УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе

_____________ В. М. Сканцев

«26» февраля 2014 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации ФГБОУ ВПО «Брянский государственный технический университет» на диссертационную работу Будариной Натальи Викторовны «Метрическая теория совместных диофантовых приближений в полях действительных, комплексных и p-адических чисел», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел.

История диофантовых приближений насчитывает немногим более чем полтора столетия, хотя уже во времена Архимеда было, например, известно, что такое сложно устроенное число как π с подходящей для практики точностью можно заменить на $\frac{22}{7}$. Начало теории диофантовых приближений было положено Дирихле и Лиувиллем. Первый доказал, что для любого иррационального числа α существует бесконечно много натуральных чисел $q_1, q_2, \ldots$ таких, что при подходящих целых числах $p_1, p_2, \ldots$ выполняются неравенства

$$|\alpha - p_i / q_i| < \frac{1}{q_i^2}. \qquad (1)$$

Второй доказал, что для любого алгебраического числа β степени $deg \quad \beta = n \geq 2$ всегда можно вычислить положительную величину $c(\beta)$, при которой для любого рационального числа p/q справедливо неравенство

$$|\beta - p/q| > \frac{c(\beta)}{q^n} \quad . \qquad (2)$$

Заметим, что если β является квадратичной иррациональностью, т.е. $n = 2$, то неравенство Лиувилля (2) показывает принципиальную неулучшаемость теоремы Дирихле. На основании неравенства (2) Лиувилль построил первые примеры трансцендентных чисел, например, $\gamma = \sum 10^{-n!}$.

В дальнейшем развитие теории диофантовых приближений в основном было связано с углублением и обобщением неравенств (1) и (2): неравенство (1) было доведено до неравенства $|\alpha - p_i / q_i| < \frac{1}{\sqrt{5}q_i^2}$ (Гурвиц), число q^n в (2) последовательно заменялось на $q^{n/2}$, $q^{2\sqrt{n}}$, $q^{\sqrt{2n}}$, $2+\varepsilon$ (Туэ, Зