leq j\leq n} |a_j|$.

Теорема 3.2. *Пусть $n \geq 3$ и $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – произвольнвя функция (необязательно монотонная) такая, что ряд $\sum_{h=1}^{\infty} h^n \Psi(h)$ сходится. Пусть $\mathcal{N}_n(\Psi)$ обозначает множество точек $w \in \mathbb{Z}_p$ таких, что существует бесконечно много функций $G \in \mathcal{G}_n$, удовлетворяющих неравенству*

$$|G(w)|_p < \Psi(H(G)).$$

Тогда $\mu_3(\mathcal{N}_n(\Psi)) = 0$.

В поле комплексных чисел проводим доказательство без применения аналога леммы 1.11. Обозначим через $\mathcal{P}_n''(H)$ множество неприводимых примитивных многочленов $P \in \mathcal{P}_n$ высоты $H(P) = H$, удовлетворяющей условию $a_n = H(P)$. Также введем класс многочленов $\mathcal{P}_n'' = \cup_{H=1}^{\infty} \mathcal{P}_n''(H)$.

Теорема 3.3. *Пусть $\Psi(x)$ – положительная функция положительного аргумента x такая, что ряд $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2}\Psi^2(H)$ сходится. Тогда для почти всех $z \in \mathbb{C}$ и $n \geq 3$ неравенство*

$$|P(z)| < \Psi(H(P)) \tag{3.2}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P \in \mathcal{P}_n''$ только для множества нулевой меры.

Доказательство теоремы основанно на методе доказательства гипотезы А. Бейкера [11], и использующее новый прием при рассмотрении классов второго рода [40].

Обобщение леммы 1.11 на пространство $\Lambda = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{p_1} \times \ldots \times \mathbb{Q}_{p_{t-1}}$, полученное в [116], позволяет получить обобщение метрических теорем на Λ с немонотонной функцией аппроксимации. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_{t-1}$ – различные простые числа и $\mathbb{Q}_{p_i}$ – поле p_i-адических чисел, $i = 1, \ldots, t-1$. Обозначим через $\mu_{3,p_i}(U_{p_i})$ меру Хаара измеримого множества $U_{p_i} \subset \mathbb{Q}_{p_i}$, $i = 1, \ldots, t-1$. Используя эти определения, определим произведение мер μ_4 на Λ, полагая $\mu_4(U) = \mu_1(U_1)\mu_{3,p_1}(U_{p_1})\ldots\mu_{3,p_{t-1}}(U_{p_{t-1}})$ для множества $U = U_1 \times U_{p_1} \times \ldots \times U_{p_{t-1}} \subset \Lambda$.

Теорема 3.4. *Пусть $n \geq 3t+1$, U – открытое подмножество Λ и $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ – произвольная функция (необязательно монотонная) такая, что ряд $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\Psi^t(H)$ сходится. Пусть $\mathcal{K}_n(\Psi)$ обозначает множество точек $\mathbf{x} = (x, w_1, \ldots, w_{t-1}) \in U$ таких, что существует бесконечно много многочленов $P \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих системе неравенств*

$$|P(x)| < \Psi(H(P)),\ |P(w_1)|_{p_1} < \Psi(H(P)),\ \ldots,\ |P(w_{t-1})|_{p_{t-1}} < \Psi(H(P)). \tag{3.3}$$

Тогда $\mu_4(\mathcal{K}_n(\Psi)) = 0$.

Настоящая глава основана на работах [20, 25, 70, 72, 19, 75, 79].

3.2 Приближения для невырожденных кривых в $\mathbb{R}$

Множество $S = \{x \in \mathbb{R} : W(x) = 0\}$ замкнуто и нулевой меры, где $W(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n)}(x) & \ldots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$. Тогда множество $\mathbb{R} \setminus S$ является открытым и, следовательно, является F_σ-множеством. Поэтому можем записать $\mathbb{R} \setminus S = \cup_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]$. Следовательно, достаточно доказать теорему для отрезка I. Кроме того, поскольку $|W(x)| \neq 0$ для почти всех x, то без ограничения общности будем считать, что

$$|W(x)| \geq \varepsilon = \varepsilon(I) > 0 \tag{3.4}$$

для всех x из отрезка I. Будем считать, что существует постоянная K_0 такая, что для всех $x \in I$ справедливы неравенства

$$|f_j(x)| < K_0 \ \text{ и } \ |f_j^{(i)}(x)| < K_0 \tag{3.5}$$

для $i, j = 1, \ldots, n$.

Для доказательства понадобятся некоторые свойства функций $F \in \mathcal{F}_n$. Следующая лемма является объединением леммы 2 и леммы 3 Пяртли [33]. Полагаем, что выполняется условие (3.4).

Лемма 3.1. *Пусть $F \in \mathcal{F}_n$. Для любого отрезка $I_1 \subset I$, имеющего длину $|I_1| \le l = l(\varepsilon(I), K_0)$, существует i, $1 \le i \le n$, такое, что*

$$|F^{(i)}(x)| > c(l)H(F) \tag{3.6}$$

при всех $x \in I_1$. Число корней функции $F \in \mathcal{F}_n$ на отрезке I_1 не превосходит n.

Следствие 3.1. *Пусть $F \in \mathcal{F}_n$. Число отрезков в любом отрезке I_1 длины $|I_1| \le l(\varepsilon(I), K_0)$, в которых функция F монотонна, не превосходит n.*

Доказательство. Предположим, что число отрезков в I_1, где функция F монотонна, превосходит n. Тогда первая производная $F'(x)$ имеет по крайней мере n нулей на отрезке I_1. По теореме Ролля каждая производная $F^{(j)}(x)$, $2 \le j \le n$, также имеет нуль на отрезке I_1. Это противоречит лемме 3.1. □

Каждый отрезок I может быть записан в виде конечного объединения отрезков I_1 длины $|I_1| \le l$. Следовательно, достаточно доказать теорему для каждого такого отрезка I_1, переобозначим его через I и без ограничения общности считаем, что он удовлетворяет (3.6).

Для доказательства теоремы рассмотрим четыре случая в зависимости от значения величины $F'(x)$. Если $x \in L_n(\psi)$, то x должен удовлетворять бесконечно часто по крайней мере одному из этих случаев. Для доказательства того, что множество точек x, удовлетворяющих одному из условий бесконечно часто, имеет меру нуль, будем использовать лемму Бореля-Кантелли.

Случай I. Сначала рассмотрим случай, когда производная принимает малые значения.

Лемма 3.2. *Множество точек $x \in I$, удовлетворяющих системе неравенств*

$$\begin{aligned} |F(x)| &< \Psi(H(F)), \\ |F'(x)| &< H(F)^{-v} \end{aligned}$$

для бесконечного числа функций $F \in \mathcal{F}_n$, имеет меру нуль.

Доказательство. Поскольку ряд $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\Psi(h)$ сходится, то $H^{n-1}\Psi(H)$ стремится к 0 при $H \to \infty$. Следовательно, $H^{n-1}\Psi(H) = o(1)$ и $\Psi(H) = o(H^{-n+1})$.

В этом случае воспользуемся теоремой 1.4 из [62]. Используя обозначения указанной теоремы, выберем $K = H^{-v}$, $\delta = H^{-n+1}$, $l = n$, $T_1 = \ldots = T_n = H$, и получим следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал и $\beta \in I$. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$ – набор из n функций $f_i \in C^n(I)$, невырожденный в точке β.*

Тогда существует интервал $I_0 \subset I$, содержащий β и постоянную $E > 0$, такой, что

$$\left| \bigcup_{F \in F_n,\, 0 < H(F) \le H} \{x \in I_0 :\ |F(x)| < H^{-n+1},\ |F'(x)| < H^{-v}\} \right| \le E H^{\frac{-v}{(n+1)(2n-1)}} |I_0|.$$

Отметим, что лемма 1.11 является следствием леммы 3.3, но поскольку лемма 1.11 широко применяется в тексте, то она отдельно сформулирована.

Пусть $x_0 \in I$. Рассмотрим интервал I_0, содержащий точку x_0. Для неотрицательного целого числа k и для любого $v > 0$, определим через $\mathcal{A}(k)$ множество точек $x \in I_0$, для которых существует функция $F \in \mathcal{F}_n$ такая, что выполняется система неравенств

$$|F(x)| \ll H(F)^{-n+1}, \ \ |F'(x)| < H(F)^{-v}, \tag{3.7}$$

где $2^{k-1} \le H(F) < 2^k$. Отметим, что отображение f является невырожденным тогда и только тогда, когда Вронскиан $W(x) \ne 0$ для почти всех $x \in I$. Используя лемму 3.3, получаем $\mu_1(\mathcal{A}(k)) \ll 2^{\frac{-vk}{(n+1)(2n-1)}}$ для $v > 0$. Множество точек $x \in I$, для которых существует бесконечно много функций $F \in \mathcal{F}_n$, удовлетворяющих (3.7), состоит из точек $x \in I$, принадлежащих бесконечному числу множеств $\mathcal{A}(k)$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(\mathcal{A}(k))$ сходится для $v > 0$, и из леммы Бореля-Кантелли следует, что почти все точки I_0 принадлежат не более чем конечному числу множеств $\mathcal{A}(k)$. Используя факт, что I покрывается конечным или счетным числом интервалов I_0, завершаем доказательство в данном случае. $\square$

Пусть $\mathcal{F}_n(H) = \{F \in \mathcal{F}_n :\ H(F) = H\}$, тогда $\mathcal{F}_n = \cup_{H=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(H)$. Далее рассмотрим $F \in \mathcal{F}_n(H)$. Таким образом, далее будем считать, что $|F'(x)| > H^{-v}$. Для трех остальных случаев нам необходимо следующее. Множество решений (3.1) на I состоит из не более чем n интервалов. Каждый из этих интервалов разделим на интервалы, на которых F' монотонна (не более $n-1$ таких интервалов). Каждый из этих новых интервалов разделим на интервалы, на которых $F'(x)$ больше или меньше, чем H^{-v}. Любой интервал, на котором $F'(x) < H^{-v}$, уже был рассмотрен в случае I. Для $F \in \mathcal{F}_n(H)$, пусть $I_j(F)$ – один из оставшихся интервалов; таким образом, F и F' – монотонные функции на $I_j(F)$, $|F(x)| < \Psi(H)$ и $F'(x) > H^{-v}$ для всех точек $x \in I_j(F)$. Ясно, что число интервалов $I_j(F)$ конечно. Обозначим через $\bar{I}_j(F)$ замыкание $I_j(F)$, и через α_j точку из $\bar{I}_j(F)$ такую, что

$$|F'(\alpha_j)| = \min_{x \in \bar{I}_j(F)} |F'(x)|.$$

Используя теорему Лагранжа о среднем значении и (3.1), получим

$$F(x) = F(\alpha_j) + F'(\xi)(x - \alpha_j), \ \ x \in I_j(F),$$

где ξ – точка между x и α_j.

Из (3.1) следует, что $|F(x) - F(\alpha_j)| < 2\Psi(H)$. Таким образом, если $F'(\alpha_j) \neq 0$, то

$$|x - \alpha_j| < 2\Psi(H)|F'(\alpha_j)|^{-1}. \tag{3.8}$$

и $\mu_1(I_j(F)) \leq 2\Psi(H)|F'(\alpha_j)|^{-1}$. В силу выбора α_j справедливо неравенство $|F'(\alpha_j)| \geq H^{-v}$.

Пусть $\delta > 0$ – фиксированное действительное число. При $\delta \to 0$ мера множества точек $x \in I$, для которых неравенство $|f_s(x)| \leq \delta$ выполняется хотя бы для одного s, $1 \leq s \leq n$, также стремится к нулю. Следовательно, далее будем полагать, что

$$|f_i(x)| > \delta, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{3.9}$$

Определим функцию t_{ij} как $t_{ij}(x) = f_i(x)f_j^{-1}(x)$. В лемме 3 [48] было доказано, что если $W(x) \neq 0$ почти для всех x, то $t'_{ij}(x) \neq 0$ почти для всех x, где $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. В следующей лемме установлена связь между значениями величин $|W(x)|$ и $|f_i(x)f'_j(x) - f'_i(x)f_j(x)|$.

Лемма 3.4. *Если $|W(x)| \geq \varepsilon$, тогда $|f_i(x)f'_j(x) - f'_i(x)f_j(x)| > \frac{\varepsilon\delta^2}{2^{n+1}n!K_0^n}$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Пусть $\delta_1 > 0$ – постоянная, которая будет выбрана позднее, и предположим, что $|t'_{ij}(x)| \leqslant \delta_1$. Тогда из неравенства

$$|t'_{ij}(x)| = \left| \frac{f'_i(x)f_j(x) - f_i(x)f'_j(x)}{f_j^2(x)} \right| \leqslant \delta_1 \tag{3.10}$$

мы получаем

$$f'_i(x) = f'_j(x)\frac{f_i(x)}{f_j(x)} + \theta(x)f_j(x)\delta_1,$$

где $|\theta(x)| \leqslant 1$. Перепишем последнее равенство в виде

$$f'_i(x) = f'_j(x)\frac{f_i(x)}{f_j(x)} + \delta_1 u_1(x), \tag{3.11}$$

где u_i является $(n - i + 1)$-раз непрерывно дифференцируемой, ограниченной функцией, $1 \leq i \leq n$. Дифференцируя и используя (3.10), получаем

$$f''_i(x) = f''_j(x)\frac{f_i(x)}{f_j(x)} + f'_j(x)t'_{ij}(x) + \delta_1 u'_1(x) = f''_j(x)\frac{f_i(x)}{f_j(x)} + \delta_1 u_2(x). \tag{3.12}$$

Далее дифференцирование по переменной x, $2 \leqslant k \leqslant n - 1$, позволяет получить

$$f_i^{(k+1)}(x) = f_j^{(k+1)}(x)\frac{f_i(x)}{f_j(x)} + \delta_1 u_{k+1}(x). \tag{3.13}$$

Заменим i-ый столбец в $W(x)$ на (3.11)–(3.13) и запишем Вронскиан $W(x)$ в виде

$$W(x) = \frac{f_i(x)}{f_j(x)} W_1(x) + \delta_1 W_2(x).$$

Поскольку i-ый и j-ый столбцы в $W_1(x)$ равны, то $|W_1(x)| \equiv 0$, и используя (3.5), легко проверить, что $|W_2| < 2^n n! K_0^n$. Таким образом, $|W(x)| < 2^n \delta_1 n! K_0^n$. Для $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{2^n n! K_0^n}$ получаем противоречие с условием $|W(x)| \geq \varepsilon$. Следовательно, из (3.9) следует, что $|f_i(x) f_j'(x) - f_i'(x) f_j(x)| > \frac{\varepsilon \delta^2}{2^{n+1} n! K_0^n}$. $\square$

Далее, без ограничения общности, будем считать, что

$$|f_i(x) f_j'(x) - f_i'(x) f_j(x)| \geq \delta_2 = \frac{\varepsilon \delta^2}{2^{n+1} n! K_0^n} \tag{3.14}$$

для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Лемма 3.5. *Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал, для которого $|W(x)| \geq \varepsilon$. Пусть $B_1 \subset \mathbb{R}$ – множество меры $\mu_1(B_1) = 0$ и пусть $B_2 = \{x \in I : t_{ij}(x) \in B_1\}$, тогда B_2 имеет меру нуль.*

Доказательство. Поскольку $|W(x)| \geq \varepsilon$, то из предыдущей леммы следует, что $|t_{ij}'(x)| \geq \delta_1$ для всех $x \in I$. Таким образом, если $E \subset I$ – интервал, то $\delta^2 \mu_1(t_{ij}(E))/(2K_0^2) \leq \mu_1(E) \leq \mu_1(t_{ij}(E))/\delta_1$ (используя теорему Лагранжа о среднем значении). Если $\mu_1(B_1) = 0$, то для каждой постоянной $\eta > 0$ существует счетное множество интервалов I_i таких, что $B_1 \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(I_i) < \eta$. Определим множество J_i как $t_{ij}(J_i) = I_i$. Поскольку $t_{ij}'(x) \neq 0$ для всех точек $x \in I$, то J_i – интервал и

$$\frac{\delta^2 \mu_1(I_i)}{2K_0^2} \leq \mu_1(J_i) \leq \frac{\mu_1(I_i)}{\delta_1}.$$

Очевидно, $B_2 \subset \cup_{i=1}^{\infty} J_i$, что означает множество B_2 также имеет меру нуль. $\square$

Теперь готовы завершить доказательство теоремы 3.1, которое распадается на три случая в зависимости от значений величины $F'(\alpha_j)$. Далее будем считать, что высота функций $F \in \mathcal{F}_n(H)$ достигается на старшем коэффициенте, т.е. $a_n = H$; последнее предположение делается исключительно для удобства обозначений.

Случай II. Для $F \in \mathcal{F}_n(H)$, пусть $\sigma(F)$ – объединение интервалов $I_j(F)$, для которых $|F'(\alpha_j)| \geq c_1 H^{1/2}$. Таким образом, $\sigma(F)$ – множество точек $x \in I$, удовлетворяющих неравенству $|F(x)| < \Psi(H)$, и принадлежащих некоторому интервалу $I_j(F)$, для которого

$$|F'(\alpha_j)| \geq c_1 H^{1/2}. \tag{3.15}$$

Для каждой функции $F \in \mathcal{F}_n(H)$ и каждого j, где $\alpha_j \in \sigma(F)$, и некоторой постоянной $c_2 = c_2(n)$ определим через $\sigma_{1,j}(F)$ множество точек x, удовлетворяющих неравенству

$$|x - \alpha_j| < c_2 |F'(\alpha_j)|^{-1}.$$

Пусть $\sigma_1(F) = \cup_j \sigma_{1,j}(F)$. Согласно (3.8), справедливо включение $\sigma(F) \subset \sigma_1(F)$ для $H > H_0(c_2)$ и неравенство

$$\mu_1(\sigma(F)) < 2c_2^{-1}\Psi(H)\mu_1(\sigma_1(F)). \tag{3.16}$$

Для каждого j, где $\alpha_j \in \sigma(F)$, разложим функцию F в ряд Тейлора на $\sigma_{1,j}(F)$:

$$F(x) = F(\alpha_j) + F'(\alpha_j)(x - \alpha_j) + \frac{F''(\xi_1)(x - \alpha_j)^2}{2},$$

где ξ_1 – точка между x и α_j. Оценим сверху каждый член разложения и получим

$$\begin{aligned} |F(\alpha_j)| &< \Psi(H) < c_2, \\ |F'(\alpha_j)(x - \alpha_j)| &< c_2, \\ |F''(\xi_1)(x - \alpha_j)^2| &< c_3 H (c_2 |F'(\alpha_j)|^{-1})^2 = c_3 c_2^2 c_1^{-2}. \end{aligned}$$

Выберем постоянную $c_2 = c_2(\delta) < \delta/10$ и удовлетворяющую неравенству $c_3 c_2 c_1^{-2} < 1$. Таким образом, из (3.15) следует, что $|F(x)| < 3c_2$ для $H > H_0(c_2)$.

Зафиксируем вектор $\mathbf{b} = (H, a_{n-1} \ldots, a_2, a_0)$ и обозначим через $\mathcal{F}_{n,\mathbf{b}}(H)$ подкласс функций из $\mathcal{F}_n(H)$ с одним и тем же вектором $\mathbf{b}$. Число различных поклассов $\mathcal{F}_{n,\mathbf{b}}(H)$ не превосходит $\ll H^{n-1}$. Пусть $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}}(H)$ и $F_1 \neq F_2$, предположим, что $\sigma_{1,j}(F_1) \bigcap \sigma_{1,i}(F_2) \neq \emptyset$ для $F_t \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}}(H)$, $t = 1, 2$. Пусть $R(x) = F_2(x) - F_1(x) = a_1(F_2)f_1(x) - a_1(F_1)f_1(x) = a_1' f_1(x)$, где $|a_1' f_1(x)| > \delta$ и $x \in \sigma_{1,j}(F_1) \bigcap \sigma_{1,i}(F_2)$. Здесь $a_s(F_t)$ обозначает s-ый коэффициент F_t. Тогда получаем неравенство

$$\delta < |R(x)| \leq 6c_2 < 3\delta/5,$$

которое является противоречивым. Следовательно, $\sigma_{1,j}(F_1) \bigcap \sigma_{1,i}(F_2) = \emptyset$ и

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}}(H)} \mu_1(\sigma_1(F)) \ll |I|.$$

Комбинируя последнее неравенство с (3.16), получаем

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}}(H)} \mu_1(\sigma(F)) \ll |I|\Psi(H).$$

Суммируя по всем векторам $\mathbf{b}$, находим

$$\sum_{H=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{b}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}}(H)} \mu_1(\sigma(F)) \ll \sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\Psi(H)|I| < \infty.$$

Применение леммы Боредя-Кантелли завершает доказательство.

Случай III. В данном случае, для $F \in \mathcal{F}_n(H)$ обозначим через $\sigma(F)$ объединение интервалов $I_j(F)$, удовлетворяющих $1 \le |F'(\alpha_j)| < c_1 H^{1/2}$. Следовательно, $\sigma(F)$ – множество точек $x \in I$, для которых $|F(x)| < \Psi(H)$, и принадлежащих некоторому интервалу $I_j(F)$, для которого

$$1 \le |F'(\alpha_j)| < c_1 H^{1/2}. \tag{3.17}$$

Сначала предположим, что $n > 2$; случай $n = 2$ рассмотрим позднее. Для $F \in \mathcal{F}_n(H)$ и каждого j определим множество $\sigma_{2,j}(F)$ как множество точек x, удовлетворяющих неравенству

$$|x - \alpha_j| < c_4 H^{-1} |F'(\alpha_j)|^{-1}$$

для $\alpha_j \in \sigma(F)$. Очевидно, что $\sigma(F) \subset \sigma_2(F) = \cup_i \sigma_{2,j}(F)$ и

$$\mu_1(\sigma(F)) < 2c_4^{-1} H \Psi(H) \mu_1(\sigma_2(F)). \tag{3.18}$$

Зафиксируем вектор $\mathbf{b}_1 = (H, a_{n-1} \ldots, a_3, a_0)$ и обозначим через $\mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)$ подкласс функций из $\mathcal{F}_n(H)$ с одним и тем же вектором $\mathbf{b}_1$. Число различных подклассов $\mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)$ не превосходит $\ll H^{n-2}$. Интервал $\sigma_{2,j}(F)$ назовем *несущественным*, если существует такая функция $\tilde{F} \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)$, $\tilde{F} \ne F$, что

$$\mu_1(\sigma_{2,j}(F) \bigcap \sigma_2(\tilde{F})) \ge \frac{\mu_1(\sigma_{2,j}(F))}{2},$$

и *существенным* – в противном случае.

Сначала исследуем случай существенных интервалов $\sigma_{2,j}(F)$. По определению имеем

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)} \sum_{\substack{j \\ \sigma_{2,j}(F) \ \text{существенный}}} \mu_1(\sigma_{2,j}(F)) \ll |I|.$$

Рассматривая лишь существенные интервалы для $F \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)$ и используя последнее неравенство, (3.18) и факт, что число различных векторов $\mathbf{b}_1$ не превосходит $\ll H^{n-2}$, находим

$$\sum_{\mathbf{b}_1} \sum_{F \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)} \mu_1(\sigma(F)) \ll H^{n-1} \Psi(H) |I|.$$

В итоге, получаем

$$\sum_{H=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{b}_1} \sum_{F \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)} \mu_1(\sigma(F)) < \infty.$$

Таким образом, согласно лемме Бореля-Кантелли, множество точек x, принадлежащих бесконечному числу существенных интервалов, имеет меру нуль.

Далее рассмотрим несущественные интервалы. Разложим каждую функцию $F \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)$ в ряд Тейлора на $\sigma_{2,j}(F)$:

$$F(x) = F(\alpha_j) + F'(\alpha_j)(x-\alpha_j) + \frac{F''(\xi_2)(x-\alpha_j)^2}{2}, \quad \alpha_j \in \sigma(F),$$

где ξ_2 – точка между x и α_j. Оценим сверху каждый член разложения и получим

$$\begin{aligned} |F(\alpha_j)| &< c_5 H^{-1}, \\ |F'(\alpha_j)(x-\alpha_j)| &< c_5 H^{-1}, \\ |F''(\xi_2)(x-\alpha_j)^2| &< c_5 H H^{-2} |F'(\alpha_j)|^{-2} < c_5 H H^{-2} 1 = c_5 H^{-1}, \end{aligned}$$

для $\alpha_j \in \sigma(F)$ и некоторой постоянной $c_5 > 0$; последняя оценка следует из (3.17). Заключаем, что

$$|F(x)| < 3c_5 H^{-1}. \tag{3.19}$$

Далее, используя теорему Лагранжа о среднем значении, для $x \in \sigma_{2,j}(F)$, $\alpha_j \in \sigma(F)$, получаем

$$\begin{aligned} |F'(x)| &\leq |F'(\alpha_j)| + |F''(\xi_3)(x-\alpha_j)| \\ &\ll H^{1/2} + HH^{-1}|F'(\alpha_j)|^{-1} \ll H^{1/2}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

где ξ_3 – точка между x и α_j. Рассмотрим новую функцию $R = F_2 - F_1 = a'_1 f_1 + a'_2 f_2$, где $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)$ и для которых справедливы оценки (3.19) и (3.20) на множестве $\sigma_{2,j}(F_1) \bigcap \sigma_{2,i}(F_2)$. Из (3.9), (3.19) и (3.20) следует, что

$$|R(x)| \ll H^{-1}, \ \ |R'(x)| \ll H^{1/2}. \tag{3.21}$$

Используя (3.14), нетрудно получить, что $|a'_i| \ll H^{1/2}$, $i = 1, 2$, т.е. $H(R) < c_7 H^{1/2}$. Следовательно, $|a'_1 f_1(x) + a'_2 f_2(x)| \ll H(R)^{-2}$. Разделим на $f_1(x)$ и обозначим $t = t_{21} = f_2 f_1^{-1}$. Тогда получаем неравенство $|a'_2 t(x) + a'_1| \ll H(R)^{-2}$, которое по теореме Хинчина выполняется бесконечно часто только на множестве меры нуль. По лемме 3.5, множество точек $x \in I$, удовлетворяющих (3.21) для бесконечно многих наборов (a'_1, a'_2), имеет меру нуль.

Теперь рассмотрим случай $n = 2$. Доказательство проводится как и выше, только вместо множеств $\mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)$ рассматриваем множество $\mathcal{F}_n(H)$, состоящее из функций $F \in \mathcal{F}_n$ высоты H. Для существенных интервалов доказательство проводится аналогично и находим

$$\sum_{H=1}^{\infty} \sum_{F \in \mathcal{F}_n(H)} \mu_1(\sigma(F)) \ll \sum_{H=1}^{\infty} H\Psi(H)|I| < \infty.$$

Для несущественных интервалов доказательство проводится аналогично до неравенства (3.20). Тогда $R(x) = F_2(x) - F_1(x) = af_1(x) + b$ для некоторых $a, b \ll H$. Тогда, как и выше, $|R(x)| \ll H^{-1}$ и $|R'(x)| = |af'_1(x)| \ll H^{1/2}$.

Используя (3.14), получаем, что $\max\{|a|, |b|)\} \ll H^{1/2}$, и доказательство завершается как и выше.

Случай IV. Этот случай подобен предыдущему. Для $F \in \mathcal{F}_n(H)$ обозначим через $\sigma(F)$ объединение интервалов $I_j(F)$, для которых $H^{-v} \le |F'(\alpha_j)| < 1$, где $0 < v < 1/3$. Таким образом, $\sigma(F)$ – множество точек $x \in I$, удовлетворяющих $|F(x)| < \Psi(H)$, и принадлежащих некоторому интервалу $I_j(F)$, для которого

$$H^{-v} \le |F'(\alpha_j)| < 1.$$

Случай $n = 2$ рассматривается аналогично как и в случае III. В случае $n > 2$, как и выше, для $F \in \mathcal{F}_n(H)$ и каждого j определим интервал

$$\sigma_{3,j}(F) \;=\; \left\{x:\ |x-\alpha_j| < c_8 H^{-1}|F'(\alpha_j)|^{-1}\right\}.$$

Пусть $\sigma_3(F) = \cup_j \sigma_{3,j}(F)$. Далее используя (3.8), имеем

$$\mu_1(\sigma(F)) \le 2c_8^{-1}\mu_1(\sigma_3(F))H\Psi(H). \tag{3.22}$$

Как и в случае III зафиксируем вектор $\mathbf{b}_1$ и исследуем существенные и несущественные интервалы $\sigma_{3,j}(F)$, $F \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)$. Суммируя меры существенных интервалов $\sigma_{3,j}(F)$, получаем

$$\sum_{F\in\mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)} \mu_1(\sigma_3(F)) \ll |I|. \tag{3.23}$$

Поскольку $\#\mathbf{b}_1 \ll H^{n-2}$, тогда используя (3.22), (3.23) и рассматривая лишь существенные интервалы $\sigma_{3,j}(F)$, $F \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)$, находим

$$\sum_{H=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{b}_1}\sum_{F\in\mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)} \mu_1(\sigma(F)) \ll \sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\Psi(H)|I| < \infty.$$

По лемме Бореля-Кантелли, множество тех точек x, которые принадлежат бесконечному числу существенных интервалов, имеет меру нуль.

Далее, пусть $\sigma_{3,j}(F)$ – несущественный интервал. Используя разложение F в ряд Тейлора на $\sigma_{3,j}(F)$, получим

$$\begin{aligned}
F(x) &= F(\alpha_j) + F'(\alpha_j)(x-\alpha_j) + 1/2F''(\xi_4)(x-\alpha_j)^2,\\
|F(\alpha_j)| &< \Psi(H) < c_9 H^{-1},\\
|F'(\alpha_j)(x-\alpha_j)| &< c_9 H^{-1},\\
|F''(\xi_4)(x-\alpha_j)^2| &< c_9 H H^{-2}|F'(\alpha_j)|^{-2} < c_9 H^{2v-1},
\end{aligned}$$

где ξ_4 – точка между x и α_j. Таким образом,

$$|F(x)| < 3c_9 H^{2v-1}. \tag{3.24}$$

Используя теорему Лагранжа о среднем значении, для $x \in \sigma_{3,j}(F)$, $\alpha_j \in \sigma(F)$, получаем

$$\begin{aligned} |F'(x)| &\le |F'(\alpha_j)| + |F''(\xi_5)(x - \alpha_j)| \\ &\ll 1 + HH^{-1}|F'(\alpha_j)|^{-1} \ll H^v, \end{aligned} \tag{3.25}$$

где ξ_5 – точка между x и α_j. Рассмотрим функции вида $R(x) = F_2(x) - F_1(x)$, где $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{n,\mathbf{b}_1}(H)$, и $x \in \sigma_{3,j}(F_1) \bigcap \sigma_{3,i}(F_2)$. Для R справедливы неравенства $|R(x)| < c_{10}H^{2v-1}$ и $|R'(x)| < c_{11}H^v$; которые следуют из (3.24) и (3.25). Как и в случае III, можно показать, что из (3.14) следует, что $|a_i'| \ll H^v$ $(i = 1, 2)$, т.е. $H(R) = \max\{|a_1'|, |a_2'|\} \ll H^v$. Снова, пусть $t = t_{21} = f_2 f_1^{-1}$. Из (3.9) и (3.24) следует, что $|R(x)| = |a_2' t(x) + a_1'| < c_{10}\delta^{-1}H^{2v-1} \ll H(R)^{(2v-1)/v} \ll H(R)^{-(1+\epsilon')}$ для $v < 1/3$ и $\epsilon' > 0$. По теореме Хинчина, последнее неравенство выполняется бесконечно часто только на множестве меры нуль. Следовательно, по лемме 3.5, мера множества $\sigma_{3,j}(F_1) \bigcap \sigma_{3,i}(F_2)$ равна нулю, и мера множества точек x, принадлежащих бесконечному числу несущественных интервалов, также равна нулю. Теорема 3.1 доказана.

3.3 Приближения для нормальных по Малеру кривых в $\mathbb{Z}_p$

Настоящий раздел посвящен доказательству теоремы 3.2. Удалим из $\mathbb{Z}_p$ множество произвольно малой меры θ так, чтобы в оставшейся части $\mathbb{Z}_p(\theta)$ выполнялось неравенство $|w|_p \ge c_1$, где $c_1 = c_1(\theta)$ и $0 < c_1 < 1$. Достаточно доказать теорему на множестве $\mathbb{Z}_p(\theta)$. Это множество можно представить в виде объединения конечного или счетного числа кругов K_s. Дальнейшие рассуждения применимы к любому кругу K_s, поэтому рассмотрим один из них, который обозначим через K_0. Тогда для всех $w \in K_0$

$$|w|_p \ge c_1. \tag{3.26}$$

При этом, без ограничения общности считаем, что радиус круга K_0 удовлетворяет неравенству

$$radius(K_0) < p^{-n}. \tag{3.27}$$

Поэтому наша цель доказать, что $\mu_3(A(\Psi, n)) = 0$, где

$$A(\Psi, n) := \{w \in K_0 : \ |G(w)|_p < \Psi(H(G)) \text{ для бесконечного числа } G \in \mathcal{G}_n\}.$$

Зафиксируем действительное число v, удовлетворяющее условию

$$0 < v < 1/8. \tag{3.28}$$

Отметим, что множество $A(\Psi, n)$ можно записать в виде

$$A(\Psi, n) = \limsup_{H(G)\to\infty} A(G, \Psi, n) := \cap_{h=1}^{\infty} \cup_{H(G)\ge h} A(G, \Psi, n),$$

где $A(G,\Psi,n) := \{w \in K_0 : |G(w)|_p < \Psi(H(G))\}$. Для каждой функции $G \in \mathcal{G}_n$ разделим множество $A(G,\Psi,n)$ на два подмножества:

$$A_<(G,\Psi,n) := \{w \in A(G,\Psi,n) : |G'(w)|_p < H(G)^{-1-v}\},$$
$$A_\geq(G,\Psi,n) := \{w \in A(G,\Psi,n) : |G'(w)|_p \geq H(G)^{-1-v}\}.$$

Очевидно, что $A(\Psi,n) = A_<(\Psi,n) \cup A_\geq(\Psi,n)$, где

$$A_i(\Psi,n) = \limsup_{H(G)\to\infty} A_i(G,\Psi,n) := \cap_{h=1}^{\infty} \cup_{H(G)\geq h} A_i(G,\Psi,n) \quad (i =<,\geq).$$

Таким образом, требуемое утверждение, что $\mu_3(A(\Psi,n)) = 0$ будет следовать из результатов $\mu_3(A_<(\Psi,n)) = 0$ и $\mu_3(A_\geq(\Psi,n)) = 0$.

Случай 1: $\mu_3(A_<(\Psi,n)) = 0$. Поскольку ряд $\sum_{h=1}^{\infty} h^n\Psi(h)$ сходится, то $H^n\Psi(H)$ стремится к 0 при $H \to \infty$. Поэтому можем полагать, что $H^n\Psi(H) = o(1)$ и выполняется оценка

$$\Psi(H) = o(H^{-n}). \tag{3.29}$$

Согласно (3.29) имеем $\Psi(H) < \Psi_0(H) := H^{-n}$ для всех, за исключением конечного числа, $H \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$; поэтому $A_<(\Psi,n) \subset A_<(\Psi_0,n)$ и достаточно доказать, что $\mu_3(A_<(\Psi_0,n)) = 0$. Множество $A_<(\Psi_0,n)$ можем записать в виде

$$A_<(\Psi_0,n) = \cap_{h=1}^{\infty} \cup_{t=h}^{\infty} \cup_{G\in G_n^t} A_<(G,\Psi_0,n),$$

где

$$G_n^t := \{G \in G_n : 2^t \leq H(G) < 2^{t+1}\}.$$

Покажем, что расширенное множество (содержащее $A_<(\Psi_0,n)$) имеет меру нуль. Для этого воспользуемся вспомогательной леммой, являющейся следствием теоремы 1.5 из [116].

Лемма 3.6. *Пусть $U_p \subset \mathbb{Q}_p$ и $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ – невырожденный n-набор аналитических функций в U_p, такой, что $1, f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}_p$ в точках любого подмножества U_p. Пусть $w_0 \in U_p$, тогда существует $\lambda > 0$ и цилиндр $\mathbb{V}_p \subseteq U_p$, содержащий w_0, удовлетворяющие следующему свойству: для любого цилиндра $B_p \subseteq \mathbb{V}_p$ существует постоянная $E > 0$ такая, что для любого выбора действительных чисел T, δ_p, K_p удовлетворяющих неравенствам*

$$T \geq 1, \quad 0 < \delta_p \leq 1/T, \quad K_p > 0, \quad \delta_p K_p T^{n+1} \leq 1,$$

множество $M(\delta_p, K_p, T)$, определяемое следующим образом

$$\left\{ w \in B_p : \ \exists \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ такой, что } \begin{array}{l} |a_n f_n(w) + \ldots + a_1 f_1(w) + a_0|_p < \delta_p, \\ |a_n f_n'(w) + \ldots + a_1 f_1'(w)|_p < K_p, \\ |a_i| < T,\ 0 \leq i \leq n \end{array} \right\}$$

имеет меру, не превосходящую $E\epsilon^\lambda \mu_3(B_p)$, где

$$\epsilon := \max(\delta_p, (\delta_p K_p T^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}). \tag{3.30}$$

Пусть $w_0 \in U_p$. Для заданных $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $G \in \mathcal{G}_n$ определим множество

$$T_t(G) := \{w \in U_p : \ |G(w)|_p < 2^{-nt}, \ |G'(w)|_p < 2^{-(1+v)t}\}. \tag{3.31}$$

Определим также множество $L(n) = \cap_{h=1}^{\infty} \cup_{t=h}^{\infty} \cup_{G \in G_n^t} T_t(G)$. Пусть $K_0 \subset U_p$. Ясно, что имеем включение $A_<(\Psi_0, n) \subseteq L(n)$. В силу (3.31) получаем

$$\cup_{G \in G_n^t} T_t(G) \subseteq M(\delta_p, K_p, T)$$

для $\delta_p = 2^{-nt}$, $K_p = 2^{-(1+v)t}$ и $T = 2^{t+1}$. Величина ϵ, определенная в (3.30), удовлетворяет условию

$$\epsilon = 2^{-\min\{n, v/(n+1)\}t},$$

и лемма 3.6 означает, что

$$\mu_3(\cup_{G \in G_n^t} T_t(G)) \ll 2^{-\beta t},$$

где $\beta := \lambda \min\{n, v/(n+1)\}$ – положительная постоянная. Суммируя последнюю оценку по всем $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, получаем

$$\sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mu_3(\cup_{G \in G_n^t} T_t(G)) \ll \sum_{t=0}^{\infty} 2^{-\beta t} < \infty.$$

Следовательно, по лемме Бореля-Кантелли получаем, что $\mu_3(L(n)) = 0$ для $v > 0$.

Случай 2: $\mu_3(A_{\geq}(\Psi, n)) = 0$**.** Сначала докажем вспомогательный результат.

Лемма 3.7. *Пусть $G \in \mathcal{G}_n$, $a, b_2 > 0$, $b_1 > p^{1/2}a^{1/2}$. Пусть $\sigma_{a,b}(G)$ обозначает множество тех $w \in K_0$, для которых выполнена система неравенств*

$$|G(w)|_p < a, \quad b_1 \leq |G'(w)|_p \leq b_2. \tag{3.32}$$

Тогда множество $\sigma_{a,b}(G)$ покрывается не более чем двумя кругами радиуса $r_{a,b} = \min\left\{\frac{a}{b_1}, \frac{b_2}{p}\right\}$.

Доказательство. Предположим, что $\sigma_{a,b}(G)$ содержит по крайней мере две точки, поскольку в противном случае утверждение леммы очевидно. Тогда по свойству компактности $\mathbb{Z}_p$ существуют две точки $w_1, w_2 \in \sigma_{a,b}(G)$, такие что

$$|w_1 - w_2|_p \geq |w - w'|_p \quad \text{для любых } \ w, w' \in \sigma_{a,b}(G). \tag{3.33}$$

Покажем, что $\sigma_{a,b}(G) \subset \cup_{i=1}^{2} K(w_i, r_{a,b})$.

Пусть $i = 1, 2$. Для любой другой точки $w \in \sigma_{a,b}(G)$ по формуле Тейлора имеем

$$G(w) - G(w_i) = (w - w_i)\left(G'(w_i) + \sum_{m=2}^{\infty} (m!)^{-1} G^{(m)}(w_i)(w - w_i)^{m-1}\right). \tag{3.34}$$

Используя (3.27), неравенство $|G^{(m)}(w_i)|_p \leq 1$ и известную оценку $|m!|_p^{-1} \leq p^{(m-1)/(p-1)}$, легко проверить, что

$$\begin{array}{lcl} |(m!)^{-1}G^{(m)}(w_i)(w-w_i)^{m-1}|_p & < & |w-w_i|_p \quad \text{для} \ \ m \geq 3, \\ |(2!)^{-1}G''(w_i)(w-w_i)|_p & \leq & p|w-w_i|_p. \end{array}$$

Во-первых, предположим, что для $i = 1, 2$ выполнено неравенство

$$|G'(w_i)|_p > p|w-w_i|_p. \tag{3.35}$$

Тогда p-адическая норма правой части (3.34) (p-адическая норма суммы не превосходит максимума p-адических норм слагаемых и в точности равна ему, если этот максимум достигается ровно на одном слагаемом) равна

$$|w-w_i|_p|G'(w_i)|_p.$$

Далее, используя неравенства (3.32), получаем

$$a > |G(w)-G(w_i)|_p = |w-w_i|_p|G'(w_i)|_p \geq b_1|w-w_i|_p,$$

откуда следует, что $|w-w_i|_p < \frac{a}{b_1}$. Из последнего неравенства, а также неравенств (3.32), (3.35) получаем утверждение леммы в первом случае.

Во-вторых, предположим, что для $i = 1, 2$ выполняется неравенство, противоположное неравенству (3.35), т.е. справедливо

$$|G'(w_i)|_p \leq p|w-w_i|_p. \tag{3.36}$$

Пусть $|w-w_1|_p \leq |w-w_2|_p$. Согласно (3.33) имеем

$$|w-w_1|_p \leq |w_2-w_1|_p, \quad |w-w_1|_p \leq |w-w_2|_p. \tag{3.37}$$

Домножив разложение Тейлора

$$G(w_2)-G(w_1) = \sum_{m=1}^{\infty}(m!)^{-1}G^{(m)}(w_1)(w_2-w_1)^m$$

на $(w-w_1)(w_2-w_1)^{-1}$, получим

$$(G(w_2)-G(w_1))(w-w_1)(w_2-w_1)^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty}(m!)^{-1}G^{(m)}(w_1)(w-w_1)(w_2-w_1)^{m-1}.$$

Вычитая это равенство из (3.34) для $i = 1$, находим

$$\begin{array}{l} G(w)-G(w_1)-(G(w_2)-G(w_1))(w-w_1)(w_2-w_1)^{-1} = \\ = (w-w_2)(2^{-1}G''(w_1)(w-w_1) + \sum_{m=3}^{\infty}(m!)^{-1}G^{(m)}(w_1)\sum_{j=0}^{m-2}(w-w_1)^{j+1}(w_2-w_1)^{m-2-j}). \end{array} \tag{3.38}$$

Учитывая (3.32), (3.37), находим, что p-адическая норма левой части (3.38) не превосходит a, а p-адическая норма правой части равна $p|w-w_2|_p|w-w_1|_p$. Применяя неравенства (3.32), (3.37) и (3.36), получаем

$$a > p|w-w_2|_p|w-w_1|_p \geq p|w-w_1|_p^2 \geq |w-w_1|_p|G'(w_1)|_p \geq b_1|w-w_1|_p.$$

При $b_1 > p^{1/2}a^{1/2}$ последнее неравенство противоречит неравенству (3.36).

В предположении $|w - w_1|_p > |w - w_2|_p$ покажем, что снова получается противоречие. Используя (3.32), (3.36) для $i = 2$ и (3.38), находим

$$a > p|w - w_2|_p|w - w_1|_p > p|w - w_2|_p^2 \geq b_1^2/p,$$

что противоречит неравенству $b_1 > p^{1/2}a^{1/2}$.

В-третьих, предположим, что для $i = 1$ выполняется неравенство (3.36), а для $i = 2$ выполняется неравенство (3.35). Тогда для $i = 2$ мы получаем утверждение леммы. В случае $i = 1$ и $|w - w_1|_p \leq |w - w_2|_p$ получаем противоречие. Для $i = 1$ и $|w - w_1|_p > |w - w_2|_p$ получаем неравенство $|w - w_2|_p < a^{1/2}p^{-1/2}$, правая часть которого при $b_1 > p^{1/2}a^{1/2}$ превосходит a/b_1. Следовательно, в данном случае множество $\sigma_{a,b}(G)$ покрывается кругом $K(w_2, r_{a,b})$ радиуса $r_{a,b} = \min\left\{\frac{a}{b_1}, \frac{b_2}{p}\right\}$. $\square$

Согласно лемме 3.7 заключаем, что множество $A_{\geq}(G, \Psi, n)$ является объединением не более двух кругов. Поэтому достаточно провести доказательство для одного из них. Далее без ограничения общности можем полагать, что множество $A_{\geq}(G, \Psi, n)$ является кругом.

Обозначим через $\mathcal{G}_n(H)$ множество функций $G \in G_n(H)$, удовлетворяющих условию $H(G) = H$, и пусть $\mathcal{G}_n = \cup_{H=1}^{\infty}\mathcal{G}_n(H)$. Для $G \in \mathcal{G}_n(H)$, используя свойство компактности $\mathbb{Z}_p$, определим точку $\alpha_G \in A_{\geq}(G, \Psi, n)$ такую, что

$$|G'(\alpha_G)|_p = \min_{w \in A_{\geq}(G,\Psi,n)} |G'(w)|_p.$$

Тогда согласно лемме 3.7 и учитывая (3.29) и тот факт, что $|G'(w)|_p \geq H^{-1-v}$, получаем

$$|w - \alpha_G|_p < \Psi(H)|G'(\alpha_G)|_p^{-1} \tag{3.39}$$

для $n \geq 3$. В силу выбора α_G, справедливо неравенство $|G'(\alpha_G)|_p \geq H^{-1-v}$. Далее доказательство существенно зависит от значения величины $|G'(\alpha_G)|_p$, поэтому будем различать два типа функций G:

$$\mathcal{G}_n'(H) = \{G \in \mathcal{G}_n(H) :\ |G'(\alpha_G)|_p \geq H^{-1/2}\},$$
$$\mathcal{G}_n''(H) = \{G \in \mathcal{G}_n(H) :\ H^{-1-v} \leq |G'(\alpha_G)|_p < H^{-1/2}\}.$$

Тип 1. Для $G \in \mathcal{G}_n'(H)$, обозначим через $\sigma(G)$ множество точек $w \in A_{\geq}(G, \Psi, n)$, удовлетворяющих условию

$$|G'(\alpha_G)|_p \geq H^{-1/2}. \tag{3.40}$$

Для каждой функции $G \in \mathcal{G}_n'(H)$ определим цилиндр

$$\sigma_1(G) = \{w \in \mathbb{Z}_p :\ |w - \alpha_G|_p \leq (c_2 p^{\frac{1}{p-1}} H|G'(\alpha_G)|_p)^{-1}\}, \tag{3.41}$$

где $c_2 > \max\{2, 2/c_1\}$. Если H достаточно велико, то радиус цилиндра $\sigma_1(G)$ меньше радиуса K_0, и, следовательно, $\sigma_1(G) \subset K_0$. Далее, используя (3.39), легко видеть, что

$$\mu_3(\sigma(G)) \ll H\Psi(H)\mu_3(\sigma_1(G)). \tag{3.42}$$

Зафиксируем любую функцию $G \in \mathcal{G}'_n(H)$, для которой $\sigma(G) \neq 0$. Пусть $w \in \sigma_1(G)$. Запишем разложение G в окрестности точки α_G по формуле Тейлора:

$$G(w) = G(\alpha_G) + G'(\alpha_G)(w - \alpha_G) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} G^{(m)}(\alpha_G)(w - \alpha_G)^m. \tag{3.43}$$

Согласно (3.40), для $n \geq 2$ и достаточно большого H имеем

$$|G(\alpha_G)|_p < \Psi(H) \ll H^{-2} \leq (c_2 H)^{-1}. \tag{3.44}$$

Из (3.41) вытекает

$$|G'(\alpha_G)(w - \alpha_G)|_p \leq |G'(\alpha_G)|_p (c_2 p^{\frac{1}{p-1}} H |G'(\alpha_G)|_p)^{-1} < (c_2 H)^{-1}. \tag{3.45}$$

Используя (3.40), (3.41), неравенство $|G^{(m)}(\alpha_G)|_p \leq 1$ и оценку $|m!|_p^{-1} \leq p^{(m-1)/(p-1)}$ (см. [90]), для $m \geq 2$ находим

$$\begin{aligned} |\tfrac{1}{m!} G^{(m)}(\alpha_G)(w - \alpha_G)^m|_p &\leq p^{m/(p-1)} (c_2 p^{\frac{1}{p-1}} H |G'(\alpha_G)|_p)^{-m} \\ &< (c_2^{-1} H^{-1} H^{1/2})^m < (c_2 H)^{-1}. \end{aligned}$$

Используя (3.43) – (3.45) и последнее неравенство, получаем

$$|G(w)|_p < (c_2 H)^{-1} \tag{3.46}$$

для $w \in \sigma_1(G)$.

Во-первых, рассмотрим функции $G \in \mathcal{G}'_n(H)$ такие, что $|a_j| = H$ для некоторого $j \geq 1$. Зафиксируем вектор $\mathbf{d}_1 = (a_n, a_{n-1}, \ldots, H, \ldots, a_2, a_1)$ и обозначим через $\mathcal{G}'_n(\mathbf{d}_1, H)$ множество функций $G \in \mathcal{G}'_n(H)$ с одним и тем же вектором $\mathbf{d}_1$. Число различных векторов $\mathbf{d}_1$ оценивается как $\ll H^{n-1}$. Пусть $G_1, G_2 \in \mathcal{G}'_n(\mathbf{d}_1, H)$ и отличаются только коэффициентом a_0. Если предположить, что существует $w \in \sigma_1(G_1) \cap \sigma_1(G_2)$, то из (3.46) следует, что $|G_1(w) - G_2(w)|_p < (c_2 H)^{-1}$. С другой стороны, $G_1(w) - G_2(w)$ есть целое число, по абсолютной величине не превосходящее $2H$. Следовательно, его p-адическая норма не может быть меньше $(2H)^{-1}$. Полученное противоречие при $c_2 > 2$ показывает, что $\sigma_1(G_1) \cap \sigma_1(G_2) = \emptyset$. Следовательно,

$$\sum_{G \in \mathcal{G}'_n(\mathbf{d}_1, H)} \sigma_1(G) \leq \mu_3(K_0). \tag{3.47}$$

Из последней оценки и (3.42) следует, что

$$\sum_{G \in \mathcal{G}'_n(\mathbf{d}_1, H)} \mu_3(\sigma(G)) \ll H\Psi(H)\mu_3(K_0).$$

Суммируя последнее неравенство по всем векторам $\mathbf{d}_1$, а затем по H, получаем

$$\sum_{H=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{d}_1}\sum_{G\in\mathcal{G}'_n(\mathbf{d}_1,H)}\mu_3(\sigma(G))\ll\sum_{H=1}^{\infty}H^n\Psi(H)\mu_3(K_0)<\infty.$$

Применение леммы Бореля-Кантелли завершает доказательство.

Во-вторых, рассмотрим функции $G\in\mathcal{G}'_n(H)$, у которых $|a_0|=H$. Доказательство проводится аналогично первому случаю, только теперь рассматриваем функции $G_3,G_4\in\mathcal{G}'_n(H)$, отличающиеся только коэффициентом a_1. При $c_2>2/c_1$ получим, что $\sigma_1(G_3)\cap\sigma_1(G_4)=\emptyset$, и далее доказательство совпадает с вышеприведенным.

Тип 2. Для $G\in\mathcal{G}''_n(H)$ переопределим цилиндр $\sigma(G)$ и пусть $\sigma(G)$ – множество точек $w\in A_{\geq}(G,\Psi,n)$, удовлетворяющих условию

$$H^{-1-v}\leq|G'(\alpha_G)|_p<H^{-1/2},\quad 0<v<1/8. \tag{3.48}$$

Для функции $G\in\mathcal{G}''_n(H)$ определим цилиндр $\sigma_2(G)$ как множество точек $w\in\mathbb{Z}_p$, удовлетворяющих неравенству

$$|w-\alpha_G|_p\leq p^{\frac{1}{1-p}}H^{-2}|G'(\alpha_G)|_p^{-1} \tag{3.49}$$

для $\alpha_G\in\sigma(G)$. Ясно, что $\sigma(G)\subset\sigma_2(G)$, и справедливы оценки

$$\mu_3(\sigma_2(G))=c_3(p)H^{-2}|G'(\alpha_G)|_p^{-1},\quad \mu_3(\sigma(G))=c_4(p)H^2\Psi(H)\mu_3(\sigma_2(G)), \tag{3.50}$$

где $c_i(p)>0$ $(i=3,4)$ – постоянные, зависящие от p.

Во-первых, рассмотрим функции $G\in\mathcal{G}''_n(H)$ такие, что $|a_j|=H$ для некоторого $j\geq 2$. Зафиксируем вектор $\mathbf{d}_2=(a_n,a_{n-1}\ldots,H,\ldots,a_3,a_2)$ и обозначим через $\mathcal{G}''_n(\mathbf{d}_2,H)$ множество функций $G\in\mathcal{G}''_n(H)$ с одним и тем же вектором $\mathbf{d}_2$. Число различных векторов $\mathbf{d}_2$ оценивается как $\ll H^{n-2}$.

Зафиксируем произвольную функцию $G\in\mathcal{G}''_n(\mathbf{d}_2,H)$, для которой $\sigma(G)\neq\emptyset$. Пусть $w\in\sigma_2(G)$. Записав разложение G в окрестности α_G по формуле Тейлора и оценив каждое слагаемое, для $v>0$ получаем

$$|G(w)|_p<H^{-2+2v},\qquad w\in\sigma_2(G). \tag{3.51}$$

При этом использовались неравенства (3.48), (3.49), $|G^{(m)}(\alpha_G)|_p\leq 1$ и $|m!|_p^{-1}\leq p^{m-1/(p-1)}$ для $m\geq 2$. Аналогично, раскладывая G' в ряд Тейлора в окрестности α_G, для $v<1/2$ получаем

$$|G'(w)|_p<H^{-1/2},\qquad w\in\sigma_2(G). \tag{3.52}$$

Далее воспользуемся методом существенных и несущественных областей Спринджука [40]. Сначала рассмотрим несущественные цилиндры. Пусть

$\sigma_2(G)$ – несущественный цилиндр и $K_1 = \sigma_2(G) \bigcap \sigma_2(\tilde{G})$. Тогда имеем

$$\mu_3(K_1) \geq \frac{1}{2}\mu_3(\sigma_2(G)) = c_5(p)H^{-2}|G'(\alpha_G)|_p^{-1},$$

где $c_5(p)$ – постоянная, зависящая от p. Без ограничения общности можем полагать, что $g_1(w) = w$. Рассмотрим функцию вида $R(x) = G(w) - \tilde{G}(w) = b_1 w + b_0$, где $\max(|b_0|, |b_1|) \leq 2H$, и обе функции $G(w)$ и $\tilde{G}(w)$ принадлежат множеству $\mathcal{G}_n''(\mathbf{d}_2, H)$. Согласно (3.51), следующая оценка

$$|R(w)|_p < H^{-2+2v} \tag{3.53}$$

выполняется на множестве K_1. Заметим, что $b_1 \neq 0$, так как в противном случае имели бы $|b_0|_p < H^{-2+2v}$, что противоречит неравенству $|b_0|_p \geq |b_0|^{-1} \gg H^{-1}$ при $v < 1/2$. Из (3.53) следует, что

$$|w + b_0/b_1|_p < H^{-2+2v}|b_1|_p^{-1}. \tag{3.54}$$

Пусть $K_2 = \{w \in K_0,\ \text{удовлетворяющие неравенству}\ (3.54)\}$. Тогда $K_1 \subseteq K_2$ и $\mu_3(K_2) = c_6(p)H^{-2+2v}|b_1|_p^{-1}$, где $c_6(p)$ – постоянная, зависящая от p. Имеем

$$H^{-2}|G'(\alpha_G)|_p^{-1} \ll \mu_3(K_1) \leq \mu_3(K_2) \ll H^{-2+2v}|b_1|_p^{-1}.$$

Используя последнюю оценку и (3.48), получаем $|b_1|_p \ll H^{2v}|G'(\alpha_G)|_p \ll H^{2v-1/2}$. Из (3.53) следует, что $|b_0|_p \ll H^{2v-1/2}$. Предположим, что число $s \in \mathbb{Z}^+$ определяется неравенством $p^s \leq H < p^{s+1}$. При достаточно большом H имеем $H^{1/2-2v} \asymp p^{[s(1/2-2v)]}$. Следовательно, $b_1 \asymp p^{[s(1/2-2v)]}b_{11}$ и $b_0 \asymp p^{[s(1/2-2v)]}b_{01}$ для некоторых целых чисел b_{11} и b_{01}. Многочлен R можем записать в виде $b_1 w + b_0 \asymp p^{[s(1/2-2v)]}(b_{11}w + b_{01})$, где $\max\{|b_{11}|, |b_{01}|\} \ll H^{1/2+2v}$. Пусть $R_1(w) = b_{11}w + b_{01}$, тогда $H(R_1) \ll H^{1/2+2v}$. Согласно (3.53) и оценке для высоты $H(R_1)$, имеем

$$|b_{11}w + b_{01}|_p \ll p^{[s(1/2-2v)]}H^{-2+2v} \ll H^{-3/2} = H(R_1)^{-3/(1+4v)} \ll H(R_1)^{-(2+\epsilon')}$$

для $v < 1/8$ и $\epsilon' > 0$. Используя аналог теоремы Хинчина в $\mathbb{Q}_p$ [40], получаем, что мера множества точек w, принадлежащих бесконечному числу несущественных цилиндров $\sigma_2(G)$, равна нулю.

Далее, пусть $\sigma_2(G)$ – существенный цилиндр. Тогда, в силу неархимедовости метрики в $\mathbb{Q}_p$, каждая точка $w \in K_0$ принадлежит не более чем одному существенному цилиндру. Следовательно, имеем

$$\sum_{\substack{G \in \mathcal{G}_n''(\mathbf{d}_2, H) \\ \sigma_2(G)\ \text{существенный}}} \mu_3(\sigma_2(G)) \leq \mu_3(K_0).$$

Поскольку число векторов $\mathbf{d}_2$ не превосходит $c(n)H^{n-2}$, то из последней оценки и (3.50) следует, что

$$\sum_{\mathbf{d}_2} \sum_{\substack{G\in\mathcal{G}_n''(\mathbf{d}_2,H) \\ \sigma_2(G)\ \text{существенный}}} \mu_3(\sigma(G)) \ll H^n\Psi(H)\mu_3(K_0).$$

Суммируя по всем $H \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sum_{H=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{d}_2} \sum_{\substack{G\in\mathcal{G}_n''(\mathbf{d}_2,H) \\ \sigma_2(G)\ \text{существенный}}} \mu_3(\sigma(G)) < \infty.$$

Таким образом, согласно лемме Бореля-Кантелли, мера множества точек w, принадлежащих бесконечному числу существенных цилиндров, равна нулю.

Во-вторых, рассмотрим функции $G \in \mathcal{G}_n''(H)$ такие, что $|a_1| = H$. В данном случае рассматриваем функции $G_5, G_6 \in \mathcal{G}_n''(H)$, отличающиеся только коэффициентами a_0 и a_2. Доказательство в случае существенных цилиндров совпадает с вышеприведенным. В случае несущественных цилиндров рассмотрим функции вида $R_2(w) = G_5(w) - G_6(w) = a_0' + a_2'g_2(w)$, $\max\{|a_0'|, |a_2'|\} \leq 2H$. Согласно (3.51) и (3.52), для $v < 1/2$ справедливы неравенства

$$|R_2(w)|_p < H^{-2+2v}, \;\; |R_2'(w)|_p < H^{-1/2}, \;\; w \in \sigma_2(G_5)\cap\sigma_2(G_6).$$

Используя лемму 3.6 для функций вида R_2 (отметим, что линейная независимость множества $\{1, g_2\}$ следует из линейной независимости $\{1, g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ над $\mathbb{Q}_p$) и те же рассуждения, что и при доказательстве случая 1, получаем, при $v < 1/4$ мера множества точек w, принадлежащих бесконечному числу существенных цилиндров, равна нулю.

В-третьих, рассмотрим функции $G \in \mathcal{G}_n''(H)$ такие, что $|a_0| = H$. В данном случае рассматриваем функции $G_7, G_8 \in \mathcal{G}_n''(H)$, отличающиеся только коэффициентами a_1 и a_2. Снова доказательство для существенных цилиндров совпадает с приведенным в первом случае. В случае несущественных цилиндров рассматриваем функции вида $R_3(w) = G_7(w) - G_8(w) = a_1''w + a_2''g_2(w)$, $\max\{|a_1''|, |a_1''|\} \leq 2H$. Пусть $L(w) = a_1'' + a_2''g_2(w)/w$, тогда находим, что $|L(w)|_p = |w|_p^{-1}|R_3(w)|_p$ и $|L'(w)|_p \leq |w|_p^{-1}\max\{|R_3'(w)|_p, |L(w)|_p\}$. Согласно (3.26), (3.51) и (3.52), для $v < 1/2$ справедливы неравенства

$$|L(w)|_p \ll H^{-2+2v}, \;\; |L'(w)|_p \ll H^{-1/2}, \;\; w \in \sigma_2(G_7)\cap\sigma_2(G_8).$$

Снова, как и в предыдущем случае, воспользуемся леммой 3.6 для функций вида L и получим, что при $v < 1/4$ мера множества точек w, принадлежащих бесконечному числу существенных цилиндров, равна нулю.

3.4 Приближения для полиномиальных кривых в $\mathbb{C}$

Пусть

$$\mathcal{W}_n(\Psi) = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| < \Psi(H(P)) \text{ для бесконечного числа } P \in \mathcal{P}_n''\}.$$

Тогда для доказательства теоремы 3.3 надо показать, что $\mu_2(\mathcal{W}_n(\Psi)) = 0$ при условии сходимости ряда $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2}\Psi^2(H)$.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}$ – корни многочлена $P \in \mathcal{P}_n''$. Для каждого корня β_i, $1 \le i \le n$, рассмотрим множество $S_2(\beta_i)$, определенное выше в главе 1. Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ – комплексные корни $P \in \mathcal{P}_n''(H)$ с $\mathrm{Im}\,(\beta_s) > 0$, $s = 1, \ldots, k$. Зафиксируем корень β_1 многочлена P и упорядочим остальные корни следующим образом

$$|\beta_1 - \beta_2| \leqslant \ldots \leqslant |\beta_1 - \beta_k|.$$

Выберем достаточно малое положительное число ε, и пусть $d > 0$ – фиксированное большое число. Обозначим $\varepsilon_1 = \varepsilon/d$, $a = [\varepsilon_1^{-1}]$. Для многочлена P определим вещественные числа ρ_j и целые числа l_j из следующих условий (как в разделе 1.2):

$$|\beta_1 - \beta_j| = H^{-\rho_j}, \ \ \frac{l_j - 1}{a} \le \rho_j < \frac{l_j}{a}, \ \ 2 \le j \le k$$

и $\rho_j = l_j = 0$ для $k < j \le n$. Далее определим числа $p_i = \frac{l_{i+1} + \ldots + l_n}{a}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Все многочлены $P \in \mathcal{P}_n''(H)$, соответствующие одному и тому же вектору $\mathbf{l} = (l_2, \ldots, l_n)$, объединим в один класс $\mathcal{P}_n''(H, \mathbf{l})$, число классов $\mathcal{P}_n''(H, \mathbf{l})$ конечно (см. [40]). Определим $\mathcal{P}_n''(\mathbf{l}) = \cup_{H=1}^{\infty} \mathcal{P}_n''(H, \mathbf{l})$.

Пусть $K_0 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 3\}$. В силу (1.9) имеем $\mathcal{W}_n(\Psi) \subseteq K_0$. Поэтому достаточно доказать теорему для точек $z \in S_2(\beta_i) \cap K_0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением множества $S_2(\beta_1) \cap K_0$, так как остальные множества $S_2(\beta_i) \cap K_0$, $2 \le i \le n$, устроены аналогичным образом.

Для $P \in \mathcal{P}_n''(H, \mathbf{l})$ обозначим через $B(P)$ множество точек $z \in S_2(\beta_1) \cap K_0$, удовлетворяющих неравенству $|P(z)| < \Psi(H)$.

Поскольку ряд $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2}\Psi^2(H) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{2^t \le H < 2^{t+1}} H^{n-2}\Psi^2(H)$ сходится, то выражения $H^{n-2}\Psi^2(H)$ и $\sum_{2^t \le H < 2^{t+1}} H^{n-2}\Psi^2(H)$ стремятся к 0 при $H \to \infty$ и $t \to \infty$ соответственно. Поэтому,

$$\Psi^2(H) = o(H^{-n+2}) \ \text{ при } \ H \to \infty$$

и

$$\sum_{2^t \le H < 2^{t+1}} \Psi^2(H) H^{n-2} = o(1) \ll 1 \ \text{ при } \ t \to \infty. \tag{3.55}$$

В случае, когда $\Psi^2(H) \ll H^{-n+1}$ теорема была доказана в [14]. Поэтому далее будем полагать, что

$$H^{-n+1} \ll \Psi^2(H) \ll H^{-n+2} \text{ для } H > H_0.$$

Положим $M = [\epsilon_1^{-1}]$ и разделим область значения $\Psi^2(H)$ на M частей вида

$$H^{-n+1+i/M} \ll \Psi^2(H) \ll H^{-n+1+(i+1)/M}, \quad i = 0, \dots, M-1. \tag{3.56}$$

Выберем достаточно большое число t и рассмотрим $2^t \leq H < 2^{t+1}$. Пусть число значений H, для которых выполняется неравенство (3.56), будет равно $2^{t\theta}$; тогда получим

$$\sum_{2^t \leqslant H < 2^{t+1}} \Psi^2(H) H^{n-2} > 2^{t(-n+1+i/M+n-2+\theta)} > 2^{t(\theta-1+i/M)}.$$

Если $\theta - 1 + i/M > 0$, то получаем противоречие с (3.55). Поэтому будем считать, что

$$0 \leqslant \theta < 1 - i/M. \tag{3.57}$$

Используя лемму 1.3 и лемму 1.4 имеем

$$\begin{array}{lcl} |z-\beta_1| & \ll & \Psi(H)H^{-1+p_1} \ll 2^{t(p_1-n/2-1/2+(i+1)/2M)}, \\ |z-\beta_1| & \ll & (\Psi(H)H^{-1+p_1}H^{-\rho_2})^{1/2} \ll 2^{t/4(2p_2-n-1+(i+1)/M+2\epsilon_1)}. \end{array} \tag{3.58}$$

Далее рассмотрим два случая, в зависимости от того, какая оценка в последней системе является наилучшей.

Случай 1. Вторая оценка будет меньше первой в (3.58) при условии

$$p_1 + l_2/a > n/2 + 1/2 - (i+1)/(2M) + \epsilon_1. \tag{3.59}$$

Для достаточно большого t, определим множество $M_t(\mathbf{l}) = \cup_{2^t \leq H < 2^{t+1}} \mathcal{P}_n''(H, \mathbf{l})$. Разобьем множество $S_2(\beta_1) \cap K_0$ на квадраты K_j со стороной $2^{-\sigma_1 t}$ для $\sigma_1 > 0$. Будем говорить, что многочлен $P \in M_t(\mathbf{l})$ принадлежит квадрату K_j, если существует точка $z \in K_j$, в которой выполняется (3.2). Сначала рассмотрим квадраты K_j, содержащие не более одного многочлена $P \in M_t(\mathbf{l})$. Число таких квадратов, а значит и многочленов, не превосходит $2^{2\sigma_1 t}$. Суммируя вторые оценки в (3.58) для многочленов P в выбранном классе, получим

$$\sum_{P \in M_t(\mathbf{l})} \mu_2 B(P) \ll 2^{t(2\sigma_1+p_2-n/2-1/2+(i+1)/(2M)+\epsilon_1)}.$$

Если $\sigma_1 < n/4 + 1/4 - p_2/2 - (i+1)/(4M) - \epsilon_1/2$, то последний ряд сходится, и применение леммы Бореля–Кантелли завершает доказательство этого случая.

Далее, пусть $\sigma_2 = n/4 + 1/4 - p_2/2 - (i+1)/(4M) - \epsilon_1/2 - \gamma_1$, $\gamma_1 > 0$, и рассмотрим квадраты со стороной $2^{-\sigma_2 t}$, содержащие по крайней мере два многочлена. Пусть P_1 и P_2 – различные многочлены класса $M_t(\mathbf{l})$ такие, что для некоторых $z_1, z_2 \in K_j$ для $P_1(z_1)$ и $P_2(z_2)$ выполняется неравенство (3.2). Используя разложение в ряд Тейлора многочлена P_i, $i = 1, 2$, в окрестности корня β_i, получаем оценку для $|P_i(z_i)|$:

$$\begin{aligned} |P_i(z_i)| &\ll 2^{t(1-p_2+(n-2)\varepsilon_1-n/2-1/2+(i+1)/(2M)+p_2+2\gamma_1+\epsilon_1)} = \\ &= 2^{t(1/2-n/2+(i+1)/(2M)+2\gamma_1+(n-1)\varepsilon_1)}. \end{aligned}$$

Воспользуемся следующей леммой, доказанной в [11].

Лемма 3.8. *Пусть $\delta > 0$, $\sigma > 0$ – вещественные числа, $n \in \mathbb{N}$ и $H = H(\delta, n)$ – достаточно большое вещественное число. Далее пусть P_1 и P_2 – два целочисленных многочлена степени не более n без общих корней и $\max\{H(P_1), H(P_2)\} \leq H$. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ обозначает круг радиуса $H^{-\sigma}$ с центром в точке β такой, что $Im\,\beta \neq 0$. Тогда, если существует такое число $\tau > 0$, что для всех $z \in K$ выполняется неравенство*

$$\max\{|P_1(z)|, |P_2(z)|\} < H^{-\tau},$$

то $2\tau + 2 + 4\max(1 + \tau - \sigma, 0) < 2n + \delta$.

Применяя лемму 3.8 для многочленов P_1 и P_2, где $\tau = -1/2 + n/2 - (i + 1)/(2M) - 2\gamma_1 - (n-1)\varepsilon_1$ и $\sigma = \sigma_2$, имеем

$$2\tau + 2 + 4(\tau - \sigma_2 + 1) = 2n + 2 + 2p_2 - 8\gamma_1 - 2(i+1)/M - 2(3n-4)\varepsilon_1.$$

Если $8\gamma_1 + 2(i+1)/M + \delta + 3(3n-4)\varepsilon_1 \leq 2$ или $i/M \leqslant 1 - 4\gamma_1 - 1/M - \delta/2 - 3(3n-4)\varepsilon_1/2$, то приходим к противоречию с леммой 3.8. Поэтому далее

$$0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1,\ \theta_1 = 1/M + 4\gamma_1 + \delta/2 + 3(3n-4)\varepsilon_1/2.$$

Зафиксируем H такое, что $2^t \leqslant H < 2^{t+1}$. Число значений H, удовлетворяющих (3.56), не превосходит $2^{t\theta_1}$. Если квадрат со стороной $2^{-t\sigma_3}$, $\sigma_3 > 0$, содержит не более $3 \cdot 2^{t\theta_1}$ многочленов $P \in M_t(\mathbf{l})$, тогда для меры множества $B_t = \cup_{P \in M_t(\mathbf{l})} B(P)$ получим следующую оценку

$$\mu_2 B_t \leq \sum_{P \in M_t(\mathbf{l})} \mu_2 B(P) \ll 2^{t(2\sigma_3+p_2-n/2-1/2+(i+1)/(2M)+\theta_1+\epsilon_1)}. \tag{3.60}$$

Это дает сходящийся ряд при условии $2\sigma_3 < n/2 + 1/2 - p_2 - (i+1)/(2M) - \theta_1 - \epsilon_1$. Таким образом, по лемме Бореля–Кантелли мера тех z, которые попадают в бесконечное число множеств B_t, равна нулю.

Пусть

$$\sigma_4 = n/4 + 1/4 - p_2/2 - (i+1)/(4M) - \theta_1/2 - \epsilon_1/2 - \gamma_2,\ \gamma_2 > 0.$$

Рассмотрим квадраты со стороной $2^{-t\sigma_4}$, содержащие более $3\cdot 2^{t\theta_1}$ многочленов. По формуле Тейлора для $P(z)$ мы имеем

$$\begin{aligned} |P(z)| &\ll 2^{t(1-p_2+(n-2)\varepsilon_1-n/2-1/2+(i+1)/(2M)+p_2+\theta_1+2\gamma_2+\epsilon_1)} \\ &= 2^{t(-n/2+1/2+(i+1)/(2M)+\theta_1+2\gamma_2+(n-1)\varepsilon_1)} = 2^{-t\sigma_5}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Рассмотрим новые многочлены $R_i(f) = P_{i+1}(f) - P_1(f)$, где $i = 2, 3, \dots, [K]$, $K > 3\cdot 2^{t\theta_1}$. Предположим, что все многочлены R_i неприводимы. Применим лемму 3.8 для многочленов R_2 и R_3 без общих корней, где $\deg R_i \leqslant n-1$ и $|R_i(z)| \ll 2^{-t\sigma_5}$. Из (3.61) и леммы 3.8 следует, что

$$\tau = n/2 - 1/2 - (i+1)/(2M) - \theta_1 - 2\gamma_2 - (n-1)\varepsilon_1, \;\; \sigma = \sigma_4.$$

Это означает, что

$$2\tau + 4(\tau - \sigma_4 + 1) + 2 = 2n + 2 - 2(i+1)/M - 4\theta_1 - 8\gamma_2 - 2(3n-4)\varepsilon_1 + 2p_2.$$

Выберем константы $\gamma_1, \gamma_2, \varepsilon_1, \delta, M$ такими, чтобы выполнялось неравенство $16\gamma_1 + 4/M + 8\gamma_2 + 9(3n-4)\varepsilon_1 + 3\delta < 2$. Тогда получаем неравенство $2\tau + 4(\tau - \sigma_4 + 1) + 2 > 2(n-1) + \delta$, которое противоречит лемме 3.8. Если многочлены R_i пропорциональны или R_i приводимы, то доказательство этих случаев можно найти в [14], что и завершает доказательство случая.

Случай 2. Теперь предположим, что выполняется неравенство, противоположное неравенству (3.59):

$$p_1 + l_2/a \leq n/2 + 1/2 - (i+1)/(2M) + \epsilon_1. \tag{3.62}$$

Далее оценим $|z - \beta_1|$, используя (3.58.1) (эта оценка более точная, чем (3.58.2). Сначала рассмотрим случай, когда

$$n/2 - 1/4 < p_1 + l_2 a^{-1} \leqslant n/2 + 1/2 - (i+1)/(2M) + \epsilon_1. \tag{3.63}$$

Разобьем множество $S_2(\beta_1)\cap K_0$ на квадраты K_j со стороной $2^{-t\sigma_6}$, где $\sigma_6 > 0$, и рассмотрим только те квадраты, которые содержат не более одного многочлена $P \in M_t(\mathbf{l})$. Воспользовавшись первой оценкой (3.58) и просуммировав ее по всем выбранным квадратам и всем значениям t, получим

$$c(n)\sum_{t=1}^{\infty} 2^{2t(-n/2-1/2+(i+1)/(2M)+p_1+\sigma_6)}.$$

Этот ряд сходится при $\sigma_6 < n/2 + 1/2 - (i+1)/(2M) - p_1$, и лемма Бореля–Кантелли завершает доказательство в данном случае.

Для $\gamma_3 > 0$ выберем

$$\sigma_7 = n/2 + 1/2 - (i+1)/(2M) - p_1 - \gamma_3.$$

Рассмотрим квадраты, которые содержат по крайней мере два многочлена. Выберем два из них, скажем P и Q, и воспользуемся формулой Тейлора для оценок значений $|P(z)|$ и $|Q(z)|$ на квадрате со стороной $2^{-t\sigma_7}$. Получим

$$\max(|P(z)|, |Q(z)|) \ll 2^{t(-n/2+1/2+(i+1)/(2M)+\gamma_3+(n-1)\varepsilon_1)}.$$

Далее, применяя лемму 3.8 для значений параметров $\tau = n/2 - 1/2 - (i+1)/(2M) - \gamma_3 - (n-1)\varepsilon_1$, $\sigma = \sigma_7$, получим

$$2\tau + 2 + 4(\tau - \sigma_7 + 1) = n + 1 + 4p_1 - (i+1)/M - 2\gamma_3 - 6(n-1)\varepsilon_1 < 2n + \delta.$$

В силу того, что $2p_1 \geqslant l_2 a^{-1} + p_1 > n/2 - 1/4$, получаем противоречие, если

$$(i+1)/M + 2\gamma_3 + 6(n-1)\varepsilon_1 + \delta < 1/2. \tag{3.64}$$

Поскольку $1/M + 2\gamma_3 + 6(n-1)\varepsilon_1 + \delta$ произвольно мало, то пусть значение последнего выражения не превосходит $1/10$. Тогда из (3.64) следует, что $i/M < 2/5$. Далее, если $i/M \geqslant 2/5$, то согласно (3.57) получаем

$$0 \leqslant \theta < 3/5. \tag{3.65}$$

Зафиксируем H такое, что $2^t \leqslant H < 2^{t+1}$. Согласно (3.65), число значений H, удовлетворяющих (3.56), не превосходит $2^{3t/5}$. Рассуждения проведем аналогичные доказательству (3.60). Разобьем множество $S_2(\beta_1) \cap K_0$ на квадраты K_j со стороной $2^{-t\sigma_8}$, $\sigma_8 > 0$. Предположим, что квадрат K_j содержит не более $3 \cdot 2^{3t/5}$ многочленов. Тогда верхняя оценка для меры множества B_t будет подобна оценке, полученной ранее в (3.60), т.е.

$$c(n)2^{t(-n-1+2p_1+(i+1)/M+3/5+2\sigma_8)}.$$

Суммируя по t, получаем сходящийся ряд, если $2\sigma_8 < n+1-(i+1)/M-3/5-2p_1$; лемма Бореля–Кантелли завершает доказательство данного случая.

Предположим, что

$$\sigma_9 = n/2 + 1/5 - p_1 - (i+1)/(2M) - \gamma_4,\ \gamma_4 > 0.$$

Рассмотрим квадраты K_j со стороной $2^{-t\sigma_9}$, которые содержат более $3 \cdot 2^{3t/5}$ многочленов P_i, $1 \leqslant i \leqslant [L]$, $L > 3 \cdot 2^{3t/5}$. Разложим каждый из них в ряд Тейлора на K_j и получим верхнюю оценку для $|P_i(z)|$, а именно

$$\begin{aligned} |P_i(z)| &\ll 2^{t(1-p_1+(n-1)\varepsilon_1-n/2-1/5+p_1+(i+1)/(2M)+\gamma_4)} \\ &= 2^{t(4/5-n/2+(i+1)/(2M)+\gamma_4+(n-1)\varepsilon_1)},\ \ 1 \leq i \leq [L]. \end{aligned}$$

По крайней мере три многочлена P_{1i}, P_{2i} и P_{3i} обладают равной высотой (т.е. $a_n = H$), поэтому многочлены $R_1(f) = P_{2i}(f) - P_{1i}(f)$ и $R_2(f) = P_{3i}(f) - P_{1i}(f)$ удовлетворяют следующей системе неравенств:

$$|R_i(z)| \ll 2^{t(4/5-n/2+(i+1)/(2M)+\gamma_4+(n-1)\varepsilon_1)},\ \ \deg R_i(z) \leq n-1,\ i = 1, 2.$$

Предположим, что многочлены R_i неприводимы и по крайней мере два из них не имеют общих корней. Применим лемму 3.8 при $\tau = -4/5 + n/2 - (i+1)/(2M) - \gamma_4 - (n-1)\varepsilon_1$ и $\sigma = \sigma_9$. Тогда

$$2\tau + 4(\tau - \sigma_9 + 1) + 2 = n + 2/5 + 4p_1 - (i+1)/M - 2\gamma_4 - 6(n-1)\varepsilon_1.$$

Поскольку $(i+1)/M \le 1$ и $2p_1 \ge l_2 a^{-1} + p_1 \ge n/2 - 1/4$, то правая часть в уравнении, записанном выше, превосходит $2n - 11/10 - 2\gamma_4 - 6(n-1)\varepsilon_1$. Выберем $\gamma_4 + 3(n-1)\varepsilon_1 < 1/10$, тогда для $\delta < 7/10$ получаем противоречие с неравенством $2\tau + 4(\tau - \sigma_9 - 1) + 2 < 2(n-1) + \delta$ из леммы 3.8. Если многочлены R_i пропорциональны или R_i приводимы, то доказательство этих случаев можно найти в [14], что и завершает доказательство случая (3.63).

Далее, если

$$3/2 - \epsilon/4 < p_1 + l_2 a^{-1} \le n/2 - 1/4 \tag{3.66}$$

для $n \ge 4$, то зафиксируем любое достаточно большое целое число H и разобьем множество K_0 на квадраты K_j со стороной $H^{-l_2/a}$. Число таких квадратов $\ll H^{2l_2/a}$. Пусть квадрат K_j содержит H^{θ_2} многочленов. Тогда,

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n''(\mathbf{1})} \mu_2 B(P) \ll \sum_{H=1}^{\infty} H^{\theta_2 + 2l_2/a + 2(p_1 - 1)} \Psi^2(H) \ll \sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2} \Psi^2(H) H^{\theta_2 - n + 2l_2/a + 2p_1}. \tag{3.67}$$

Ряд (3.67) будет сходиться при $\theta_2 \le u$, $u = n - 2l_2/a - 2p_1$. Поэтому по лемме Бореля–Кантелли множество тех z, которые принадлежат бесконечному числу $B(P)$, имеет меру нуль. Из условия (3.66) получаем, что $u \ge 1/2$ и нам остается рассмотреть случай, когда $\theta_2 > u$. Доказательство теоремы здесь аналогично доказательству предложения 2 из [14]. В заключении, для $n \ge 3$, если $\epsilon \le p_1 + l_2 a^{-1} \le 3/2 - \epsilon/4$ и $0 \le p_1 + l_2 a^{-1} < \epsilon$, тогда доказательство совпадает с доказательством предложения 3 и предложения 4 из [14] соответственно.

3.5 Совместные приближения для полиномиальных кривых в $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{p_1} \times \ldots \times \mathbb{Q}_{p_{t-1}}$

Для доказательсва теоремы 3.4. понадобятся следующие вспомогательные результаты.

Пусть $P \in \mathcal{P}_n$. Для комплексного корня α и корней $\gamma^{(i)} \in \mathbb{Q}_{p_i}^*, i = 1, \ldots, t-1$, многочлена P, где $\mathbb{Q}_{p_i}^*$ – наименьшее поле, содержащее $\mathbb{Q}_{p_i}$ и все алгебраические числа, определим множества

$$\begin{aligned} S_P(\alpha) &= \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| = \min\nolimits_{\alpha' \in \mathbb{C}:\, P(\alpha')=0} |x - \alpha'|\}, \\ T_{P,i}(\gamma^{(i)}) &= \{w_i \in \mathbb{Q}_{p_i} : |w_i - \gamma^{(i)}|_{p_i} = \min\nolimits_{\gamma_0^{(i)} \in \mathbb{Q}_{p_i}^*:\, P(\gamma_0^{(i)})=0} |w_i - \gamma_0^{(i)}|_{p_i}\} \end{aligned}$$

для $1 \leq i \leq t-1$. Таким образом, если $\mathbf{x} \in S_P(\alpha) \times T_{P,1}(\gamma^{(1)}) \times \ldots \times T_{P,t-1}(\gamma^{(t-1)})$, то ближайшим t-набором корней многочлена P к точке $\mathbf{x}$ является $(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)})$.

Нижеприведенная лемма является частным случаем результата [133].

Лемма 3.9. *Обозначим через $v_n(\mathbf{x})$ точную верхнюю грань множества действительных чисел $v > 0$, для которых неравенство*

$$|P(x)| \prod_{i=1}^{t-1} |P(w_i)|_{p_i} < H^{-v}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P \in \mathcal{P}_n(H)$. Тогда для почти всех $\mathbf{x} \in \Lambda$ имеем $v_n(\mathbf{x}) = n$.

Следующий результат – это вариация теоремы 1.3 [116]. Пусть $\mathbf{f} : U \to \Lambda^n$ – невырожденное аналитическое отображение и $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_\infty(x), f_{p_1}(w_1), \ldots, f_{p_{t-1}}(w_{t-1}))$. Рассмотрим отображения $f_\infty(x) = (x, x^2, \ldots, x^n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $f_{p_i}(w_i) = (w_i, w_i^2, \ldots, w_i^n) : \mathbb{Q}_{p_i} \to \mathbb{Q}_{p_i}^n$, $i = 1, \ldots, t-1$. Используя обозначения теоремы, выберем $T_1 = \ldots = T_n = T$.

Лемма 3.10. *Пусть $U \subset \Lambda$. Для любой точки $\mathbf{x} \in U$ существует окрестность $V = V_\infty \times V_{p_1} \times \ldots \times V_{p_{t-1}} \subseteq U$ и постоянная $\lambda > 0$, обладающие следующим свойством: для любого множества $B \subset V$ существует постоянная $E > 0$ такая, что для любых выбранных действительных чисел $\delta, K_\infty, K_{p_1}, \ldots, K_{p_{t-1}}, T$, удовлетворяющих неравенствам*

$$0 < \delta \leq 1, \quad T \geq 1, \quad K_\infty, K_{p_1}, \ldots, K_{p_{t-1}} > 0, \quad \delta^t T^{n-1} K_{p_1} \cdots K_{p_{t-1}} \leq 1,$$

мера множества

$$\left\{ \mathbf{x} \in B : \exists P \in \mathcal{P}_n \ \ \textit{такой, что} \ \ \begin{array}{l} |P(x)| < \delta, \\ |P(w_i)|_{p_i} < \delta, \ \ i = 1, \ldots, t-1, \\ |P'(x)| < K_\infty, \\ |P'(w_i)|_{p_i} < K_{p_i}, \\ H(P) < T \end{array} \right\}$$

не превосходит $E\epsilon_0^\lambda \mu_4(B)$, где $\epsilon_0 = \max\{\delta, \left(\delta^t T^{n-1} K_\infty K_{p_1} \cdots K_{p_{t-1}}\right)^{\frac{1}{t(n+1)}}\}$.

Прежде всего отметим, что поскольку ряд $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\Psi^t(h)$ сходится, то $h^{n-1}\Psi^t(h)$ стремится к 0 при $h \to \infty$. Поэтому можем предполагать, что $h^{n-1}\Psi^t(h) = o(1)$ и справедлива оценка

$$\Psi(h) = o(h^{\frac{-n+1}{t}}). \tag{3.68}$$

Следовательно, $\Psi(h) < \Psi_0(h) := h^{\frac{-n+1}{t}}$ для всех, за исключением конечного числа, $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 3.4. Возьмем $\mathbf{x}_0 \in U$. Выберем окрестность $V \subseteq U$ точки $\mathbf{x}_0$ и положительное число λ как в лемме 3.10. Рассмотрим шар $B = B_\infty \times \prod_{i=1}^{t-1} B_{p_i} \subset V$, содержащий точку $\mathbf{x}_0$. Поскольку открытое множество U можно представить как объединение конечного или счетного числа шаров B, то достаточно доказать, что $\mu_4(B \cap \mathcal{K}_n(\Psi)) = 0$.

Для каждого многочлена $P \in \mathcal{P}_n(H)$ обозначим через $K(P,\Psi)$ следующее множество

$$K(P,\Psi) = \{\mathbf{x} \in B : |P(x)| < \Psi(H),\ |P(w_i)|_{p_i} < \Psi(H),\ i = 1,\dots,t-1\}.$$

Пусть $\epsilon > 0$ – достаточно малое число и $0 < \beta < 1/8 - t\epsilon$ (см. ниже). Далее пусть

$$K_{\geq H}(P,\Psi) = \{\mathbf{x} \in K(P,\Psi) : |P'(x)| \geq H^{-\epsilon-\beta}, |P'(w_i)|_{p_i} \geq H^{-1-\epsilon-\beta}, 1 \leq i \leq t-1\},$$

$$K_{<H}(P,\Psi) = K(P,\Psi) \setminus K_{\geq H}(P,\Psi).$$

Сначала исследуем множество точек $\mathbf{x} \in B$, принадлежащих бесконечному числу множеств $K_{<H}(P,\Psi)$ для $H \in \mathbb{N}$. Аналогично, для $P \in \mathcal{P}_n$ определим множество $K_{<H(P)}(P,\Psi_0)$. Для любого $r \in \mathbb{N}$, пусть

$$\bar{K}_{<r} = \cup_{P \in \mathcal{P}_n :\, 2^r \leq H(P) < 2^{r+1}} K_{<H(P)}(P,\Psi_0).$$

Множество $\bar{K}_{<r}$ можно записать в виде

$$\bar{K}_{<r} = K_{<r,\infty} \cup K_{<r,p_1} \cup \ldots \cup K_{<r,p_{t-1}},$$

где каждое множество $K_{<r,*}$ содержится в множестве, определенном в лемме 3.10 с $\delta = 2^{\frac{-(n-1)r}{t}}$, $T = 2^{r+1}$ и

$$\begin{array}{lll} \text{для } K_{<r,\infty}: & K_\infty = 2^{-r(\epsilon+\beta)}, & K_{p_i} = 1,\ i = 1,\dots,t-1, \\ \text{для } K_{<r,p_j}: & K_\infty = 2^{r+1}, & K_{p_j} = 2^{-r(1+\epsilon+\beta)},\ K_{p_i} = 1,\ i \neq j,\ 1 \leq i \leq t-1. \end{array}$$

Согласно лемме 3.10 и выбору множеств V и B, получаем $\mu_4(\bar{K}_{<r}) \ll 2^{\frac{-(\epsilon+\beta)\lambda r}{t(n+1)}}$. Таким образом, сумма мер множеств $\bar{K}_{<r}$ по всем $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ конечна. Применяя лемму Бореля-Кантелли и учитывая факт, что

$$\limsup_{H\to\infty} \cup_{P\in\mathcal{P}_n(H)} K_{<H}(P,\Psi) \subset \limsup_{H\to\infty} \cup_{P\in\mathcal{P}_n(H)} K_{<H}(P,\Psi_0) = \limsup_{r\to\infty} \bar{K}_{<r}$$

получаем $\mu_4(\cap_{h=1}^\infty \cup_{H=h}^\infty \cup_{P\in\mathcal{P}_n(H)} K_{<H}(P,\Psi)) = 0$.

Далее исследуем множество точек $\mathbf{x} \in B$, принадлежащих бесконечному числу множеств $K_{\geq H}(P,\Psi)$ для $H \in \mathbb{N}$. Для фиксированного многочлена $P \in \mathcal{P}_n(H)$ разделим область изменения значений $|P'(x)|$ и $|P'(w_i)|_{p_i}$ на части вида:

$$\begin{array}{lcll} H^{(k-1)\epsilon} & \leq & |P'(x)| & < H^{k\epsilon}, \\ H^{-l_i\epsilon} & \leq & |P'(w_i)|_{p_i} & < H^{-(l_i-1)\epsilon}, \end{array} \tag{3.69}$$

где $k, l_i \in \mathbb{Z}$, $[-\beta/\epsilon] \le k \le [\epsilon^{-1}]$, $1 \le l_i \le [\epsilon^{-1}] + [\beta/\epsilon] + 1$, $i = 1, \dots, t-1$. Поскольку $x \in U_\infty$ и $w_i \in U_{p_i}$, $i = 1, \dots, t-1$, то $|P'(x)| \ll H$ и $|P'(w_i)|_{p_i} \ll 1$. Поэтому, если $k \ge [\epsilon^{-1}] + 1$ или $l_i \le 0$, то соответствующий элемент разбиения пуст при $H \ge H_0(n)$. Следовательно, число различных t-наборов $(k, l_1, \dots, l_{t-1})$ конечно. Поэтому для фиксированного многочлена $P \in \mathcal{P}_n(H)$ полагаем, что $\sigma_*(P)$ – множество точек $\mathbf{x} \in K_{\ge H}(P, \Psi)$, удовлетворяющих условию (3.69) для фиксированного t-набора $(k, l_1, \dots, l_{t-1})$.

Далее доказательство разбивается на два случая в зависимости от значения величины $(k - \sum_{i=1}^t (l_i - 1))\epsilon$. Выражение $(k - \sum_{i=1}^t (l_i - 1))\epsilon$ – это показатель степени числа H из верхней границы для произведения $|P'(x)| \prod_{i=1}^{t-1} |P'(w_i)|_{p_i}$. Если $\mathbf{x} \in B \cap \mathcal{K}_n(\Psi)$, то существует бесконечно много многочленов, удовлетворяющих по крайней мере одному из условий для $(k - \sum_{i=1}^t (l_i - 1))\epsilon$ и условию (3.3). Таким образом, теорема будет доказана, если покажем, что в каждом из случаев $\mu_4(B \cap \mathcal{K}_n(\Psi)) = 0$.

Случай I: $(k - \sum_{i=1}^t (l_i - 1))\epsilon \le -\beta$**.** В данном случае докажем следующее предложение.

Предложение 3.1. *Пусть условие (3.69) выполняется для* $\mathbf{x} \in \sigma_*(P)$ *и* $(k - \sum_{i=1}^t (l_i - 1))\epsilon \le -\beta$. *Тогда мера множества точек* $\mathbf{x} \in B$*, принадлежащих бесконечному числу* $\sigma_*(P)$*, равна нулю.*

Доказательство. Для $r \in \mathbb{N}$ и $\beta > 0$ и фиксированного t-набора $(k, l_1, \dots, l_{t-1})$ обозначим через $\mathcal{A}(r)$ множество точек $\mathbf{x} \in B$, для которых существует многочлен $P \in \mathcal{P}_n$ такой, что выполнена система неравенств

$$\begin{gathered} |P(x)| < H(P)^{\frac{-n+1}{t}}, \quad |P'(x)| < H(P)^{k\epsilon}, \\ |P(w_i)|_{p_i} < H(P)^{\frac{-n+1}{t}}, \quad |P'(w_i)|_{p_i} < H(P)^{-(l_i-1)\epsilon}, \ i = 1, \dots, t-1, \end{gathered} \tag{3.70}$$

где $2^r \le H(P) < 2^{r+1}$ и $(k - \sum_{i=1}^{t-1} (l_i - 1))\epsilon \le -\beta$. Пусть $P_n^r := \{P \in \mathcal{P}_n, 2^r \le H(P) < 2^{r+1}\}$, тогда $\cup_{P \in P_n^r} \sigma_*(P) \subset \mathcal{A}(r)$. Каждое множество $\mathcal{A}(r)$ содержится в множестве, определенном в лемме 3.10 с $\delta = 2^{\frac{-(n-1)r}{t}}$, $T = 2^{r+1}$ и

$$\begin{aligned} &\text{для } k \le 0: \ K_\infty = 2^{k\epsilon r}, \qquad K_{p_i} = 2^{-(l_i-1)\epsilon r}, \ i = 1, \dots, t-1, \\ &\text{для } k > 0: \ K_\infty = 2^{k\epsilon(r+1)}, \ K_{p_i} = 2^{-(l_i-1)\epsilon r}, \ i = 1, \dots, t-1. \end{aligned}$$

Согласно лемме 3.10 в обоих случаях получаем $\mu_4(\mathcal{A}(r)) \ll 2^{\frac{-\beta\lambda r}{t(n+1)}}$. Множество точек $\mathbf{x} \in B$, для которых существует бесконечно много многочленов $P \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих (3.70), состоит из точек $\mathbf{x} \in B$, принадлежащих бесконечному числу множеств $\mathcal{A}(r)$. Ряд $\sum_{r=0}^\infty \mu_4(\mathcal{A}(r))$ сходится, и лемма Бореля-Кантелли завершает первую часть доказательства. Далее, принимая во внимание условие (3.68), завершаем доказательство предложения.

Случай II: $(k - \sum_{i=1}^t (l_i - 1))\epsilon > -\beta$**.** Для каждого многочлена $P \in \mathcal{P}_n(H)$ при фиксированном наборе $(k, l_1, \dots, l_{t-1})$ определим множество $\sigma'_*(P)$ как множество точек $\mathbf{x} \in K_{\geq H}(P,\Psi) \cap \sigma_*(P)$, удовлетворяющих условию $(k - \sum_{i=1}^{t}(l_i - 1))\epsilon > -\beta$. Далее, используя (1.13), для многочлена P с корнями $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\gamma^{(i)} \in \mathbb{Q}_{p_i}^*$, $i = 1,\ldots,t-1$, определим параллелепипед

$$\begin{cases} |x-\alpha| \ll \Psi(H)|P'(x)|^{-1}, \\ |w_i - \gamma^{(i)}|_{p_i} \ll \Psi(H)|P'(w_i)|_{p_i}^{-1}, \ \ i = 1,\ldots,t-1 \end{cases} \tag{3.71}$$

для $\mathbf{x} \in \sigma_*'(P) \cap S_P(\alpha) \times T_{P,1}(\gamma^{(1)}) \times \ldots \times T_{P,(t-1)}(\gamma^{(t-1)})$, $P'(x) \neq 0$ и $|P'(w_i)|_{p_i} \neq 0$, $i = 1,\ldots,t-1$. Используя разложение P' в ряд Тейлора в окрестности корней α и $\gamma^{(i)}$, нетрудно показать, что при $n \geq 3t+1$ значения производной P' в корнях α и $\gamma^{(i)}$ соизмеримы со значениями производной P' в точках $\mathbf{x} \in \sigma_*'(P) \cap S_P(\alpha) \times T_{P,1}(\gamma^{(1)}) \times \ldots \times T_{P,(t-1)}(\gamma^{(t-1)})$. Покажем это на примере действительной переменной. Используя (3.69) и (3.71), получаем

$$\begin{aligned} &|P'(x)| < H^{k\epsilon}, \\ &|P^{(j)}(\alpha)||x-\alpha|^{j-1} \ll H^{1-(j-1)((k-1)\epsilon+(n-1)/t)} < |P'(x)|H^{-\eta}, \ 2 \leq j \leq n, \end{aligned} \tag{3.72}$$

для некоторой постоянной $\eta > 0$ и $n \geq 2t+1$. Таким образом, $H^{(k-1)\epsilon}/2 < |P'(\alpha)| < 2H^{k\epsilon}$. Проведя аналогичные рассуждения для $|P'(\gamma^{(i)})|_{p_i}$, $i = 1,\ldots,t-1$, получим

$$H^{-l_i\epsilon} \leq |P'(\gamma^{(i)})|_{p_i} < H^{-(l_i-1)\epsilon} \ \text{ для } \ n \geq 3t+1.$$

Следовательно, параллелепипед (3.71) содержится в параллелепипеде $\sigma(\alpha,\gamma^{(1)},\ldots,\gamma^{(t-1)},P)$, задаваемом неравенствами:

$$\begin{cases} |x-\alpha| \ll \Psi(H)|P'(\alpha)|^{-1}, \\ |w_i - \gamma^{(i)}|_{p_i} \ll \Psi(H)|P'(\gamma^{(i)})|_{p_i}^{-1}, \ \ i = 1,\ldots,t-1. \end{cases} \tag{3.73}$$

Перейдем от разбиения (3.69) к разбиению

$$\begin{array}{lcl} H^{(k-1)\epsilon}/2 \ < \ |P'(\alpha)| & < & 2H^{k\epsilon}, \\ H^{-l_i\epsilon} \ \leq \ |P'(\gamma^{(i)})|_{p_i} & < & H^{-(l_i-1)\epsilon} \end{array} \tag{3.74}$$

с почти теми же границами разбиения, что и в (3.69). Далее полагаем, что A_P – множество наборов корней $(\alpha,\gamma^{(1)},\ldots,\gamma^{(t-1)})$ многочлена $P \in \mathcal{P}_n(H)$, удовлетворяющих условиям (3.74) для фиксированного t-набора $(k,l_1,\ldots,l_{t-1})$ такого, что $(k - \sum_{i=1}^{t}(l_i-1))\epsilon > -\beta$. Тогда имеем включение $\sigma_*'(P) \subset \cup_{(\alpha,\gamma^{(1)},\ldots,\gamma^{(t-1)}) \in A_P} \sigma(\alpha,\gamma^{(1)},\ldots,\gamma^{(t-1)},P)$. Далее доказательство разбивается на два случая в зависимости от размера величины $|P'(\alpha)| \prod_{i=1}^{t-1} |P'(\gamma^{(i)})|_{p_i}$. Дополнительно определим два множества наборов корней многочлена P:

$$\begin{aligned} &A_{P,1} = \{(\alpha,\gamma^{(1)},\ldots,\gamma^{(t-1)}) \in A_P : -\beta < (k - \textstyle\sum_{i=1}^{t}(l_i-1))\epsilon < 1 - 3t\epsilon - 4\beta\}, \\ &A_{P,2} = \{(\alpha,\gamma^{(1)},\ldots,\gamma^{(t-1)}) \in A_P : k - \textstyle\sum_{i=1}^{t-1}(l_i-1))\epsilon > 1/2 + t\epsilon\}. \end{aligned}$$

Предложение 3.2. *Пусть* $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\Psi^t(H) < \infty$. *Тогда множество точек* $\mathbf{x} \in B$, *удовлетворяющих условиям*

$$\mathbf{x} \in S_P(\alpha) \times T_{P,1}(\gamma^{(1)}) \times \ldots \times T_{P,t-1}(\gamma^{(t-1)}), \ \ (\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}) \in A_{P,1},$$
$$|P(x)| < \Psi(H), \ \ |P(w_i)|_{p_i} < \Psi(H), \ 1 \le i \le t-1$$

для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n$, *имеет меру нуль.*

Доказательство. Для каждого многочлена $P \in \mathcal{P}_n(H)$ с корнями $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\gamma^{(i)} \in \mathbb{Q}^*_{p_i}$ такими, что $(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}) \in A_{P,1}$, определим параллелепипед $\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P) \supset \sigma(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P)$ как множество точек $\mathbf{x} \in \sigma_*(P) \cap S_P(\alpha) \times T_{P,1}(\gamma^{(1)}) \times \ldots \times T_{P,t-1}(\gamma^{(t-1)})$, удовлетворяющих при $H > H_0(n)$ неравенствам:

$$\begin{cases} |x-\alpha| \ll H^{u_1}|P'(\alpha)|^{-1}, \\ |w_i - \gamma^{(i)}|_{p_i} \ll H^{-u_2^{(i)}}|P'(\gamma^{(i)})|_{p_i}^{-1}, \ \ i = 1, \ldots, t-1, \end{cases} \tag{3.75}$$

для некоторых действительных чисел u_1 и $u_2^{(i)}$, которые будут выбраны позднее. Параллелепипед $\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P)$ является нетривиальным расширением $\sigma(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P)$, если выполняются следующие неравенства

$$u_1 > \frac{1-n}{t}, \ \ u_2^{(i)} < \frac{n-1}{t}, \ \ u_2^{(i)} > l_i\epsilon, \ \ i = 1, \ldots, t-1. \tag{3.76}$$

Пусть $\delta_1, \delta_2, \delta_3^{(i)}, \delta_4^{(i)} > 0$, $i = 1, \ldots, t-1$. Разложим многочлен $P(t)$ в ряд Тейлора для каждой точки $\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P)$ и оценим сверху $|P(x)|$ и $|P(w_i)|_{p_i}$. Покажем это на примере действительной переменной. Используя (3.69) и (3.75), оценим каждый член разложения сверху

$$|P'(\alpha)||x-\alpha| \ll H^{u_1},$$
$$1/j!|P^{(j)}(\alpha)||x-\alpha|^j \ll H^{1+j(u_1-(k-1)\epsilon)}, \ \ 2 \le j \le n.$$

Тогда получаем

$$|P(x)| \ll H^{u_1+\delta_1} \tag{3.77}$$

на $\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P)$ при $u_1 < 2(k-1)\epsilon + \delta_1 - 1$ и $u_1 < (k-1)\epsilon$. Используя аналогичные рассуждения для $|P(w)|_{p_i}$, $i = 1, \ldots, t-1$, и оценки $|j!^{-1}|_{p_i} \le {p_i}^j$, получим, что следующие неравенства справедливы на $\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P)$:

$$|P(w_i)|_{p_i} \ll H^{-u_2^{(i)}+\delta_3^{(i)}} \tag{3.78}$$

при $u_2^{(i)} > l_i\epsilon$ и $u_2^{(i)} > 2l_i\epsilon - \delta_3^{(i)}$.

Точно также как и выше, оценим $P'(x) = \sum_{i=1}^{n}(i!)^{-1}P^{(i)}(\alpha)(x-\alpha)^{i-1}$ на $\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P)$, используя (3.69) и (3.75). Оценивая каждый член разложения в ряд Тейлора, получим

$$|P'(\alpha)| \ll H^{k\epsilon},$$
$$|P^{(i)}(\alpha)||x-\alpha|^{i-1} \ll H^{1+(i-1)(u_1-(k-1)\epsilon)}, \ \ 2 \le i \le n.$$

Откуда следует, что на $\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t-1)}, P)$ справедливо неравенство:

$$|P'(x)| \ll H^{k\epsilon+\delta_2} \tag{3.79}$$

при $u_1 < 2k\epsilon - \epsilon - 1 + \delta_2$ и $u_1 < (k-1)\epsilon$. Аналогично нетрудно проверить, что при $u_2^{(i)} > l_i\epsilon$ и $u_2^{(i)} > 2l_i\epsilon - \epsilon - \delta_4^{(i)}$ выполняются неравенства

$$|P'(w_i)|_{p_i} \ll H^{-(l_i-1)\epsilon+\delta_4^{(i)}} \tag{3.80}$$

на $\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t-1)}, P)$.

Объединяя все вышеприведенные оценки для u_1, $u_2^{(i)}$, получаем

$$-1 + t\epsilon < \sum_{i=1}^{t-1} u_2^{(i)} - u_1 < n - 1 \tag{3.81}$$

при $\delta_2 \geq \delta_1 - \epsilon$ и $\delta_3^{(i)} \geq \delta_4^{(i)} + \epsilon$, $i = 1, \dots, t-1$.

Во-первых, рассмотрим многочлены $P \in \mathcal{P}_n(H)$ такие, что $|a_j| = H$ для некоторого $j \geq 2$. Многочлены из $\mathcal{P}_n(H)$ разобьем на множества, имеющие одинаковые коэффициенты при $x^2, \dots, x^n$. Зафиксируем вектор $b_1 = (a_n, a_{n-1}, \dots, H, \dots, a_2)$, и обозначим через $\mathcal{P}_{b_1}(H)$ множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n(H)$, у которых коэффициенты при x^i равны a_i, $i = 2, \dots, n$. Отметим, что число векторов b_1 не превосходит $c(n)H^{n-2}$. Далее воспользуемся методом существенных и несущественных областей Спринджука (см. [40]). Параллелепипед $\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t-1)}, P)$ назовем *существенным*, если

$$\mu_4(\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t-1)}, P) \cap \sigma_1(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}^{(1)}, \dots, \tilde{\gamma}^{(t-1)}, \tilde{P})) < \frac{1}{2}\mu_4(\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t-1)}, P))$$

для всех многочленов $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{b_1}(H)$, $\tilde{P} \neq P$, и всех наборов корней $(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}^{(1)}, \dots, \tilde{\gamma}^{(t-1)}) \in A_{\tilde{P},1}$ многочлена $\tilde{P}$. С другой стороны, если существует $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{b_1}(H)$, $\tilde{P} \neq P$, такой, что

$$\mu_4(\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t-1)}, P) \cap \sigma_1(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}^{(1)}, \dots, \tilde{\gamma}^{(t-1)}, \tilde{P}))) \geq \frac{1}{2}\mu_4(\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t-1)}, P)), \tag{3.82}$$

то параллелепипед $\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t-1)}, P)$ назовем *несущественным*. Если $\mathbf{x}$ принадлежит бесконечному числу параллелепипедов $\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t-1)}, P)$, то $\mathbf{x}$ принадлежит бесконечному числу существенных или/и несущественных параллелепипедов $\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t-1)}, P)$.

Сначала рассмотрим существенные параллелепипеды $\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t-1)}, P)$. Поскольку точка $\mathbf{x}$ принадлежит не более чем двум существенным параллелепипедам, то

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{b_1}(H)} \sum_{\substack{(\alpha, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t-1)}) \in A_{P,1} \\ \sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t-1)}, P) \text{ существенный}}} \mu_4(\sigma_1(\alpha, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t-1)}, P)) \ll 1.$$

Из (3.71) и (3.75) следует, что

$$\mu_4(\sigma(\alpha,\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(t-1)},P)) \ll \mu_4(\sigma_1(\alpha,\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(t-1)},P))H^{-u_1+\sum_{i=1}^{t-1}u_2^{(i)}}\Psi^t(H).$$

Поскольку число классов $\mathcal{P}_{b_1}(H)$ не превосходит $c(n)H^{n-2}$, то из двух последних оценок получаем

$$\sum_{H=1}^{\infty}\sum_{b_1}\sum_{P\in\mathcal{P}_{b_1}(H)}\sum_{\substack{(\alpha,\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(t-1)})\in A_{P,1}\\ \sigma_1(\alpha,\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(t-1)},P)\ \text{сущ.}}}\mu_4(\sigma(\alpha,\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(t-1)},P)) \ll \sum_{H=1}^{\infty}H^{n-2-u_1+\sum_{i=1}^{t-1}u_2^{(i)}}\Psi^t(H).$$

Последний ряд сходится, если

$$\sum_{i=1}^{t-1}u_2^{(i)}-u_1\le 1, \tag{3.83}$$

и доказательство в случае существенных параллелепипедов может быть завершено, используя лемму Бореля-Кантелли. Согласно (3.81), мы можем выбрать параметры u_1 и $u_2^{(i)}$, удовлетворяющие (3.83).

Далее рассмотрим несущественные множества, поэтому полагаем, что $\sigma_1(\alpha,\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(t-1)},P)$ – несущественный параллелепипед. Тогда существует многочлен $\tilde{P}\in\mathcal{P}_{b_1}(H)$ такой, что выполняется неравенство (3.82). Пусть $R_1(f)=P(f)-\tilde{P}(f)=m_1f+m_0$, тогда согласно (3.77)–(3.80) многочлен R_1 удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}&|R_1(x)|\ll H^{u_1+\delta_1}, && |R_1'(x)|\ll H^{k\epsilon+\delta_2},\\ &|R_1(w_i)|_{p_i}\ll H^{-u_2^{(i)}+\delta_3^{(i)}}, && |R_1'(w_i)|_{p_i}\ll H^{-(l_i-1)\epsilon+\delta_4^{(i)}},\ i=1,\dots,t-1,\end{aligned} \tag{3.84}$$

на $\sigma_1(\alpha,\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(t-1)},P)\cap\sigma_1(\tilde{\alpha},\tilde{\gamma}^{(1)},\dots,\tilde{\gamma}^{(t-1)},\tilde{P})$. Откуда следует, что $|m_j|\ll H^{k\epsilon+\delta_2}$ при $u_1<k\epsilon-\delta_1+\delta_2$ и $|m_j|_{p_i}<H^{-(l_i-1)\epsilon+\delta_4^{(i)}}$ при $u_2^{(i)}>(l_i-1)\epsilon+\delta_3^{(i)}-\delta_4^{(i)}$, $i=1,\dots,t-1$, и $j=0,1$.

Предположим, что числа r_i определяются неравенствами ${p_i}^{r_i}\le H<{p_i}^{r_i+1}$, $i=1,\dots,t-1$. Используя неравенства $|m_j|\ge\prod_{i=1}^{t-1}|m_j|_{p_i}^{-1}\gg H^{\sum_{i=1}^{t-1}((l_i-1)\epsilon-\delta_4^{(i)})}$, $j=0,1$, получаем

$$m_1\asymp\prod_{i=1}^{t-1}{p_i}^{[((l_i-1)\epsilon-\delta_4^{(i)})r_i]}s_1,\quad m_0\asymp\prod_{i=1}^{t-1}{p_i}^{[((l_i-1)\epsilon-\delta_4^{(i)})r_i]}s_0,$$

где $s_0,s_1\in\mathbb{Z}$. Следовательно, многочлен $R_1(f)$ можем записать в виде $m_1f+m_0\asymp\prod_{i=1}^{t-1}{p_i}^{[((l_i-1)\epsilon-\delta_4^{(i)})r_i]}(s_1f+s_0)$. Пусть $R_2(f)=s_1f+s_0$. Тогда

$$H(R_2)=\max\{|s_1|,|s_0|\}\ll|m_j|/\prod_{i=1}^{t-1}{p_i}^{[((l_i-1)\epsilon-\delta_4^{(i)})r_i]}\asymp H^{k\epsilon-\sum_{i=1}^{t-1}(l_i-1)\epsilon+\delta_2+\sum_{i=1}^{t-1}\delta_4^{(i)}}.$$

Из последней оценки для высоты $H(R_2)$ и (3.84) получаем

$$|s_1x+s_0|\ll H^{u_1+\delta_1}\prod_{i=1}^{t-1}{p_i}^{[(-(l_i-1)\epsilon+\delta_4^{(i)})r_i]}\ll H(R_2)^{\frac{u_1+\delta_1-\sum_{i=1}^{t-1}(l_i-1)\epsilon+\sum_{i=1}^{t-1}\delta_4^{(i)}}{k\epsilon-\sum_{i=1}^{t-1}(l_i-1)\epsilon+\delta_2+\sum_{i=1}^{t-1}\delta_4^{(i)}}},$$

и

$$|s_1 w_i + s_0|_{p_i} \ll H^{-u_2^{(i)}+\delta_3^{(i)}} p_i^{[((l_i-1)\epsilon-\delta_4^{(i)})r_i]} \ll H(R_2)^{\frac{-u_2^{(i)}+\delta_3^{(i)}+(l_i-1)\epsilon-\delta_4^{(i)}}{k\epsilon-\sum_{i=1}^{t-1}(l_i-1)\epsilon+\delta_2+\sum_{i=1}^{t-1}\delta_4^{(i)}}}$$

для $i = 1, \dots, t-1$. Далее воспользуемся леммой 3.9, чтобы показать, что мера множества точек $\mathbf{x}$, принадлежащих бесконечному числу несущественных параллелепипедов, равна нулю. В данном случае, лемма 3.9 даст требуемый результат при условии, что выполняется следующее неравенство:

$$\frac{\sum_{i=1}^{t-1} u_2^{(i)} - u_1 - \delta_1 - \sum_{i=1}^{t-1}\delta_3^{(i)}}{k\epsilon - \sum_{i=1}^{t-1}(l_i-1)\epsilon + \delta_2 + \sum_{i=1}^{t-1}\delta_4^{(i)}} > 1. \tag{3.85}$$

Пусть $\delta_2 \geq \delta_1 - \epsilon$, тогда $u_1 < 2(k-1)\epsilon + \delta_1 - 1$ при $[-\beta/\epsilon] \leq k \leq 1 + [\epsilon^{-1}] - [\delta_1/\epsilon]$ и $u_1 < (k-1)\epsilon$ при $1 + [\epsilon^{-1}] - [\delta_1/\epsilon] < k \leq [\epsilon^{-1}]$. Аналогично, пусть $\delta_3^{(i)} \geq \delta_4^{(i)} + \epsilon$, тогда $u_2^{(i)} > 2l_i\epsilon - \epsilon - \delta_4^{(i)}$ при $[\delta_3^{(i)}/\epsilon] \leq l_i \leq [\epsilon^{-1}] + [\beta/\epsilon] + 1$ и $u_2^{(i)} > (l_i-1)\epsilon + \delta_3^{(i)} - \delta_4^{(i)}$ при $1 \leq l_i < [\delta_3^{(i)}/\epsilon]$, $i = 1, \dots, t-1$. Далее, выберем δ_1 и $\delta_4^{(i)}$, $i = 1, \dots, t-1$, так, что $(t+1)\epsilon < \delta_1 + \sum_{i=1}^{t-1}\delta_4^{(i)}$. Тогда из последних неравенств и (3.83) получаем

$$(k - \sum_{i=1}^{t-1}(l_i - 1))\epsilon > \max\{-\beta, -1 + t\epsilon\} = -\beta \tag{3.86}$$

для $\beta \leq 1 - t\epsilon$, где $\beta = (\delta_1 + \sum_{i=1}^{t-1}\delta_4^{(i)} - (t+1)\epsilon)/2 > 0$. Используя неравенство $\delta_2 \geq \delta_1 - \epsilon$ и (3.86), оценим знаменатель в (3.85):

$$k\epsilon - \sum_{i=1}^{t-1}(l_i-1)\epsilon + \delta_2 + \sum_{i=1}^{t-1}\delta_4^{(i)} > t\epsilon/2 + (\delta_2 + \sum_{i=1}^{t-1}\delta_4^{(i)})/2 > 0. \tag{3.87}$$

Поскольку $\delta_2 \geq \delta_1 - \epsilon$ и $\delta_3^{(i)} \geq \delta_4^{(i)} + \epsilon$, то из (3.83) и (3.85) следует, что

$$(k - \sum_{i=1}^{t-1}(l_i-1))\epsilon < 1 - 2(\delta_1 + \sum_{i=1}^{t-1}\delta_4^{(i)}) - (t-2)\epsilon. \tag{3.88}$$

Учитывая условия (3.76), получаем, что двойное неравенство

$$-\beta < (k - \sum_{i=1}^{t-1}(l_i-1))\epsilon < 1 - 3t\epsilon - 4\beta \tag{3.89}$$

справедливо при $n \geq 2t+1$ и $\beta < 1/3 - t\epsilon$.

Во-вторых, рассмотрим многочлены $P \in \mathcal{P}_n(H)$ такие, что $|a_0| = H$ или $|a_1| = H$. Удалим из U множество произвольно малой меры $\theta = \theta(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{t-1})$ так, чтобы в оставшейся части $U(\theta)$ выполнялись неравенства

$$|x| > \theta_0, \ \ |w_i|_{p_i} > \theta_i, \ \ \theta_i > 0, \ \ 0 \leq i \leq t-1.$$

Далее перейдем от многочлена P к многочлену вида $Q(f) = f^n P(\frac{1}{f})$. При таком преобразовании и ему обратном мера решений $\mathbf{x}$ изменяется в $c(n,\theta)$ раз. Используя оценки (3.3), $|P'(x)| \geq H^{-\epsilon-\beta}$, $|P'(w_i)|_{p_i} \geq H^{-1-\epsilon-\beta}$ и факт, что $H(P) = H(Q)$ убеждаемся, что $|Q(x)| \ll \Psi(H)$, $|Q(w_i)|_{p_i} \ll \Psi(H)$, $|P'(x)| \asymp |Q'(x)|$, $|P'(w_i)|_{p_i} \asymp |Q'(w_i)|_{p_i}$ для $1 \leq i \leq t-1$. Далее для многочленов Q используем те же рассуждения, что и для многочленов P, приведенные в первом случае.

Предложение 3.3. *Пусть* $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\Psi^t(H) < \infty$. *Тогда множество точек* $\mathbf{x} \in B$, *удовлетворяющих условиям*

$$\mathbf{x} \in S_P(\alpha) \times T_{P,1}(\gamma^{(1)}) \times \ldots \times T_{P,t-1}(\gamma^{(t-1)}),\ \ (\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}) \in A_{P,2},$$
$$|P(x)| < \Psi(H),\ \ |P(w_i)|_{p_i} < \Psi(H),\ 1 \leq i \leq t-1$$

для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n$, *имеет меру нуль.*

Доказательство. Для каждого многочлена $P \in \mathcal{P}_n(H)$ с корнями $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\gamma^{(i)} \in \mathbb{Q}_{p_i}^*$, $i = 1, \ldots, t-1$ такими, что $(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}) \in A_{P,2}$, определим параллелепипед $\sigma_2(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P)$ как множество точек $\mathbf{x} \in \sigma_*(P) \cap S_P(\alpha) \times T_{P,1}(\gamma^{(1)}) \times \ldots \times T_{P,t-1}(\gamma^{(t-1)})$, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{cases} |x - \alpha| \ll H^{u_3}|P'(\alpha)|^{-1}, \\ |w_i - \gamma^{(i)}|_{p_i} \ll H^{-u_4^{(i)}}|P'(\gamma^{(i)})|_{p_i}^{-1},\ \ i = 1, \ldots, t-1, \end{cases} \tag{3.90}$$

для некоторых действительных чисел u_3 и $u_4^{(i)}$. Ясно, что $\sigma(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P) \subset \sigma_2(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P)$ при $u_3 > \frac{1-n}{t}$ и $u_4^{(i)} < \frac{n-1}{t}$.

Разложим многочлен P в ряд Тейлора в каждой точке $\sigma_2(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P)$ в окрестности корней и оценим каждый член разложения сверху. Используя (3.69) и (3.90), получаем

$$|P(w_i)|_{p_i} \leq \max_{1 \leq j \leq n}\{|j!|_{p_i}^{-1}|P^{(j)}(\gamma^{(i)})|_{p_i}|w_i - \gamma^{(i)}|_{p_i}^j\} \ll H^{-u_4^{(i)}} \tag{3.91}$$

на $\sigma_2(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P)$ для $u_4^{(i)} > \max\{l_i\epsilon, 2l_i\epsilon\} = 2l_i\epsilon$, $i = 1, \ldots, t-1$. Аналогично, нетрудно получить, что

$$|P(x)| \ll H^{u_3} \tag{3.92}$$

на $\sigma_2(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P)$ для $u_3 < \min\{(k-1)\epsilon, 2(k-1)\epsilon - 1\} = 2(k-1)\epsilon - 1$.

Во-первых, рассмотрим многочлены $P \in \mathcal{P}_n(H)$ такие, что $|a_j| = H$ для некоторого $j \geq 1$. Зафиксируем вектор $b_2 = (a_n, a_{n-1}, \ldots, H, \ldots, a_1)$, и обозначим через $\mathcal{P}_{b_2}(H)$ множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n(H)$ с одним и тем же вектором b_2. Предположим, что многочлены $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_{b_2}(H)$ удовлетворяют условию $P - \tilde{P} \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, и преположим, что существует точка $\mathbf{x} \in \left(\cup_{(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}) \in A_{P,2}} \sigma_2(\alpha, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-1)}, P)\right) \cap$

$\left(\cup_{(\tilde{\alpha},\tilde{\gamma}^{(1)},\dots,\tilde{\gamma}^{(t-1)})\in A_{\tilde{P},2}}\sigma_2(\tilde{\alpha},\tilde{\gamma}^{(1)},\dots,\tilde{\gamma}^{(t-1)},\tilde{P})\right)$. Пусть $R_3(t) = P(t) - \tilde{P}(t) = b$, $0 \neq |b| \leq 2H$. Согласно (3.91) и (3.92) получаем, что $|b| \ll H^{u_3}$ и $|b|_{p_i} \ll H^{-u_4^{(i)}}$ для $i = 1, \dots, t-1$. С другой стороны, имеем $|b| \geq \prod_{i=1}^{t-1}|b|_{p_i}^{-1} \gg H^{\sum_{i=1}^{t-1}u_4^{(i)}}$. Таким образом, получаем противоречие при условии, что $u_3 \leq \sum_{i=1}^{t-1}u_4^{(i)}$. Следовательно, не существует таких точек $\mathbf{x}$ и справедлива оценка $\sum_{P\in\mathcal{P}_{b_2}(H)}\sum_{(\alpha,\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(t-1)})\in A_{P,2}}\mu_4(\sigma_2(\alpha,\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(t-1)},P)) \ll 1$. Поскольку число классов многочленов $\mathcal{P}_{b_2}(H)$ не превосходит $c(n)H^{n-1}$, то получаем

$$\sum_{b_2}\sum_{P\in\mathcal{P}_{b_2}(H)}\sum_{(\alpha,\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(t-1)})\in A_{P,2}}\mu_4(\sigma(\alpha,\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(t-1)},P)) \ll \Psi^t(H)H^{n-1-u_3+\sum_{i=1}^{t-1}u_4^{(i)}}.$$

По условию теоремы ряд $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi^t(H)H^{n-1}H^{-u_3+\sum_{i=1}^{t-1}u_4^{(i)}}$ сходится, если $-u_3 + \sum_{i=1}^{t-1}u_4^{(i)} \leq 0$, и, используя лемму Бореля-Кантелли, мы получаем, что множество точек $\mathbf{x}$, принадлежащих бесконечному числу множеств $\sigma(\alpha,\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(t-1)},P)$ имеет меру нуль.

Объединяя все условия для u_3 и $u_4^{(i)}$, $i = 1, \dots, t-1$, мы получаем следующую систему:

$$\begin{array}{lll} u_3 = \sum_{i=1}^{t-1}u_4^{(i)}, & u_3 < 2(k-1)\epsilon - 1, & u_4^{(i)} > 2l_i\epsilon, \\ u_3 > \frac{1-n}{t}, & u_4^{(i)} < \frac{n-1}{t}, & i = 1, \dots, t-1. \end{array} \tag{3.93}$$

Подсистема (3.93.1) эквивалентна следующему неравенству

$$(k - \sum_{i=1}^{t-1}(l_i - 1))\epsilon > 1/2 + t\epsilon. \tag{3.94}$$

Учитывая неравенства (3.93.2), получаем, что неравенство (3.94) верно при $n \geq t+1$.

Во-вторых, рассмотрим многочлены $P \in \mathcal{P}_n(H)$ такие, что $|a_0| = H$. В этом случае, как и в конце предложения 3.2, перейдем от многочленов P к многочленам вида $Q(f) = f^nP(\frac{1}{f})$, а далее проведем для многочленов Q рассуждение аналогичное вышеприведенному для P.

Замечание 3.1. *Правая часть неравенства (3.94) должна быть меньше, чем правая часть неравенства (3.89). Для выполнения этого условия, выберем параметр* β*, удовлетворяющим условию* $0 < \beta < \min\{1/8 - t\epsilon, 1/3 - t\epsilon\} = 1/8 - t\epsilon$.

4 Метрическая теория совместных неоднородных приближений

4.1 Основные результаты главы

При доказательстве гипотезы Малера Спринджуком [40], целочисленные многочлены $P \in \mathcal{P}_n$ проходили первоначально через ряд упрощающих процедур. Они разделялись на конечное число классов, в каждом из которых значения многочленов в окрестности их корней, а также значения всех производных в корне многочлена, отличались незначительно. Кроме того, сами многочлены были уже неприводимы, а модуль их старшего коэффициента не более чем в $c(n)$ раз отличался от высоты многочлена.

Если вместо многочлена P взять многочлен $P+d$ при иррациональном d, то уже одна из первых процедур – переход к неприводимым многочленам становится невозможной. Нельзя будет получить оценки снизу для дискриминанта $D(P) \neq 0$, поскольку дискриминант может принимать сколь угодно близкие к нулю значения. При $d = 0$ это была оценка $|D(P)| \geq 1$. Начиная с первых публикаций, метрические задачи с добавленными в левую часть неравенств иррациональными числами [13, 61, 126, 127], а позднее и функциями [44, 45], стали называться неоднородными задачами. О важности неоднородных задач говорит уже такой факт, что задача о приближении действительных чисел целыми алгебраическими числами приводит к исследованию малых значений многочленов вида

$$\bar{P} = x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{Z}.$$

С точки зрения диофантовых приближений, это неоднородная задача [63, 84].

Естественный способ в решении неоднородных задач в случае сходимости ряда – освободиться от величины d. Это можно сделать различными методами, наиболее общий из которых предложен в [58]. В случае расходимости ряда прямого пути, получить в точке x малые значения $\bar{P}(x)$ и большие значения $\bar{P}'(x)$, нет. В [84] предложен следующий метод. При $x_1 \in B_2 \subset I$, $\mu(B_2) > 3\mu(I)/4$, неравенство $|P(x_1)| \leq n^{-1}2^{-n-5}Q^{-n+1}$, как доказано в [49], не имеет решений в целочисленных многочленах P, $\deg P \leq n$, $H(P) \leq Q$. Следовательно, в точке x_1 выпуклое тело γK, где $K = \{(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |P(x_1)| \leq Q^{-n},\ |a_i| \leq Q,\ 1 \leq i \leq n\}$, γ – коэффициент гомотетии равный $1/8$, не содержит целой точки [49, 84]. Это означает, что для первого последовательного минимума λ_1 тела K справедливо неравенство $\lambda_1 \geq 1/8$. По теореме Минковского о последовательных минимумах [91] заключаем, что $\lambda_{n+1} \leq 8^n$ и неравенству $|P(x_1)| \leq 8^n Q^{-n}$ удовлетворяют $n+1$ линейно независимых над Q многочленов $T_1, \ldots, T_{n+1}$, $\deg T_i \leq n$, $H(T_i) \leq 8^n Q$. С помощью таких многочленов, как показано в [84], можно построить монический многочлен вида $\bar{P}$, удовлетворяющий условиям $|\bar{P}(x_1)| < c_1(n)Q^{-n}$,

$|\bar{P}'(x_1)| > c_2(n)Q$. Из корней таких многочленов, которые являются целыми алгебраическими числами, можно построить оптимальную регулярную систему. Затем, как в [49], завершить доказательство случая расходимости.

Идея указанного метода может быть перенесена и на совместные неоднородные задачи диофантовых приближений. Пусть $d_1 \in \mathbb{R}$, $d_2 \in \mathbb{C}$, $d_3 \in \mathbb{Z}_p$.

Теорема 4.1. *Пусть $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – монотонно убывающая функция. Пусть $n \geq 4$, $v_1 = v_2 = v_3 - 1 = \frac{n-4}{4}$ и $\lambda_i = \frac{1}{4}$, $i = 1, 2, 3$. Если $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) = \infty$, то для почти всех $\mathbf{u} = (x, z, w) \in T_0 \subset \Omega$ система неравенств*

$$\begin{aligned} |P(x) + d_1| &< H(P)^{-v_1}\Psi^{\lambda_1}(H(P)), \\ |P(z) + d_2| &< H(P)^{-v_2}\Psi^{\lambda_2}(H(P)), \\ |P(w) + d_3|_p &< H(P)^{-v_3}\Psi^{\lambda_3}(H(P)) \end{aligned}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P \in \mathcal{P}_n$.

Пусть $R_d = \{\boldsymbol{\nu} = (\alpha, \beta, \gamma) \in T_0 : \exists P \in \mathcal{P}'_n,\ P(\alpha) + d_1 = 0,\ P(\beta) + d_2 = 0,\ P(\gamma) + d_3 = 0\}$. Тогда для $\boldsymbol{\nu} \in R_d$ величину $H(\boldsymbol{\nu}) := \min\{H(P) |\, P \in \mathcal{P}'_n,\ P(\alpha) + d_1 = 0,\ P(\beta) + d_2 = 0,\ P(\gamma) + d_3 = 0\}$ будем рассматривать как высоту $\boldsymbol{\nu}$.

Доказательство теоремы 4.1 основано на следующей теореме, причем построение регулярной системы в неоднородном случае намного сложнее.

Теорема 4.2. *Пусть T_0 – ограниченный параллелепипед в $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Определим R как множество наборов $\boldsymbol{\nu}_P = (\alpha, \beta, \gamma)$, где α – действительный корень многочлена $P(x) + d_1$, β – комплексный корень многочлена $P(z) + d_2$, γ – p-адический корень многочлена $P(w) + d_3$, $P(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i \in \mathbb{Z}[f]$. Пусть выполнены условия*

$$w_1 + 2w_2 + w_3 = n - 2, \quad w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0,\ \ w_3 \geq 1,$$

и

$$d_x(r) = r^{-(w_1+1)},\ \ d_z(r) = r^{-(w_2+1)},\ \ d_w(r) = r^{-w_3},\ \ h(\boldsymbol{\nu}_P) = H(P).$$

Тогда $(R, h, \mathbf{d})$ – регулярная система в T_0.

Далее, используя регулярную систему $(R, h, \mathbf{d})$, доказательство теоремы 4.1 для указанных специальных значений параметров v_i и λ_i, $i = 1, 2, 3$, завершается аналогично как в разделе 2.2.3 главы 2.

В главе 4 также рассматривается задача о приближении действительных чисел корнями неоднородных многочленов в случае немонотонной функции аппроксимации. На протяжении всего раздела, d обозначает фиксированное действительное число. Определим функцию $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ и обозначим через $\mathcal{L}_{n,d}(\Psi)$ множество точек $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство

$$|P(x) + d| < \Psi(H(P))$$

выполнено для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n$.

Теорема 4.3. *Пусть $n \geq 2$ и $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – произвольная функция (необязательно монотонная) такая, что ряд $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\Psi(h)$ сходится, тогда*

$$\mu_1(\mathcal{L}_{n,d}(\Psi)) = 0.$$

В теореме 4.3 результат главы 3 (теорема 3.1) обобщен на неоднородные приближения для кривой $\mathcal{V}_n$. Отметим, что для $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ теорема 3.1 (положив $\mathbf{f} = (1, x, x^2, \ldots, x^n, d)$ и $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 1) \in \mathbb{Z}^{n+2}$) позволяет доказать, что $\mu(\mathcal{L}_{n,d}(\Psi)) = 0$ при $\sum_{h=1}^{\infty} h^n\Psi(h) < \infty$. Условие $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\Psi(h) < \infty$, сформулированное в теореме 4.3, является менее ограничительным требованием.

При доказательстве в случае большой производной воспользуемся методами главы 1. При доказательстве в случае малой производной воспользуемся неоднородным принципом переноса [58], позволяющий переносить утверждения для однородных множеств, имеющих меру нуль, на неоднородные множества.

Настоящая глава основана на работах [20, 73, 18].

4.2 Неоднородный аналог теоремы Хинчина в случае расходимости для совместных приближений

4.2.1 Общие понятия и определения

Определение 4.1. *Определим* решетку G *в* $\mathbb{R}^n$ *как дискретную подгруппу ранга n аддитивной группы $\mathbb{R}^n$. Ее* определитель $m(G)$ *– объем параллелепипеда, построенного на всем множестве образующих.*

В случае, когда G_1, G_2 – две решетки в $\mathbb{R}^n$ и $G_1 \subset G_2$, будем говорить, что G_1 – подрешетка G_2.

Определение 4.2. *Пусть $V \in \mathbb{R}^n$ – центрально-симметричное выпуклое тело и G – решетка в пространстве $\mathbb{R}^n$. Определим i-*ый последовательный минимум $\mu_i(V, G)$ тела V относительно G *как инфимум чисел $r > 0$ таких, что $rV \cap G$ содержит не менее i линейно независимых векторов.*

Теорема 4.4. *[110] Пусть $V \in \mathbb{R}^n$ – центрально-симметричное выпуклое тело и G – решетка в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\frac{2^n m(G)}{n!} \leq |V|\mu_1(V, G) \times \ldots \times \mu_n(V, G) \leq 2^n m(G).$$

Определение 4.3. *Определим* общий многочлен степени n от одной переменной $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}[X, a_n, \ldots, a_0]$ *как*

$$\mathcal{P}(X, a_n, \ldots, a_0) := a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0.$$

Замечание 4.1. *Если произвольное кольцо $\mathcal{R}$ содержит кольцо $\mathbb{Z}$ (например, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$) и $w \in \mathcal{R}$, $t \in \mathbb{N}$, то*

$$\phi_w^t(a_n, ..., a_0) := \frac{\partial^t \mathcal{P}}{\partial X^t}(w, a_n, ..., a_0) \in \mathcal{R}[a_n, ..., a_0], \tag{4.1}$$

и (4.1) является линейной формой от переменных $\underline{a} = (a_n, ..., a_0)$ с коэффициентами из $\mathcal{R}$.

4.2.2 Вспомогательные результаты в ультраметрическом пространстве

Лемма 4.1. *Пусть p_1,...,p_t – простые числа (не обязательно различные), $c_1, ..., c_t \in \mathbb{R}^+$ и $\phi_1, ...\phi_t$ – линейные формы:*

$$\phi_i(\underline{X}) = \phi(X_n, ..., X_0) = a_{i,n}X_n + ... + a_{i,0}X_0, \quad i = 1, ..., t,$$

где $a_{i,n}, ..., a_{i,0} \in \mathbb{Z}_{p_i}$. Элементы $\underline{X}$ из $\mathbb{Z}^{n+1}$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{aligned} &|\phi_1(\underline{X})|_{p_1} \le c_1 \\ &\vdots \\ &|\phi_t(\underline{X})|_{p_t} \le c_t \end{aligned} \tag{4.2}$$

образуют подрешетку в $\mathbb{Z}^{n+1}$.

Более того, предположим, что для всех $i = 1, ..., t$ выполняется условие

$$\max_{j=0,...,n} |a_{ij}|_{p_i} = 1. \tag{4.3}$$

Тогда

$$|m(G)| \le \prod_{i=1}^{t} p_i^{\max(0,N_i)}, \tag{4.4}$$

где число $N_i \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет условию

$$p_i^{-N_i} \le c_i < p_i^{-N_i+1}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Решения каждого из неравенств (4.2) образуют решетку, и множество решений всей системы является пересечением решений всех неравенств. Поскольку пересечение решеток является снова решеткой, то мы заключаем, что множество решений системы (4.2) образует решетку.

Обозначим через G_i подрешетку в $\mathbb{Z}^{n+1}$, задаваемую решениями неравенства

$$|\phi_i(\underline{X})|_{p_i} \le c_i, \tag{4.6}$$

тогда $G = \cap_{i=1}^t G_i$. Более того, пусть K_i обозначает множество решений того же неравенства (4.6) в $\mathbb{Q}_{p_i}^{n+1}$. Пусть $\mathrm{mes}(K_i)$ обозначает меру Хаара множества K_i.

Используя условие (4.3) и лемму 1.8 [110], получаем

$$\operatorname{mes}(K_i) = \min\left(1, p_i^{-N_i}\right). \tag{4.7}$$

Поскольку $p_1, \ldots, p_t$ не обязательно все различные, то используя замечание в конце главы 1, §5 [110], получаем

$$m(G) \prod_{i=1}^{t} \operatorname{mes}(K_i) \le 1.$$

Согласно (4.7) немедленно получаем требуемый результат (4.4).

□

4.2.3 Вспомогательные результаты в архимедовом пространстве

Пусть $k, s, i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_s$ – натуральные числа, такие, что $\sum_{u=1}^{k} i_u + 2\sum_{v=1}^{s} j_v \le n+1$. Пусть $x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}$ – множество k различных действительных чисел, и $z_1, ..., z_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ – множество s различных чисел. Более того, пусть b_u^t $(u = 1, ..., k,\ t = 0, ..., i_u - 1)$, c_v^t $(v = 1, ..., s,\ t = 0, ..., j_v - 1)$, D – неотрицательные действительные числа.

Будем использовать следующие сокращения: $\underline{x}$ для x_1,...,x_k, $\underline{z}$ для z_1,...,z_s и т.д. Напомним, что $\underline{a} = (a_n, ..., a_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и линейные формы $\phi_{x_i}^t$, $\phi_{z_j}^t$ от переменных $\underline{a}$, определены в (4.1). Далее обозначим $K = \sum_{u=1}^{k} i_u$ и $S = \sum_{v=1}^{s} j_v$. Определим тело

$$V(\underline{x}, \underline{z}, \underline{b}, \underline{c}, D) \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

задаваемое системой неравенств

$$\begin{aligned}
&|\phi_{x_1}^t(\underline{a})| \le b_1^t, \quad t = 0, ..., i_1 - 1,\\
&\qquad\vdots\\
&|\phi_{x_k}^t(\underline{a})| \le b_k^t, \quad t = 0, ..., i_k - 1,\\
&|\phi_{z_1}^t(\underline{a})| \le c_1^t, \quad t = 0, ..., j_1 - 1,\\
&\qquad\vdots\\
&|\phi_{z_s}^t(\underline{a})| \le c_s^t, \quad t = 0, ..., j_s - 1,\\
&|a_n| \le D,\\
&\qquad\vdots\\
&|a_{K+2S}| \le D.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Лемма 4.2. *Система линейных форм от переменных* $\underline{a} = (a_n, ..., a_0)$

$$\begin{aligned}
&\phi^t_{x_1}(\underline{a}), \quad t = 0, ..., i_1 - 1,\\
&\quad\vdots\\
&\phi^t_{x_k}(\underline{a}), \quad t = 0, ..., i_k - 1,\\
&\mathrm{Im}\,(\phi^t_{z_1}(\underline{a})), \quad t = 0, ..., j_1 - 1,\\
&\Re(\phi^t_{z_1}(\underline{a})), \quad t = 0, ..., j_1 - 1,\\
&\quad\vdots\\
&\mathrm{Im}\,(\phi^t_{z_s}(\underline{a})), \quad t = 0, ..., j_s - 1,\\
&\Re(\phi^t_{z_s}(\underline{a})), \quad t = 0, ..., j_s - 1,\\
&a_n,\\
&\quad\vdots\\
&a_{K+2S}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

является невырожденной.

Доказательство. Пусть $\underline{a}' = (a'_n, ..., a'_0)$ – любое действительное решение системы (4.9) (правые части в которой равны нулю). Рассмотрим многочлен

$$P(X) = a'_n X^n + ... + a'_1 X + a'_0.$$

Система (4.9) (и предположение, что $a'_n, ..., a'_0 \in \mathbb{R}$) означает, что x_1,...,x_k, z_1, $\bar{z}_1$,...,z_s, $\bar{z}_s$ – ее корни кратностей i_1,..., i_k, j_1,..., j_s соответственно. Таким образом, P имеет как минимум $K + 2S$ корней. С другой стороны, система означает, что $a'_n = ... = a'_{K+2S} = 0$, следовательно, $\deg P \leq K + 2S - 1$. Поскольку P – многочлен степени $\leq K + 2S - 1$ и имеющий не менее $K + 2S$ корней, то отсюда заключаем, что $a'_n = ... = a'_0 = 0$. Следовательно, система (4.9) является невырожденной. □

Обозначим через $\mathcal{D}(\underline{x}, \underline{z})$ определитель системы (4.9). Согласно лемме 4.2 получаем $\mathcal{D}(\underline{x}, \underline{z}) \neq 0$. Поскольку матрица системы (4.9) невырожденна, то для нее существует обратная. Обозначим через $M(\underline{x}, \underline{z})$ обратную к ней матрицу и через $\mathbb{C}(\underline{x}, \underline{z})$ обозначим абсолютное значение максимального по абсолютной величине элемента из $M(\underline{x}, \underline{z})$, умноженного на $(n + 1)$.

Предложение 4.1. *Объем тела* V*, заданного системой (4.8), равен*

$$|V| = (\mathcal{D}(\underline{x}, \underline{z}))^{-1} 2^{n+1-2S} \pi^S \left(\prod_{u=1}^{k} \prod_{t=1}^{i_u - 1} b^t_u \right) \left(\prod_{v=1}^{k} \prod_{t=1}^{j_v - 1} c^t_v \right)^2 D^{n+1-K-2S}, \tag{4.10}$$

и все точки $\underline{a}$*, лежащие в* V*, удовлетворяют условию*

$$\max(|a_n|, ..., |a_0|) \leq \mathbb{C}(\underline{x}, \underline{z}) \max\left(D, b^0_1, ..., b^{i_k - 1}_k, c^0_1, ..., c^{i_s - 1}_s\right), \tag{4.11}$$

т.е. V содержится в кубе с центром в точке 0 и длиной ребра, равной

$$2\mathbb{C}(\underline{x},\underline{z})\max\left(D, b_1^0, ..., b_k^{i_k-1}, c_1^0, ..., c_s^{i_s-1}\right).$$

Доказательство. Каждая линейная форма $\phi_{x_u}^t(\underline{a})$ определяет отображение из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}$, и условие $|\phi_{x_u}^t(\underline{a})| \leq b_u^t$ определяет интервал $I(0, b_u^t)$ (с центром в 0) в $\mathbb{R}$. Аналогично, каждая линейная форма $\phi_{z_v}^t(\underline{a})$ определяет отображение из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (последнее означает равенство двух действительных векторных пространств $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$), и условие $|\phi_{z_v}(\underline{a})| \leq c_v^t$ определяет круг $C(0, c_v^t)$ (с центром в 0) в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Формы a_u ($u = n, ..., K+2S$) также являются отображениями из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}$, и условие $|a_u| \leq D$ определяет интервал $I(0, D)$ (с центром в 0) в $\mathbb{R}$.

Подводя итог, заключаем, что линейное отображение $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, определяемое как

$$\underline{a} \mapsto \left(\phi_{x_1}^0(\underline{a}), ..., \phi_{x_k}^{i_k-1}(\underline{a}), \Re\left(\phi_{z_1}^0(\underline{a})\right), \mathrm{Im}\left(\phi_{z_1}^0(\underline{a})\right), ..., \Re\left(\phi_{z_s}^{j_s-1}(\underline{a})\right), \mathrm{Im}\left(\phi_{z_s}^{j_s-1}(\underline{a})\right), a_n, ..., a_{K+2S}\right) \tag{4.12}$$

переводит тело V в тело

$$V_1 = I(0,b_1^0)\times...\times I(0,b_k^{i_k-1})\times C(0,c_1^0)\times...\times C(0,c_s^{j_s-1})\times I(0,D)\times...\times I(0,D) \subset \mathbb{R}^{n+1}. \tag{4.13}$$

Согласно определению имеем

$$\det\Phi = \mathcal{D}(\underline{x},\underline{z}).$$

Используя последнее равенство, а также равенство $\Phi(V) = V_1$, находим

$$\begin{aligned} |V| &= (\det\Phi)^{-1}|V_1| \\ &= (\mathcal{D}(\underline{x},\underline{z}))^{-1} 2^{n+1-2S}\pi^S \left(\prod_{u=1}^{k}\prod_{t=1}^{i_u-1} b_u^t\right)\left(\prod_{v=1}^{k}\prod_{t=1}^{j_v-1} c_v^t\right)^2 D^{n+1-K-2S}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Поскольку $V_1 = \Phi(V)$, то каждую точку тела V можно получить как прообраз некоторой точки тела V_1. Поскольку каждая точка тела V_1 удовлетворяет условию, что все ее координаты не превосходят величины $\max\left(D, b_1^0, ..., b_k^{i_k-1}, c_1^0, ..., c_s^{j_s-1}\right)$ (см. (4.13)), то оценка (4.11) напрямую следует из определения $\mathbb{C}(\underline{x},\underline{z})$. □

4.2.4 Доказательство вспомогательной теоремы 4.5

Теорема 4.5. *Пусть справедливы условия раздела (4.2.3). Далее, пусть p_1,...,p_t – простые числа (не обязательно различные), $w_i \in \mathbb{Z}_{p_i}$, $i = 1, ..., t$ и $N_1, ..., N_t \in \mathbb{N}$. Более того, зафиксируем m неотрицательных целых чисел $k_1, ..., k_m \in \mathbb{N}$.*

Пусть

$$\gamma := \frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)^S \mathcal{D}(\underline{x},\underline{z}) \prod_{i=1}^m p_i^{\max(0,N_i)}}{\left(\prod_{u=1}^k \prod_{t=1}^{i_u-1} b_u^t\right)\left(\prod_{v=1}^k \prod_{t=1}^{j_v-1} c_v^t\right)^2 D^{n+1-K-2S}}.$$

Рассмотрим две системы неравенств для $\underline{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$*:*
"архимедова система"

$$\begin{aligned}
&|\phi^0_{x_1}(\underline{a})| \le b_1^0\\
&\quad\vdots\\
&|\phi^{i_k-1}_{x_k}(\underline{a})| \le b_k^{i_k-1}\\
&|\phi^0_{z_1}(\underline{a})| \le c_1^0\\
&\quad\vdots\\
&|\phi^{j_s-1}_{z_s}(\underline{a})| \le c_s^{j_s-1}\\
&|a_i| \le D, \quad K+2S \le i \le n
\end{aligned} \tag{4.15}$$

и "неархимедова система"

$$\begin{aligned}
&|\phi^{k_1}_{w_1}(\underline{a})|_{p_1} \le p_1^{-N_1}\\
&\quad\vdots\\
&|\phi^{k_m}_{w_m}(\underline{a})|_{p_m} \le p_m^{-N_m}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Обозначим через V *тело в* $\mathbb{R}^{n+1}$*, задаваемое системой (4.15), и через* G *обозначим решетку, определяемую системой (4.16).*

Тогда существет $n+1$ *линейно независимых многочлена* $P_1,...,P_{n+1}$ *с целыми коэффициентами, степени не больше* n *и высоты*

$$\max_{i=1,\dots,n+1} H(P_i) \le \frac{\gamma}{\mu_1(V,G)^n}\mathbb{C}(\underline{x},\underline{z})\max\left(D, b_1^0,...,b_k^{i_k-1}, c_1^0,...,c_s^{j_s-1}\right), \tag{4.17}$$

удовлетворяющие двум системам неравенств:

"архимедова система"

$$\begin{aligned}
&|P^{(t)}(x_1)| \le \frac{\gamma}{\mu_1(V,G)^n} b_1^t, \quad t=0,...,i_1-1\\
&\quad\vdots\\
&|P^{(t)}(x_k)| \le \frac{\gamma}{\mu_1(V,G)^n} b_k^t, \quad t=0,...,i_k-1\\
&|P^{(t)}(z_1)| \le \frac{\gamma}{\mu_1(V,G)^n} c_1^t, \quad t=0,...,j_0-1\\
&\quad\vdots\\
&|P^{(t)}(z_s)| \le \frac{\gamma}{\mu_1(V,G)^n} c_s^t, \quad t=0,...,j_s-1
\end{aligned} \tag{4.18}$$

и "неархимедова система"

$$\begin{aligned} |P^{(k_1)}(w_1)|_{p_1} &\le p_1^{-N_1} \\ &\vdots \\ |P^{(k_m)}(w_m)|_{p_m} &\le p_m^{-N_m}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Доказательство. Согласно теореме Минковского (см. теорему 4.4 в данном разделе; отметим, что в данном случае тело V вложено в $\mathbb{R}^{n+1}$, а не в $\mathbb{R}^n$), имеем

$$|V| \times \mu_1(V,G) \times ... \times \mu_{n+1}(V,G) \le 2^{n+1} m(G).$$

Поскольку $\mu_1(V,G) \le \mu_2(V,G) ... \le \mu_{n+1}(V,G)$, то немедленно получаем, что

$$\mu_{n+1}(V,G) \le \frac{2^{n+1} m(G)}{|V| \mu_1(V,G)^n}. \tag{4.20}$$

Далее воспользуемся предложением 4.1, означающем, что объем тела V находится по формуле (4.10), и все точки тела V удовлетворяют линейному ограничению (4.11).

Применяя лемму 4.1 к системе (4.16), получаем, что ее решения образуют решетку G, объем которой оценивается как

$$|m(G)| \le \prod_{i=1}^{m} p_i^{\max(0,N_i)}. \tag{4.21}$$

Далее, подставляя величину объема $|V|$ в (4.20) и применяя оценку (4.21), получаем

$$\begin{aligned} \mu_{n+1}(V,G) &\le \frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)^S \mathcal{D}(\underline{x},\underline{z}) \prod_{i=1}^{m} p_i^{\max(0,N_i)}}{\left(\prod_{u=1}^{k}\prod_{t=1}^{i_u-1} b_u^t\right)\left(\prod_{v=1}^{k}\prod_{t=1}^{j_v-1} c_v^t\right)^2 D^{n+1-K-2S} \mu_1(V,G)^n} \\ &= \frac{\gamma}{\mu_1(V,G)^n} =: C. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Последняя оценка означает, что если растянем тело V в C раз, то получим тело V_1, содержащее $n+1$ линейно независимых целых точек из G, по определению удовлетворяющих системе (4.15). Каждую из этих $n+1$ точек можно рассматривать как коэффициенты многочлена (степени не превосходящей n), удовлетворяющего системе (4.18), таким образом, мы получили $n+1$ линейно независимых многочленов $P_1,...,P_{n+1}$ с целыми коэффициентами. Тело V_1 определяется системой (4.15), правые части которой умножены на C. Таким образом, каждый многочлен $P_1,...,P_{n+1}$ удовлетворяет системе (4.18) и неравенству (4.17), последнее следует из оценки (4.11); это завершает доказательство теоремы. $\square$

4.2.5 Доказательство теоремы 4.2

Зафиксируем $\delta_1 > 0$. Удалим из параллелепипеда T_0 множество малой меры так, чтобы в оставшейся части выполнялось неравенство $|Imz| \geq \delta_1$, тогда справедливы неравенства (1.16).

Далее, зафиксируем произвольный параллелепипед T в T_0. Пусть Q – достаточно большое число. Согласно теореме 2.3 существует множество $B_1(Q,T) \subset T$, удовлетворяющее условию $\mu(B_1(Q,T)) \geq s\mu(T)$. Пусть $(x,z,w) \in B_1(Q,T)$ и действительные числа $w_1, w_2 \geq 0$, $w_3 \geq 1$ удовлетворяют условию $w_1 + 2w_2 + w_3 = n-2$. Множество точек $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющих условиям $|P(x)| < c_0 Q^{-w_1}$, $|P(z)| < c_0 Q^{-w_2}$, $|P'(x)| < Q$, $|P'(z)| < Q$, $|a_i| \leq Q$, $6 \leq i \leq n$, образует выпуклое тело V в $\mathbb{R}^{n+1}$, симметричное относительно нуля. Через Γ обозначим решетку в $\mathbb{Z}^{n+1}$, определяемую неравенствами $|P(w)|_p < c_0 Q^{-w_3}$, $|P'(w)|_p \leq 1$. Сначала докажем, что первый последовательный минимум $\mu_1(V,\Gamma) \geq \delta_0$, т.е. покажем, что $\delta_0 V \cap \Gamma$ не содержит точки $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Для $\delta_0 V$ имеем

$$|P(x)| < c_0\delta_0 Q^{-w_1} < c_0 Q^{-w_1},\ |P(z)| < c_0\delta_0 Q^{-w_2} < c_0 Q^{-w_2},\ |P'(x)| < \delta_0 Q,$$
$$|P'(z)| < \delta_0 Q,\ |a_i| \leq \delta_0 Q < Q,\ 6 \leq i \leq n,$$

при этом попадаем в множество $T \setminus B_1(Q,T)$ малой меры, что противоречит тому, что $(x,z,w) \in B_1(Q,T)$ (согласно теореме 2.3).

Поскольку $\mu_1(V,\Gamma) \geq \delta_0$, то согласно теореме 4.5 получаем, что существуют $n+1$ линейно независимых многочленов

$$P_l(f) = a_{n,l}f^n + a_{n-1,l}f^{n-1} + \ldots + a_{1,l}f + a_{0,l}, \quad 1 \leq l \leq n+1,$$

степени $\leq n$, удовлетворяющие системе неравенств

$$|P_l(x)| \ll Q^{-w_1},\ \ |\Re(P_l(z))| \ll Q^{-w_2},\ \ |\mathrm{Im}\,(P_l(z))| \ll Q^{-w_2},\ \ |P_l(w)|_p \ll Q^{-w_3},$$
$$|P_l'(x)| \ll Q,\ \ |\Re(P_l'(z))| \ll Q,\ \ |\mathrm{Im}\,(P_l'(z))| \ll Q,\ \ |P_l'(w)|_p \leq 1,\ \ H(P_l) \ll Q \tag{4.23}$$

для каждого l, $1 \leq l \leq n+1$. Таким образом, имеем

$$\Delta = \det(a_{m,l}) \in \mathbb{Z}, \quad \Delta \neq 0, \quad 0 \leq m \leq n, \quad 1 \leq l \leq n+1. \tag{4.24}$$

Пусть $d_2 = d_4 + id_5$ и $\mathbf{u} \in B_1(Q,T)$. Выберем и зафиксируем число $x_w \in \mathbb{R}$, отличное от x. Выберем также $w_x \in \mathbb{Z}_p$, отличное от w. Кроме того, зафиксируем пару $(w_z, \tilde{w}_z) \in \mathbb{Z}_p^2$, где $\tilde{w}_z \neq 0$. Далее выберем и зафиксируем числа $d_{1\mathbb{Z}_p}, d_{4\mathbb{Z}_p}, d_{5\mathbb{Z}_p} \in \mathbb{Z}_p$ и $d_{3\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$.

Далее определим некоторые поля и алгебраические морфизмы между ними. Пусть

$$K_{\mathbb{C}} := \mathbb{Q}(x, \Re(z), \mathrm{Im}\,(z), x_w, d_1, d_{3\mathbb{R}}, d_4, d_5) \subset \mathbb{C},$$
$$K_{\mathbb{Q}_p} := \mathbb{Q}(w_x, w_z, \tilde{w}_z, w, d_{1\mathbb{Z}_p}, d_3, d_{4\mathbb{Z}_p}, d_{5\mathbb{Z}_p}) \subset \mathbb{Q}_p,$$

и определим изоморфизм $\psi : K_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{Q}_p}$ над $\mathbb{Q}$, который отображает элемент $x \in K_{\mathbb{C}}$ в $w_x \in \mathbb{Z}_p$, элемент $\Re(z) \in K_{\mathbb{C}}$ в $w_z \in \mathbb{Z}_p$, и так далее.

Рассмотрим следующую линейную систему относительно (действительных) переменных $\theta_1, \ldots, \theta_{n+1}$:

$$\begin{array}{rl} \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i P_i(x) + d_1 = 0, & \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i P_i'(x) = C_1 Q, \\ \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i P_i(x_w) + d_{3\mathbb{R}} = 0, & \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i P_i'(x_w) = 1, \\ \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i \Re(P_i(z)) + d_4 = 0, & \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i \Re(P_i'(z)) = C_1 Q, \\ \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i \mathrm{Im}\,(P_i(z)) + d_5 = 0, & \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i \mathrm{Im}\,(P_i'(z)) = C_1 Q, \end{array} \tag{4.25}$$

где C_1 обозначает достаточно большую постоянную.

Система (4.25) является недоопределенной или невырожденной, поэтому существует решение $\underline{\theta} \in K_{\mathbb{C}}^{n+1}$, $|\underline{\theta}| \ll Q$. Применяя изоморфизм ψ, получим $(n+1)$-набор $\psi(\underline{\theta}) \in K_{\mathbb{Q}_p}$, удовлетворяющий, в частности, системе

$$\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n+1} \psi(\underline{\theta}_i) P_i(w) + d_3 = 0, \\ \sum_{i=1}^{n+1} \psi(\underline{\theta}_i) P_i'(w) = 1, \end{array} \tag{4.26}$$

согласно второй строки в (4.25). Существует $(n+1)$-набор чисел $(r_1, \ldots, r_{n+1}) \in \mathbb{Q}^{n+1}$ такой, что

$$\begin{array}{c} |\psi(\underline{\theta}_i) - r_i|_p \le \frac{1}{p}, \\ r_i \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}] \cap [-p, p],\ i = 1, \ldots, n+1. \end{array} \tag{4.27}$$

Действительно, мы можем построить такое число r_i, рассматривая p-адическое разложение числа $\psi(\underline{\theta}_i)$, и определив r_i как сумму всех членов этого разложения соответствующих неположительным степеням p. Далее определим $\overline{\theta}_i := r_i + [\underline{\theta}_i]$ и $M(f) := \sum_{i=1}^{n+1} \overline{\theta}_i P_i(f) = \sum_{j=0}^{n} t_j f^j$, где $t_j = \sum_{i=1}^{n+1} \overline{\theta}_i a_{j,i}$ для $0 \le j \le n$. Непосредственно из определения следует, что коэффициенты t_j, $0 \le j \le n$, лежат в $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. Используя (4.23)–(4.27), несложно получить, что $|t_j|_p \le 1$, $0 \le j \le n$, и следовательно, справедливо более сильное включение $t_j \in \mathbb{Z}$. Таким образом, построен целочисленный многочлен M. Согласно (4.23)–(4.27), многочлен M удовлетворяет системе

$$\begin{array}{c} |M(x) + d_1| \ll Q^{-w_1}, \quad |M'(x)| \gg Q, \\ |\Re(M(z)) + d_4| \ll Q^{-w_2}, \quad |\Re(M'(z))| \gg Q, \\ |\mathrm{Im}\,(M(z)) + d_5| \ll Q^{-w_2}, \quad |\mathrm{Im}\,(M'(z))| \gg Q, \\ |M(w) + d_3|_p \ll Q^{-w_3}, \quad |M'(w)|_p = 1, \\ H(M) \ll Q, \end{array} \tag{4.28}$$

и система (4.28) выполняется для любой точки $\mathbf{u} \in B_1(Q, T)$. Второе и третье неравенства в (4.28) объединим в следующие неравенства:

$$|M(z) + d_2| \ll Q^{-w_2}, \quad |M'(z)| \gg Q. \tag{4.29}$$

Используя теорему Лагранжа и лемму Гензеля для обновленной системы (4.28), получаем, что существует точка (α, β, γ) из корней многочленов $M(x) + d_1$, $M(z) + d_2$, $M(w) + d_3$ соответственно, хорошо приближающая точку $(x, z, w) \in B_1(Q, T)$, т.е.

$$\begin{aligned} &|x - \alpha| \ll Q^{-w_1-1}, \;\; \alpha \in \mathbb{R}, \\ &|z - \beta| \ll Q^{-w_2-1}, \;\; \beta \in \mathbb{C}, \\ &|w - \gamma|_p \ll Q^{-w_3}, \;\; \gamma \in \mathbb{Q}_p. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Определим R как множество точек $\boldsymbol{\nu} = (\alpha, \beta, \gamma)$, где α – действительный корень многочлена $M(x)+d_1$, β – комплексный корень многочлена $M(z)+d_2$ и γ – p-адический корень многочлена $M(w) + d_3$. Пусть $r = c_6(n)Q$, $d_x(r) = r^{-(w_1+1)}$, $d_z(r) = r^{-(w_2+1)}$, $d_w(r) = r^{-w_3}$ и $h(\boldsymbol{\nu}) = ||\mathbf{m}||_\infty$, где $M(f) = m_n f^n + ... + m_1 f + m_0$. Тогда для любой точки $\mathbf{u} \in B_1(Q, T)$ найдется точка $\boldsymbol{\nu} = (\alpha, \beta, \gamma) \in R$ такая, что $h(\boldsymbol{\nu}) \leq r$ и

$$\mathbf{u} \in T(\boldsymbol{\nu}, c_7 \mathbf{d}(r)).$$

Далее выберем максимальный набор $\boldsymbol{\nu}_1, \dots, \boldsymbol{\nu}_t \in R$, удовлетворяющий (2.2)-(2.4). По построению и поскольку этот набор максимален, получаем

$$B_1(Q, T) \subset \bigcup_{i=1}^{t} T(\boldsymbol{\nu}_i, (c_7 + 1)\mathbf{d}(r)).$$

Поскольку $\mu(B_1(Q, t)) \geq s\mu(T)$, то находим

$$s\mu(T) \leq \mu(B_1(Q, T)) \leq \sum_{i=1}^{t} \mu(T(\boldsymbol{\nu}_i, (c_7 + 1)\mathbf{d}(r))) \ll t d_x(r) d_z^2(r) d_w(r),$$

откуда следует, что

$$t \geq K_1 Q^{n+1} \mu(T). \tag{4.31}$$

Следовательно, $(R, h, \mathbf{d})$ – регулярная система в T_0.

4.3 Неоднородные Диофантовы приближения целочисленными многочленами с немонотонной функцией аппроксимации

В данном разделе рассматривается задача о приближении действительных чисел многочленами в случае немонотонной функции аппроксимации. Прежде всего отметим, что поскольку ряд $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\Psi(h)$ сходится, то $h^{n-1}\Psi(h)$ стремится к 0 при $h \to \infty$. Поэтому можем полагать, что

$$\Psi(h) = o(h^{-n+1}). \tag{4.32}$$

Удалим из $\mathbb{R}$ множество произвольно малой меры θ_0 так, чтобы в оставшейся части $\mathbb{R}(\theta_0)$ выполнялось неравенство

$$|x| > \theta, \quad \theta > 0. \tag{4.33}$$

Поскольку $\mu_1(\mathcal{L}_{n,d}(\Psi)) = 0$, если $\mu_1(\mathcal{L}_{n,d}(\Psi) \cap I) = 0$ для любого открытого интервала $I \subset \mathbb{R}(\theta_0)$, удовлетворяющего условию

$$0 < \theta < c_0'(I) = \inf\{|x| : x \in I\} < \sup\{|x| : x \in I\} = c_1'(I) < \infty,$$

то зафиксируем, например, интервал $I = (\theta, 1)$.

Зафиксируем действительное число v, удовлетворяющее условию

$$0 < v < 1/3. \tag{4.34}$$

Доказательство теоремы 4.3 распадается на два случая, учитывая следующие два множества. Определим множество $\mathcal{L}_1(n, d)$ действительных чисел $x \in I$ таких, что система неравенств

$$|P(x) + d| < H(P)^{-n+1}, \qquad |P'(x)| < H(P)^{-v}$$

имеет бесконечно много решений $P \in \mathcal{P}_n$. Далее пусть $\mathcal{L}_2(n, d, \Psi)$ обозначает множество точек $x \in I$ таких, что система неравенств

$$|P(x) + d| < \Psi(H(P)), \quad |P'(x)| \geq H(P)^{-v} \tag{4.35}$$

выполнена для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n$. Принимая во внимание условие (4.32), получаем, что $\mathcal{L}_{n,d}(\Psi) \subset \mathcal{L}_1(n, d) \cup \mathcal{L}_2(n, d, \Psi)$ Далее покажем, что мера Лебега каждого из множеств $\mathcal{L}_1(n, d)$ и $\mathcal{L}_2(n, d, \Psi)$ равна нулю.

4.3.1 Случай малой производной и неоднородный принцип переноса

Предложение 4.2. *Пусть $n \geq 2$. Тогда $\mu_1(\mathcal{L}_1(n, d)) = 0$.*

Доказательство. Для каждого многочлена $P \in \mathcal{P}_n$ определим множество

$$B(P) = \{x \in I : |P(x) + d| < H(P)^{-n+1}, \ |P'(x)| < H(P)^{-v}\}.$$

Тогда множество $\mathcal{L}_1(n, d)$ можем записать в виде

$$\mathcal{L}_1(n, d) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{t=N}^{\infty} \bigcup_{P \in \mathcal{P}_n^t} B(P),$$

где

$$\mathcal{P}_n^t := \{P \in \mathcal{P}_n, \ 2^t \leq H(P) < 2^{t+1}\}.$$

Покажем, что расширенное множество (содержащее $\mathcal{L}_1(n, d)$) имеет меру нуль и далее воспользуемся неоднородным принципом переноса, доказанным в [58]. Неоднородный принцип переноса позволяет переносить утверждения для однородных множеств, имеющих меру нуль, на неоднородные множества.

Неоднородный принцип переноса. При доказательстве воспользуемся техникой, разработанной в [45, Случай B]. Для наших целей, рассмотрим два счетных индексных множества $\mathbf{T}$ и $\mathcal{A}$ из [58], где $\mathbf{T} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\mathcal{A} = \mathcal{P}_n$. Пусть J обозначает конечный (открытый) интервал в $\mathbb{R}$ с замыканием обозначаемым $\bar{J}$. Обозначим через $\mathcal{H}$ и $\mathcal{I}$ два отображения из $(\mathbb{N} \cup \{0\}) \times \mathcal{P}_n \times \mathbb{R}^+$ в множество открытых подмножеств $\mathbb{R}$ такие, что

$$\mathcal{H}(t, P, \epsilon) = \mathcal{I}_0^t(P, \epsilon)$$

и

$$\mathcal{I}(t, P, \epsilon) = \mathcal{I}_d^t(P, \epsilon).$$

В нашем случае определим множесва $\mathcal{I}_0^t(P, \epsilon)$ и $\mathcal{I}_d^t(P, \epsilon)$ следующим образом:

$$\mathcal{I}_d^t(P, \epsilon) = \begin{cases} \{x \in I : \, |P(x) + d| < 2^{t(-n+1)}\epsilon; \, |P'(x)| < 2^{-tv}\epsilon\}, & \text{если} \quad P \in \mathcal{P}_n^t, \\ \emptyset, & \text{если} \quad P \notin \mathcal{P}_n^t, \end{cases}$$

и

$$\mathcal{I}_0^t(P, \epsilon) = \begin{cases} \{x \in I : \, |P(x)| < 2^{t(-n+1)}\epsilon; \, |P'(x)| < 2^{-tv}\epsilon\}, & \text{если} \quad P \in \bigcup_{s=0}^{t+1} \mathcal{P}_n^s, \\ \emptyset, & \text{если} \quad P \notin \bigcup_{s=0}^{t+1} \mathcal{P}_n^s. \end{cases}$$

Пусть $\delta \geq 0$ и определим функцию $\phi_\delta(t) = 2^{\delta t}$. Далее определим $\Phi = \{\phi_\delta : 0 \leq \delta < v/2\}$. Для любой функции $\phi \in \Phi$ определим

$$\mathcal{I}_d^t(\phi) = \cup_{P \in \mathcal{P}_n} \mathcal{I}_d^t(P, \phi(t)) = \cup_{P \in \mathcal{P}_n^t} \mathcal{I}_d^t(P, \phi(t)).$$

Обозначим через $\Lambda_{\mathcal{I}}(\phi)$ следующее множество

$$\Lambda_{\mathcal{I}}(\phi) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{t=N}^{\infty} \mathcal{I}_d^t(\phi).$$

Для того, чтобы воспользоваться неоднородным принципом переноса из [58], определим также однородное множество

$$\Lambda_{\mathcal{H}}(\phi) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{t=N}^{\infty} \mathcal{I}_0^t(\phi),$$

где

$$\mathcal{I}_0^t(\phi) = \cup_{P \in \mathcal{P}_n} \mathcal{I}_0^t(P, \phi(t)) = \cup_{s=0}^{t+1} \cup_{P \in \mathcal{P}_n^s} \mathcal{I}_0^t(P, \phi(t)).$$

Ясно, что для любого $0 \leq \delta < v/2$ имеем включение $\mathcal{L}_1(n, d) \subset \Lambda_{\mathcal{I}}(\phi_\delta)$. Поэтому достаточно показать, что множество $\Lambda_{\mathcal{I}}(\phi_\delta)$ имеет меру нуль для некоторого $0 \leq \delta < v/2$.

Прежде чем применять неоднородный принцип переноса, необходимо проверить выполнение следующих двух свойств.

Свойство пересечения: Пусть Φ обозначает множество функций $\phi : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ : \, t \to \phi(t)$. Говорят, что тройка множеств $(\mathcal{H}, \mathcal{I}, \Phi)$ удовлетворяет *свойству пересечения*, если для любой функции $\phi \in \Phi$ существует функция

$\phi^* \in \Phi$ такая, что для всех $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, за исключением конечного числа, и всех различных многочленов $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_n$ справедливо включение

$$\mathcal{I}_d^t(P, \phi(t)) \cap \mathcal{I}_d^t(\tilde{P}, \phi(t)) \subset \mathcal{I}_0^t(\phi^*). \tag{4.36}$$

Свойство сжатия: Говорят, что мера μ_1 является *сжимаемой относительно* $(\mathcal{I}, \Phi)$, если для любой функции $\phi \in \Phi$ существует функция $\phi^+ \in \Phi$ и последовательность положительных чисел $\{k_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ такая, что

$$\sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} k_t < \infty \tag{4.37}$$

и для всех t, за исключением конечного числа, и для всех многочленов $P \in \mathcal{P}_n$ существует набор $C_{t,P}$ шаров B, ценры которых расположены в $\bar{J}$, удовлетворяющий следующим трем условиям:

$$\bar{J} \cap \mathcal{I}_d^t(P, \phi(t)) \subset \cup_{B \in C_{t,P}} B, \tag{4.38}$$

$$\bar{J} \cap \cup_{B \in C_{t,P}} B \subset \mathcal{I}_d^t(P, \phi^+(t)), \tag{4.39}$$

$$\mu_1(5B \cap \mathcal{I}_d^t(P, \phi(t))) \leq k_t \mu_1(5B). \tag{4.40}$$

Следующая теорема является следствием [58, Теорема 5].

Теорема 4.6 (Неоднородный принцип переноса)**.** *Предположим, что* $(\mathcal{H}, \mathcal{I}, \Phi)$ *удовлетворяет свойству пересечения и* μ_1 *является сжимаемой относительно* $(\mathcal{I}, \Phi)$*. Тогда*

$$\forall \phi \in \Phi \quad \mu_1(\Lambda_{\mathcal{H}}(\phi)) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall \phi \in \Phi \quad \mu_1(\Lambda_{\mathcal{I}}(\phi)) = 0.$$

Сначала проверим справедливость свойств пересечения и сжатия, а затем покажем, что $\mu_1(\Lambda_{\mathcal{H}}(\phi_\delta)) = 0$. Используя неоднородный принцип переноса, последнее будет обозначать, что множество $\Lambda_{\mathcal{I}}(\phi_\delta)$ имеет меру нуль, и, следовательно, множество $\mathcal{L}_1(n, d)$ также имеет меру нуль.

Проверка свойства пересечения. Пусть $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_n$, $P \neq \tilde{P}$, и предположим, что

$$x \in \mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta(t)) \cap \mathcal{I}_d^t(\tilde{P}, \phi_\delta(t)).$$

Тогда

$$|P_d(x)| = |P(x) + d| < \phi_\delta(t) 2^{t(-n+1)} \quad \text{и} \quad |\tilde{P}_d(x)| = |\tilde{P}(x) + d| < \phi_\delta(t) 2^{t(-n+1)},$$
$$|P'(x)| < \phi_\delta(t) 2^{-vt} \quad \text{и} \quad |\tilde{P}'(x)| < \phi_\delta(t) 2^{-vt}.$$

Пусть $R = P_d - \tilde{P}_d$, тогда из предыдущей системы неравенств получаем

$$\begin{aligned} |R(x)| &< 2\phi_\delta(t) 2^{t(-n+1)} = \phi_{\delta'}(t) 2^{t(-n+1)}, \\ |R'(x)| &< 2\phi_\delta(t) 2^{-vt} = \phi_{\delta'}(t) 2^{-vt}, \end{aligned} \tag{4.41}$$

где $\phi_{\delta'} \in \Phi$ для $t > \frac{1}{v/2-\delta}$. Очевидно, что многочлен R не может быть целым числом при $t \geq 2$ и $n \geq 2$, следовательно, $R \in \cup_{s=0}^{t+1}\mathcal{P}_n^s$. Таким образом, $x \in \mathcal{I}_0^t(R, \phi_{\delta'}(t))$, и условие (4.36) выполняется для $\phi^* = \phi_{\delta'}$.

Проверка свойства сжатия. Напомним определение, введенное в [106].

Определение 4.4. *Пусть C и α – положительные числа, и $f : I \to \mathbb{R}$ – функция, определенная на открытом интервале $I \subset \mathbb{R}$. Тогда функцию f назовем (C, α)-good на I, если для любого открытого интервала $B \subset I$ и любого $\epsilon > 0$ имеем*

$$\mu_1(\{x \in B : |f(x)| < \epsilon \sup_{x\in B}|f(x)|\}) \leq C\epsilon^\alpha \mu_1(B).$$

Далее приведем несколько полезных фактов о (C, α)-*good* функциях.

Лемма 4.3. *[62, Лемма 3.1] Пусть $I \subset \mathbb{R}$ и заданы $C, \alpha > 0$. Тогда*

(i) если f является (C, α)-good функцией на I, то λf также является (C, α)-good функцией на I для любого $\lambda \in \mathbb{R}$;

(ii) если f_i, $i \in I_0$, являются (C, α)-good функциями на I, то $\sup_{i\in I_0}|f_i|$ также является (C, α)-good функцией на I;

(iii) если f является (C, α)-good функцией на I и $c_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq c_2$ для всех $x \in I$, то g является $(C(c_2/c_1)^\alpha, \alpha)$-good функцией на I;

(iv) если f является (C, α)-good функцией на I, то f также является (C', α')-good функцией на I' для каждого $C' \geq C$, $\alpha' \leq \alpha$ и $I' \subset I$.

Лемма 4.4. *[106, Предложение 3.2] Пусть $n \in \mathbb{N}$. Каждый многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$ степени не превосходящей n является $(2n(n+1)^{1/n}, 1/n)$-good функцией на $\mathbb{R}$.*

Обозначим через J достаточно малый открытый интервал, удовлетворяющтй условию $5J \subset I$. Согласно лемме 4.4 имеем, что существует положительная постоянная C такая, что все действительные многочлены степени не превосходящей n являются $(C, \frac{1}{n})$-*good* на $5J$. Аналогично, используя свойства $(C, \frac{1}{n})$-*good* функций, приведенные в лемме 4.3 и лемме 4.4, для любого $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $P \in \mathcal{P}_n$ получаем, что функция $\mathbf{F}_{t,P} : I \to \mathbb{R}$, определяемая как

$$\mathbf{F}_{t,P}(x) := \max\left\{2^{t(n-1)}2^{-vt}|P(x)+d|, |P'(x)|\right\}$$

также является $(C, \frac{1}{n})$–good на $5J$. По определению, для $P \in \mathcal{P}_n$ имеем

$$\mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta(t)) = \begin{cases} \{x \in I : \mathbf{F}_{t,P}(x) < \phi_\delta(t)2^{-vt}\}, & \text{если } \ P \in \mathcal{P}_n^t, \\ \emptyset, & \text{если } \ P \notin \mathcal{P}_n^t. \end{cases} \tag{4.42}$$

Далее, для данной функции $\phi_\delta \in \Phi$ рассмотрим функцию

$$\phi_\delta^+ := \phi_{\frac{1}{2}(\delta+\frac{v}{2})}.$$

Очевидно, что $\phi_\delta^+ \in \Phi$ и $\phi_\delta(t) \le \phi_\delta^+(t)$ для всех $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; таким образом, получаем

$$\mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta(t)) \subset \mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta^+(t)). \tag{4.43}$$

Построим набор $C_{t,P}$ интервалов $B(x)$, $x \in J$, удовлетворяющих условиям (4.37)–(4.40) для соответствующей последовательности k_t. Пусть $P \in \mathcal{P}_n$. Если $\mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta(t)) = \emptyset$, то $C_{t,P} = \emptyset$. Далее предположим, что $\mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta(t)) \ne \emptyset$. Используя (4.34) и определение для Φ, получаем

$$\mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta^+(t)) \subset \{x \in I : |P(x) + d| < 2^{-t(n-\frac{7}{6})}\}.$$

Поскольку $P+d$ является $(C, 1/n)$-good функцией на $5J$ и $\sup_{x\in 5J} |P(x)+d| > 0$, то имеем

$$\mu_1(\mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta^+(t)) \cap J) \le \mu_1(\{x \in J : |P(x) + d| < 2^{-t(n-\frac{7}{6})}\}) \ll 2^{-t(1-\frac{7}{6n})}\mu_1(J)$$

для достаточно большого t. Таким образом, получаем

$$J \not\subset \mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta^+(t)) \tag{4.44}$$

для достаточно большого t и $n \ge 2$.

Используя (4.43) и факт, что $\mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta^+(t))$ – открытый интервал, получаем, что для каждой точки $x \in \bar{J} \cap \mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta(t))$ существует открытый интервал $B'(x)$ содержащий x такой, что

$$B'(x) \subset \mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta^+(t)). \tag{4.45}$$

Объединяя результаты (4.44), (4.45) и факт, что J является ограниченным, находим, что существует коэффициент масштабирования $\tau \ge 1$ такой, что открытый интервал $B = B(x) := \tau B'(x)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{array}{rcl} \bar{J} \cap B(x) & \subset & \mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta^+(t)), \\ \bar{J} \cap 5B(x) & \not\subset & \mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta^+(t)), \\ 5B(x) & \subset & 5J. \end{array} \tag{4.46}$$

Пусть

$$C_{t,P} := \{B(x) : x \in \bar{J} \cap \mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta(t))\}.$$

Тогда, в силу (4.46) и приведенной конструкции интервалов, условия (4.38) и (4.39) выполняются автоматически. Далее покажем справедливость условия (4.40). Рассмотрим произвольный интервал $B \in C_{t,P}$. Используя (4.42) для ϕ_δ^+, (4.44) и (4.46), получаем

$$\sup_{x\in 5B} \mathbf{F}_{t,P}(x) \ge \sup_{x\in \bar{J}\cap 5B} \mathbf{F}_{t,P}(x) \ge \phi_\delta^+(t) 2^{-vt}. \tag{4.47}$$

С другой стороны, в силу (4.42), имеем

$$\sup_{x\in \mathcal{I}_d^t(P,\phi_\delta)\cap 5B} \mathbf{F}_{t,P}(x) \le \phi_\delta(t) 2^{-vt}. \tag{4.48}$$

Используя определение для Φ, получаем $\delta^* = \frac{1}{4}(v - 2\delta) > 0$. Далее, используя определения для ϕ_δ, ϕ_δ^+, а также неравенства (4.47) и (4.48), получаем

$$\sup_{x \in \mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta) \cap 5B} \mathbf{F}_{t,P}(x) \leq 2^{-\delta^* t} \sup_{x \in 5B} \mathbf{F}_{t,P}(x). \tag{4.49}$$

Поскольку функция $\mathbf{F}_{t,P}$ является $(C, 1/n)$-good на $5J$, и в силу (4.46), (4.48), имеем

$$\begin{aligned} \mu_1(\mathcal{I}_d^t(P, \phi_\delta(t)) \cap 5B) &\leq \mu_1(\{x \in 5B : \mathbf{F}_{t,P}(x) \leq 2^{-\delta^* t} \sup_{x \in 5B} \mathbf{F}_{t,P}(x)\}) \\ &\leq C 2^{-\frac{\delta^* t}{n}} \mu_1(5B) \end{aligned} \tag{4.50}$$

для достаточно большого t. Это подтверждает справедливость (4.40), где $k_t := C 2^{-\frac{\delta^* t}{n}}$, и условие сходимости (4.37) выполняется. Таким образом, все условия свойства сжатия для набора $C_{t,P}$ интервалов B, определенных выше, выполнены.

Доказательство утверждения $\mu_1(\Lambda_{\mathcal{H}}(\phi_\delta)) = 0$, где $\delta \in [0, v/2)$. Пусть $x_0 \in I$ и J – достаточно малый интервал, содержащий точку x_0 и удовлетворяющий условиям леммы 1.11. Зафиксируем $\delta \in [0, v/2)$, тогда в силу определения множества $\mathcal{I}_0^t(\phi_\delta)$ и леммы 1.11 справедливо следующее

$$\mathcal{I}_0^t(\phi_\delta) = \cup_{s=0}^{t+1} \cup_{P \in \mathcal{P}_n^s} \mathcal{I}_0^t(P, \phi_\delta(t)) = S(\omega, K, T),$$

где $\omega = \phi_\delta(t) 2^{t(-n+1)}$, $K = \phi_\delta(t) 2^{-vt}$ и $T = 2^{t+2}$. Таким образом, в силу (4.34), величина ϵ, определенная в (1.47), удовлетворяет условию

$$\epsilon \ll 2^{-\frac{4\delta^* t}{n+1}},$$

и лемма 1.11 означает, что

$$\mu_1(\mathcal{I}_0^t(\phi_\delta)) \ll 2^{-\beta t},$$

где $\beta := \frac{4\delta^*}{(n+1)(2n-1)}$ – положительная постоянная. Суммируя последнюю оценку по всем $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, получаем

$$\sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mu_1\left(\mathcal{I}_0^t(\phi_\delta)\right) \ll \sum_{t=0}^{\infty} 2^{-\beta t} < \infty.$$

Следовательно, по лемме Бореля-Кантелли получаем, что $\mu_1(\Lambda_{\mathcal{H}}(\phi_\delta)) = 0$ для $\delta \in [0, \frac{v}{2})$.

4.3.2 Случай большой производной

Предложение 4.3. *Пусть $n \geq 2$. Тогда $\mu_1(\mathcal{L}_2(n, d, \Psi)) = 0$.*

Доказательство. Обозначим через $D_n(H)$ множество точек $x \in I$, для которых существует многочлен $P \in \mathcal{P}_n(H)$, удовлетворяющий (4.35). Тогда $\mathcal{L}_2(n, d, \Psi) = \cap_{N=1}^{\infty} \cup_{H=N}^{\infty} D_n(H)$.

Определим множества

$$\mathcal{P}_n^j(H) = \{P \in \mathcal{P}_n(H) : j = \max_{|a_k|=H,\, 0\le k\le n} k\}, \qquad j = 0, \dots, n.$$

Тогда имеем $\mathcal{P}_n(H) = \cup_{j=0}^{n} \mathcal{P}_n^j(H)$. Для каждого многочлена $P \in \mathcal{P}_n^j(H)$ определим множество $\sigma_0(P, d)$ решений системы неравенств (4.35) из интервала I. Тогда множество $D_n(H)$ представимо в виде объединения $\cup_{j=0}^{n} \cup_{P\in\mathcal{P}_n^j(H)} \ \sigma_0(P, d)$.

Пусть $P_d(x) = P(x) + d$ для некоторого $P \in \mathcal{P}_n^j(H)$. Очевидно, что для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $P^{(j)}(x) = P_d^{(j)}(x)$, $j = 1, \dots, n$.

Случай 1: $n \ge 3$. Для каждого многочлена P_d с корнем $\alpha \in \mathbb{C}$, для которого соответственно $P \in \mathcal{P}_n^j(H)$, используя (1.13), определим интервал

$$|x - \alpha| \le n|P(x) + d||P'(x)|^{-1} < n\Psi(H)H^{v} \tag{4.51}$$

для $x \in (I \cap S_{P_d}(\alpha) \cap \sigma_0(P, d))$, $P'(x) \ne 0$, где $S_{P_d}(\alpha)$ – множество действительных чисел x, удаленных от α не более, чем от других корней многочлена P_d. Используя разложение $P' = P_d'$ в ряд Тейлора в окрестности корня α, покажем, что значение производной P' в корне α соизмеримо со значением производной в точках x, принадлежащих интервалу (4.51). Используя (4.32), (4.34) и факт, что $n \ge 3$, оценим каждый член разложения и получим

$$|P^{(j)}(\alpha)(x-\alpha)^{j-1}| \ll H(\Psi(H)H^{v})^{j-1} \ll H^{1+(j-1)(-n+1+v)} < H^{-v-\varepsilon},\ j = 2, \dots, n$$

для некоторой постоянной $\epsilon > 0$ и достаточно большого H. Далее, поскольку $|P'(x)| \ge H^{-v}$, то получаем

$$H^{-v}/2 \le |P'(x)|/2 < |P'(\alpha)| < 2|P'(x)|.$$

Следовательно, интервал (4.51) содержится в интервале, задаваемом неравенством

$$\sigma(P_d, \alpha) :\ |x - \alpha| < 2n|P(x) + d||P'(\alpha)|^{-1} < 2n\Psi(H)|P'(\alpha)|^{-1}. \tag{4.52}$$

Для каждого многочлена $P \in \mathcal{P}_n^j(H)$ определим множество

$$A_{P_d} = \{\alpha \in (\theta - 4n\Psi(H)H^{v}, 1 + 4n\Psi(H)H^{v})\ : P_d(\alpha) = 0 \ \text{ и } \ |P'(\alpha)| > H^{-v}/2\}.$$

Тогда, для каждого многочлена $P \in \mathcal{P}_n^j(H)$ имеем включение $\sigma_0(P, d) \subset \sigma(P_d) = \cup_{\alpha\in A_{P_d}} \sigma(P_d, \alpha)$. Далее доказательство разбивается на три случая в зависимости от размера величины $P'(\alpha)$, когда $x \in S_{P_d}(\alpha)$. Для этого дополнительно определим три непересекающихся набора корней многочлена P_d:

$$\begin{aligned} A_{P_d}^{(1)} &= \{\alpha \in A_{P_d},\ \text{удовлетворяющие условию} \quad |P'(\alpha)| > c_0 H^{1/2}\},\\ A_{P_d}^{(2)} &= \{\alpha \in A_{P_d},\ \text{удовлетворяющие условию} \quad 1 < |P'(\alpha)| \le c_0 H^{1/2}\},\\ A_{P_d}^{(3)} &= \{\alpha \in A_{P_d},\ \text{удовлетворяющие условию} \quad H^{-v}/2 < |P'(\alpha)| \le 1\}, \end{aligned}$$

где $c_0 \in \mathbb{R}^{+}$.

Предложение 4.4. *Пусть* $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\Psi(h) < \infty$. *Тогда множество точек* $x \in I$, *удовлетворяющих условиям*

$$\begin{gathered} x \in S_{P_d}(\alpha), \quad \alpha \in A^{(1)}_{P_d}, \\ |P_d(x)| = |P(x)+d| < \Psi(H(P)), \quad |P'(x)| \geq H(P)^{-v} \end{gathered} \tag{4.53}$$

для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n$, *имеет меру нуль.*

Доказательство. Для каждого многочлена P_d с корнем $\alpha \in A^{(1)}_{P,d}$, для которого соответсвующий многочлен $P \in \mathcal{P}^j_n(H)$, и постоянной $c_1 = c_1(n,d)$ (которая будет выбрана ниже) определим интервал $\sigma_1(P_d,\alpha)$ как множество точек $x \in I$, удовлетворяющих условию

$$|x-\alpha| < c_1|P'(\alpha)|^{-1}.$$

Используя (4.52), получаем, что справедливо включение $\sigma(P_d,\alpha) \subset \sigma_1(P_d,\alpha)$ для достаточно большого H, и находим

$$\mu_1(\sigma(P_d,\alpha)) < 2nc_1^{-1}\Psi(H)\mu_1(\sigma_1(P_d,\alpha)). \tag{4.54}$$

Далее разложим многочлен P_d в ряд Тейлора на $\sigma_1(P_d,\alpha)$. Оценивая каждый член разложения, получаем

$$\begin{aligned} |P_d(\alpha)| = |P(\alpha)+d| &= 0, \\ |P'(\alpha)(x-\alpha)| &< c_1, \\ |P^{(j)}(\alpha)(x-\alpha)^j| &< c_1^j n^{j+1} H(P)(c_0 H(P)^{1/2})^{-j} \leq n^3 c_1^2 c_0^{-2}, \quad 2 \leq j \leq n \end{aligned}$$

для достаточно большого H. Выберем постоянную $c_1 = c_1(\theta) < \theta/8$ так, что $n^4 c_1 c_0^{-2} < 1$. Тогда получаем $|P(x)+d| < 2c_1$ для достаточно большого H.

Зафиксируем вектор $\mathbf{b_1} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{i+1}, a_{i-1}, \ldots, H, \ldots, a_0)$, где $|a_j| = H$, $i \neq j$, $i \neq 0$, и обозначим через $\mathcal{P}^j_{n,\mathbf{b}_1}(H)$ множество многочленов $P \in \mathcal{P}^j_n(H)$ с одним и тем же вектором $\mathbf{b}_1$. Тогда имеем $\mathcal{P}^j_n(H) = \cup_{\mathbf{b}_1}\mathcal{P}^j_{n,\mathbf{b}_1}(H)$, и число таких векторов $\mathbf{b}_1$ оценивается как $\ll H^{n-1}$. Пусть $P, \tilde{P} \in P^j_{n,\mathbf{b}_1}(H)$, где $P \neq \tilde{P}$, и предположим, что $\sigma_1(P_d,\alpha) \bigcap \left(\cup_{\tilde{\alpha} \in A^{(1)}_{\tilde{P},d}} \sigma_1(\tilde{P}_d,\tilde{\alpha})\right) \neq \emptyset$. Рассмотрим многочлен $R(x) = \tilde{P}_d(x) - P_d(x) = a'_i x^i$ для некоторого коэффициента $a'_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Тогда, в силу (4.33) и выбора постоянной c_1, получаем противоречивое неравенство

$$\theta < |R(x)| \leq 4c_1 < \theta/2.$$

Следовательно, $\sigma_1(P_d,\alpha) \cap \left(\cup_{\tilde{\alpha} \in A^{(1)}_{\tilde{P},d}} \sigma_1(\tilde{P}_d,\tilde{\alpha})\right) = \emptyset$ и

$$\sum_{P \in P^j_{n,\mathbf{b}_1}(H)} \sum_{\alpha \in A^{(1)}_{P_d}} \mu_1(\sigma_1(P_d,\alpha)) \leq \mu_1(I).$$

Объединяя последнюю оценку и (4.54), находим

$$\sum_{P\in P^j_{n,\mathbf{b}_1}(H)}\ \sum_{\alpha\in A^{(1)}_{P_d}} \mu_1(\sigma(P_d,\alpha)) \ll \Psi(H)\mu_1(I).$$

Суммируя по всем векторам $\mathbf{b}_1$ и j, получаем

$$\sum_{H=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\ \sum_{\mathbf{b}_1\in\mathbb{Z}^{n-1},|\mathbf{b}_1|\le H}\ \sum_{P\in P^j_{n,\mathbf{b}_1}(H)}\ \sum_{\alpha\in A^{(1)}_{P_d}} \mu_1(\sigma(P_d,\alpha)) \ll \sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\Psi(H)\mu_1(I) < \infty.$$

Применение леммы Бореля-Кантелли завершает доказательство. □

Предложение 4.5. *Пусть* $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\Psi(h) < \infty$. *Тогда множество точек* $x \in I$, *удовлетворяющих условиям*

$$\begin{gathered} x \in S_{P_d}(\alpha),\ \ \alpha \in A^{(2)}_{P_d}, \\ |P_d(x)| = |P(x)+d| < \Psi(H(P)), \quad |P'(x)| \ge H(P)^{-v} \end{gathered} \tag{4.55}$$

для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n$, *имеет меру нуль.*

Доказательство. Для каждого многочлена P_d с корнем $\alpha \in A^{(2)}_{P,d}$, для которого соответствующий многочлен $P \in \mathcal{P}^j_n(H)$, определим интервал $\sigma_2(P_d,\alpha) \supset \sigma(P_d,\alpha)$ как множество точек $x \in I$, удовлетворяющих условию

$$|x-\alpha| < H^{-1}|P'(\alpha)|^{-1}.$$

Используя определения для $\sigma(P_d,\alpha)$ и $\sigma_2(P_d,\alpha)$, получаем

$$\mu_1(\sigma(P_d,\alpha)) < 2nH\Psi(H)\mu_1(\sigma_2(P_d,\alpha)). \tag{4.56}$$

Для $n > 2$ зафиксируем вектор

$$\mathbf{b}_2 = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{l+1}, a_{l-1}, \ldots, H, \ldots, a_{k+1}, a_{k-1}, \ldots, a_0),$$

где $|a_j| = H$, $l,k \ne j$, $l,k \ne 0$, и $l > k$. Обозначим через $\mathcal{P}^j_{n,\mathbf{b}_2}(H)$ множество многочленов $P \in \mathcal{P}^j_n(H)$ с одним и тем же вектором $\mathbf{b}_2$. Тогда имеем $\mathcal{P}^j_n(H) = \cup_{\mathbf{b}_2}\mathcal{P}^j_{n,\mathbf{b}_2}(H)$, и число таких векторов $\mathbf{b}_2$ оценивается как $\ll H^{n-2}$. Далее воспользуемся методом существенных и несущественных областей Спринджука (см. [40]).

Сначала рассмотрим существенные интервалы $\sigma_2(P_d,\alpha)$. Поскольку точка x принадлежит не более чем двум существенным интервалам, то имеем

$$\sum_{P\in\mathcal{P}^j_{n,\mathbf{b}_2}(H)}\ \sum_{\substack{\alpha\in A^{(2)}_{P_d} \\ \sigma_2(P_d,\alpha)\ \text{существенный}}} \mu_1(\sigma_2(P_d,\alpha)) \ll \mu_1(I).$$

Суммируя по всем векторам $\mathbf{b}_2$ и используя (4.56), получаем

$$\sum_{\mathbf{b}_2\in\mathbb{Z}^{n-2},|\mathbf{b}_2|\le H}\ \sum_{P\in\mathcal{P}^j_{n,\mathbf{b}_2}(H)}\ \sum_{\substack{\alpha\in A^{(2)}_{P_d} \\ \sigma_2(P_d,\alpha)\ \text{существенный}}} \mu_1(\sigma(P_d,\alpha)) \ll H^{n-1}\Psi(H)\mu_1(I).$$

Поскольку ряд $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\Psi(H)$ сходится, то получаем

$$\sum_{H=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{\mathbf{b}_2\in\mathbb{Z}^{n-2},|\mathbf{b}_2|\le H}\ \sum_{P\in\mathcal{P}^j_{n,\mathbf{b}_2}(H)}\ \sum_{\substack{\alpha\in A^{(2)}_{P_d}\\ \sigma_2(P_d,\alpha)\ \text{существенный}}} \mu_1(\sigma(P_d,\alpha))<\infty.$$

Таким образом, по лемме Бореля-Кантелли множество точек x, удовлетворяющих (4.35) и попадающих в бесконечное число существенных областей $\sigma_2(P_d,\alpha)$, имеет меру нуль.

Далее рассмотрим несущественные интервалы $\sigma_2(P_d,\alpha)$. Сначала оценим сверху абсолютное значение многочлена P_d, где $P\in P^j_{n,\mathbf{b}_2}(H)$, и его производной P'_d на $\sigma_2(P_d,\alpha)$. Каждый многочлен P_d, где $P\in P^j_{n,\mathbf{b}_2}(H)$, разложим в ряд Тейлора на интервале $\sigma_2(P_d,\alpha)$, и оценим сверху каждый член разложения:

$$\begin{aligned}|P'(\alpha)(x-\alpha)| &< H^{-1},\\ |P^{(j)}(\alpha)(x-\alpha)^j| &\ll H^{1-j}|P'(\alpha)|^{-j}\ll H^{1-j},\ 2\le j\le n.\end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из определения множества $A^{(2)}_{P_d}$. Таким образом, на $\sigma_2(P_d,\alpha)$ справедливо неравенство

$$|P(x)+d|\ll H^{-1}. \tag{4.57}$$

Аналогично, раскладывая $P'=P'_d$ в ряд Тейлора на $\sigma_2(P_d,\alpha)$, получим

$$\begin{aligned}|P'(x)| &\le |P'(\alpha)|+\sum_{j=2}^{n}((j-1)!)^{-1}|P^{(j)}(\alpha)(x-\alpha)^{j-1}| \qquad (4.58)\\ &\ll H^{1/2}+\sum_{j=2}^{n}H^{2-j}|P'(\alpha)|^{-(j-1)}\ll H^{1/2}.\end{aligned}$$

Далее рассмотрим многочлен $R(x)=\tilde{P}_d(x)-P_d(x)=a'_kx^k+a'_lx^l$, где $a'_k,a'_l\in\mathbb{Z}$ и a'_k,a'_l одновременно не равны нулю, а также оба многочлена P_d и $\tilde{P}_d$ принадлежат множеству $P^j_{n,\mathbf{b}_2}(H)$. Согласно (4.57) и (4.58), следующие неравенства

$$|R(x)|\ll H^{-1},\ \ |R'(x)|\ll H^{1/2}$$

выполняются на множестве $\sigma_2(P_d,\alpha)\cap\sigma_2(\tilde{P}_d,\tilde{\alpha})$. Используя последние два неравенства, легко проверить, что $|a'_i|\ll H^{1/2}$ для $i=k,l$, и, следовательно, высота многочлена R удовлетворяет условию $H(R)\ll H^{1/2}$. Перейдя к высоте многочлена R, получаем $|a'_kx^k+a'_lx^l|\ll H(R)^{-2}$. Разделив на x^k обе части неравенства и воспользовавшись оценкой (4.33), получаем неравенство $|a'_lx^{l-k}+a'_k|\ll H(R)^{-2}$, которое выполняется бесконечно часто только на множестве меры нуль согласно теореме Хинчина. Следовательно, мера пересечения $\sigma_2(P_d,\alpha)\cap\sigma_2(\tilde{P}_d,\tilde{\alpha})$ равна нулю, и мера множества точек x, удовлетворяющих (4.35) и принадлежащих бесконечному числу несущественных интервалов, равна нулю. □

Предложение 4.6. *Пусть $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\Psi(h) < \infty$. Тогда множество точек $x \in I$, удовлетворяющих условиям*

$$\begin{gathered} x \in S_{P_d}(\alpha), \;\; \alpha \in A_{P_d}^{(3)}, \\ |P_d(x)| = |P(x)+d| < \Psi(H(P)), \quad |P'(x)| \geq H(P)^{-v} \end{gathered} \tag{4.59}$$

для бесконечного числа многочленов $P \in \mathcal{P}_n$, имеет меру нуль.

Доказательство. Проводится аналогично доказательству предложения 4.5. Для каждого многочлена P_d с корнем $\alpha \in A_{P,d}^{(3)}$, для которого соответствующий многочлен $P \in \mathcal{P}_n^j(H)$, определим интервал $\sigma_2(P_d,\alpha)$ как и выше. Далее для $n > 2$ зафиксируем вектор $\mathbf{b}_2$.

Как и в предыдущем предложении рассмотрим существенные и несущественные интервалы $\sigma_2(P_d,\alpha)$. Суммируя по всем существенным интервалам $\sigma_2(P_d,\alpha)$, получаем

$$\sum_{H=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{\substack{\mathbf{b}_2\in\mathbb{Z}^{n-2},\\ |\mathbf{b}_2|\leq H}}\sum_{P\in\mathcal{P}_{n,\mathbf{b}_2}^{j}(H)}\sum_{\substack{\alpha\in A_{P_d}^{(3)}\\ \sigma_2(P_d,\alpha)\text{ существ.}}}\mu_1(\sigma(P_d,\alpha)) \ll \sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\Psi(H)\mu_1(I) < \infty.$$

Согласно лемме Бореля-Кантелли, мера множества точек x, удовлетворяющих (4.35) и принадлежащих бесконечному числу существенных интервалов, равна нулю.

Далее рассмотрим несущественные интервалы $\sigma_2(P_d,\alpha)$. Раскладывая P_d в ряд Тейлора на $\sigma_2(P_d,\alpha)$, получаем

$$\begin{aligned} |P'(\alpha)(x-\alpha)| &< H^{-1}, \\ |P^{(j)}(\alpha)(x-\alpha)^j| &\ll HH^{-j}|P'(\alpha)|^{-j} \ll H^{2v-1},\; 2\leq j\leq n. \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо в силу условия $v < 1/3$. Следовательно, для точек $x \in \sigma_2(P_d,\alpha)$ выполняется неравенство

$$|P_d(x)| = |P(x)+d| \ll H^{2v-1}. \tag{4.60}$$

Аналогично, раскладывая P' в ряд Тейлора на $\sigma_2(P_d,\alpha)$, получаем

$$\begin{aligned} |P'(x)| &\leq |P'(\alpha)| + \textstyle\sum_{j=2}^{n}((j-1)!)^{-1}|P^{(j)}(\alpha)(x-\alpha)^{j-1}| \\ &\ll 1 + \textstyle\sum_{j=2}^{n} HH^{-j+1}|P'(\alpha)|^{-(j-1)}| \ll H^{v}, \end{aligned} \tag{4.61}$$

поскольку $v < 1/3$.

Как и выше, рассмотрим многочлен $R(x) = \tilde{P}_d(x) - P_d(x)$, где $P_d, \tilde{P}_d \in P_{n,\mathbf{b}_2}^{j}(H)$, и $x \in \sigma_2(P_d,\alpha) \cap \sigma_2(\tilde{P}_d,\tilde{\alpha})$. Для многочлена R справедливы оценки $|R(x)| \ll H^{2v-1}$ и $|R_6'(x)| \ll H^{v}$, которые следуют из (4.60) и (4.61). Легко проверить, как и в предложении 4.5, что справедлива оценка $|a_i'| \ll H^{v}$ $(i = k,l)$, следовательно, высота многочлена R удовлетворяет условию $H(R) = \max\{|a_k'|,|a_l'|\} \ll H^{v}$. В силу (4.33) и (4.60), имеем

$|R(x)| = |a'_l x^{l-k} + a'_k| \ll H(R)^{(2v-1)/v} \ll H(R)^{-(1+\epsilon')}$ для $v < 1/3$ и $\epsilon' > 0$. Согласно теореме Хинчина, последнее неравенство выполняется бесконечно часто только на множестве меры нуль. Следовательно, мера пересечения $\sigma_2(P_d, \alpha) \cap \sigma_2(\tilde{P}_d, \tilde{\alpha})$ равна нулю, и мера множества точек x, удовлетворяющих (4.35) и принадлежащих бесконечному числу несущественных интервалов, также равна нулю. Три последних предложения завершают доказательство случая большой производной в случае $n \geq 3$.

Случай 2: $n = 2$**.** Доказательство в этом случае распадается на два подслучая: $|P'(x)| > c_2$ и $H^{-v} \leq |P'(x)| \leq c_2$ для некоторой постоянной $c_2 \geq 1$.

Если $|P'(x)| > c_2$, то доказательство проводится аналогично как в случае $n \geq 3$ и предложениях 4.4, 4.5 за исключением того, что вместо множеств $\mathcal{P}_2^{\mathbf{b}_2}(H)$ рассматриваем множество $\mathcal{P}_2(H)$ в предложении 4.5.

Если $H^{-v} \leq |P'(x)| \leq c_2$, то для получения оценки, аналогичной (4.52), в данном случае воспользуемся следующей леммой.

Лемма 4.5. *[50] Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ и даны неотрицательные числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ такие, что $\alpha_0, \beta_k > 0$ и $\alpha_j > \beta_j$ для $j = 1, \ldots, k-1$. Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ функция такая, что $f \in C^{(k)}$ и $\inf_{x\in(a,b)} |f^{(k)(x)}| \geq \beta_k$. Тогда множество точек $x \in (a,b)$, удовлетворяющих системе неравенств*

$$|f(x)| \leq \alpha_0, \ \ \beta_j \leq |f^{(j)}(x)| \leq \alpha_j \ \ (j = 1, \ldots, k-1)$$

есть объединение не более $k(k+1)/2 + 1$ интервалов, длина каждого из которых не превосходит $\min_{0\leq i<j\leq k} 3^{(j-i+1)/2}(\alpha_i/\beta_j)^{1/(j-i)}$.

Для данного многочлена $P \in \mathcal{P}_2(H)$ переопределим множество $\sigma_0(P,d)$ как множество решений $|P(x) + d| < \Psi(H)$ и $H^{-v} \leq |P'(x)| \leq c_2$. Поскольку $P''(x) = 2a_2$, то можем применить лемму 4.5 к многочлену P_d, где $k = 2$ и

$$\alpha_0 = \Psi(H), \ \ \alpha_1 = c_2, \ \ \beta_1 \inf_{x\in\sigma_0(P,d)} |P'(x)| \geq H^{-v}, \ \ \beta_2 = 2.$$

Далее заключаем, что $\sigma_0(P,d)$ – объединение не более 4 интервалов длины $\ll \frac{\alpha_0}{\beta_1}$ при $v < 1/2$. Для каждого многочлена P_d определим точку $\gamma \in \sigma_0(P,d)$ такую, что $\inf_{x\in\sigma_0(P,d)} |P'(x)| \geq |P'(\gamma)|/2$. Тогда $\mu(\sigma_0(P,d)) \ll \Psi(H)|P'(\gamma)|^{-1}$. В силу выбора γ получаем, что $H^{-v} \leq |P'(\gamma)| \leq c_2$. Затем доказательство проводится аналогично как и в предложении 4.6, за исключением того, что вместо множеств $\mathcal{P}_2^{\mathbf{b}_2}(H)$ рассматриваем множество $\mathcal{P}_2(H)$ и вместо α рассматриваем γ.

Это завершает доказательство случая $n = 2$, и, следовательно, доказательство предложения 4.3. □

5 Приложение

5.1 О числе многочленов с малыми дискриминантами в $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$

В данном разделе изучается распределение дискриминантов целочисленных многочленов. В частности, получена нижняя оценка для числа полиномов с малыми дискриминантами одновременно в Евклидовой и p-адической метриках. Поскольку p-адическая норма таких дискриминантов мала, то ясно, что они делятся на большую степень простого числа p. Это дает некоторую информацию относительно распределения корней полиномов и показывает, что существует большое число целочисленных полиномов, имеющих корни, одновременно близкие по p-адической и Евклидовой норме. Этот и другие, тесно связанные с данным вопросом, были впервые поставлены и изучались Малером [114] в 1964. Другие результаты (см. ниже) были отдельно доказаны в поле действительных чисел [64] и p-адических чисел [65]. Более подробную информацию о разделении корней целочисленных многочленов можно найти в [57, 88, 89, 96, 123].

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – комплексные корни многочлена $P \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P = n$. *Дискриминант* полинома P, обозначаемый через $D(P)$, определяется как

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Кроме того, существует другая форма записи $D(P)$ в виде определителя матрицы, состоящей из коэффициентов P. Поэтому $D(P) \in \mathbb{Z}$ и, если P не имеет кратных корней, то

$$1 \le |D(P)| \ll H(P)^{2n-2}.$$

Пусть $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ и определим подкласс полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q, v_1, v_2) = \{P \in \mathcal{P}_n(Q), 1 \le |D(P)| < Q^{2n-2-2v_1}, |D(P)|_p < Q^{-2v_2}\}.$$

В данном разделе рассмотрим $\mathcal{P}_n(Q, v_1, v_1)$ и для простоты будем писать $\mathcal{P}_n(Q, v_1) = \mathcal{P}_n(Q, v_1, v_1)$. Определим произведение мер μ_5 на $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$, полагая $\mu_5(E) = \mu_1(E_1)\mu_3(E_2)$ для множества $E = E_1 \times E_2$, где $E_1 \subset \mathbb{R}$ и $E_2 \subset \mathbb{Q}_p$.

Теорема 5.1. *Пусть $n \ge 3$ и $0 \le v_1 < 1/3$. Тогда для всех достаточно больших $Q > 1$ верно*

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v_1) \gg Q^{n+1-4v_1}.$$

В работе [64] было доказано, что $\#\mathcal{P}_n(Q, v_1, 0) \gg Q^{n+1-2v_1}$, а в работе [65] получена оценка $\#\mathcal{P}_n(Q, 0, v_2) \gg Q^{n+1-2v_2}$. Эти результаты вытекают из метрических теорем о диофантовых приближениях в поле действительных чисел и поле p-адических чисел соответственно. Для доказательства теоремы 5.1 необходимо доказать метрическую теорему о совместных диофантовых приближениях в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}_p$. Отметим, что для $n=2$ дискриминант равен $D(P)=a_1^2-4a_0a_2$ и оценку для числа многочленов можно получить непосредственно. Рассмотрим коэффициенты a_2, удовлетворяющие условию $(a_2,p)=1$. Зафиксируем коэффициенты a_1 и a_2. Пусть $p^{-v}<Q^{-2v_1}\leq p^{-v+1}$. Тогда из условия на дискриминант в p-адичесой метрике получаем, что $a_0\equiv s \pmod{p^v}$ для некоторого s, $0\leq s\leq p-1$. Пусть $a_0=s+tp^v$, $t\in\mathbb{Z}$. Тогда из условия на дискриминант в Евклидовой метрике получаем, что число таких t удовлетворяет условию $\gg Q^{1-4v_1}$. Следовательно, $\#(a_0,a_1,a_2)\gg Q^{3-4v_1}$.

Далее будем полагать, что $n\geq 3$. Будем рассматривать подмножество $\bar{\mathcal{P}}_n(Q)\subset\mathcal{P}_n(Q)$, где $\bar{\mathcal{P}}_n(Q)$ – множество неприводимых многочленов $P\in\mathcal{P}_n(Q)$, удовлетворяющих условиям

$$|a_n|_p\gg 1,\quad |a_n|\geq H(P)/2,\quad \gcd(a_0,\ldots,a_n)=1. \tag{5.1}$$

(Заметим, что делитель 2 выбран для удобства, и в общем случае, может быть заменен на любую постоянную большую 1.)

Зафиксируем множество $I\times K$, где I – интервал, содержащийся в $[0,1)\subset\mathbb{R}$, и K – цилиндр в $\mathbb{Z}_p$. Далее зафиксируем действительные числа v_0 и v_1, удовлетворяющие условиям

$$0\leq v_1<1/3 \quad \text{и} \quad v_0+v_1=n/2. \tag{5.2}$$

Для действительных чисел c_0,δ_0 и $Q\in\mathbb{N}$ определим следующее множество. Обозначим через $\mathcal{K}_n=\mathcal{K}_n(v_0,v_1,c_0,\delta_0,Q)$ множество точек $(x,w)\in I\times K$, для которых существует многочлен $P\in\bar{\mathcal{P}}_n(Q)$ такой, что выполнена система неравенств

$$|P(x)|<c_0Q^{-v_0},\quad |P(w)|_p<c_0Q^{-v_0} \tag{5.3}$$

$$\delta_0Q^{1-v_1}<|P'(x)|<c_0Q^{1-v_1},\quad \delta_0Q^{-v_1}<|P'(w)|_p<c_0Q^{-v_1}. \tag{5.4}$$

Теорема 5.1 будет следовать из теоремы 5.2, приведенной ниже.

Теорема 5.2. *Пусть $n\geq 3$. Тогда для каждого действительного числа κ', где $0<\kappa'<1$, существуют постоянные δ_0 и c_0 такие, что*

$$\mu_5(\mathcal{K}_n(v_0,v_1,c_0,\delta_0,Q))>\kappa'\mu_5(I\times K)$$

для достаточно большого Q.

С помощью принципа Дирихле нетрудно доказать существование $c_0=(n+1)^{3/4}$, что оценки сверху в (5.3) и (5.4) выполняются для всех $(x,w)\in I\times K$. Доказательство существования δ_0 является основной трудностью работы.

Настоящий раздел основан на работе [83].

Прежде чем перейти к доказательству, введем некоторые определения и докажем дополнительные факты. Пусть $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$. Для комплексного корня α многочлена P и p-адического корня γ многочлена P определим множества

$$\begin{array}{rcl} S_P(\alpha) & = & \{x \in \mathbb{R} : \, |x-\alpha| = \min_{\alpha' \in \mathbb{C}: P(\alpha')=0} |x-\alpha'|\}, \\ T_P(\gamma) & = & \{w \in \mathbb{Q}_p : \, |w-\gamma|_p = \min_{\gamma' \in \mathbb{Q}_p^*: P(\gamma')=0} |w-\gamma'|_p\}. \end{array}$$

Таким образом, если $x \in S_P(\alpha)$, то ближайшим корнем многочлена P к точке x является α. Ясно, что каждая точка (x, w) лежит по крайней мере в одном множестве $S_P(\alpha) \times T_P(\gamma)$, и число различных множеств $S_P(\alpha) \times T_P(\gamma)$ для каждого многочлена P степени n не превосходит n^2. Пусть $E_0(P)$ – множество комплексных корней многочлена $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$, и пусть $U_0(P)$ – множество p-адических корней многочлена $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$.

Используя (5.1), нетрудно показать, что корни многочлена $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$ ограничены, т.е.

$$|\alpha_i| \leq 2n, \quad |\gamma_i|_p \leq p^{-n}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.5}$$

Доказательство этого факта можно найти в [40, стр. 13, 85].

Следующая лемма содержит неравенства, которые будут использоваться на протяжении всего раздела.

Лемма 5.1. *Пусть $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$ удовлетворяет неравенствам* (5.3) *и* (5.4) *для некоторой точки $(x, w) \in S_P(\alpha) \times T_P(\gamma)$. Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\begin{array}{rcll} |x-\alpha| & < & 2nc_0 Q^{-v_0} |P'(\alpha)|^{-1} & (5.6) \\ & < & 4nc_0 \delta_0^{-1} Q^{v_1 - v_0 - 1}, & (5.7) \\ |w-\gamma|_p & < & c_0 Q^{-v_0} |P'(\gamma)|_p^{-1} & (5.8) \\ & < & c_0 \delta_0^{-1} Q^{v_1 - v_0}. & (5.9) \end{array}$$

Доказательство. В (1.13) показано, что для $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$, $x \in S_P(\alpha)$ и $w \in T_P(\gamma)$ справедливы неравенства

$$|x-\alpha| \leq n|P(x)||P'(x)|^{-1}, \tag{5.10}$$

$$|w-\gamma|_p \leq |P(w)|_p |P'(w)|_p^{-1}. \tag{5.11}$$

Рассматривая разложение P' в ряд Тейлора, сравним значения P' в корнях α и γ со значениями P' в точках $(x, w) \in S_P(\alpha) \times T_P(\gamma)$. Приведем вычисления для действительной переменной. В случае p-адической переменной рассуждения аналогичны. Отметим, что поскольку $v_1 < \frac{1}{3}$ и $n \geq 3$, то уравнение $v_0 + v_1 = \frac{n}{2}$ означает, что

$$v_0 > 2v_1 + \beta, \tag{5.12}$$

для любого β, $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Оценим каждый член из разложения

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{n} ((i-1)!)^{-1} P^{(i)}(\alpha)(x-\alpha)^{i-1}$$

для $x \in S_P(\alpha)$, удовлетворяющих (5.3) и (5.4). Из (5.10) и (5.12) следует

$$\frac{1}{(j-1)!}|P^{(j)}(\alpha)||x-\alpha|^{j-1} \ll Q^{1+(j-1)(v_1-v_0-1)} < Q^{1-v_1-\beta},\ 2 \le j \le n, \quad (5.13)$$

для достаточно большого Q. Здесь, используя (5.5), воспользовались тривиальной оценкой $|P^{(i)}(\alpha)| \ll Q$. Таким образом, для $x \in S_P(\alpha)$, удовлетворяющих (5.3) и (5.4), справедливо

$$\frac{1}{2}\delta_0 Q^{1-v_1} < \frac{1}{2}|P'(x)| < |P'(\alpha)| < 2|P'(x)| < 2c_0 Q^{1-v_1}. \quad (5.14)$$

Аналогично, используя (5.11), (5.12) и свойства p-адической нормы, получаем

$$\delta_0 Q^{-v_1} < |P'(w)|_p = |P'(\gamma)|_p < c_0 Q^{-v_1} \quad (5.15)$$

для $w \in T_P(\gamma)$, удовлетворяющих (5.3) и (5.4). Отсюда легко показать справедливость оценок (5.6)–(5.9). $\square$

5.1.2 Доказательство теоремы 5.1, используя теорему 5.2

Определим множество $\mathcal{P}_n^{\mathcal{K}}(Q)$, состоящее из многочленов $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$, удовлетворяющих (5.3) и (5.4) для некоторой точки $(x, w) \in I \times K$.

Пусть $P \in \mathcal{P}_n^{\mathcal{K}}(Q)$. Пусть $E(P) \subseteq E_0(P)$ – множество комплексных корней и $U(P) \subseteq U_0(P)$ – множество p-адических корней многочлена $P \in \mathcal{P}_n^{\mathcal{K}}(Q)$, таких, что для ближайших точек x и w к корням многочлена P выполняются неравенства (5.3) и (5.4). Пусть $\sigma(\alpha,\gamma,P)$ обозначает множество решений неравенств (5.6) и (5.8), и пусть $\sigma(P) = \cup_{\alpha\in E(P)} \cup_{\gamma\in U(P)} \sigma(\alpha,\gamma,P)$.

Зафиксируем корни $\alpha_1 \in E(P)$ и $\gamma_1 \in U(P)$; упорядочим остальные корни P так, что

$$\begin{array}{lclcl} |\alpha_1-\alpha_2| & \le & |\alpha_1-\alpha_3| & \le \ldots \le & |\alpha_1-\alpha_n|, \\ |\gamma_1-\gamma_2|_p & \le & |\gamma_1-\gamma_3|_p & \le \ldots \le & |\gamma_1-\gamma_n|_p. \end{array}$$

Воспользуемся фактами, что $P'(\alpha_1) = a_n \prod_{i=2}^{n}(\alpha_1-\alpha_i)$ и $P'(\gamma_1) = a_n \prod_{i=1}^{n}(\gamma_1-\gamma_i)$, тогда формулы для дискриминанта примут вид

$$\begin{array}{rcl} |D(P)| & = & \left|a_n^{2n-2}\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)^2\right| = |P'(\alpha_1)|^2 \left|a_n^{2n-4}\prod_{2\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)^2\right|, \\ |D(P)|_p & = & \left|a_n^{2n-2}\prod_{1\le i<j\le n}(\gamma_i-\gamma_j)^2\right|_p = |P'(\gamma_1)|_p^2 \left|a_n^{2n-4}\prod_{2\le i<j\le n}(\gamma_i-\gamma_j)^2\right|_p. \end{array} \quad (5.16)$$

Поскольку все корни ограничены, то используя (5.14), (5.15) и (5.16), получаем

$$\begin{aligned} |D(P)| &\ll |P'(\alpha_1)|^2 Q^{2n-4} \ll Q^{2n-2-2v_1} \\ |D(P)|_p &\ll |a_n^{2n-4}|_p |P'(\gamma_1)|_p^2 \ll Q^{-2v_1}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Таким образом, каждый многочлен $P \in \mathcal{P}_n^{\mathcal{K}}(Q)$ удовлетворяет (5.17). Кроме того, выполняется неравенство (5.7) для каждого $\alpha \in E(P)$, где $x \in S_P(\alpha)$, а также неравенство (5.9) для каждого $\gamma \in U(P)$, где $w \in T_P(\gamma)$. Для каждого многочлена P справедлива следующая оценка

$$\mu_5\left(\bigcup_{\substack{\alpha\in E(P)\\ \gamma\in U(P)}} \sigma(\alpha,\gamma,P)\right) \le \mu_5\left(\bigcup_{\substack{\alpha\in E_0(P)\\ \gamma\in U_0(P)}} \sigma(\alpha,\gamma,P)\right) < 4n^3 c_0^2 \delta_0^{-2} Q^{2v_1-2v_0-1}.$$

Поскольку $\mathcal{K}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0, Q) \subset \cup_{P\in\mathcal{P}_n^{\mathcal{K}}(Q)} \bigcup_{\substack{\alpha\in E_0(P)\\ \gamma\in U_0(P)}} \sigma(\alpha,\gamma,P)$, то получаем

$$\kappa' \mu_5(I\times K) < \mu_5(\mathcal{K}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0, Q)) < \#\mathcal{P}_n^{\mathcal{K}}(Q) 4n^3 c_0^2 \delta_0^{-2} Q^{2v_1-2v_0-1}.$$

Последнее означает, что $\#\mathcal{P}_n^{\mathcal{K}}(Q) \gg Q^{2v_0-2v_1+1} = Q^{n+1-4v_1}$. Отметим, что в силу теоремы 5.2, величину κ' можно выбрать близкой к 1.

5.1.3 Доказательство теоремы 5.2

Предположим, что для некоторого $\delta_0 > 0$ нарушено одно или оба условия для оценок снизу в (5.4). В этом случае определим два множества. Пусть $\mathcal{K}_n'$ – множество точек $(x, w) \in I \times K$ таких что, если выполняются неравенства (5.3) для некоторого многочлена $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$, то также справедливы неравенства $|P'(x)| < c_0 Q^{1-v_1}$, $|P'(w)|_p < \delta_0 Q^{-v_1}$. Аналогично определим множество $\mathcal{K}_n''$ как множество точек $(x, w) \in I \times K$ таких что, если (5.3) выполняются для некоторого многочлена $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$, то неравенства $|P'(x)| < \delta_0 Q^{1-v_1}$, $|P'(w)|_p < c_0 Q^{-v_1}$ также выполняются.

Определим множество $\tilde{\mathcal{K}}_n = (I\times K) \setminus \mathcal{K}_n$. Тогда $\tilde{\mathcal{K}}_n \subseteq \mathcal{K}_n' \cup \mathcal{K}_n''$. Покажем, что $\mu_5(\mathcal{K}_n') < \frac{1-\kappa'}{2}\mu_5(I\times K)$. Используя ту же схему рассуждения, несложно получить аналогичный результат для $\mathcal{K}_n''$. Это, очевидно, означает, что $\mu_5(\mathcal{K}_n) > \kappa'\mu_5(I\times K)$.

Сначала рассмотрим случай, когда первая производная принимает малые значения. Отметим, что поскольку $v_1 < 1/3$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $v_1 = 1/3 - \varepsilon$. Выберем действительное число $\rho > 0$, удовлетворяющее условию $\rho < 3\varepsilon/2$, и обозначим через $\mathcal{B}_n$ множество $(x, w) \in \mathcal{K}_n'$, для которых существует многочлен $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$ такой, что справедлива система неравенств

$$Q^{1-v_1-\rho} < |P'(x)| < c_0 Q^{1-v_1}, \quad Q^{-v_1-\rho} < |P'(w)|_p < \delta_0 Q^{-v_1}. \tag{5.18}$$

Пусть $\mathcal{B}'_n$ определяется из разложения $\mathcal{K}'_n = \mathcal{B}_n \cup \mathcal{B}'_n$. Согласно леммы 3.10, мера множества $\mathcal{B}'_n$ стремится к нулю при $Q \to \infty$. Следовательно, $\mu_5(\mathcal{B}'_n) < \frac{1-\kappa'}{4}\mu_5(I \times K)$ для достаточно большого Q. Осталось показать, что $\mu_5(\mathcal{B}_n) \le \frac{1-\kappa'}{4}\mu_5(I \times K)$ для достаточно малого δ_0.

Обозначим через $\mathcal{P}_n^{\mathcal{B}}(Q)$ множество многочленов $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$, удовлетворяющих (5.3) и (5.18) для некоторой точки $(x, w) \in I \times K$. Для каждого многочлена $P \in \mathcal{P}_n^{\mathcal{B}}(Q)$ определим подмножество $E'(P) \subseteq E_0(P)$ как множество корней α, для которых существует точка $x \in S_P(\alpha)$, удовлетворяющая неравенствам (5.3) и (5.18). Аналогично, для каждого многочлена $P \in \mathcal{P}_n^{\mathcal{B}}(Q)$ определим подмножество $U'(P) \subseteq U_0(P)$ как множество корней γ, для которых существует точка $w \in T_P(\gamma)$, удовлетворяющая неравенствам (5.3) и (5.18). Пусть $\sigma(P) = \cup_{\alpha\in E'(P)} \cup_{\gamma\in U'(P)} \sigma(\alpha, \gamma, P)$, тогда $\mathcal{B}_n \subseteq \cup_{P\in\mathcal{P}_n^{\mathcal{B}}(Q)}\sigma(P)$. Далее покажем, что мера этого объединения множеств мала.

Пусть $P \in \mathcal{P}_n^{\mathcal{B}}(Q)$. Прежде всего, сравним значения P' в корнях α и γ со значениями P' в точках $(x, w) \in S_P(\alpha) \times T_P(\gamma)$. Из неравенств (5.3), (5.18), (5.10) и (5.11) следует, что

$$|x - \alpha| < nc_0Q^{v_1-v_0-1+\rho}, \quad |w - \gamma|_p < c_0Q^{v_1-v_0+\rho}.$$

Используя разложение $P'(f)$ в ряд Тейлора и (5.12), следующие неравенства

$$\frac{1}{2}|P'(x)| < |P'(\alpha)| < 2|P'(x)|, \quad |P'(w)|_p = |P'(\gamma)|_p$$

могут быть получены аналогичным способом как в (5.14) и (5.15). Таким образом, из (5.18) получаем

$$\frac{1}{2}Q^{1-v_1-\rho} < |P'(\alpha)| < 2c_0Q^{1-v_1}, \quad Q^{-v_1-\rho} < |P'(\gamma)|_p < \delta_0Q^{-v_1}. \tag{5.19}$$

Выберем два действительных числа u_1 и $u_2 > 1/2$, удовлетворяющих следующей системе неравенств:

$$\begin{array}{rcl} u_1 + u_2 & = & 1 - 2v_1, \\ v_0 > u_1 & > & 2v_1 + 2\rho - 1 > v_1 - 1, \\ v_0 > u_2 & > & 2v_1 + 2\rho > v_1. \end{array} \tag{5.20}$$

Существование таких чисел легко проверить, используя условия для v_1, v_0 и ρ.

Для многочлена P с комплексным корнем α и p-адическим корнем γ определим множество $\sigma_1(\alpha, \gamma, P)$ как множество точек (x, w), удовлетворяющих неравенствам

$$|x - \alpha| < c_1Q^{-u_1}|P'(\alpha)|^{-1}, \quad |w - \gamma|_p < Q^{-u_2}|P'(\gamma)|_p^{-1} \tag{5.21}$$

для некоторой постоянной c_1, явный вид которой будет указан ниже. Из (5.20) следует, что $\sigma(\alpha,\gamma,P) \subset \sigma_1(\alpha,\gamma,P)$ для достаточно большого Q. Отметим, что $\mu_5(\sigma(\alpha,\gamma,P)) \leq \frac{2nc_0^2}{c_1} Q^{-2v_0+u_1+u_2} \mu_5(\sigma_1(\alpha,\gamma,P))$.

Рассмотрим разложение P в ряд Тейлора для каждой точки $\sigma_1(\alpha,\gamma,P)$ в окрестности корней и оценим каждый член разложения сверху. Покажем это на примере действительной переменной. Используя (5.19), (5.20), (5.21) и тривиальную оценку $P^{(j)}(\alpha) \ll Q$, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} |P'(\alpha)||x-\alpha| &< c_1 Q^{-u_1} \\ \frac{1}{j!}|P^{(j)}(\alpha_1)||x-\alpha_1|^j &\ll Q^{1-j(u_1+1-v_1-\rho)},\ 2 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Тогда получаем $|P(x)| < 2c_1 Q^{-u_1}$ на $\sigma_1(\alpha,\gamma,P)$ для достаточно большого Q.

Точно также как и выше, используя (5.19) и (5.20), оценим значение $|P'(x)|$ на $\sigma_1(\alpha,\gamma,P)$. Для этого вместо (5.28) воспользуемся оценками

$$\frac{1}{(j-1)!}|P^{(j)}(\alpha)||x-\alpha|^{j-1} \ll Q^{1-(j-1)(u_1+1-v_1-\rho)} < Q^{1-v_1-\varepsilon_1}, \quad j=2,\dots,n,$$

где $\varepsilon_1 > 0$, и получим, что $|P'(x)| < 3c_0 Q^{1-v_1}$ на $\sigma_1(\alpha,\gamma,P)$. Аналогично нетрудно проверить, что при $u_2 > 2v_1 + 2\rho$ выполняются неравенства

$$|P(w)|_p < Q^{-u_2},\ \ |P'(w)|_p < c_0 Q^{-v_1},$$

на $\sigma_1(\alpha,\gamma,P)$.

Многочлены из $\mathcal{P}_n^{\mathcal{B}}(Q)$ разобьем на множества, имеющие одинаковые коэффициенты при $x^2,\dots,x^n$. Для целых чисел a_i, $i=2,\dots,n$ пусть $\mathbf{b}$ обозначает $(n-1)$-набор $(a_n,\dots,a_2)$, и пусть $\mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{B}}(Q)$ – множество многочленов из $\mathcal{P}_n^{\mathcal{B}}(Q)$, у которых коэффициенты при x^i равны a_i для $i=2,\dots,n$. Заметим, что число векторов $\mathbf{b}$ не превосходит $(2Q+1)^{n-1} \leq (3Q)^{n-1}$. Далее воспользуемся вариацией метода Спринджука о существенных и несущественных областях (см. [40]). Параллелепипед $\sigma_1(\alpha,\gamma,P)$ назовем *существенным*, если $\mu_5(\sigma_1(\alpha,\gamma,P) \cap \sigma_1(\tilde{\alpha},\tilde{\gamma},\tilde{P})) \leq \frac{1}{2}\mu_5(\sigma_1(\alpha,\gamma,P))$ для всех многочленов $\tilde{P} \in \mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{B}}(Q)$, $\tilde{P} \neq P$, и всех корней $\tilde{\alpha},\tilde{\gamma}$ многочлена $\tilde{P}$. В противном случае параллелепипед $\sigma_1(\alpha,\gamma,P)$ назовем *несущественным*. Очевидно, что

$$\mathcal{B}_n \subseteq \bigcup_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^{n-1}:|\mathbf{b}|\leq Q} \ \bigcup_{P\in\mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{B}}(Q)} \ \bigcup_{\substack{\alpha\in E'(P)\\ \gamma\in U'(P)}} \sigma(\alpha,\gamma,P) = \mathcal{M}_c \bigcup \mathcal{M}_n,$$

где

$$\mathcal{M}_c = \bigcup_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^{n-1}:|\mathbf{b}|\leq Q} \ \bigcup_{P\in\mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{B}}(Q)} \ \bigcup_{\substack{\alpha\in E'(P)\\ \gamma\in U'(P)\\ \sigma_1(\alpha,\gamma,P)\ \text{существенный}}} \sigma(\alpha,\gamma,P)$$

и

$$\mathcal{M}_n = \bigcup_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^{n-1}:|\mathbf{b}|\le Q} \ \bigcup_{P\in\mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{B}}(Q)} \ \bigcup_{\substack{\alpha\in E'(P)\\ \gamma\in U'(P)\\ \sigma_1(\alpha,\gamma,P)\ \text{несущественный}}} \sigma(\alpha,\gamma,P).$$

Во-первых, рассмотрим существенные параллелепипеды. Поскольку точка (x,w) принадлежит не более, чем двум существенным параллелепипедам, то

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{B}}(Q)} \ \sum_{\substack{\alpha\in E'(P)\\ \gamma\in U'(P)\\ \sigma_1(\alpha,\gamma,P)\ \text{существенный}}} \mu_5(\sigma_1(\alpha,\gamma,P)) \le 2n^2\mu_5(I\times K).$$

Множитель n^2 возникает в силу того, что существует не более n^2 пар корней α,γ для каждого многочлена P, $\deg P = n$. Суммируя по всем векторам $\mathbf{b}$, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{b}} \sum_{P\in\mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{B}}(Q)} \sum_{\substack{\alpha\in E'(P)\\ \gamma\in U'(P)\\ \sigma_1(\alpha,\gamma,P)\ \text{сущ.}}} \mu_5(\sigma(\alpha,\gamma,P)) &< \frac{4n^3 3^{n-1}c_0^2}{c_1} Q^{n-1}Q^{-2v_0+u_1+u_2}\mu_5(I\times K)\\ &\le \frac{4n^3 3^{n-1}c_0^2}{c_1}\mu_5(I\times K)\end{aligned}$$

в силу равенства $n-1-2v_0+u_1+u_2=0$ из (5.20). Следовательно, выбирая $c_1 = \frac{32n^3 3^n c_0^2}{1-\kappa'}$, мера множества $\mu_5(\mathcal{M}_c)$ точек, принадлежащих параллелепипедам $\sigma(P)$, содержащихся в соответствующих существенных параллелепипедах, не превосходит $\frac{1-\kappa'}{8}\mu_5(I\times K)$.

Во-вторых, рассмотрим несущественные множества, поэтому полагаем, что $\sigma_1(\alpha,\gamma,P)$ – несущественный параллелепипед. Тогда, существует многочлен $\tilde{P}\in\mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{B}}(Q)$ такой, что $\mu_5(\sigma_1(\alpha,\gamma,P)\cap\sigma_1(\tilde\alpha,\tilde\gamma,\tilde P)) \ge \frac{1}{2}\mu_5(\sigma_1(\alpha,\gamma,P))$. Пусть $R = P-\tilde P$, тогда $R(f) = b_1 f + b_0$, и многочлен R удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} |b_1x+b_0| &< 4c_1Q^{-u_1}\\ |R'(x)| = |b_1| &< 6c_0Q^{1-v_1}\\ |b_1w+b_0|_p &< Q^{-u_2}\\ |R'(w)|_p = |b_1|_p &< \delta_0 Q^{-v_1} \end{aligned} \tag{5.22}$$

на $\sigma_1(\alpha,\gamma,P)\cap\sigma_1(\tilde\alpha,\tilde\gamma,\tilde P)$. Откуда следует, что $|b_i| < 6c_0Q^{1-v_1}$. Определим числа s_1 и s_2 так, что $p^{s_1}\le Q < p^{s_1+1}$ and $p^{s_2}\le\delta_0 < p^{s_2+1}$. Обозначим через $[\,.\,]$ целую часть числа. Тогда, поскольку $|b_1|_p < \delta_0Q^{-v_1} < p^{s_2+1-[s_1v_1]}$, имеем $b_1 = p^L b_1'$ для некоторого целого числа b_1', где $(b_1',p)=1$ и $L \ge [s_1v_1]-s_2$. Поскольку K – цилиндр, то можем записать его в виде $K = B(c,p^{-l})$, где $c\in\mathbb{Z}_p$ и $|c|_p = p^{-T}$ для некоторого T, $T<l$. Таким образом, если $w\in K$, то $|w|_p = p^{-T}$ и $|b_1w|_p = p^{-T-L}$. Далее необходимо рассмотреть два случая.

Во-первых, предположим, что $p^{-(T+L)} > Q^{-u_2}$. Тогда, поскольку $|b_1 w + b_0|_p < Q^{-u_2}$, имеем $|b_0|_p = |b_1 w|_p = p^{-T-L}$, следовательно, $b_0 = p^L b_0'$ для некоторого $b_0' \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $b_1 x + b_0 = p^L(b_1' x + b_0')$ и $|b_i'| < 6c_0 p^{-L} Q^{1-v_1}$ для $i = 0, 1$. Из (5.22) и предыдущих рассуждений следует, что

$$\begin{array}{lcl} |b_1' x + b_0'| & < & 4c_1 p^{-L} Q^{-u_1} \\ |b_1' w + b_0'|_p & < & p^L Q^{-u_2}. \end{array} \qquad (5.23)$$

Для каждого несущественного интервала эти неравенства выполняются для некоторых b_1', b_0'. Таким образом, задача сводится к нахождению меры множества точек (x, w), для которых вышеприведенная система выполняется для некоторых подходящих b_1', b_0'. Обозначим через $\mathcal{W}_1$ множество точек $(x, w) \in I \times K$, для которых система неравенств (5.23) выполняется для некоторой целочисленной пары (b_1', b_0'). Мера множества точек (x, w), удовлетворяющих последней системе для фиксированных b_0' и b_1', не превосходит

$$8c_1 \frac{Q^{-u_1-u_2}}{|b_1'||b_1'|_p} \leq \frac{8c_1 Q^{-u_1-u_2}}{|b_1'|},$$

так как b_1' – целое число и $(b_1', p) = 1$. Далее, для фиксированного b_1' найдем верхнюю оценку для количества чисел b_0' таких, что $b_0'/b_1' \in I$ и $b_0'/b_1' \in K$. Из последних двух включений получаем, что $b_0' \in b_1' I$ и $b_0'/b_1' = c + \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^{l+i}$, где $a_i \in \{0, \ldots, p-1\}$. Предположим, что дробь b_0'/b_1' принадлежит интервалу I и цилиндру K, а так же t/b_1' принадлежит цилиндру K. Тогда

$$\frac{t}{b_1'} = \frac{b_0'}{b_1'} + \sum_{i=0}^{\infty} m_i p^{l+i},$$

где $m_i \in \{0, \ldots, p-1\}$. Таким образом, имеем $t = b_0' + m_0 b_1' p^l + \cdots > b_0' + b_1' p^l$. Следовательно, $\frac{t}{b_1'} - \frac{b_0'}{b_1'} > p^l$ и количество t таких, что дробь t/b_1' принадлежит I и K, не превосходит $\frac{\mu_1(b_1' I)}{p^l} = |b_1'|\mu_5(I \times K)$. Поэтому, суммируя по всем b_1', удовлетворяющим условию $|b_1'| < 6c_0 p^{-L} Q^{1-v_1}$, получаем, что мера множества точек (x, w), удовлетворяющих системе (5.23), не превосходит

$$\begin{array}{rcl} 48c_0 c_1 p^{-L} Q^{1-u_1-u_2-v_1} \mu_5(I \times K) & \leq & 48c_0 c_1 \delta_0 p^{4+v_1} Q^{1-u_1-u_2-2v_1} \mu_5(I \times K) \\ & \leq & 48c_0 c_1 \delta_0 p^{4+v_1} \mu_5(I \times K). \end{array}$$

Здесь мы воспользовались определениями для s_1, s_2, L, и неравенствами (5.20). Ясно, что существует постоянная δ_0 такая, что мера множества точек (x, w), принадлежащих по крайней мере одному несущественному параллелепипеду, не превосходит $\frac{1-\kappa'}{16}\mu_5(I \times K)$ в данном случае.

Далее рассмотрим случай, когда $p^{-(T+L)} \leq Q^{-u_2}$. Тогда имеем $|b_0|_p < Q^{-u_2} \leq p^{-[s_1 u_2]}$, откуда находим $|b_0| \geq p^{1+[s_1 u_2]}$. Следовательно, для достаточно большого Q существует $b_0' \in \mathbb{Z}$ такое, что $b_0 = p^{[s_1 u_2]-T} b_0'$. Запишем коэффициент b_1 в виде $b_1 = p^L b_1' = p^{[s_1 u_2]-T} p^{L-[s_1 u_2]+T} b_1'$. Пусть $b_1'' = p^{L-[s_1 u_2]+T} b_1'$, тогда $\#b_1'' \le 12c_0 p^{T-[s_1u_2]}Q^{1-v_1}$ и $|b_1''|_p = p^{-(L-[s_1u_2]+T)}$ поскольку $(b_1', p) = 1$. Таким образом, имеем

$$\begin{array}{lcl} |b_1''x + b_0'| & < & 4c_1 p^{-[s_1u_2]+T}Q^{-u_1} \\ |b_1''w + b_0'|_p & < & p^{[s_1u_2]-T}Q^{-u_2}. \end{array} \tag{5.24}$$

Обозначим через $\mathcal{W}_2$ множество точек $(x, w) \in I \times K$, для которых система неравенств (5.24) выполняется для некоторой целочисленной пары (b_1'', b_0'). Снова мера множества точек (x, w), удовлетворяющих системе (5.24) для фиксированных b_0' и b_1'' не превосходит

$$8c_1 \frac{Q^{-u_1-u_2}}{|b_1''||b_1''|_p} \le 8c_1 \frac{Q^{-u_1-u_2}p^{L-[s_1u_2]+T}}{|b_1''|}.$$

Как и выше, количество коэффициентов b_0' для фиксированного b_1'' равно $|b_1''|\mu_5(I \times K)$. Следовательно, мера множества точек (x, w), удовлетворяющих системе (5.24) не превосходит

$$96c_0c_1p^{T-[s_1u_2]}Q^{1-v_1}Q^{-u_1-u_2}p^{L-[s_1u_2]+T} = 96c_0c_1Q^{1-u_1-u_2-v_1}p^{L-2[s_1u_2]+2T}\mu_5(I \times K).$$

Используя определение для s_1 и факт, что $p^L < 6c_0Q^{1-v_1}$, последняя оценка примет вид

$$\le 576c_0^2c_1p^{2+2T}Q^{1-2u_2}\mu_5(I \times K),$$

и может принимать сколь угодно малое значение для достаточно большого Q согласно (5.20).

Результатом в случае несущественных параллелепипедов является следующее:

$$\mathcal{M}_n \subset \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2, \quad \mu_5(\mathcal{M}_n) < \frac{1-\kappa'}{8}\mu_5(I \times K).$$

Это завершает доказательство теоремы.

5.2 Расстояние между сопряженными алгебраическими числами в $\mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p^*$

В данном разделе получен результат о числе целочисленных многочленов степени не менее трех, имеющих близкие сопряженные корни в комплексном и p-адическом полях одновременно.

Определим λ_n как инфимум действительных чисел w, для которых неравенство

$$|\alpha_1 - \alpha_2| > H(P)^{-w}$$

справедливо для любых корней $\alpha_1 \ne \alpha_2$ каждого неприводимого многочлена $P \in \mathcal{P}_n'$ с достаточно большой высотой $H(P)$. В 1964 г. Малер [114] доказал верхнюю оценку $\lambda_n \le n - 1$. Нетрудно проверить, что $\lambda_2 = 1$. Эвертс [96] и Шенхаге [123] независимо доказали, что $\lambda_3 = 2$. Бюжо и Миньот [86] построили специальные классы многочленов P и показали, что $\lambda_n \geq \frac{n+2}{4}$ для нечетных $n \geq 5$ и $\lambda_n \geq \frac{n}{2}$ для четных $n \geq 4$. Позднее, Бюжо и Дюжела [89] улучшили известные оценки снизу для λ_n, показав, что $\lambda_n \geq \frac{n}{2} + \frac{n-2}{4(n-1)}$ для $n \geq 4$. Классы многочленов, построенные в вышеприведенных работах, весьма экзотичны, и о их количестве ничего не известно. Альтернативный подход был предложен в работе [57] и было доказано, что $\lambda_n \geq (n+1)/3$ для всех $n \geq 2$. В работе [57] получена оценка для числа многочленов, у которых "близки" по крайней мере два действительных корня. Более точно, в следствии 2 показано, что существует не менее $Q^{\frac{n+1}{3}}$ многочленов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, корни которых удовлетворяют неравенству

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \ll Q^{-\frac{n+1}{3}}.$$

В данном разделе доказывается, что существует большое количество многочленов, у которых одновременно близки комплексные и p-адические корни. Достаточно рассмотреть подмножество $\bar{\mathcal{P}}_n(Q) \subset \mathcal{P}_n(Q)$.

Пусть $0 \leq v_1 < 1/3$ и $n \geq 3$.

Теорема 5.3. *Пусть N обозначает количество многочленов $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$, у которых по крайней мере два корня $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ и по крайней мере два корня $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Q}_p^*$ удовлетворяют условиям*

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \ll Q^{-v_1}, \qquad |\gamma_1 - \gamma_2|_p \ll Q^{-v_1}.$$

Пусть $Q_0 = Q_0(n) \in \mathbb{R}$ – достаточно большое число. Тогда для всех $Q > Q_0$ верно

$$N \gg Q^{n+1-4v_1}.$$

Этот вопрос тесно связан с вопросом о числе многочленов с "малыми" дискриминантами. Исследованиями последних проблем отдельно в действительном случае [64] и p-адическом случае [65] занимались Берник, Гетце и Куксо. В теореме 5.1 получена нижняя оценка для числа многочленов с "малыми" дискриминантами одновременно в действительной и p-адической метриках. Некоторые из применяемых выше методов будут использоваться и для доказательства следующей теоремы, являющейся важной частью доказательства теоремы 5.3, а также имеющей самостоятельный интерес. Нижеприведенная теорема – это существенное улучшение теоремы 5.2, так как покажем, что подмножество множества $\mathcal{K}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0, Q)$ имеет "большую" меру. Последняя часть доказательства теоремы 5.4 (для *несущественных областей*) подобна той, что приведена при доказательстве теоремы 5.2, и поэтому не будет проведена в полном объеме. Доказательство теоремы 5.3 будет проведено после доказательства теоремы 5.4.

Зафиксируем действительные числа v_0 и v_1, удовлетворяющие условиям (5.2). Для действительных чисел c_0, δ_0 и $Q \in \mathbb{N}$ определим следующее множество. Обозначим через $\mathcal{L}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0, Q)$ множество точек $(x, w) \in I \times K$, для которых существует многочлен $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$ такой, что выполнены неравенства (5.3) и (5.4) одновременно с неравенствами

$$|P''(x)| > \delta_0 Q, \quad |P''(w)|_p > \delta_0. \tag{5.25}$$

Далее определим множество $\mathcal{P}_n^{\mathcal{L}}(Q)$, состоящее из многочленов $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$, удовлетворяющих (5.3),(5.4) и (5.25) для некоторой точки $(x, w) \in I \times K$. Будет показано, что если $P \in \mathcal{P}_n^{\mathcal{L}}(Q)$, то по крайней мере существует по два близких корня в каждой из рассматриваемых метрик; таким образом, для доказательства теоремы 5.3 достаточно получить только нижную оценку для мощности множества $\mathcal{P}_n^{\mathcal{L}}(Q)$. Используя теорему 5.2, докажем следующий метрический результат.

Теорема 5.4. *Для каждого действительного числа κ, где $0 < \kappa < 1$, существуют постоянные δ_0 и c_0, зависящие только от n, такие, что*

$$\mu_5(\mathcal{L}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0, Q)) > \kappa \mu_5(I \times K)$$

для достаточно большого Q.

Настоящий раздел основан на работе [82].

5.2.1 Доказательство теоремы 5.4

В теореме 5.2 выберем δ_0' так, что

$$\mu_5(\mathcal{K}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0', Q)) > \kappa' \mu_5(I \times K).$$

Ясно, что для любого $\delta_0 < \delta_0'$

$$\mu_5(\mathcal{K}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0, Q)) \geq \mu_5(\mathcal{K}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0', Q)) > \kappa' \mu_5(I \times K).$$

Для доказательства теоремы 5.4 достаточно показать, что мера множества точек (x, w), удовлетворяющих (5.3), (5.4) и хотя бы одному из двух условий $|P''(x)| \leq \delta_0 Q$ или $|P''(w)|_p \leq \delta_0$, достаточно мала. Необходимо рассмотреть два множества. Пусть $\mathcal{F}_1$ – множество точек $(x, w) \in I \times K$ таких что, если выполняются неравенства (5.3) и (5.4) для некоторого многочлена $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$, то также справедливо неравенство $|P''(x)| \leq \delta_0 Q$. Аналогично определим множество $\mathcal{F}_2$ как множество точек $(x, w) \in I \times K$ таких что, если (5.3) и (5.4) выполняются для некоторого многочлена $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$, то неравенство $|P''(w)|_p \leq \delta_0$ также выполняется. Покажем, что для заданного $0 < \kappa < \kappa'$ можно выбрать δ_0 такое, что $\mu_5(\mathcal{F}_i) < \frac{\kappa' - \kappa}{2} \mu_5(I \times K)$, $i = 1, 2$. Доказательство в обоих случаях почти одинаковое, за исключением одного шага, где используются различные леммы, что позднее будет указано в деталях.

Обозначим через $\mathcal{P}_n^{\mathcal{F}}(Q)$ множество многочленов $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$, удовлетворяющих (5.3), (5.4) и $|P''(x)| \leq \delta_0 Q$ для некоторой точки $(x, w) \in I \times K$. Для каждого многочлена $P \in \mathcal{P}_n^{\mathcal{F}}(Q)$ определим подмножество $A(P) \subseteq E_0(P)$ как множество корней α, для которых существует точка $x \in S_P(\alpha)$, удовлетворяющая неравенствам (5.3), (5.4) и $|P''(x)| \leq \delta_0 Q$. Аналогично, для каждого многочлена $P \in \mathcal{P}_n^{\mathcal{F}}(Q)$ определим подмножество $G(P) \subseteq U_0(P)$ как множество корней γ, для которых существует точка $w \in T_P(\gamma)$, удовлетворяющая неравенствам (5.3), (5.4). Пусть $\sigma(\alpha, \gamma, P)$ обозначает множество решений неравенств (5.6) и (5.8), и пусть $\sigma(P) = \cup_{\alpha \in A(P)} \cup_{\gamma \in G(P)} \sigma(\alpha, \gamma, P)$. Ясно, что $\mathcal{F}_1 \subseteq \cup_{P \in \mathcal{P}_n^{\mathcal{F}}(Q)} \sigma(P)$. Далее покажем, что мера этого объединения множеств мала.

Далее будем следовать доказательству теоремы 5.2. Основные детали приведем в полном объеме, поскольку используются различные постоянные. Выберем два действительных числа u_1 и $u_2 > 1/2$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= 1 - 2v_1, \\ v_0 > u_1 &> 2v_1 - 1 \geq v_1 - 1, \\ v_0 > u_2 &> 2v_1. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Последнее возможно в силу условий (5.2) на v_1 и v_0. Первое равенство в (5.26) необходимо, поскольку нам нужно будет показать, что меры двух множеств “малы”, а сами множества ограничены сверху величиной $\delta_0 Q^{u_1+u_2-1+2v_1}$ и $\delta_0 Q^{-u_1-u_2+1-2v_1}$ соответственно. Ясно, что если нарушается указанное равенство, то одно из множеств может быть “большим”. Для многочлена P с корнем $\alpha \in \mathbb{C}$ и p-адическим корнем γ определим множество $\sigma_1(\alpha, \gamma, P)$ как множество точек (x, w), удовлетворяющих неравенствам

$$|x - \alpha| < Q^{-u_1}|P'(\alpha)|^{-1}, \;\; |w - \gamma|_p < Q^{-u_2}|P'(\gamma)|_p^{-1}. \tag{5.27}$$

Из (5.26) следует, что $\sigma(\alpha, \gamma, P) \subset \sigma_1(\alpha, \gamma, P)$. Рассмотрим разложение P в ряд Тейлора для каждой точки $\sigma_1(\alpha, \gamma, P)$ в окрестности корней и оценим каждый член разложения сверху. Снова проведем вычисления для действительной переменной. Используя (5.14), (5.26), (5.27) и тривиальную оценку $P^{(j)}(\alpha) \ll Q$, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} |P'(\alpha)||x - \alpha| &< Q^{-u_1}, \\ \frac{1}{j!}|P^{(j)}(\alpha)||x - \alpha|^j &\ll Q^{1-j(u_1+1-v_1)} < Q^{-u_1-\varepsilon}, \; 2 \leq j \leq n \end{aligned} \tag{5.28}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда

$$|P(x)| < 2Q^{-u_1} \;\text{ на }\; \sigma_1(\alpha, \gamma, P). \tag{5.29}$$

Используя аналогичное рассуждение как при доказательстве леммы 5.1 и рассматривая разложение P'' в ряд Тейлора в окрестности корней α и γ, получим

$$|P''(\alpha)| < 2\delta_0 Q, \quad |P''(\gamma)|_p < c_0.$$

Для действительного случая использовались оценки

$$\frac{1}{(j-2)!}P^{(j)}(\alpha)|x-\alpha|^{j-2} \ll Q^{1+(j-2)(v_1-v_0-1)} < Q^{1-\varepsilon}, j = 3,\ldots,n,$$

полученные по аналогии с (5.13).

Точно также как и выше, используя (5.14) и (5.26), оценим значения $|P'(x)|$ и $|P''(x)|$ на $\sigma_1(\alpha,\gamma,P)$. Для этого вместо (5.28) воспользуемся оценками

$$\begin{aligned}\frac{1}{(j-1)!}|P^{(j)}(\alpha)||x-\alpha|^{j-1} &\ll Q^{1-(j-1)(u_1+1-v_1)} < Q^{1-v_1-\varepsilon}, \quad j = 2,\ldots,n\\ \frac{1}{(j-2)!}|P^{(j)}(\alpha)||x-\alpha|^{j-2} &\ll Q^{1-(j-2)(u_1+1-v_1)} < Q^{1-\varepsilon}, \quad j = 3,\ldots,n\end{aligned}$$

и получим, что $|P'(x)| < 4c_0Q^{1-v_1}$ и $|P''(x)| < 4\delta_0 Q$ на $\sigma_1(\alpha,\gamma,P)$. Аналогично нетрудно проверить, что при $u_2 > 2v_1$ выполняются неравенства

$$|P(w)|_p < Q^{-u_2}, \quad |P'(w)|_p < c_0Q^{-v_1}, \quad |P''(w)|_p < c_0, \tag{5.30}$$

на $\sigma_1(\alpha,\gamma,P)$.

Многочлены из $\mathcal{P}_n^{\mathcal{F}}(Q)$ разобьем на множества, имеющие одинаковые коэффициенты при $x^2,\ldots,x^n$. Пусть $\mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{F}}(Q)$ – множество многочленов из $\mathcal{P}_n^{\mathcal{F}}(Q)$, у которых коэффициенты при x^i равны a_i для $i = 2,\ldots,n$. Далее снова воспользуемся вариацией метода Спринджука о существенных и несущественных областях (см. [40]). Очевидно, что $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, где

$$\mathcal{V}_1 = \bigcup_{\mathbf{b}\in D}\ \bigcup_{P\in\mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{F}}(Q)}\ \bigcup_{\substack{\alpha\in A(P)\\ \gamma\in G(P)\\ \sigma_1(\alpha,\gamma,P)\ \text{существенный}}} \sigma(\alpha,\gamma,P),$$

и

$$\mathcal{V}_2 = \bigcup_{\mathbf{b}\in\mathbb{Z}^{n-1}:|\mathbf{b}|\le Q}\ \bigcup_{P\in\mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{F}}(Q)}\ \bigcup_{\substack{\alpha\in A(P)\\ \gamma\in G(P)\\ \sigma_1(\alpha,\gamma,P)\ \text{несущественный}}} \sigma(\alpha,\gamma,P).$$

Сначала рассмотрим существенные параллелепипеды. Следующая лемма будет использована для нахождения числа векторов $\mathbf{b}$ таких, что $|P''(x)| < 4\delta_0 Q$ для $P \in \mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{F}}(Q)$.

Лемма 5.2. *Пусть на отрезке $J = [a,b] \subset \mathbb{R}$ задана непрерывно дифференцируемая вещественная функция f такая, что $\max_{x\in J}|f'(x)| < M$. Пусть $K(J,B)$ – множество целых чисел d, для которых неравенство $|f(x)+d| < B$, $B > 1$, имеет решение при $x \in J$. Тогда $\#K(J,B) \le 2B + M|J|$.*

Доказательство. Для доказательства леммы необходимо получить верхнюю оценку для числа целых чисел d, для которых кривые $y = f(x) + d$ пересекают прямоугольник $[a, b] \times [-B, B]$. Поскольку рассматриваемые кривые являются непрерывными функциями, то они должны пересечь границу данного прямоугольника по крайней мере дважды. Поскольку "вертикальное расстояние" между кривыми равно 1, то максимальное число пересечений с одной из вертикальных границ (т.е. $x = a$ или $x = b$) равно $2B$. Используя теорему о среднем, получим, что "горизонтальное расстояние" между кривыми не менее $1/M$. Таким образом, максимальное число пересечений с одной из горизонтальных границ (т.е. $y = B$ или $y = -B$) равно $(b - a)M$. Следовательно, $\#K(J, B) \leq 2B + M|J|$. $\square$

Легко проверить, что $P^{(3)}(x) \leq n^4 Q$ для каждого $P \in \bar{\mathcal{P}}_n(Q)$, $x \in I$. Обозначим через J интервал, задаваемый неравенствами (5.7), тогда $|J| \leq 8nc_0\delta_0^{-1}Q^{v_1-v_0-1}$. Выберем $M = n^4 Q$ и $B = 4\delta_0 Q$ и воспользуемся леммой 5.2. Зафиксируем целые числа $a_3, \ldots, a_n$, и пусть $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Тогда, в силу (5.26) для числа коэффициентов a_2 таких, что $|P''(x)| < 4\delta_0 Q$, справедлива оценка

$$\#a_2 \leq 8\delta_0 Q + 16n^5 c_0 \delta_0^{-1} Q^{v_1 - v_0} < 9\delta_0 Q.$$

Для фиксированного a_2 число векторов $\mathbf{b} = (a_n, \ldots, a_2)$ равно $(2Q + 1)^{n-2}$. Поэтому, общее количество векторов $\mathbf{b}$ таких, что $|P''(x)| < 4\delta_0 Q$ для $P \in \mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{F}}(Q)$, не превосходит

$$9\delta_0 Q(2Q + 1)^{n-2} < 3^n \delta_0 Q^{n-1}.$$

Обозначим множество таких векторов через D.

Отметим, что $\mu_5(\sigma(\alpha, \gamma, P)) \leq 2nc_0^2 Q^{-2v_0+u_1+u_2} \mu_5(\sigma_1(\alpha, \gamma, P))$. Поскольку точка (x, w) принадлежит не более, чем двум существенным параллелепипедам, то

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{F}}(Q)} \sum_{\substack{\alpha \in A(P) \\ \gamma \in G(P) \\ \sigma_1(\alpha,\gamma,P) \text{ существенный}}} \mu_5(\sigma_1(\alpha, \gamma, P)) \leq 2n^2 \mu_5(I \times K).$$

Суммируя по всем векторам $\mathbf{b} \in D$, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{b} \in D} \sum_{P \in \mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{F}}(Q)} \sum_{\substack{\alpha \in A(P) \\ \gamma \in G(P) \\ \sigma_1(\alpha,\gamma,P) \text{ сущ.}}} \mu_5(\sigma(\alpha, \gamma, P)) &< 2^2 3^n \delta_0 c_0^2 n^3 Q^{n-1-2v_0+u_1+u_2} \mu_5(I \times K) \\ &\leq \frac{\kappa' - \kappa}{4} \mu_5(I \times K)\end{aligned}$$

для специально выбранного δ_0 и в силу равенства $n-1-2v_0+u_1+u_2=0$ из (5.26). Следовательно, $\mu_5(\mathcal{V}_1) < \frac{\kappa'-\kappa}{4}\mu_5(I\times K)$. Отметим, что при рассмотрении несущественных множеств возникает тот же показатель степени $-1+u_1+u_2+2v_1$, только умноженный на -1.

Далее рассмотрим несущественные множества, поэтому полагаем, что $\sigma_1(\alpha,\gamma,P)$ – несущественный параллелепипед. Тогда, существует многочлен $\tilde{P}\in\mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{F}}(Q)$ такой, что $\mu_5(\sigma_1(\alpha,\gamma,P)\cap\sigma_1(\tilde{\alpha},\tilde{\gamma},\tilde{P}))\geq\frac{1}{2}\mu_5(\sigma_1(\alpha,\gamma,P))$. Пусть $R=P-\tilde{P}$, тогда $R(f)=b_1f+b_0$ и удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}
|b_1x+b_0| &< 4Q^{-u_1}\\
|R'(x)|=|b_1| &< 8c_0Q^{1-v_1}\\
|b_1w+b_0|_p &< Q^{-u_2}\\
|R'(w)|_p=|b_1|_p &< c_0Q^{-v_1}
\end{aligned}$$

на $\sigma_1(\alpha,\gamma,P)\cap\sigma_1(\tilde{\alpha},\tilde{\gamma},\tilde{P})$ в силу (5.29) и (5.30). Начиная с этого места, доказательство проводится аналогично как и в случае доказательства теоремы 5.2. Используя это доказательство, нетрудно показать, что мера множества $\mu_5(\mathcal{V}_2)$ точек, принадлежащих по крайней мере одному несущественному параллелепипеду не превосходит

$$\delta_0CQ^{1-u_1-u_2-2v_1}\mu_5(I\times K),$$

где C – некоторая постоянная, зависящая от n. Согласно (5.26), последняя оценка равна $\delta_0C\mu_5(I\times K)$. Таким образом, снова δ_0 может быть выбрано так, что мера множества точек, принадлежащих по крайней мере одному несущественному параллелепипеду не превосходит $\frac{\kappa'-\kappa}{4}\mu_5(I\times K)$. Этого достаточно, чтобы доказать, что $\mu_5(\mathcal{F}_1) < \frac{\kappa'-\kappa}{2}\mu_5(I\times K)$.

Для получения оценки меры множества $\mathcal{F}_2$ поступим аналогично как и выше. Единственное отличие заключается в подсчете числа векторов $\mathbf{b}$, для которых $P\in\mathcal{P}_n^{\mathbf{b},\mathcal{F}_2}(Q)$ удовлетворяет неравенству $|P''(w)|_p<\delta_0$. Для этого вместо леммы 5.2 воспользуемся следующей леммой. Цель заключается в подсчете числа многочленов P, удовлетворяющих неравенству $|P''(w)|_p<\delta_0$ на цилиндре (5.9).

Лемма 5.3. *Пусть p – простое число и пусть задан цилиндр $M\subseteq\mathbb{Z}_p$, $\mu_3(M)=p^{-l_1}$, $l_1\geq 1$. Пусть $T\in\mathbb{Z}[w]$, где $H(T)\leq Q$. Определим l_2 из неравенств $p^{-l_2}<\delta_0\leq p^{-l_2+1}$ и предположим, что $l_1\geq l_2+1$. Тогда неравенство*

$$|T(w)+d|_p<\delta_0$$

имеет не более $2Q\delta_0+1$ решений в целых числах d, где $|d|\leq Q$.

Доказательство. Во-первых, зафиксируем точку $w_0\in M$. Если $d_0\in\mathbb{Z}$ удовлетворяет неравенству

$$|T(w_0)+d_0|_p<\delta_0,$$

тогда числа вида $d = d_0 + \sum_{i=1}^{\infty} m_i p^{l_2+i}$, $m_i \in \{0, \ldots, p-1\}$, являются решениями неравенства $|T(w_0) + d|_p < \delta_0$.

Во-вторых, для любой точки $w \in M$ справедливо неравенство $|w - w_0|_p < p^{-l_1}$ и выполняется следующее

$$|T(w) + d_0|_p \leq \max\{|T(w) - T(w_0)|_p, |T(w_0) + d_0|_p\} < \delta_0,$$

поскольку, согласно теореме о среднем для многочленов в p-адической метрике, имеем

$$|T(w) - T(w_0)|_p \leq |w - w_0|_p < \delta_0.$$

Следовательно, если d_0 удовлетворяет неравенству $|T(w_0) + d_0|_p < \delta_0$, то также удовлетворяет и неравенству $|T(w) + d_0|_p < \delta_0$, и, следовательно, решениями являются только числа вида $d = d_0 + \sum_{i=1}^{\infty} m_i p^{l_2+i}$, $m_i \in \{0, \ldots, p-1\}$. Таким образом, количество d, удовлетворяющих неравенству $|d| \leq Q$, не превосходит $\frac{2Q}{p^{l_2}} + 1 \leq 2\delta_0 Q + 1$, что завершает доказательство леммы. □

Следовательно, для любого фиксированного δ_0 и достаточно большого Q (таких, что $c_0 \delta_0^{-1} Q^{v_1 - v_0} < \delta_0$) число векторов $\mathbf{b}$, удовлетворяющих неравенству $|P''(w)| < \delta_0$ на цилидре (5.9), не превосходит $2\delta_0 Q + 1$. Далее доказательство совпадает с доказательством в действительном случае.

Таким образом, мы показали, что $\mu_5(\mathcal{F}_i) < \frac{\kappa' - \kappa}{2} \mu_5(I \times K)$, $i = 1, 2$, поэтому

$$\mu_5(\mathcal{L}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0, Q)) > \kappa \mu_5(I \times K).$$

5.2.2 Доказательство теоремы 5.3

Пусть $P \in \mathcal{P}_n^{\mathcal{L}}(Q)$. Пусть $A'(P) \subseteq E_0(P)$ – множество комплексных корней и $G'(P) \subseteq U_0(P)$ – множество p-адических корней многочлена $P \in \mathcal{P}_n^{\mathcal{L}}(Q)$, таких, что для ближайших точек x и w к корням многочлена P выполняются неравенства (5.3), (5.4) и (5.25).

Зафиксируем корни $\alpha_1 \in A'(P)$ и $\gamma_1 \in G'(P)$; упорядочим остальные корни P так, что

$$\begin{array}{lclcl} |\alpha_1 - \alpha_2| & \leq & |\alpha_1 - \alpha_3| & \leq \ldots \leq & |\alpha_1 - \alpha_n|, \\ |\gamma_1 - \gamma_2|_p & \leq & |\gamma_1 - \gamma_3|_p & \leq \ldots \leq & |\gamma_1 - \gamma_n|_p. \end{array}$$

Далее приведем рассуждения для p-адической переменной; рассуждения для действительной переменной аналогичны. Используя вышеприведенные неравенства и факт, что $|P'(\gamma_1)|_p = |a_n|_p |\gamma_1 - \gamma_2|_p \ldots |\gamma_1 - \gamma_n|_p$, очевидно, что $|P'(\gamma_1)|_p \geq |a_n|_p |\gamma_1 - \gamma_2|_p^{n-1}$. Поэтому, в силу (5.2), (5.9), (5.15) и поскольку $n \geq 3$, выполняются неравенства $|\gamma_1 - \gamma_2|_p \ll Q^{\frac{-v_1}{n-1}}$ и $|w - \gamma_2|_p \leq \max\{|w - \gamma_1|_p, |\gamma_1 - \gamma_2|_p\} \ll Q^{\frac{-v_1}{n-1}}$ для $w \in T_P(\gamma_1)$. Рассмотрим вторую производную многочлена P, где

$$P''(w) = a_n \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{n-2}, i_s\neq i_k,\\ (i_1,\ldots,i_{n-2})\in(1,\ldots,n)}} (w-\gamma_{i_1})\ldots(w-\gamma_{i_{n-2}}).$$

Каждое слагаемое в P'' содержит по крайней мере один из множителей $w-\gamma_k$ для $k = 1, 2, 3$. Поскольку $|P''(w)|_p \geq \delta_0$, то нетрудно показать, что $|w - \gamma_n|_p, \ldots, |w-\gamma_3|_p \gg 1$. Тогда, используя неравенство $|w-\gamma_1|_p \ll Q^{-v_0+v_1}$, имеем

$$|\gamma_1-\gamma_n|_p \geq \cdots \geq |\gamma_1-\gamma_3|_p = |(w-\gamma_3)-(w-\gamma_1)|_p = |w-\gamma_3|_p \gg 1.$$

Таким образом, используя (5.5), (5.15), и факт, что $P'(\gamma_1) = a_n(\gamma_1 - \gamma_2)\prod_{3\leq i\leq n}(\gamma_1-\gamma_i)$, получаем

$$|\gamma_1-\gamma_2|_p \ll Q^{-v_1}|a_n|_p^{-1} \ll Q^{-v_1}. \tag{5.31}$$

Аналогично в действительном случае можно показать, что

$$|\alpha_1-\alpha_2| \ll Q^{1-v_1}|a_n|^{-1} \ll Q^{-v_1}. \tag{5.32}$$

Следовательно, каждый многочлен $P \in \mathcal{P}_n^{\mathcal{L}}(Q)$ имеет не менее двух комплексных корней α_1, α_2 и не менее двух p-адических корней γ_1, γ_2, которые удовлетворяют (5.32) и (5.31) соответственно. Кроме того, выполняются неравенства (5.7) и (5.9), и для каждого многочлена P справедлива следующая оценка

$$\mu_5\left(\bigcup_{\substack{\alpha\in A'(P)\\ \gamma\in G'(P)}} \sigma(\alpha,\gamma,P)\right) \leq \mu_5\left(\bigcup_{\substack{\alpha\in E_0(P)\\ \gamma\in U_0(P)}} \sigma(\alpha,\gamma,P)\right) < 4n^3c_0^2\delta_0^{-2}Q^{2v_1-2v_0-1}.$$

Поскольку $\mathcal{L}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0, Q) \subset \cup_{P\in\mathcal{P}_n^{\mathcal{L}}(Q)} \bigcup_{\substack{\alpha\in E_0(P)\\ \gamma\in U_0(P)}} \sigma(\alpha,\gamma,P)$, то используя теорему 5.4, получаем

$$\kappa\mu_5(I\times K) < \mu_5(\mathcal{L}_n(v_0, v_1, c_0, \delta_0, Q)) < \#\mathcal{P}_n^{\mathcal{L}}(Q) 4n^3c_0^2\delta_0^{-2}Q^{2v_1-2v_0-1}.$$

Последнее означает, что $\#\mathcal{P}_n^{\mathcal{L}}(Q) \gg Q^{2v_0-2v_1+1} = Q^{n+1-4v_1}$. $\square$

5.3 Об условии, при котором ближайший корень многочлена к действительной точке является действительным числом

Пусть $P \in \mathcal{P}_n'$. Из неравенства $|P(x)| < H(P)^{-w}$ можно получить оценки сверху для модуля разности $|x-\alpha_1|$, где α_1 – ближайший к $x \in \mathbb{R}$ корень многочлена P (см. [40]). Однако для некоторых важных задач теории трансцендентных чисел необходимо знать является ли α_1 действительным или комплексным числом. Знание того, что α_1 – действительный корень, позволяет строить регулярные системы точек, важные при решении следующих проблем: нахождение размерности Хаусдорфа множества $x \in \mathbb{R}$, для которых при $w > n$ неравенство $|P(x)| < H(P)^{-w}$ имеет бесконечно много решений в многочленах P (см. [9, 47]); обобщение случая расходимости в теореме Хинчина на многочлены P степени $\deg P \geq 2$ (см. [49, 71]); разрешимость неравенства $|x-\alpha_1| < H(\alpha_1)^{-w}$ в целых алгебраических числах α_1 для почти всех $x \in \mathbb{R}$ [84].

Данный раздел посвящен исследованию задачи о принадлежности корня α_1 многочлена P полю действительных чисел в зависимости от величины w. Аналогичная задача в поле p-адических чисел решена Ю.В. Нестеренко [119], и была представлена на Международной конференции по теории чисел в Шяуляе в 2008 году. Отметим, что рассматриваемая задача тесно связана с вопросом о разделении корней целочисленных многочленов, см. [85, 87, 88, 89, 96, 123].

Теорема 5.5. *Пусть $n \geq 2$ и $P \in \mathcal{P}'_n$ – многочлен высоты $H = H(P)$, дискриминант $D(P)$ которого отличен от нуля. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Тогда из неравенства*

$$|P(x)| < H^{-w} \tag{5.33}$$

при $w > 2n-3$ и достаточно большом H следует, что ближайший к x корень α_1 многочлена P является действительным и

$$|x-\alpha_1| \ll H^{-w+n-2}. \tag{5.34}$$

Замечание 5.1. *Рассмотрим неприводимые многочлены $P \in \mathcal{P}'_n$ степени $n \geq 2$. Для многочлена P, имеющего корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, определим $sep(P) = \min_{1\leq i<j\leq n} |\alpha_i - \alpha_j|$ (см. [88]).*

Случай 1: $n = 2$ и $n = 3$. *Условие $w > 2n-3$ в теореме 5.5 является наилучшим для $n = 2$ и $n = 3$.*

В случае $n = 2$ рассмотрим семейство многочленов [88]:

$$P_a(x) = (a^2+a+1)x^2 + (2a+1)x + 1, \;\; a \in \mathbb{N},$$

высоты $H(P_a) = a^2+a+1$ и дискриминанта $D(P_a) = -3$. Тогда $\alpha_{1,a}, \alpha_{2,a} = \frac{-(2a+1)\pm\sqrt{3}i}{2(a^2+a+1)}$ – корни многочлена P_a и справедлива следующая формула

$$sep(P_a) = 2|\operatorname{Im}\alpha_{1,a}| = \frac{\sqrt{|D(P_a)|}}{H(P_a)} = \frac{\sqrt{3}}{H(P_a)}.$$

Пусть $x_a = \Re\alpha_{1,a}$ и $b_{2,a} = a^2+a+1$ обозначает старший коэффициент многочлена P_a. Тогда

$$|P_a(x_{1,a})| = |b_{2,a}(\operatorname{Im}\alpha_{1,a})^2| = |b_{2,a}| \left(\frac{sep(P_a)}{2}\right)^2 < H(P_a)^{-1}.$$

Следовательно, существует бесконечно много неприводимых многочленов $P \in \mathcal{P}'_2$, для которых существуют $x = x(P) \in \mathbb{R}$ такие, что $|P(x)| < H(P)^{-1}$, и ближайший к x корень многочлена P является чисто комплексным.

В случае $n = 3$ рассмотрим неприводимый многочлен $P_0(x) = x^3+3x^2+1$. Многочлен P_0 имеет действительный корень $-\alpha_{3,0}$, меньший -3, и два комплексно-сопряженных корня $\alpha_{1,0}$ и $\alpha_{2,0}$, где $\Re\alpha_{i,0} > 0$, $i = 1, 2$. Согласно теореме Руше, многочлен P_0 имеет ровно два корня $\alpha_{1,0}$ и $\alpha_{2,0}$ в круге с центром в начале координат и радиуса 1. Воспользуемся методом Шенхаге [123], и преобразуем многочлен P_0 в многочлен вида $P_1(x) = (P_0(x-q))^*$, где $q := [\alpha_{3,0}]$ и $R^*(x) = x^3R(1/x)$. Затем продолжим этот рекурсивный процесс и получим последовательность кубических неприводимых многочленов $P_1, P_2, \ldots \in \mathbb{Z}[x]$ с одним и тем же дискриминантом $D(P_0) = -135$, и с убывающими значениями $sep(P_k)$, $k \geq 1$. Пусть $a_{3,k}$ обозначает старший коэффициент многочлена P_k, $-\alpha_{3,k}$ – отрицательный действительный корень и $\alpha_{1,k}$, $\alpha_{2,k}$ – комплексные корни P_k в правой полуплоскости. Имеем $\alpha_{i,k+1} = \frac{1}{[\alpha_{3,k}]+\alpha_{i,k}}$, $i = 0, 1, 2$, где $\alpha_{0,j} = -\alpha_{3,j}$. Таким образом, получаем $\alpha_{3,k} > 1$, $|\alpha_{i,k}| < 1$, $\Re\alpha_{i,k} > 0$, $i = 1, 2$, $|\alpha_{1,k} - \alpha_{2,k}| < 1$ для всех $k \geq 1$. Следовательно, $sep(P_k) = |\alpha_{1,k} - \alpha_{2,k}|$.

Пусть $x_k = \Re\alpha_{1,k}$. Поскольку $sep(P_k) = 2|\mathrm{Im}\,\alpha_{1,k}|$, то получаем

$$|P_k(x_k)| = |a_{3,k}| \left(\frac{sep(P_k)}{2}\right)^2 |x_k - \alpha_{3,k}|,$$

где $|x_k - \alpha_{3,k}| \leq |x_k| + |\alpha_{3,k}| < 1 + |\alpha_{3,k}| < 2|\alpha_{3,k}|$, так как $|\alpha_{3,k}| > 1$ и $|\Re\alpha_{1,k}| < 1$.

Далее, поскольку $|\alpha_{i,k}| < 1$, $i = 1, 2$, и $|\alpha_{3,k}| > 1$, то мера Малера многочлена P_k, определяемая как $M(P_k) = |a_{3,k}| \prod_{i=1}^{3} \max(1, |\alpha_{i,k}|)$, равна $M(P_k) = |a_{3,k}||\alpha_{3,k}|$. Шенхаге (лемма 3 [123]) доказал, что

$$sep(P_k) < \sqrt{|D(P_0)|}H(P_k)^{-2},$$

если $[\alpha_{3,k}] = 1$ или $[\alpha_{3,k-1}] > 1$, таким образом, бесконечно часто. Используя следующие известные оценки (см. лемма А.2 в [86]):

$$2^{-3}H(P_k) \leq M(P_k) \leq 2H(P_k),$$

получим

$$|P_k(x_k)| < 2M(P_k)\left(\frac{sep(P_k)}{2}\right)^2 < H(P_k)sep(P_k)^2 < 135H(P_k)^{-3}.$$

Следовательно, существует бесконечно много неприводимых многочленов $P \in \mathcal{P}'_3$, для которых существуют $x = x(P) \in \mathbb{R}$ такие, что $|P(x)| <$

$135H(P)^{-3}$, *и ближайший к x корень многочлена P является чисто комплексным.*

Случай 2: $n \geq 4$**.** *Для больших значений n, используя результаты работ [57] и [22], можно показать, что существует бесконечно много неприводимых многочленов $P \in \mathcal{P}_n'$, для которых существуют $x = x(P) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие $|P(x)| < H(P)^{-w}$, где $w < \frac{2n-1}{3}$, и ближайший к x корень многочлена P является чисто комплексным.*

Для четных $n \geq 4$ можно получить оценку лучше, используя специальные многочлены из работы [87]. Рассмотрим семейство многочленов

$$P_b(x) = Q_b^2(x) + R_b^2(x), \;\; \deg P_b = n = 2d,$$

где

$$Q_b(x) = x^d - bx + 1, \quad R_b(x) = (b+1)x^d - x^{d-1} - bx + 1, \quad b \in \mathbb{N}.$$

Пусть $x_b = b^{-1} + b^{-d-1}$. Поскольку многочлен P_b принимает только положительные значения и является многочленом четной степени, то он имеет только чисто комплексные корни. Отметим, что многочлен P_b имеет два комплексно-сопряженных корня, скажем $\alpha_{1,b}, \alpha_{2,b}$, близких к точке x_b, и справедливы следующие оценки:

$$0 < R_b(x_b) < 2^{n+1}b^{-2d+1}, \;\; 0 < Q_b(x_b) < 2^n b^{-2d}.$$

Поскольку $H(P_b) \ll b^2$, то $0 < P_b(x_b) < 2^{2d+3}b^{-4d+2} \ll H(P_b)^{-n+1}$. Таким образом, для каждого четного $n \geq 4$ показатель w в (5.33) не может быть заменен на число, меньшее или равное $n-1$.

Следствие 5.1. *Пусть $P(x) = \prod_{i=1}^{k} T_i^{s_i}(x) \in \mathcal{P}_n'$ – многочлен высоты $H = H(P)$ с дискриманантом $D(P) = 0$, где T_i – неприводимый многочлен степени n_i и высоты $H_i = H(T_i)$, $i = (1, \ldots, k)$. Тогда из неравенства (5.33) при $w > 2n-3$ и достаточно большом H_i следует, что существует действительный корень α_1 многочлена P и*

$$|x - \alpha_1| \ll H_i^{-w+n_i-2} \;\; \textit{для некоторого} \;\; i, \; 1 \leq i \leq k. \tag{5.35}$$

Более того, утверждение справедливо при $w > 2n_i - 3$.

Важной проблемой в теории трансцендентных чисел является переход от неравенства (5.33) при $P(x) = \prod_{i=1}^{k} T_i^{s_i}(x)$ к неравенству, содержащему неприводимый многочлен в левой части неравенства (5.33). Нетрудно доказать, что существует i, $1 \leq i \leq k$, такой, что

$$|T_i(x)| \ll H_i^{-w}. \tag{5.36}$$

Однако, H_i может оказаться значительно меньше $H(P)$, и неравенство (5.36) будет близким к тривиальному. Гельфонд [27] показал, что существует i, $1 \leq$

$i \leq k$, что справедливо неравенство

$$|T_i^{s_i}(x)| \ll H(P)^{-w+6n}.$$

В. Берник [9] улучшил его результат и доказал, что

$$|T_i^{s_i}(x)| \ll H(P)^{-w+2n}.$$

Однако, при w близком к $2n-3$ последние две оценки бесполезны. В теореме 5.6 подобный переход получен с нетривиальной правой частью.

Теорема 5.6. *Пусть $n \geq 2$ и $P \in \mathcal{P}_n'$ – многочлен высоты $H = H(P)$ с дискриминантом $D(P) = 0$. Пусть $x \in \mathbb{R}$ и справедливо неравенство $|P(x)| < H^{-w}$, тогда для $w > 2n-3$ и достаточно большого H, ближайший к x корень α_1 многочлена P является действительным и*

$$|x - \alpha_1| \ll H^{-(w+1)/n}.$$

Замечание 5.2. *Показатель степени $-(w+1)/n$ в теореме 5.6 является наилучшим (см. (5.47) ниже).*

Замечание 5.3. *Условие $w > 2n-3$ в теореме 5.6 нельзя существенно улучшить. Пусть $n \geq 4$. Рассмотрим семейство многочленов*

$$P_c(x) = x^{n-2}((c^2+1)x^2 + 2cx + 1) = x^{n-2}R_c(x), \ \ \deg P_c = n, \ \ c \in \mathbb{Z}, \ c > 1.$$

Высота многочлена P_c равна $H = c^2+1$, и многочлен P_c имеет комплексные корни $\frac{-c\pm i}{c^2+1}$ и корень 0 кратности $n-2$. Пусть $x_c = -\frac{c}{c^2+1}$, тогда

$$R_c(x_c) = (c^2+1)x_c^2 + 2cx_c + 1 = \frac{1}{c^2+1} = H^{-1},$$

где $|x_c| = \frac{c}{c^2+1} < \frac{\sqrt{c^2+1}}{c^2+1} = H^{-1/2}$. Таким образом, имеем

$$|P_c(x_c)| = |x_c|^{n-2}H^{-1} < H^{-n/2}.$$

Поскольку расстояние от x_c до 0 равно $\frac{c}{c^2+1}$, то корни $\frac{-c\pm i}{c^2+1}$ расположены ближе к x_c чем корень 0. Поэтому показатель w в теореме 5.6 не может быть заменен на число, меньшее или равное $n/2$.

Настоящий раздел основан на работе [81].

5.3.1 Вспомогательные леммы

Сначала покажем, что достаточно провести доказательство для многочленов $P \in \mathbb{Z}[x]$, удовлетворяющих условию

$$|a_n| \gg H(P). \tag{5.37}$$

В основе сведения к специальным многочленам вышеуказанного вида лежит следующая лемма.

Лемма 5.4. *Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ – целочисленный многочлен. Тогда существует целое число m, $0 \le m \le n$, такое, что*

$$\max_{0 \le m \le n} |P(m)| \gg H(P).$$

Доказательство. Представим многочлен $P(x)$ интерполяционной формулой Лагранжа, взяв узлами интерполяции $x = 0, 1, \ldots, n$:

$$P(x) = \sum_{m=0}^{n} P(m) \frac{A(x)}{A'(m)(x-m)}, \quad A(x) = x(x-1)\ldots(x-n).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим

$$a_i = c_{i0}P(0) + c_{i1}P(1) + \ldots + c_{in}P(n), \tag{5.38}$$

где для c_{ij} справедливы неравенства

$$|c_{ij}| \le c(n), \ \ 0 \le i, j \le n. \tag{5.39}$$

В силу (5.38), (5.39) получаем

$$|a_i| \le c(n)(|P(0)| + |P(1)| + \ldots + |P(n)|) \le c(n) \max_{0 \le m \le n} |P(m)|$$

для всех i, $0 \le i \le n$; откуда следует утверждение леммы. $\square$

Рассмотрим новый многочлен вида $P_1(x) = P(x+m) = a_n x^n + (mna_n + a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + P(m)$. Для достаточно большого $H(P)$ имеем $H(P) \asymp H(P_1)$ и такое преобразование многочлена P также переводит действительные корни α_i, $1 \le i \le n$, многочлена P в действительные корни $\alpha_i - m$ многочлена P_1, а комплексные корни α_i многочлена P в комплексные корни $\alpha_i - m$ многочлена P_1 соответственно. Затем рассмотрим многочлен вида $P_2(x) = x^n P_1(1/x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots b_1 x + b_0$, где $b_n = P(m)$. Корни многочлена P_2 имеют вид $\beta_i = \frac{1}{\alpha_i - m}$, и $H(P_2) = H(P_1)$. Снова такое преобразование многочлена P переводит действительные корни α_i, $1 \le i \le n$, многочлена P в действительные корни β_i многочлена P_2, и комплексные корни α_i многочлена P в комплексные корни β_i многочлена P_2 соответственно.

Далее будем полагать, что многочлен P удовлетворяет условию (5.37). Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ – корни многочлена P. Тогда, в силу (5.37) и известного свойства $|\alpha_i| \ll \frac{H(P)}{|a_n|}$ (см. [40]), следует

$$|\alpha_j| \ll 1, \quad j = 1, \ldots, n; \tag{5.40}$$

т.е. корни многочлена ограничены, где неявная постоянная зависит только от n.

Следующие результаты будут использоваться при доказательстве теорем; лемму 5.5 часто называют *леммой Гельфонда*.

Лемма 5.5. *[86, лемма A.3] Пусть $P_1, P_2, \dots, P_k$ – многочлены степени $n_1, \dots, n_k$ соответственно, и пусть $P = P_1 P_2 \dots P_k$. Тогда*

$$2^{-n} H(P_1) H(P_2) \dots H(P_k) \le H(P) \le 2^n H(P_1) H(P_2) \dots H(P_k).$$

Лемма 5.6. *Пусть $x \in S_P(\alpha_1)$, где α_1 – корень многочлена P кратности s. Тогда*

$$|x - \alpha_1| < 2^{\frac{n-s}{s}} (|P(x)||a_n|^{-1} \prod_{j \ge s+1} |\alpha_1 - \alpha_j|^{-1})^{1/s}.$$

Доказательство. Поскольку $x \in S(\alpha_1)$, то находим

$$|\alpha_1 - \alpha_j| \le |x - \alpha_1| + |x - \alpha_j| \le 2|x - \alpha_j|, \ \ 2 \le j \le n.$$

Далее, используя равенство $P(x) = a_n (x - \alpha_1)^s (x - \alpha_{s+1}) \dots (x - \alpha_n)$, получаем

$$|x - \alpha_1|^s = |P(x)|(|a_n| \prod_{j \ge s+1} |x - \alpha_j|)^{-1} \le 2^{n-s} |P(x)||a_n|^{-1} \prod_{j \ge s+1} |\alpha_1 - \alpha_j|^{-1},$$

откуда следует утверждение леммы. □

Лемма 5.7. *Пусть $P \in \mathbb{Q}[x]$ – неприводимый многочлен над $\mathbb{Q}$. Тогда P не имеет кратных корней над $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Предположим, что многочлен $P \in \mathbb{Q}[x]$ неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет кратный корень $\beta \in \mathbb{C}$. Рассмотрим производную P' многочлена P. Ясно, что $P' \in \mathbb{Q}[x]$. Поскольку P неприводим и $\deg P' < \deg P$, то P и P' – взаимно простые. Используя алгоритм Евклида, получаем, что существуют некоторые многочлены $S, T \in \mathbb{Q}[x]$ такие, что

$$S(x)P(x) + T(x)P'(x) = 1. \tag{5.41}$$

Поскольку $\beta \in \mathbb{C}$ – кратный корень многочлена P, то

$$P(x) = (x - \beta)^2 V(x), \tag{5.42}$$

где $V(x)$ – многочлен с коэффициентами в $\mathbb{C}$. Продифференцируем (5.42) и получим

$$P'(x) = 2(x - \beta)V(x) + (x - \beta)^2 V'(x).$$

Откуда следует, что $P'(\beta) = P(\beta) = 0$. Подставив β вместо x в (5.42), получим противоречивое равенство: $0 = 1$. Таким образом, неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен P не может иметь кратных корней над $\mathbb{C}$. □

5.3.2 Доказательство теоремы 5.5

Рассмотрим многочлен P, удовлетворяющий (5.37) и $D(P) \neq 0$. Без ограничения общности будем полагать, что α_1 является корнем многочлена P, ближайшим к $x \in \mathbb{R}$. Выделим в $D(P)$ производную $P'(\alpha_1)$ и оценим ее снизу. Используя (5.40), получим

$$1 \leq |D(P)|^{1/2} = |a_n|^{n-2}|P'(\alpha_1)| \prod_{2\leq i<j\leq n} |\alpha_i - \alpha_j| \ll |a_n|^{n-2}|P'(\alpha_1)|,$$

откуда следует

$$|P'(\alpha_1)| \gg H^{-n+2}.$$

Тогда при выполнении неравенства (5.33), в силу леммы 1.3, справедливо неравенство

$$|x - \alpha_1| \ll H^{-w+n-2}. \tag{5.43}$$

Если α_1 – чисто комплексный корень многочлена P, то среди $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ найдется корень P, комплексно-сопряженный к α_1, который обозначим через $\alpha_2 = \bar{\alpha_1}$. Используя (5.43) и факт, что $|x - \alpha_1| = |x - \alpha_2|$, $x \in \mathbb{R}$, получаем

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |x - \alpha_1| + |x - \alpha_2| \ll H^{-w+n-2}. \tag{5.44}$$

Тогда из неравенств (5.40) и (5.44) имеем

$$1 \leq |D(P)|^{1/2} = |a_n|^{n-1}|\alpha_1 - \alpha_2| \prod_{j=3}^{n} |\alpha_1 - \alpha_j| \prod_{2\leq i<j\leq n} |\alpha_i - \alpha_j| \ll H^{-w+2n-3}.$$

Очевидно, что последнее неравенство противоречиво для $w > 2n - 3$ и достаточно большого H. Откуда заключаем, что α_1 – действительный корень P и удовлетворяет (5.43). $\square$

5.3.3 Доказательство следствия 5.1

Рассмотрим многочлен P, удовлетворяющий (5.37) и $D(P) = 0$. Разложим многочлен P на произведение степеней неприводимых многочленов $T_i \in \mathbb{Z}[x]$:

$$P(x) = \prod_{i=1}^{k} T_i^{s_i}(x).$$

Поскольку $D(P) = 0$ и T_i – неприводимый многочлен, то в силу леммы 5.7 существует индекс l, $1 \leq l \leq k$, такой, что $s_l \geq 2$.

Далее покажем, что существует индекс j, $1 \leq j \leq k$, для которого справедливо неравенство

$$|T_j(x)| < 2^{nw/2} H_j^{-w}. \tag{5.45}$$

Предположим, что выполняется неравенство

$$|T_j(x)| \geq 2^{nw/2} H_j^{-w}$$

для всех j, $1 \leq j \leq k$. Применяя лемму 5.5, получим

$$|P(x)| \geq \prod_{j=1}^{k} (2^{nw/2} H_j^{-w})^{s_j} \geq 2^{nw(\sum_{j=1}^{k} s_j/2-1)} H^{-w} \geq H^{-w},$$

что противоречит неравенству (5.33).

Действуя аналогично как при доказательстве теоремы 5.5, для многочлена T_j, $D(T_j) \neq 0$, удовлетворяющего (5.45), при $w > 2n_j - 3$ получаем существование действительного корня α_1 (следовательно, и $P(\alpha_1) = 0$), для которого справедливо неравенство (5.35). □

5.3.4 Доказательство теоремы 5.6

Рассмотрим многочлен P, удовлетворяющий (5.37) и $D(P) = 0$. Пусть

$$P(x) = \prod_{i=1}^{k} T_i^{s_i}(x), \quad s_i \geq 1, \tag{5.46}$$

где T_i – неприводимый многочлен, $i = 1, \ldots, k$.

Без ограничения общности будем полагать, что один из корней многочлена T_1, скажем, α_1 является корнем многочлена P, ближайшим к $x \in \mathbb{R}$. Ясно, что α_1 – ближайший к $x \in \mathbb{R}$ корень T_1 и $S_P(\alpha_1) \subseteq S_{T_1}(\alpha_1)$.

Случай 1: $k = 1$**.** При $k = 1$ многочлен P имеет вид $P(x) = T_1^{s_1}$, где $s_1 \geq 2$, поскольку $D(P) = 0$ и T_1 неприводим. В данном случае имеем $\deg T_1 = n_1 = n/s_1 \in \mathbb{N}$, и $H_1 = H(T_1) \asymp H^{1/s_1}$. Используя (5.33), находим $|T_1(x)| \ll H_1^{-w}$.

Если $n_1 = 1$, т.е. T_1 – линейный многочлен, то оценка для $|x-\alpha_1|$ находится следующим образом. Пусть $T_1(x) = d_1 x + d_0$, откуда следует, что $a_n = d_1^n$. В силу (5.37) имеем $|d_1| \gg H^{1/n}$, при этом

$$|x + d_0/d_1| < H_1^{-w} |d_1|^{-1} \ll H^{-(w+1)/n}. \tag{5.47}$$

Далее рассмотрим $n_1 \geq 2$. Определим функцию $f_0(s_1) = -(w+2)/s_1 + n/s_1^2$ на отрезке $J = \{s_1 : 2 \leq s_1 \leq n/2\}$. Поскольку $D(T_1) \neq 0$ и $2 \leq s_1 \leq n/2$, то воспользуемся аналогичным методом как и при доказательстве теоремы 5.5 и получим, что при $w > 2n/s_1 - 3$ корень α_1 многочлена T_1 является действительным и выполняется неравенство

$$|x - \alpha_1| \ll H_1^{-w-2+n/s_1} \ll H^{f_0(s_1)}.$$

Последнее означает, что

$$|x - \alpha_1| \ll H^{-2w/n}, \tag{5.48}$$

поскольку при $w > 2n-3$ максимальное значение функции $f_0(s_1)$ на отрезке J равно $-2w/n$.

Случай 2: $k \geq 2$. Запишем многочлен P вида (5.46) следующим образом

$$P(x) = T_1^{s_1}(x)P_1(x), \quad P_1(x) = \prod_{i=2}^{k} T_i^{s_i}(x).$$

Пусть $\deg T_1^{s_1} = n_2$, тогда $\deg P_1 = n - n_2$. Предположим, что $\alpha_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Поскольку α_1 – чисто комплексный корень, то $\bar{\alpha_1}$ также является корнем T_1, и, следовательно, $\deg T_1 \geq 2$. Для упрощения обозначений, пусть $\alpha_2 = \bar{\alpha_1}$. Обозначим $H(T_1) = H^{\lambda/s_1}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, тогда в силу леммы 5.5 имеем $H(P_1) \ll H^{1-\lambda}$.

Многочлены $T_1(x) = t_{n_2/s_1}x^{n_2/s_1} + \ldots + t_1x + t_0$ и $P_1(x) = p_{n-n_2}x^{n-n_2} + \ldots + p_1x + p_0$ не имеют общих корней, поэтому их результант $R(T_1, P_1) \in \mathbb{Z}$ не равен нулю. Из представления результанта в виде

$$R(T_1, P_1) = t_{n_2/s_1}^{n-n_2} p_{n-n_2}^{n_2/s_1} \prod_{1 \leq i \leq n_2/s_1,\, n_2+1 \leq j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j),$$

где $T_1(\alpha_i) = 0$ для $1 \leq i \leq n_2/s_1$ и $P_1(\alpha_j) = 0$ для $n_2 + 1 \leq j \leq n$, имеем

$$1 \leq |R(T_1, P_1)| \ll H^{\lambda(n-n_2)/s_1 + (1-\lambda)n_2/s_1} \prod_{1 \leq i \leq n_2/s_1,\, n_2+1 \leq j \leq n} |\alpha_i - \alpha_j|. \tag{5.49}$$

Поскольку $|\alpha_j| \ll 1$, $1 \leq j \leq n$, то

$$\prod_{3 \leq i \leq n_2/s_1,\, n_2+1 \leq j \leq n} |\alpha_i - \alpha_j| \ll 1. \tag{5.50}$$

Из (5.49) и (5.50) получаем

$$\prod_{n_2+1 \leq j \leq n} |\alpha_1 - \alpha_j||\alpha_2 - \alpha_j| \gg H^{-\lambda(n-n_2)/s_1 - (1-\lambda)n_2/s_1} \tag{5.51}$$

и

$$\prod_{n_2+1 \leq j \leq n} |\alpha_1 - \alpha_j| \gg H^{-\lambda(n-n_2)/s_1 - (1-\lambda)n_2/s_1}. \tag{5.52}$$

Используя (5.51) и следующие утверждения

$$\begin{aligned} &\text{если } \alpha_j \in \mathbb{R}, \text{ то } |\alpha_1 - \alpha_j| = |\bar{\alpha}_1 - \alpha_j|; \\ &\text{если } \alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \text{ то } |\bar{\alpha}_1 - \alpha_j| = |\alpha_1 - \bar{\alpha}_j|, \end{aligned}$$

находим

$$\prod_{n_2+1 \leq j \leq n} |\alpha_1 - \alpha_j|^2 \gg H^{-\lambda(n-n_2)/s_1 - (1-\lambda)n_2/s_1}. \tag{5.53}$$

Поскольку T_1 неприводим над $\mathbb{Q}$, то T_1 не имеет кратных корней над $\mathbb{C}$. Таким образом,

$$\prod_{j\geq s_1+1}|\alpha_1-\alpha_j| = \prod_{2\leq j\leq n_2/s_1}|\alpha_1-\alpha_j|^{s_1}\prod_{n_2+1\leq j\leq n}|\alpha_1-\alpha_j|.$$

Используя лемму 5.6 для $s=s_1$ и последнее равенство, получаем

$$|x-\alpha_1| \ll |P(x)||a_n|^{-1}\underbrace{\prod_{2\leq k\leq n_2/s_1}|\alpha_1-\alpha_k|^{-1}}_{(5.54')}\underbrace{\prod_{n_2+1\leq k\leq n}|\alpha_1-\alpha_k|^{-1}}_{(5.54'')}. \tag{5.54}$$

Оценка сверху для произведения (5.54″) следует из (5.53). Произведение (5.54′) оценим, используя дискриминант $D(T_1)$ многочлена T_1:

$$1\leq |D(T_1)|^{1/2} = H^{\lambda(n_2/s_1-1)/s_1}\prod_{1\leq i<j\leq n_2/s_1}|\alpha_i-\alpha_j|.$$

Таким образом, получаем

$$\prod_{2\leq j\leq n_2/s_1}|\alpha_1-\alpha_j| \gg H^{-\lambda(n_2/s_1-1)/s_1}, \tag{5.55}$$

и в силу (5.40) имеем

$$|\alpha_1-\alpha_2| \gg H^{-\lambda(n_2/s_1-1)/s_1}. \tag{5.56}$$

Во-первых, рассмотрим случай $s_1=1$. Поскольку $D(P)=0$ и многочлен T_1 не имеет кратных корней, то многочлен P_1 имеет по крайней мере один кратный корень, поэтому $n\geq 4$ и $n_2\leq n-2$.

Определим функцию $f_1(\lambda,n_2) = -w-1+\lambda(n_2-2)+(\lambda n+n_2)/2$. В области $D_1=\{(\lambda,n_2):\ 0\leq\lambda\leq 1 \text{ и } 2\leq n_2\leq n-2\}$, $n\geq 4$, максимальное значение функция $f_1(\lambda,n_2)$ равно $-w+2n-6$. Затем, используя (5.33), (5.53)–(5.56) и факт, что $|\alpha_1-\alpha_2|\leq |x-\alpha_1|+|x-\alpha_2| = 2|x-\alpha_1|$, получаем

$$1\leq 2|\alpha_1-\alpha_2|^{-1}|x-\alpha_1| \ll H^{f_1(\lambda,n_2)}\leq H^{-w+2n-6}.$$

Последнее неравенство при $w>2n-3$ и достаточно большом H противоречиво. Следовательно, $\alpha_1\in\mathbb{R}$.

Поскольку $\alpha_1\in\mathbb{R}$, то надо изменить предположение о том, что $\alpha_1\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ и существует комплексно-сопряженный корень. Поэтому индекс n_2 будет удовлетворять условию $1\leq n_2\leq n-2$. Определим функцию $f_2(\lambda,n_2) = -w-1-\lambda(n_2-1)+\lambda(n-n_2)+(1-\lambda)n_2$ в области $D_2=\{(\lambda,n_2):\ 0\leq\lambda\leq 1 \text{ и } 1\leq n_2\leq n-2\}$. Используя (5.33), (5.52), (5.54), и (5.55), получаем

$$|x-\alpha_1| \ll H^{f_2(\lambda,n_2)}\leq H^{-w+n-2}, \tag{5.57}$$

поскольку максимальное значение функции $f_2(\lambda,n_2)$ на D_2 равно $-w+n-2$.

Во-вторых, рассмотрим случай $s_1 \geq 2$. Имеем $n \geq 2s_1 + 1 \geq 5$ и $4 \leq 2s_1 \leq n_2 \leq n-1$.

Определим функцию $f_3(\lambda, n_2) = -\frac{w+1}{s_1} + \frac{2\lambda(n_2-s_1)}{s_1^2} + \frac{\lambda(n-n_2)+(1-\lambda)n_2}{2s_1^2}$ в области $D_3 = \{(\lambda, n_2) : 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ и } 2s_1 \leq n_2 \leq n-1\}$ и функцию $f_4(s_1) = -\frac{w+1}{s_1} + \frac{4n-3-4s_1}{2s_1^2}$ на отрезке $I = \{s_1 : 2 \leq s_1 \leq (n-1)/2\}$. Максимальное значение функции $f_3(\lambda, n_2)$ на D_3 равно $f_4(s_1)$. При $w > 2n-3$ максимальное значение функции $f_4(s_1)$ на I равно $\frac{-2w-2}{n-1} + \frac{4n-2}{(n-1)^2}$. Затем, используя (5.33), (5.53)–(5.56) и факт, что $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |x-\alpha_1| + |x-\alpha_2| = 2|x-\alpha_1|$, получаем

$$1 \leq 2|\alpha_1-\alpha_2|^{-1}|x-\alpha_1| \ll H^{f_3(\lambda,n_2)} \leq H^{f_4(s_1)} \leq H^{\frac{-2w-2}{n-1}+\frac{4n-2}{(n-1)^2}}.$$

Последнее неравенство при $w > 2n-3$, $n \geq 3$, и достаточно большом H противоречиво. Следовательно, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ и снова, как и выше, надо изменить предположение о существовании комплексно-сопряженного корня. Поэтому индекс n_2 будет удовлетворять условию $s_1 \leq n_2 \leq n-1$.

Пусть $f_5(\lambda, n_2) = -\frac{w+1}{s_1} + \frac{\lambda(n-n_2-s_1)}{s_1^2}$. Используя формулы (5.33), (5.52), (5.54), и (5.55), получаем

$$|x-\alpha_1| \ll H^{f_5(\lambda,n_2)} \leq H^{-\frac{w+1}{s_1}+\frac{n-1}{s_1^2}}, \tag{5.58}$$

где правая часть (5.58) следует из максимизации функции $f_5(\lambda, n_2)$ в области $D_4 = \{(\lambda, n_2) : 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ и } s_1 \leq n_2 \leq n-1\}$. В силу (5.58), при $w > 2n-3$ и $2 \leq s_1 \leq n-1$ имеем

$$|x-\alpha_1| \ll H^{\frac{-w}{n-1}}. \tag{5.59}$$

Объединяя (5.47), (5.48), (5.57) и (5.59), получаем, что выполняется оценка

$$|x-\alpha_1| \ll \max\{H^{-w+n-2}, H^{\frac{-w}{n-1}}, H^{-2w/n}, H^{-(w+1)/n}\} = H^{-(w+1)/n}$$

для $w > 2n-3$ и достаточно большого H, где α_1 – ближайший корень многочлена P к точке $x \in \mathbb{R}$. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

5.4 Регулярная система алгебраических чисел третьей степени в коротких интервалах

Во введении мы познакомились с понятием регулярной системы. Следует отметить, что в работе [49] Бересневич при построении регулярной системы на множестве алгебраических чисел степени n указал явный вид постоянной C_1, но не было вычислено значение $T_0(\Gamma, N, I)$, которые возникают в определении регулярной системы. Бюжо [86] показал, что для заданного интервала I в $[0, 1]$ значение T_0 равно

$$T_0(\mathbb{Q}, N, I) = 10^4|I|^{-2}\log^2(100|I|^{-1})$$

для $n = 1$, и Бересневич [2] доказал, что

$$T_0(\mathcal{A}_2, N, I) = 72^3|I|^{-3}\log^3(72|I|^{-1})$$

для $n = 2$, где $\mathcal{A}_k$ – множество действительных алгебраических чисел степени k. В монографии [86] Бюжо отметил, что для $n \geq 3$ связь между $|I|$ и $T_0(\mathcal{A}_n, N, I)$ неизвестна в настоящее время.

В данном разделе для $n = 3$ изучается связь между $|I|$ и $T_0(\mathcal{A}_3, N, I)$, где $N(\alpha) = H^4(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}_3$, и установлено, что $T_0 = c_2|I|^{-4}$. Вероятно, что связь такого же типа сохраняется для любого n, т.е. $T_0(\mathcal{A}_n, N, I) = c_3|I|^{-(n+1)}$.

Теорема 5.7. *Пусть I – конечный интервал, содержащийся в $[-1/2, 1/2]$. Тогда существуют положительные постоянные C_1, c_4 и положительное число $T_0 = c_4|I|^{-4}$ такие, что для любого $T \geq T_0$ существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathcal{A}_3 \cap I$ такие, что*

$$\begin{gathered} H(\alpha_i) \leq T^{1/4} \ \ (1 \leq i \leq t), \\ |\alpha_i - \alpha_j| \geq T^{-1} \ \ (1 \leq i < j \leq t), \\ t \geq C_1 T|I|. \end{gathered} \tag{5.60}$$

Отметим, что из теоремы 5.7 следует, что множество действительных алгебраических чисел α третьей степени с функцией $N(\alpha) = H^4(\alpha)$ образует регулярную систему на $[-1/2, 1/2]$.

Пусть $\delta_0 \in \mathbb{R}^+$. Обозначим через $\bar{\mathcal{L}}_3 = \bar{\mathcal{L}}_3(Q, \delta_0, I)$ множество $x \in I$, для которых система неравенств

$$|P(x)| < Q^{-3}, \quad |P'(x)| < \delta_0 Q \tag{5.61}$$

имеет решение в многочленах $P \in \mathcal{P}'_3(Q)$. Доказательство теоремы 5.7 основано на следующем метрическом результате.

Теорема 5.8. *Для каждого действительного числа s, где $0 < s < 1$, существует постоянная δ_0, обладающая следующим свойством. Для любого интервала $I \subset [-1/2, 1/2]$ существует достаточно большое число $Q_0 = Q_0(I)$ и постоянная c_5, не зависящая от Q_0, такие, что*

$$|I| > c_5 Q_0^{-1},$$

и для всех $Q > Q_0$ верна оценка меры

$$|\bar{\mathcal{L}}_3| < s|I|. \tag{5.62}$$

5.4.1 Доказательство теоремы 5.8

Пусть I – конечный интервал, содержащийся в $\subset [-1/2, 1/2]$. Доказательство теоремы разбивается на два случая: $|P'(x)| \gg Q^{-1}$ и $|P'(x)| \ll Q^{-1}$.

Случай 1. Определим подмножество $\tilde{\mathcal{L}}_3$ множества $\bar{\mathcal{L}}_3$, состоящее из чисел $x \in I$, для которых существует многочлен $P \in \mathcal{P}'_3(Q)$ такой, что выполнены неравенства

$$|P(x)| < Q^{-3}, \quad 2^6 Q^{-1} < |P'(x)| < \delta_0 Q. \tag{5.63}$$

Будем использовать обозначение $\sigma_0(P)$ для множества решений $x \in I$ системы неравенств (5.63) при фиксированном многочлене $P \in \mathcal{P}'_3(Q)$. Тогда можем записать $\tilde{\mathcal{L}}_3 = \cup_{P \in \mathcal{P}'_3(Q)} \sigma_0(P)$. Пусть α_1, α_2 и α_3 – корни многочлена $P \in \mathcal{P}'_3(Q)$ в $\mathbb{C}$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением множества $S_P(\alpha_1) \cap I$, так как остальные множества $S_P(\alpha_i) \cap I$, $i = 2, 3$, устроены аналогичным образом. Пусть $x \in \sigma_0(P) \cap S_P(\alpha_1)$. Нетрудно проверить, что $|\alpha_1| < Q^{-1} + 1/2 \leq 1$ для $Q \geq 2$. Тогда $|P^{(k)}(\alpha_1)| \leq 8Q$ для $k = 1, 2, 3$ и $Q \geq 2$. Разложим P' в ряд Тейлора и получим

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + P''(\alpha_1)(x - \alpha_1) + P'''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2/2. \tag{5.64}$$

Оценим второе и третье слагаемые:

$$\begin{aligned} |P''(\alpha_1)(x - \alpha_1)| &\leq 8Q3Q^{-3}|P'(x)|^{-1} < 3/8Q^{-1}, \\ |P'''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2/2| &\leq 4Q(3Q^{-3}|P'(x)|^{-1})^2 < 3^2 \cdot 2^{-10} Q^{-3} < 1/8Q^{-1}, \end{aligned} \tag{5.65}$$

где $|x - \alpha_1| < 3Q^{-3}|P'(x)|^{-1}$ согласно (1.13) и $|P'(x)| > 2^6 Q^{-1}$. Используя (5.63), (5.64) и (5.65), получаем

$$2^5 Q^{-1} < 1/2|P'(x)| < |P'(\alpha_1)| < 2|P'(x)| < 2\delta_0 Q.$$

Следовательно, интервал $\sigma_0(P) \cap S_P(\alpha_1)$ содержится в интервале $\sigma(P)$, определяемом как множество чисел $x \in I$, удовлетворяющих неравенству

$$|x - \alpha_1| < 6Q^{-3}|P'(\alpha_1)|^{-1}. \tag{5.66}$$

Далее получение оценки меры множества $\tilde{\mathcal{L}}_3$ разбивается на пять случаев в зависимости от значения величины $|P'(\alpha_1)|$ из интервала $(2^5 Q^{-1}, 2\delta_0 Q)$.

Пусть $v > 1/2$. Определим подмножество $\mathcal{L}_{31}$ множества $\tilde{\mathcal{L}}_3$, состоящее из чисел $x \in I$, для которых существует хотя бы один многочлен $P \in \mathcal{P}'_3(Q)$, удовлетворяющий (5.63) и неравенству

$$Q^v < |P'(\alpha_1)| < 2\delta_0 Q \tag{5.67}$$

в ближайшем к x корне α_1 многочлена P.

Предложение 5.1. *Для достаточно малого значения величины δ_0 и достаточно большого Q справедлива оценка $|\mathcal{L}_{31}| < 2^{-4}s|I|$.*

Доказательство. Для многочлена $P \in \mathcal{P}'_3(Q)$ с корнем α_1 определим интервал вида

$$\sigma_1(P) := \{x \in I : \ |x - \alpha_1| < c_6 Q^{-1}|P'(\alpha_1)|^{-1}, \ c_6 > 1\}. \tag{5.68}$$

Явный вид постоянной c_6 будет указан позднее. Используя (5.66) и (5.68), получаем

$$|\sigma(P)| < 6c_6^{-1}Q^{-2}|\sigma_1(P)|. \tag{5.69}$$

Отметим, что из (5.67) следует $|\sigma_1(P)| < 2c_6Q^{-1-v}$, и для $Q > Q_0$ интервал $\sigma_1(P)$ содержится в $|I|$.

Разложим многочлен P в ряд Тейлора на интервале $\sigma_1(P)$:

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + 1/2P''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2 + 1/6P'''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^3.$$

Используя (5.67), (5.68) и оценивая каждый член разложения, получим

$$|P(x)| < 2c_6Q^{-1}, \ \ x \in \sigma_1(P), \tag{5.70}$$

для $Q > Q_0$.

Зафиксируем вектор $b_1 = (a_3, a_2)$, состоящий из коэффициентов многочлена $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$, и обозначим через $\mathcal{P}_3(Q, b_1)$ подкласс многочленов из $\mathcal{P}_3'(Q)$ с одним и тем же вектором b_1. Можем полагать, что $a_3 > 0$, поскольку $\sigma_0(P) = \sigma_0(-P)$. Далее воспользуемся методом существенных и несущественных областей Спринджука [40].

Во-первых, рассмотрим существенные интервалы $\sigma_1(P)$. Более половины существенного интервала свободно от точек других интервалов (в смысле меры Лебега), поэтому

$$\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_3(Q,b_1)\\ \sigma_1(P)\ \text{существенный}}} |\sigma_1(P)| \leq 2|I|.$$

Используя последнее неравенство, (5.69) и факт, что число различных векторов b_1 не превосходит $(2Q+1)Q$, получаем

$$\sum_{b_1}\ \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_3(Q,b_1)\\ \sigma_1(P)\ \text{существенный}}} |\sigma(P)| < 2^6c_6^{-1}Q^2Q^{-2}|I| = 2^6c_6^{-1}|I|. \tag{5.71}$$

Во-вторых, рассмотрим несущественные интервалы $\sigma_1(P)$. Для многочленов P и $\bar{P}$ ($P \neq \bar{P}$ и $P, \bar{P} \in \mathcal{P}_3(Q, b_1)$) на пересечении $\sigma_1(P, \bar{P}) = \sigma_1(P)\cap\sigma_1(\bar{P})$, мера которого не менее $1/2|\sigma_1(P)|$, выполняются неравенства (5.70). Поскольку у многочленов P и $\bar{P}$ совпадают коэффициенты a_3 и a_2, то многочлен $R(x) = P(x) - \bar{P}(x)$ является линейным и удовлетворяет

$$|R(x)| = |ax - b| < 4c_6Q^{-1}, \quad \max(|a|, |b|) \leq 2Q, \ \ x \in \sigma_1(P, \bar{P}). \tag{5.72}$$

Можем полагать, что $a > 0$, и оценим величины коэффициентов a и $|b|$ в (5.72). Используя разложение многочлена P' в ряд Тейлора на $\sigma_1(P)$ и оценки (5.67), $|P''(\theta_2)(x-\alpha_1)| < 5c_6Q^{-v}$, получаем $|P'(x)| < 4\delta_0Q$ для $Q > Q_0$.

Следовательно, $|a| = |P'(x) - \bar{P}'(x)| < 8\delta_0 Q$, и в силу (5.72) справедливо неравенство $|b| < 8\delta_0 Q$. Таким образом, (5.72) перепишем в виде

$$|R(x)| = |ax - b| < 4c_6 Q^{-1}, \quad \max(a, |b|) < 2^3\delta_0 Q, \;\; x \in \sigma_1(P, \bar{P}). \tag{5.73}$$

Далее оценим меру $x \in I$, для которых выполняется система (5.73). Для фиксированных a и b первое неравенство в (5.73) выполняется для точек $x \in I$ из интервала

$$|x - b/a| < 2^2 c_6 a^{-1} Q^{-1}. \tag{5.74}$$

Обозначим этот интервал через $J(R)$, длина которого равна

$$|J(R)| = 2^3 c_6 a^{-1} Q^{-1}, \tag{5.75}$$

где b/a – центр интервала $J(R)$. Далее надо просуммировать оценку (5.75) по всем a и b, где $|b| < 2^3\delta_0 Q$, при условии, что точка b/a принадлежит интервалу I. Для фиксированного a количество таких точек b обозначим $M_I(a)$. Для $M_I(a)$ справедлива оценка

$$M_I(a) \le \begin{cases} a|I| + 1 \le 2a|I|, & \text{если} \;\; a \ge |I|^{-1}, \\ \gamma, & \text{если} \;\; a < |I|^{-1}, \end{cases} \tag{5.76}$$

где величина γ равна 1 или 0.

Пусть $a \ge |I|^{-1}$, воспользуемся первой оценкой в (5.76). Согласно (5.75) и (5.76), находим

$$\sum_{1 \le a \le 8\delta_0 Q} \sum_{b, b/a \in I} |J(R)| < \sum_{1 \le a \le 8\delta_0 Q} 2^3 c_6 a^{-1} Q^{-1} 2|I| a \le 2^7 c_6 \delta_0 |I|. \tag{5.77}$$

Пусть $a < |I|^{-1}$ и воспользуемся второй оценкой в (5.76). Сначала найдем значение величины c_7, удовлетворяющей условию $2^8 c_6 s^{-1} < c_7 < 2^{-4}\delta_0^{-1}$, и при которой расширенные интервалы

$$J_1(R_1) := \{x \in I : \; |x - b_1/a_1| < c_7 a_1^{-1} Q^{-1}\},$$
$$J_1(R_2) := \{x \in I : \; |x - b_2/a_2| < c_7 a_2^{-1} Q^{-1}\},$$

не пересекаются при $b_1/a_1 \ne b_2/a_2$. Предположим, что интервалы $J_1(R_1)$ и $J_1(R_2)$ пересекаются в точке x, тогда

$$\frac{1}{a_1 a_2} \le \frac{|b_1 a_2 - b_2 a_1|}{a_1 a_2} = |b_1/a_1 - b_2/a_2| \le |x - b_1/a_1| + |x - b_2/a_2| \le c_7 Q^{-1}(a_1^{-1} + a_2^{-1}).$$

Умножая левую и правую часть последнего неравенства на $a_1 a_2$ и полагая $a_2 > a_1$, получаем противоречивое неравенство

$$1 \le c_7 Q^{-1}(a_1 + a_2) < 2c_7 a_2 Q^{-1} < 2^4 c_7 \delta_0. \tag{5.78}$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\sum_R |J_1(R)| = \sum_{1 \le a \le 8\delta_0 Q} 2c_7 a^{-1} Q^{-1} \gamma \le |I|,$$

откуда получаем

$$\sum_{1\le a\le 8\delta_0 Q} \gamma a^{-1} \le 2^{-1}c_7^{-1}Q|I|. \tag{5.79}$$

Поскольку для фиксированных a и b мера множества $x\in I$, удовлетворяющих (5.74), не превосходит $2^3c_6a^{-1}Q^{-1}$, то суммируя по b, получаем оценку $2^3c_6a^{-1}Q^{-1}\gamma$. Используя (5.79), находим

$$\sum_{1\le a\le 8\delta_0 Q}\ \sum_{b,b/a\in I} 2^3c_6a^{-1}Q^{-1} \le 2^3c_6Q^{-1}\sum_{1\le a\le 8\delta_0 Q}\gamma a^{-1} \le 2^2c_6c_7^{-1}|I| \le 2^{-6}s|I| \tag{5.80}$$

для $c_7 \ge 2^8c_6s^{-1}$. Таким образом, объединяя оценки (5.71), (5.77) и (5.80), полученные для существенных и несущественных интервалов, получим

$$|\mathcal{L}_{31}| < (2^6c_6^{-1} + 2^7c_6\delta_0 + 2^{-6}s)|I|. \tag{5.81}$$

Выберем $c_6 = 2^{12}s^{-1}$, $\delta_0 \le 2^{-25}s^2$ и $c_7 = 2^{41/2}s^{-2}$. Тогда оценка (5.81) примет вид $|\mathcal{L}_{31}| < 2^{-4}s|I|$. Это завершает доказательство предложения 5.1. $\square$

Пусть $v = 5/8$. Для некоторой постоянной $c_8 > 0$ обозначим через $\mathcal{L}_{32}\subset\tilde{\mathcal{L}}_3$ множество чисел $x\in I$, для которых существует многочлен $P\in\mathcal{P}_3'(Q)$, удовлетворяющий (5.63) и неравенству

$$c_8 < |P'(\alpha_1)| \le Q^{5/8}$$

в ближайшем к x корне α_1 многочлена P.

Предложение 5.2. *Для $c_8 = 2^8s^{-1/2}$ и достаточно большого Q справедлива оценка $|\mathcal{L}_{32}| < 2^{-4}s|I|$.*

Доказательство. Доказательство предложения 5.2 близко к доказательству предложения 5.1. Как и выше, для $P\in\mathcal{P}_3'(Q)$ с корнем α_1 и некоторой постоянной $c_9 > 1$ (явный вид которой будет указан позднее) рассмотрим интервал $\sigma(P)$ и определим интервал

$$\sigma_2(P) := \{x\in I:\ |x-\alpha_1| < c_9Q^{-1}|P'(\alpha_1)|^{-1}\}.$$

Очевидно, что

$$|\sigma(P)| < 6c_9^{-1}Q^{-2}|\sigma_2(P)|. \tag{5.82}$$

Определение множества $\mathcal{L}_{32}$ обеспечивает справедливость неравенства $|\sigma_2(P)| < |I|$. Разложив P и P' в ряд Тейлора на $\sigma_2(P)$, получим

$$|P(x)| < 2c_9Q^{-1}, \tag{5.83}$$

$$|P'(x)| < 2|P'(\alpha_1)|, \tag{5.84}$$

для $c_8 \ge 2^2c_9^{1/2}$ и $Q > Q_0$.

Далее рассмотрим существенные и несущественные интервалы $\sigma_2(P)$, $P \in \mathcal{P}_3(Q,b_1)$. В случае существенных интервалов, из неравенств $\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_3(Q,b_1)\\ \sigma_2(P)\ \text{существенный}}} |\sigma_2(P)| \le 2|I|$ и (5.82) получаем

$$\sum_{b_1} \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_3(Q,b_1)\\ \sigma_2(P)\ \text{существенный}}} |\sigma(P)| < 2^6 c_9^{-1}|I|. \tag{5.85}$$

В случае несущественных интервалов, используя (5.83) и (5.84), для многочлена $T(x) = P(x) - \bar{P}(x) = gx - d$, где $P, \bar{P} \in \mathcal{P}_3(Q,b_1)$ $P \ne \bar{P}$, на пересечении $\sigma_2(P,\bar{P}) = \sigma_2(P) \cap \sigma_2(\bar{P})$ имеем

$$|gx - d| < 4c_9Q^{-1}, \;\; 1 \le g \le 4Q^{5/8}. \tag{5.86}$$

Первое неравенство в (5.86) выполняется на интервале $J_2(T)$ с центром в точке d/g и длины $8c_9g^{-1}Q^{-1}$. Зафиксируем g и обозначим через $M_I'(g)$ количество точек d/g, попадающих в интервал I. Аналогично как в (5.76), получим следующую оценку

$$M_I'(g) \le \begin{cases} 2g|I|, & \text{если} \;\; g \ge |I|^{-1}, \\ \gamma, & \text{если} \;\; g < |I|^{-1}, \end{cases}$$

где величина γ равна 1 или 0.

Пусть $g \ge |I|^{-1}$. Тогда для $Q > Q_0$ имеем

$$\sum_{1\le g\le 4Q^{5/8}} \sum_{d, d/g\in I} |J_2(T)| \le 2^6 c_9 Q^{-3/8}|I| \le 2^{-6}s|I|. \tag{5.87}$$

Пусть $g < |I|^{-1}$. Если для $c_{10} > 4c_9$ интервалы

$$\begin{aligned} J_3(T_1) &:= \{x \in I: \; |x - d_1/g_1| < c_{10}g_1^{-1}Q^{-1}\}, \\ J_3(T_2) &:= \{x \in I: \; |x - d_2/g_2| < c_{10}g_2^{-1}Q^{-1}\}, \end{aligned}$$

пересекаются при $d_1/g_1 \ne d_2/g_2$, то приходим к неравенству аналогичному (5.78):

$$1 \le 2c_{10}(g_1 + g_2)Q^{-1} \le 2^4 c_{10} Q^{-3/8}, \tag{5.88}$$

которое противоречиво при любой величине c_{10} и $Q > Q_0(c_{10})$. Аналогично как в (5.79), получаем

$$\sum_{1\le g\le 4Q^{5/8}} \gamma g^{-1} \le 2^{-1}c_{10}^{-1}Q|I|. \tag{5.89}$$

Поскольку для фиксированных g и d мера множества $x \in I$, удовлетворяющих (5.86), не превосходит $8c_9g^{-1}Q^{-1}$, то суммируя по d, получаем оценку $8c_9g^{-1}Q^{-1}\gamma$. В силу (5.89), имеем

$$\sum_{1\le g\le 4Q^{5/8}} \sum_{d,d/g\in I} 8c_9g^{-1}Q^{-1} \le 8c_9Q^{-1} \sum_{1\le g\le 4Q^{5/8}} \gamma g^{-1} \le 4c_9c_{11}^{-1}|I| \le 2^{-6}s|I|$$

для $c_{10} \geq 2^8 c_9 s^{-1}$. Из последней оценки и (5.85), (5.87) получаем

$$|\mathcal{L}_{32}| \leq (2^6 c_9^{-1} + 2^{-6}s + 2^{-6}s)|I|.$$

Выберем $c_9 = 2^{12}s^{-1}$, $c_8 = 2^8 s^{-1/2}$ и $c_{10} = 2^{20}s^{-2}$. Это завершает доказательство предложения 5.2. □

Обозначим через $\mathcal{L}_{33} \subset \tilde{\mathcal{L}}_3$ множество чисел $x \in I$, для которых существует многочлен $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$, удовлетворяющий (5.63) и неравенству

$$2^{-3} < |P'(\alpha_1)| \leq 2^8 s^{-1/2}$$

в ближайшем к x корне α_1 многочлена P.

Предложение 5.3. *Для достаточно большого Q справедлива оценка $|\mathcal{L}_{33}| < 2^{-4}s|I|$.*

Доказательство. Для $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$ с корнем α_1 и некоторой постоянной $c_{11} > 1$ определим интервал

$$\sigma_3(P) := \{x \in I : \ |x - \alpha_1| < c_{11}Q^{-1}|P'(\alpha_1)|^{-1}\}.$$

Разложив P и P' в ряд Тейлора на $\sigma_3(P)$, получим

$$|P(x)| < 2^9 c_{11}^2 Q^{-1}, \quad |P'(x)| < c_{12}$$

для $c_{12} = \max(2^9 s^{-1/2}, 2^6 c_{11})$ и $Q > Q_0$. Снова рассмотрим существенные и несущественные интервалы $\sigma_3(P)$, $P \in \mathcal{P}_3(Q, b_1)$. В случае существенных интервалов получим, что мера не превосходит $2^6 c_{11}^{-1}|I|$, и при $c_{11} > 2^{11}s^{-1}$ мера не превосходит величины $2^{-5}s|I|$ соответственно. В случае несущественных интервалов, надо оценить меру $x \in I$, удовлетворяющих

$$|ax - b| < 2^{10}c_{11}^2 Q^{-1}, \ \max(a, |b|) < 2c_{12}. \tag{5.90}$$

Система (5.90) выполняется на множестве точек $x \in I$, мера которого не превосходит $c_{13}Q^{-1}$ для некоторой постоянной $c_{13} > 0$. Выберем $c_5 \geq 2^5 c_{13} s^{-1}$ в теореме 5.8, тогда мера в случае несущественных интервалов не превосходит $2^{-5}s|I|$. □

Для некоторой постоянной $c_{14} > 0$ обозначим через $\mathcal{L}_{34} \subset \tilde{\mathcal{L}}_3$ множество чисел $x \in I$, для которых существует многочлен $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$, удовлетворяющий (5.63) и неравенству

$$c_{14}Q^{-1/2} < |P'(\alpha_1)| \leq 2^{-3}$$

в ближайшем к x корне α_1 многочлена P.

Предложение 5.4. *Для $c_{14} = 2^8 s^{-1/2}$ и достаточно большого Q справедлива оценка $|\mathcal{L}_{34}| < 2^{-4}s|I|$.*

Доказательство. Для $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$ с корнем α_1 и некоторой постоянной $c_{15} > 1$ определим интервал

$$\sigma_4(P) := \{x \in I : \ |x - \alpha_1| < c_{15} Q^{-2} |P'(\alpha_1)|^{-1}\}.$$

Очевидно, что

$$|\sigma(P)| < 6 c_{15}^{-1} Q^{-1} |\sigma_4(P)|. \tag{5.91}$$

Зафиксируем вектор $b_2 = (a_3)$. Подмножество многочленов $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$ с одним и тем же вектором b_2 обозначим $\mathcal{P}_3(Q, b_2)$. Снова рассмотрим существенные и несущественные интервалы $\sigma_4(P)$, $P \in \mathcal{P}_3(Q, b_2)$.

Из определения существенных интервалов следует

$$\sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_3(Q, b_2) \\ \sigma_4(P) \ \text{существенный}}} |\sigma_4(P)| \le 2|I|.$$

Поскольку число векторов b_2 не превосходит Q, то суммируя по всем b_2 и используя (5.91), получаем

$$\sum_{b_2} \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_3(Q, b_2) \\ \sigma_4(P) \ \text{существенный}}} |\sigma(P)| < 2^4 c_{15}^{-1} |I| = 2^{-5} s |I|$$

для $c_{15} = 2^9 s^{-1}$.

Далее рассмотрим несущественные интервалы. Разлагая в ряд Тейлора $P_i(x)$ и $P_i'(x)$ на $\sigma_4(P_{i_1}, P_{i_2}) = \sigma_4(P_{i_1}) \cap \sigma_4(P_{i_2})$, $P_{i_1}, P_{i_2} \in \mathcal{P}_3(Q, b_2)$, $P_{i_1} \ne P_{i_2}$, оценим сверху $|P_i(x)|$ и $|P_i'(x)|$, и получим

$$|P_i(x)| < 2 c_{15} Q^{-2}, \ \ |P_i'(x)| < 2|P'(\alpha_1)| \ \ \text{для} \ \ c_{14} \ge 2^2 c_{15}^{1/2}. \tag{5.92}$$

Поскольку старшие коэффициенты многочленов P_{i_1} и P_{i_2} равны, то $S(x) = P_{i_1}(x) - P_{i_2}(x) = f_2 x^2 + f_1 x + f_0$ и согласно (5.92), удовлетворяет условиям

$$|S(x)| < 4 c_{15} Q^{-2}, \ \ |S'(x)| < 4|P'(\alpha_1)|, \quad |f_i| \le 2Q, \ \ 0 \le i \le 2.$$

Пусть β_1, β_2 – корни многочлена $S(x)$. Поскольку дискриминант $D(S)$ многочлена S удовлетворяет условию

$$|D(S)| = |S'(\beta_1)|^2 < 16 |P'(\alpha_1)|^2 \le 2^{-2},$$

то заключаем, что $D(S) = 0$. Последнее означает, что многочлен S имеет кратный корень, и, следовательно, является квадратом линейного многочлена:

$$S(x) = S_0^2(x) = (s_1 x - s_0)^2, \ \ |s_1| < 2Q^{1/2}.$$

Далее оценим меру $x \in I$, удовлетворяющих

$$|s_1 x - s_0| < 2 c_{15}^{1/2} Q^{-1}, \ \ |s_1| < 2Q^{1/2}. \tag{5.93}$$

В силу (5.93) имеем $|x - s_0/s_1| < 2c_{15}^{1/2}|s_1|^{-1}Q^{-1}$, и последнее выполняется на интервале $J_4(S_0)$ с центром в точке s_0/s_1 и длины $4c_{15}^{1/2}|s_1|^{-1}Q^{-1}$. Зафиксируем s_1 и обозначим через $M_I''(s_1)$ количество точек s_0/s_1, принадлежащих I. Аналогично как в (5.76), получим следующую оценку

$$M_I''(s_1) \le \begin{cases} 2s_1|I|, & \text{если} \quad s_1 \ge |I|^{-1}, \\ \gamma, & \text{если} \quad s_1 < |I|^{-1}, \end{cases}$$

где величина γ равна 1 или 0.

Пусть $s_1 \ge |I|^{-1}$. Тогда для $Q > Q_0$ имеем

$$\sum_{1 \le s_1 \le 2Q^{1/2}} \sum_{s_0, s_0/s_1 \in I} |J_4(S_0)| < 2^3 c_{15}^{1/2} Q^{-1/2}|I| \le 2^{-6}s|I|.$$

Пусть $s_1 < |I|^{-1}$. Если для $c_{16} > 2c_{15}^{1/2}$ интервалы

$$\begin{aligned} J_5(S_1) &:= \{x \in I: \ |x - s_{0,1}/s_{1,1}| < c_{16}s_{1,1}^{-1}Q^{-1}\}, \\ J_5(S_2) &:= \{x \in I: \ |x - s_{0,2}/s_{1,2}| < c_{16}s_{1,2}^{-1}Q^{-1}\}, \end{aligned}$$

пересекаются при $s_{0,1}/s_{1,1} \ne s_{0,2}/s_{1,2}$, то приходим к неравенству аналогичному (5.78):

$$1 \le 2c_{16}(s_{1,1} + s_{1,2})Q^{-1} < 2^3 c_{16} Q^{-1/2}, \tag{5.94}$$

которое противоречиво при любой величине c_{16} и $Q > Q_0(c_{16})$. Аналогично как в (5.79), получаем

$$\sum_{1 \le s_1 < 2Q^{1/2}} \gamma s_1^{-1} \le 2^{-1} c_{16}^{-1} Q|I|. \tag{5.95}$$

Поскольку для фиксированных s_1 и s_0 мера множества точек $x \in I$, удовлетворяющих (5.93), не превосходит $2c_{15}^{1/2}|s_1|^{-1}Q^{-1}$, то суммируя по s_0, получаем $2c_{15}^{1/2}|s_1|^{-1}Q^{-1}\gamma$. Используя (5.95), находим

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{1 \le s_1 < 2Q^{1/2}} \sum_{s_0, s_0/s_1 \in I} 4c_{15}^{1/2}|s_1|^{-1}Q^{-1} \ &\le \ 4c_{15}^{1/2}Q^{-1} \textstyle\sum_{1 \le s_1 < 2Q^{1/2}} \gamma |s_1|^{-1} \\ &\le \ 2c_{15}^{1/2} c_{16}^{-1}|I| \le 2^{-6}s|I| \end{aligned}$$

для $c_{16} \ge 2^7 c_{15}^{1/2} s^{-1}$. Выберем $c_{14} = 2^7 s^{-1/2}$ и $c_{16} \ge 2^{12}s^{-3/2}$; далее суммируя оценки, полученные для существенных и несущественных интервалов, завершаем доказательство предложения 5.4. $\square$

Обозначим через $\mathcal{L}_{35} \subset \tilde{\mathcal{L}}_3$ множество чисел $x \in I$, для которых существует многочлен $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$, удовлетворяющий (5.63) и неравенству

$$2^5 Q^{-1} < |P'(\alpha_1)| \le 2^8 s^{-1/2} Q^{-1/2} \tag{5.96}$$

в ближайшем к x корне α_1 многочлена P.

Предложение 5.5. *Справедлива оценка* $|\mathcal{L}_{35}| < 2^{-2}s|I|$ *для достаточно большого* Q.

Доказательство. Разделим интервал I на меньшие интервалы J_i, где $|J_i| = Q^{-u}$ и $u > 1$. Если только один многочлен $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$ имеет в J_i точки x, для которых верны неравенства (5.61) и (5.96), то согласно лемме 1.3 мера таких x не превосходит

$$2^{-3}Q^{-2+u}|I| < 2^{-4}s|I|$$

для $u < 2$ и $Q > Q_0$. Предположение о наличии в J_i точек не менее двух неприводимых многочленов приводит к противоречию. Докажем последнее. Предположим, что существует точка $x \in J_i$, для которой верны неравенства (5.61) и (5.96) для двух неприводимых многочленов P_1 и P_2 из $\mathcal{P}_3'(Q)$. Разлагая P_1 в ряд Тейлора на J_i и оценивая сверху слагаемые, получим

$$|P_1(x)| < 2^9 s^{-1/2} Q^{-1/2-u},\ x \in J_i,$$

для $u > 3/2$. Очевидно, что такая же оценка справедлива для P_2 на J_i.

Далее воспользуемся леммой, доказанной в [9].

Лемма 5.8. *Пусть* $\delta > 0$ *и* $Q > Q_0(\delta)$. *Пусть* P_1 *и* P_2 *– два целочисленных многочлена степени не выше* n *без общих корней, и* $\max(H(P_1), H(P_2)) \leq Q$. *Более того, пусть* $J \subset \mathbb{R}$ *– интервал длины* $|J| = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$. *Если существует такое* $\tau > 0$, *что для всех* $x \in J$ *выполняется неравенство*

$$|P_j(x)| < Q^{-\tau},$$

для $j = 1, 2$, *то*

$$\tau + 1 + 2\max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta. \tag{5.97}$$

Применяя лемму 5.8 для $\tau = 1/2 + u - \epsilon$, $\epsilon > 0$, и $\eta = u$, получаем противоречие в (5.97) при $u > 3/2 + \delta + 3\epsilon$. Выберем u, удовлетворяющее условию $3/2 + \delta + 3\epsilon < u < 2$.

Предположим, что $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$ – приводимый многочлен, тогда запишем его в виде $P(x) = t_1(x)t_2(x)$, где t_1 – многочлен первой степени и t_2 – неприводимый многочлен второй степени или произведение двух линейных многочленов. Пусть $t_1(x) = ax + b$ и $t_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$. Можем считать, что $a > 0$. Используя лемму 5.5, получаем

$$aH(t_2) \leq H(t_1)H(t_2) \leq 2^3H(P) \leq 2^3Q. \tag{5.98}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_{351}$ множество точек $x \in I$, для которых система неравенств

$$|t_1(x)| < Q^{-1}, \quad a < \delta_0 Q \tag{5.99}$$

имеет решение в многочленах t_1. Система неравенств (5.99) – это частный случай системы неравенств (5.73), поэтому $|\mathcal{L}_{351}| < 2^{-5}s|I|$. Если система (5.99) не выполняется, то возможны три варианта:

$$|t_1(x)| < Q^{-1}, \quad \delta_0 Q \le a < 2^3 Q, \tag{5.100}$$

$$|t_1(x)| \ge Q^{-1}, \quad a < \delta_0 Q, \tag{5.101}$$

$$|t_1(x)| \ge Q^{-1}, \quad \delta_0 Q \le a < 2^3 Q. \tag{5.102}$$

Систему (5.100) разобьем на две подсистемы

$$\delta_0 Q^{-1} < |t_1(x)| < Q^{-1}, \quad \delta_0 Q \le a < 2^3 Q, \tag{5.103}$$

$$|t_1(x)| \le \delta_0 Q^{-1}, \quad \delta_0 Q \le a < 2^3 Q. \tag{5.104}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_{352}$ и $\mathcal{L}_{353}$ множество точек $x \in I$, для которых система (5.103) и (5.104) соответственно имеет решение в многочленах t_1. Условия (5.104) аналогичны (5.73), поэтому $|\mathcal{L}_{353}| < 2^{-5}s|I|$.

При выполнении (5.98) и (5.103) из неравенства $|P(x)| < Q^{-3}$ получаем

$$|t_2(x)| \le \delta_0^{-1} Q^{-2}, \quad H(t_2) < 2^3 \delta_0^{-1}. \tag{5.105}$$

Количество многочленов, для которых выполняется второе неравенство в (5.105) не превосходит $c(\delta_0)$, поэтому приходим к неравенству $|\mathcal{L}_{352}| < 2^{-5}s|I|$.

Из (5.101) следует

$$|t_2(x)| < Q^{-2}, \quad H(t_2) < 2^3 Q. \tag{5.106}$$

Найдем оценку сверху для t_2' на J_i. Используя равенства

$$P'(x) = t_1'(x)t_2(x) + t_1(x)t_2'(x), \tag{5.107}$$

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + P''(\alpha_1)(x-\alpha_1) + P'''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2/2,$$

оценки (5.101), (5.106) и

$$|P'(x)| < 2^9 s^{-1/2} Q^{-1/2}, \ \ Q^{-1} \le |t_1(x)| \ll Q,$$

получаем, что при $|t_2'(x)| > Q^{5/8}$ и достаточно большом Q равенство в (5.107) противоречиво. Следовательно, $|t_2'(x)| \le Q^{5/8}$, $x \in J_i$. Далее, используя (5.106), находим

$$|t_2(x)| < Q^{-2}, \quad |t_2'(x)| \le Q^{5/8}. \tag{5.108}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_{354}$ множество точек $x \in I$, для которых система (5.108) имеет решение в многочленах t_2. Мера множества $\mathcal{L}_{354}$ оценивается аналогично как и в предложении 5.2, поэтому $|\mathcal{L}_{354}| < 2^{-4}s|I|$.

Используя (5.98), (5.102) и $|P(x)| < Q^{-3}$, получаем

$$|t_2(x)| < Q^{-2}, \quad H(t_2) < 2^3 \delta_0^{-1}. \tag{5.109}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_{355}$ множество точек $x \in I$, для которых система (5.109) имеет решение в многочленах t_2. Количество многочленов, для которых выполняется второе неравенство в (5.109) не превосходит $c(\delta_0)$, поэтому приходим к неравенству $|\mathcal{L}_{355}| < 2^{-5}s|I|$.

Таким образом, получаем $|\mathcal{L}_{35}| < 2^{-4}s|I| + \sum_{i=1}^{5} |\mathcal{L}_{35i}| < 2^{-2}s|I|$. $\Box$

Случай 2. Определим подмножество $\check{\mathcal{L}}_3$ множества $\bar{\mathcal{L}}_3$, состоящее из чисел $x \in I$, для которых существует многочлен $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$ такой, что выполнены неравенства

$$|P(x)| < Q^{-3}, \quad |P'(x)| \le 2^6 Q^{-1}. \tag{5.110}$$

Будем использовать обозначение $\sigma_*(P)$ для множества решений системы неравенств (5.110) при фиксированном многочлене $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$. Пусть $x \in \sigma_*(P) \cap S_P(\alpha_1)$, $P(\alpha_1) = 0$. Сначала покажем, что значение производной многочлена P в α_1, $P(\alpha_1) = 0$, удовлетворяет условию

$$|P'(\alpha_1)| \le 2^8 Q^{-1}. \tag{5.111}$$

Предположим, что выполняется неравенство, противоположное (5.111). Тогда, используя разложение P' в ряд Тейлора в окрестности α_1, имеем

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + P''(\alpha_1)(x-\alpha_1) + 1/2P'''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2,$$

где $|x - \alpha_1| < 2^{-6}Q^{-2}$ согласно лемме 1.3. Поскольку $\max(|P''(\alpha_1)(x - \alpha_1)|, |1/2P'''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2|) < 2^{-3}Q^{-1}$, то получаем $|P'(x)| > 2^7 Q^{-1}$, что противоречит условию $|P'(x)| \le 2^6 Q^{-1}$.

Далее получение оценки меры множества $\check{\mathcal{L}}_3$ разбивается на два случая в зависимости от значения величины $|P'(\alpha_1)|$.

Для некоторой постоянной $0 < c_{17} < 1/6$ обозначим через $\mathcal{L}_{36} \subset \check{\mathcal{L}}_3$ множество чисел $x \in I$, для которых существует многочлен $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$, удовлетворяющий (5.110) и неравенству

$$|P'(\alpha_1)| < c_{17} Q^{-1}$$

в ближайшем к x корне α_1 многочлена P.

Предложение 5.6. *Для достаточно большого Q справедлива оценка $|\mathcal{L}_{36}| < 2^{-2}s|I|$.*

Доказательство. Поскольку

$$1 \le |D(P)| = |a_3^4(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2| = |P'(\alpha_1)|^2 a_3^2 |\alpha_2-\alpha_3|^2,$$

то, используя неравенство $|\alpha_2 - \alpha_3| \le 6Q/|a_3|$ (так как $|\alpha_i| \le 3Q/|a_3|$ для $i = 2, 3$) и $|P'(\alpha_1)| < c_{17}Q^{-1}$, получаем

$$1 \le |D(P)| \le 2^2 \cdot 3^2 c_{17}^2 Q^{-2} Q^2 = 2^2 \cdot 3^2 c_{17}^2.$$

При $c_{17} < 1/6$ последнее неравенство противоречиво, откуда заключаем, что $D(P) = 0$. Последнее означает, что многочлен P имеет кратный корень. Поступая аналогично как в предложении 5.4 и предложении 5.5, получаем $|\mathcal{L}_{36}| < 2^{-2}s|I|$. □

Обозначим через $\mathcal{L}_{37} \subset \check{\mathcal{L}}_3$ множество чисел $x \in I$, для которых существует многочлен $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$, удовлетворяющий (5.110) и неравенству

$$c_{17}Q^{-1} \leq |P'(\alpha_1)| \leq 2^8 Q^{-1} \tag{5.112}$$

в ближайшем к x корне α_1 многочлена P.

Предложение 5.7. *Для достаточно большого Q справедлива оценка $|\mathcal{L}_{37}| < 2^{-2}s|I|$.*

Доказательство. Разделим интервал I на интервалы J_i' длины $|J_i| = Q^{-u'}$, где $u' > 1$. Если не более одного многочлена $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$ принадлежит каждому интервалу J_i', то согласно лемме 1.3 мера таких x, удовлетворяющих первому неравенству в (5.61) и (5.112), не превосходит

$$4c_{17}^{-1}Q^{-2+u'}|I| < 2^{-4}s|I|$$

при $u' < 2$ и $Q > Q_0$.

Предположение о принадлежности не менее двух неприводимых многочленов интервалам J_i' приводит к противоречию. Предположим, что P_1 и P_2 принадлежат J_i'. Разлагая P_1 в ряд Тейлора на J_i' и оценивая сверху слагаемые, получим

$$|P_1(x)| < 2^5 Q^{1-2u'}, \;\; x \in J_i',$$

при $u' < 2$. Очевидно, что такая же оценка справедлива для P_2 на J_i'.

Применяя лемму 5.8 для $\tau = -1 + 2u' - \epsilon'$, $\epsilon' > 0$, и $\eta = u'$, получаем противоречие в (5.97) при $u' > 3/2+\delta/4+3\epsilon'/4$. Выберем u', удовлетворяющее условию $3/2 + \delta/4 + 3\epsilon'/4 < u' < 2$.

В случае приводимых многочленов поступаем аналогично как в предложении 5.5. □

Суммируя меры множеств, полученные в предложениях 5.1 – 5.7, находим, что мера множества $\bar{\mathcal{L}}_3$ удовлетворяет условию (5.62).

5.4.2 Доказательство теоремы 5.7

Далее будем полагать, что постоянная c_5 удовлетворяет условиям теоремы 5.8 и условию $c_5 \geq \frac{2\cdot 3^5}{(1-s)\delta_0}$. Обозначим через $\mathcal{L}_0(Q, I)$ множество точек $x \in I$, для которых неравенство $|P(x)| < Q^{-3}$ имеет решение в многочленах $P \in \mathcal{P}_3'(Q)$. Используя принцип ящиков Дирихле, несложно показать, что $\mathcal{L}_0(Q, I) = I$. На основании теоремы 5.8 существует множество

$\mathcal{L}_3(Q,\delta_0,I) = I\setminus\bar{\mathcal{L}}_3(Q,\delta_0,I)\subset I$ такое, что $|\mathcal{L}_3(Q,\delta_0,I)|\ge(1-s)|I|$ для всех $Q>Q_0$, где $Q_0>c_5|I|^{-1}$.

Обозначим через $\mathcal{L}_{\le 2}(Q,\delta_0,I)$ объединение интервалов $\sigma(\alpha)=\{x\in I : |x-\alpha|<3\delta_0^{-1}Q^{-4}\}$ по всем алгебраическим числам α степени ≤ 2 и высоты $H(\alpha)\le Q$. Число различных интервалов в последнем объединении не превосходит $(2Q+1)^3$ и длина каждого интервала не превосходит $6\delta_0^{-1}Q^{-4}$, откуда получаем $|\mathcal{L}_{\le 2}(Q,\delta_0,I)|\le(1-s)|I|/2$ при $c_5\ge\frac{2\cdot 3^5}{(1-s)\delta_0}$.

Определим множество $\mathcal{L}_3'(Q,\delta_0,I)=\mathcal{L}_3(Q,\delta_0,I)\setminus\mathcal{L}_{\le 2}(Q,\delta_0,I)$. Пусть $x\in\mathcal{L}_3'(Q,\delta_0,I)$, тогда существует ненулевой многочлен $P\in\mathcal{P}_3'(Q)$, удовлетворяющий системе

$$|P(x)|<Q^{-3},\ \ |P'(x)|\ge\delta_0 Q. \tag{5.113}$$

Далее покажем, что существует корень α многочлена P близкий к x. Пусть $y\in\mathbb{R}$, и $|y-x|=3\delta_0^{-1}Q^{-4}$. Согласно формуле Тейлора имеем

$$P(y)=\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{i!}P^{(i)}(x)(y-x)^i.$$

Используя неравенство $|P^{(i)}(x)|\ll Q$, $i=1,2,3$, поскольку $x\in[-1/2,1/2]$, убеждаемся, что

$$\left|P^{(i)}(x)(y-x)^i\right|<3^2\cdot 5\delta_0^{-2}Q^{-7}\qquad \text{для } i\ge 2\,.$$

Кроме того, согласно (5.113), имеем $|P(x)|<Q^{-3}$. Таким образом,

$$\sum_{i\ne 1}\left|\tfrac{1}{i!}P^{(i)}(x)(y-x)^i\right|<Q^{-3}+\sum_{i=2}^{3}3^2\cdot 5\delta_0^{-2}Q^{-7}<2Q^{-3}. \tag{5.114}$$

С другой стороны,

$$|P'(x)(y-x)|\overset{(5.113)}{\ge}3Q^{-3}. \tag{5.115}$$

Из (5.114) и (5.115) следует, что $P(y)$ имеет разные знаки в концах отрезка $|y-x|\le 3\delta_0^{-1}Q^{-4}$. В силу непрерывности P, существует корень α многочлена P в этом интервале, т.е.

$$|x-\alpha|<3\delta_0^{-1}Q^{-4}\,. \tag{5.116}$$

Поскольку $x\notin\mathcal{L}_{\le 2}(Q,\delta_0,I)$, то заключаем, что $\alpha\in\mathcal{A}_3$.

Выберем максимальный набор $\{\alpha_1,\dots,\alpha_t\}\subset I$, состоящий из действительных алгебраических чисел степени $\deg\alpha_i=3$ и удовлетворяющий условиям

$$H(\alpha_i)\le Q,\quad |\alpha_i-\alpha_j|\ge 3\delta_0^{-1}Q^{-4},\ \ 1\le i<j\le t.$$

Как показано выше, для любой точки $x\in\mathcal{L}_3'(Q,\delta_0,I)$ существует алгебраическое число $\alpha\in\mathcal{A}_3$, удовлетворяющее (5.116) и $H(\alpha)\le Q$. Поскольку набор

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$ максимален, то существует α_i в данном наборе, удовлетворяющее неравенству $|\alpha - \alpha_i| \le 3\delta_0^{-1}Q^{-4}$. Последнее неравенство вместе с (5.116) влечет $|x - \alpha_i| < 6\delta_0^{-1}Q^{-4}$. Поскольку x – произвольная точка множества $\mathcal{L}_3'(Q, \delta_0, I)$, то

$$\mathcal{L}_3'(Q, \delta_0, I) \subset \cup_{i=1}^{t}\{x \in I : |x - \alpha_i| < 6\delta_0^{-1}Q^{-4}\}.$$

Используя $|\mathcal{L}_3'(Q, \delta_0, I)| \ge (1 - s)|I|/2$, получаем неравенство

$$t \ge 2^{-3}3^{-1}\delta_0(1 - s)Q^4|I|.$$

Положим $T = Q^4$, тогда для любого $T \ge T_0$, где

$$T_0 = (c_5 + 1)^4|I|^{-4},$$

существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in I \cap \mathcal{A}_3$ такие, что выполнены условия (5.60). $\square$

Список литературы

[1] *Арнольд В.И.* Малые знаменатели. Об отображении окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат. – 1961. – Т. 25, №1. – С. 21–86.

[2] *Бересневич В.В.* Эффективные оценки мер множеств действительных чисел с заданным порядком аппроксимации квадратичными иррациональностями // Вести АН Беларуси. Сер. физ-мат. наук. – 1996. – №4.– С. 10–15.

[3] *Бересневич В.В.* Регулярные системы и линейные диофантовы приближения на многообразиях // Доклады НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, №5. – С. 37 -– 39.

[4] *Бересневич В.В.* Application of the consept of regular systems in the Metric theory of numbers // Vestsi Nats. Acad. Navuk Belarusi. Ser. Fiz.-Mat. Navuk. – 2000. – №1.– С. 35 – 39.

[5] *Бересневич В.В.* О построении регулярных систем точек с вещественными, комплексными и p-адическими алгебраическими координатами // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2003. – №1. – С. 22–27.

[6] *Бересневич В.В., Ковалевская Э.И.* О диофантовых приближениях зависимых величин в p-адическом случае // Мат. заметки. – 2003. – Т. 25, №1. – С. 22–37.

[7] *Берник В.И.* Асимптотика числа решений некоторых систем неравенств в теории дилфантовых приближений зависимых величин // Вести АН БССР, сер. физ.-мат. наук. – 1973. – №1. – С. 10–17.

[8] *Берник В.И.* Совместные приближения нуля значениями целочисленных многочленов // Изв. АН СССР, Сер. физ.-мат. – 1980. – Т. 44, №1. – С. 24–45.

[9] *Берник В.И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений // Acta Arith. – 1983. – Т. 42, №3. – С. 219–253.

[10] *Берник В.И., Моротская И.Л.* Диофантовы приближения в $\mathbb{Q}_p$ и размерность Хаусдорфа // Вести АН Беларуси. Сер. физ-мат. наук. – 1986. – №3. – С. 3–9.

[11] *Берник В.И.* О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов // Acta Arith. – 1989. – Т. 53. – С. 17–28.

[12] *Берник В.И., Тищенко К.И.* Целочисленные многочлены с перепадами высот коэффициентов и гипотеза Вирзинга // Докл. АН Беларуси. – 1993. – Т. 37, №5. – С. 9–11.

[13] *Бернік В. І., Дыкінсан Х., Додсан М.М.* Набліжэнне рэчаісных лікау значэннямі цэлалікавых паліномау // Докл. НАН Беларуси. – 1998. – Т. 42, №4. – С. 51–54.

[14] *Берник В.И., Васильев Д.В.* Теорема Хинчина для целочисленных полиномов комплексной переменной // Труды ИМ НАН Беларуси. – 1999. – №3. – С. 10–20.

[15] *Берник В.И., Калоша Н.И.* Приближение нуля значениями целочисленных полиномов в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ // Вести НАН Беларуси. Сер. физ-мат. наук. – 2004. – №1. – С. 121–123.

[16] *Бударина Н.В.* Деформации диофантовых для квадратичных форм решетки корней A_n // Записки научн. семин. ПОМИ. –2004. – Т. 314. – С. 5–13.

[17] *Бударина Н.В., Х. Диккинсон, В.И. Берник* Теорема Хинчина и приближение нуля значениями целочисленных многочленов в разных метриках // Доклады Академии Наук. – 2007. – Т. 413, №2. – С. 151–153.

[18] *Бударина Н.В., Зорин Е.В.* Совместные приближения действительных и p-адических чисел целыми алгебраическими числами // Вестник Беларус. Гос. Унив. (БГУ). Сер. 1 Физ. Мат. Информ. – 2009. – Т. 2. – С. 104–109.

[19] *Бударина Н.В., Куксо О.С.* Совместные приближения нуля квадратичными иррациональностями в $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$ при немонотонных правых частях неравенств // Вести НАН Беларуси, Серия физ.-мат. наук. – 2010. – Т. 2. – С. 23–25.

[20] *Бударина Н.В.* Совместные диофантовы приближения с немонотонными правыми частями // Доклады Академии Наук. – 2011. – Т. 437, №4. – С. 441–443.

[21] *Бударина Н.В.* О примитивно 2-универсальных квадратичных формах // Алгебра и анализ. – 2011. – Т. 23, №3. – С. 31–62.

[22] *Бударина Н.В., Берник В.И., Диккинсон Д.* Действительные и комплексные корни целочисленных полиномов в окрестности их малых значений // Доклады НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, №5. – С. 18–21.

[23] *Бударина Н.В.* Метрическая теория совместных диофантовых приближений в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$ // *Чебышевский сб.* – 2011. – Т. 12, №1. – С. 17–50.

[24] *Бударина Н.В.* Регулярные и повсеместные системы для совместных диофантовых приближений // *Чебышевский сб.* – 2011. – Т. 12, №4. – С. 2–32.

[25] *Бударина Н.В.* Проблема Малера в поле комплексных чисел с немонотонной правой частью // *Мат. Заметки.* – 2013. – Т. 93, №6. – С. 812–820.

[26] *Васильев Д.В.* Диофантовы множества в $\mathbb{C}$ и размерность Хаусдорфа // Сборник статей, посвященный 60-летию со дня рождения профессора В.Г. Спринджука: Сб. ст. / НАН Беларуси. Ин-т математики. – Минск, 1997. – С. 21–28.

[27] *Гельфонд А.О.* Трансцендентые и алгебраические числа. – М.: Гостехиздат, 1952. – 224 с.

[28] *Гребенников Е.А., Рябов Ю.А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. – М.: Наука, 1976. – 127 с.

[29] *Грошев А.В.* Теорема о системе линейных форм // Докл. АН СССР. – 1938. – №19. – С. 151–152.

[30] *Ковалевская Э.И.* Метрическая теорема о точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов в $\mathbb{Q}_p$ // Докл. НАН Беларуси. – 1999. – Т. 43, №5. – С. 34–36.

[31] *Кубилюс Й.П.* О применении метода академика Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел // Докл. АН СССР. – 1949. – Т. 67. – С. 783–786.

[32] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наукова думка, 1984. – 264 с.

[33] *Пяртли А.С.* Диофантовы приближения на подмногообразиях Евклидова пространства // Функциональный анализ и его приложения. – 1969. – Т. 3, №4. – С. 59–62.

[34] *Спринджук В.Г.* К гипотезе К. Малера о мере множества S-чисел // Лит. матем. сб. – 1963. – Т. 2, №2. – С. 221–226.

[35] *Спринджук В.Г.* О мере множества S-чисел в p-адическом // ДАН СССР. – 1963 – Т. 151, №6. – С. 1292.

[36] *Спринджук В.Г.* О гипотезе Малера // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 154, №4. – С. 783–786.

[37] *Спринджук В.Г.* Еще о гипотезе Малера // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 155, №1. – С. 54–56.

[38] *Спринджук В.Г.* Доказательство гипотезы Малера о мере множества комплексных S-чисел // Успехи мат. наук. – 1964. – Т. 19, №2. – С. 191–194.

[39] *Спринджук В.Г.* Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел // Изв. АН СССР. – 1965. – Т. 29, №2. – С. 379–436.

[40] *Спринджук В.Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел. – Мн.: Наука и Техника, 1967. – 184 с.

[41] *Спринджук В.Г.* Достижения и проблемы теории диофантовых приближений // Успехи мат. наук. – 1980. – Т. 35, №2. – С. 3–68.

[42] *Фельдман Н.И.* Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел, I // Изв. АН СССР сер. мат.. – 1951. – Т. 15. – С. 53–74.

[43] *Adams W.W.* Transcendental numbers in the p-adic domain // Amer. J. Math. – 1966. – Vol. 88, №2. – P. 279–308.

[44] *Badziahin D.* Inhomogeneous Diophantine approximation on curves and Hausdorff dimension // Adv. Math. – 2010. – Vol. 147, №3. – P. 329–351.

[45] D. Badziahin, V. Beresnevich and S. Velani, *Inhomogeneous theory of dual Diophantine approximation on manifolds*, Adv. Math. 232:1 (2012), 1–35.

[46] *Baker A.* On a theorem of Sprindzuk // Proc. Roy. Soc., London Ser. A. – 1996. – Vol. 292. – P. 92–104.

[47] *Baker A., Schmidt W.M.* Diophantine approximation and Hausdorff dimension // Proc. London Math. Soc. – 1970. – Vol. 21. – P. 1–11.

[48] *Beresnevich V. V., Bernik V. I.* On a metrical theorem of W. Schmidt // Acta Arith. – 1996. – Vol. 75, №3. – P. 219–233.

[49] *Beresnevich V. V.* On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith. – 1999. – Vol. 90, №2. – P. 97–112.

[50] *Beresnevich V. V.* A Groshev type theorem for convergence on manifolds // Acta Math. Hungar. – 2002. – Vol. 94. – P. 99–130.

[51] *Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kleinbock D. Y., Margulis G. A.* Metric Diophantine approximation: the Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds // Mosc. Math. J. – 2002. – Vol. 2. – P. 203–225.

[52] *Beresnevich V. V., Bernik V. I., Dodson M. M.* Regular systems, ubiquity and Diophantine approximation // A panorama of number theory or the view from Baker's garden (Zürich, 1999). – Cambridge: UPC, 2002. – 260–279.

[53] *Beresnevich V. V.* On a theorem of V. Bernik in the metric theory of Diophantine approximation // Acta Arith. – 2005. – Vol. 117, №1. – P. 71–80.

[54] *Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kovalevskaya E.I.* On approximation of p-adic numbers by p-adic algebraic numbers // Journal of Number Theory. – 2005. – Vol. 111. – P. 33–56.

[55] *Beresnevich V. V., Dickinson D., Velani S.* Measure theoretic laws for lim sup sets // Mem. Amer. Math. Soc. – 2006. – Vol. 179. – 91 p.

[56] *Beresnevich V. V., Dickinson D., Velani S.* Diophantine approximation on planar curves and the distribution of rational points // Ann. of Math. – 2007. – Vol. 166, №2. – P. 367–426. With an Appendix II by R. C. Vaughan.

[57] *Beresnevich V. V., Bernik V. I., Götze F.* The distribution of close conjugate algebraic numbers // Compositio Math. – 2010. – Vol. 146. – P. 1165–1179.

[58] *Beresnevich V. V., Velani S.* An inhomogeneous transference principle and Diophantine approximation // Proc. Lond. Math. Soc. – 2010. – Vol. 101, №3. – P. 821–851.

[59] *Beresnevich V. V.* Rational points near manifolds and metric Diophantine approximation // Ann. of Math. – 2012. – Vol. 175, №2. – P. 187–235.

[60] *Bernik V.I., Dodson M. M.* Metric Diophantine approximation on manifolds. – Cambridge: CUP, 1999. – Vol. 137. – 172 p.

[61] *Bernik V.I., Dickinson H., Yuan J.* Inhomogeneous diophantine approximation on polynomials in $\mathbb{Q}_p$ // Acta Arith. – 1999. – Vol. 90, №1. – P. 37–48.

[62] *Bernik V.I., Kleinbock D. Y., Margulis G. A.* Khintchine–type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions // Internat. Res. Notices. – (2001). – Vol. 9. – P. – 453–486.

[63] *Bernik V.I., Shamukova N.* Approximation of real numbers by integer algebraic numbers, and the Khinchine theorem // Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi. – 2006. – Vol. 50, №3. – P. 30–32.

[64] *Bernik V., Götze F., Kukso O.* Lower bounds for the number of integral polynomials with given order of discrimants // Acta Arith. – 2008. – Vol. 133. – P. 375–390.

[65] *Bernik V., Götze F., Kukso O.* On the divisibility of the discriminant of an integral poly nomial by prime powers // Lith. Math. J. – 2008. – Vol. 48. – P. 380–396.

[66] *Borel E.* Sur un probleme de probabilities relatives aux fractions continues // Math. Ann. – 1912. – Vol. 72. – P. 578–584.

[67] *Budarina N., Dickinson D.* Simultaneous Diophantine approximation on surfaces defined by polynomial expressions $x_1^d + \ldots + x_m^d$ // Anal. Probab. Methoods Number Theory. – Vilnius: TEV. – 2006. – P. 1–7.

[68] *Budarina N., Bernik V.I., Dickinson D.* The Khinchine theorem and simultaneous approximation of zero by the integer polynomials in $R \times C$ // Veszi NAN Belarusi. Ser fiz-mat.nauk. – 2007. – Vol. 2. – P. 48–52.

[69] *Budarina N., Bernik V.I., Dickinson D.* Simultaneous approximation of real and complex numbers by algebraic numbers of special kind // Trudi Instituta matematiki NAN Belarusi. – 2007.– Vol. 15, №1. – P. 3–9.

[70] *Budarina N., Dickinson D.* p-adic Diophantine approximation on the Veronese curve with a non-monotonic error // Trudi Instituta matematiki NAN Belarusi. – 2007. – Vol. 15, №1. – P. 98–104.

[71] *Budarina N., Bernik V.I., Dickinson D.* A divergent Khintchine Theorem in the real, complex and p-adic fields // Lithuanian Mathematical Journal. – 2008. – Vol. 48, №2. – P. 1-–16.

[72] *Budarina N., Dickinson D.* Diophantine approximation on non–degenerate curves with non–monotonic error function // Bulletin London Math. Soc. – 2009. – Vol. 41, №1. – P. 137-–146.

[73] *Budarina N., Zorin E.* Non-homogeneous analogue of Khintchine theorem for divergence case for simultaneous approximations in the different metrics // Siauliai Math. Semin. – 2009. – Vol. 4, №12. – P. 21–33.

[74] *Budarina N., Dickinson D., Levesley J.* Simultaneous Diophantine approximation on polynomial surfaces // Mathematika. – 2010. – Vol. 56, №1. – P. 77–85.

[75] *Budarina N.* Diophantine approximation on the curves with non–monotonic error function in the p-adic case // Chebyshevskii Sb. – 2010. – Vol. 11, №1. – P. 74–80.

[76] *Budarina N.* On primitively universal quadratic forms // Lithuanian Mathematical Journal. – 2010. – Vol. 50, №2. – P. 140–163.

[77] *Budarina N., Bernik V.I., Dickinson D.* Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 2010. – Vol. 149, №2. – P. 193–216.

[78] *Budarina N.* On a problem of Bernik, Kleinbock and Margulis // Glasgow Math. J. – 2011. – Vol. 53. – P. 669—681.

[79] *Budarina N.* Simultaneous diophantine approximation in the real and p-adic fields with nonmonotonic error function // Lithuanian Mathematical Journal. – 2011. – Vol. 51, №4. – 461–471.

[80] *Budarina N., Bugeaud Y., Dickinson D., O'Donnell H.* On simultaneous rational approximation to p-adic number and its integral powers// Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. – 2011. – Vol. 54. – P. 599–612.

[81] *Budarina N., O'Donnell H.* On a problem of Nesterenko: when is the closest root of a polynomial a real number? // International Journal of Number Theory (IJNT). – 2012. – Vol. 8, №3. – P. 801–811.

[82] *Budarina N., Dickinson D.* Simultaneous Diophantine Approximation in two metrics and the distance between conjugate algebraic numbers in $\mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ // Indagationes Mathematicae. – 2012. – Vol. 23. – P. 32–41.

[83] *Budarina N., Dickinson D., Jin Yuan* On the number of polynomials with small discriminants in the euclidean and p-adic metrics // Acta Mathematica Sinica. – 2012. – Vol. 28, №3. – P. 469–476.

[84] *Bugeaud Y.* Approximation by algebraic integers and Hausdorff dimension // J. Lond. Math. Soc. – 2002. – Vol. 65. – P. 547–559.

[85] *Bugeaud Y., Mignotte M.* On the distance between roots of integer polynomials // Proc. Edinb. Math. Soc. – 2004. – Vol. 47, №2. – P. 553–556.

[86] *Bugeaud Y.* Approximation by algebraic numbers. – Cambridge: CUP, 2004. – Vol. 160. – 274 pp.

[87] *Bugeaud Y., Mignotte M.* Polynômes *à* coefficients entiers prenant des valeurs positives aux points réels // Bull. Math. Soc. Sci. Math. – 2010. – Vol. 53, №3. – P. 219–224.

[88] *Bugeaud Y., Mignotte M.* Polynomial root separation // Intern. J. Number Theory. – 2010. – Vol. 6. – P. 587–602.

[89] *Bugeaud Y., Dujella A.* Root separation for irreducible integer polynomials // Bull. Lond. Math. Soc. – 2011. – Vol. 43, №6. – P. 1239–1244.

[90] *Burger E.B., Struppeck T.* Does $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ Really Converge? Infinite Series and p-adic Analysis // Amer. Math. Monthly. – 1996. – Vol. 103. – P. 565–577.

[91] *Cassels J.W.C.* An introduction to Diophantine Approximtion. – Cambridge: CUP, 1957.

[92] *Davenport H.* A note on binary cubic forms // Mathematatika. – 1961. – Vol. 8. – P. 58–62.

[93] *Davenport H., Schmidt W.M.* Approximation to real numbers by quadratic irrationals // Acta Arith. – 1967. – Vol. 13. – P. 169–176.

[94] *Dodson M.M.* A note on the Hausdorff-Besicovich dimension of systems of linear forms // Acta Arith. – 1985. – Vol. 44. – P. 87–98.

[95] *Dodson M.M., Rynne B.P., Vickers J.A.G.* Diophantine approximation and a lower bound for Hausdorff dimension // Mathematika. – 1990. – Vol. 37. – P. 59–73.

[96] *Evertse J. H.* Distances between the conugates of an algebraic number // Publ. Math. Debrecen. – 2004. – Vol. 65. – P. 3–340.

[97] *Harman G.* Metric number theory. – Oxford, 1998. – Vol. 18.

[98] *Kasch F.* Uber eine metrische Eigenschaft der S-Zahlen // Math. Zeitschr. – 1958. – Vol. 70. – P. 263–270.

[99] *Kasch F., Volkman B.* Zur Mahlerschen Vermutung uber S-Zahlen // Math. Ann. – 1958. – Vol. 136. – P. 442–453.

[100] *Kash F., Volkman B.* Metrische Satze uber transzendente Zahlen in p-adischen Korpen // Math. Zeitschr. – 1960. – Vol. 72, №4. – P. 367–378.

[101] *Kasch F., Volkman B.* Metrische Sarze uber transzendente Zahlen in p-adishen Korpern, II // Math. Zeitschr. – 1962. – Vol. 78, №2. – P. 171–174.

[102] *Khintchine A.J.* Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen // Math. Ann. – 1924. – Vol. 92. – P. 115–125.

[103] *Khintchine A.J.* Zwei Bemerkungen zu eniner Arbiet des Herrn Perron // Math. Zeitscr. – 1925. – Vol. 22. – P. 274–284.

[104] *Khintchine A.J.* Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen // Math. Zeitschr. – 1926. – Vol. 24. – P. 706–714.

[105] *Kleinbok D.* Baker-Sprindzuk conjectures for complex analytic manifolds // Algebraic groups and arithmetic, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai. – 2004. – P. 539 –553.

[106] *Kleinbock D., Margulis G. A.* Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. of Math. – 1998. – Vol. 148, №2. – P. 339–360.

[107] *Koksma J.* Uber die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplex Zahlen durch algebraische Zahlen // Mh. Math. Physik. – 1939. – Vol. 48. – P. 176–189.

[108] *LeVeque W.J.* Note on S-numbers // Proc. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 4. – P. 189–190.

[109] *Lock D.J.* Metrischen Diophantische onderzoekingen in $K(P)$ en $K^{(n)}(P)$ // Vrije Universiteit te Amsterdam. – Diss. – 1947.

[110] *Lutz E.* Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques. – Paris, 1955. – 106 p.

[111] *Mahler K.* Über das Mass der Menge aller S–Zahlen // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106. – P. 131–139.

[112] *Mahler K.* Zur Approximation der Exponential function und des Logarithmus // J. reine und angew. math. – 1932. – Vol. 166. – P. 118–150.

[113] *Mahler K.* Über Transcendente p-adisce Zahlen // Composito Math. – 1935. – Vol. 2. – P. 259–275.

[114] *Mahler K.* An inequality for the discriminant of a polynomial // Michigan Math. J. – 1964. – Vol. 11. – P. 257–262.

[115] *Melnichuk Y.V.* Hausdorff dimension in Diophantine approximation of p-adic numbers // Ukrain. Mat. Zh. – 1980. – Vol. 32. – P. 118–124.

[116] *Mohammadi A., Salehi Golsefidy A.* S–Arithmetic Khintchine–Type Theorem // Geom. Funct. Anal. – 2009. – Vol. 19. – P. 1147-1170.

[117] *Mohammadi A., Salehi Golsefidy A.*, Simultaneous Diophantine Approximation in Non-degenerate p-adic manifolds // Israel J. Math. – 2012. – Vol. 188. – P. 231–258.

[118] *Motahari A.S., Gharan S.O., Maddah-Ali M.A., Khandani A.K.* Real interference alignment: Exploiting the potential of single antenna systems // *arXiv:0908.2282*.

[119] *Nesterenko Y.V.* Roots of polynomials in p-adic fields // Preprint. – 2008.

[120] *Rynne B.P.* Regular and ubiquitous systems, and $\mathcal{M}^s_\infty$-dense sequences // Mathematika. – 1992. – Vol. 39. – P. 234–243.

[121] *Schmidt W.* Bounds for certain sums; a remark on a conjecture of Mahler // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – Vol. 101, №2. – P. 200–210.

[122] *Schmidt W.* Metrische Sätze über simultane Approximation abhängiger Grössen // Monatsch. Math. – 1964. – Vol. 63. – P. 154–166.

[123] *Schönhage A.* Polynomial root separation examples // J. Symbolic Comput. – 2006. – Vol. 41. – P. 1080–1090.

[124] *Sprindzuk V.G.* Metric Theory of Diophantine Approximation. – Wiley, New York, 1979.

[125] *Turkstra H.* Metrische bijdragen tot de theorie der Diophantische approximaties in het lichaam der p-adische getallen // Vrije Universiteit te Amsterdam. – Diss. – 1936.

[126] *Ustinov A.E.* Inhomogeneous approximations on manifold // Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk. – 2005. – №2. – P. 30–34.

[127] *Ustinov A.E.* Approximation of complex numbers by values of integer polynomials // Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk. – 2006. – №1. – P. 9–14.

[128] *Volkman B.* Zur Mahlerschen Vermutung im Komplexen // Math. Ann. – 1960. – Vol. 140. – P. 351–359.

[129] *Volkman B.* Zur metrischen Theorie der S-Zahlen // J. reine und angew. Math. – 1962. – Vol. 209, №3–4. – P. 201–210.

[130] *Volkman B.* Zur metrischen Theorie der S-Zahlen, II // J. reine und angew. Math. – 1963. – Vol. 213, №1–2. – P. 58–65.

[131] *Volkman B.* The real cubic case of Mahler's conjecture // Mathematika. – 1961. – Vol. 8.– P. 55–57.

[132] *Wirsing E.* Approximation mit algebraischen Zahlen beschrankten Grades // J. reine angew. Math. – 1961. – Vol. 206. – P. 67–77.

[133] *Zeludevich F.* Simultane diophantishe Approximationen abhängiger Grössen in mehreren Metriken // Acta Arith. – 1986. – Vol. 46. – P. 285–296.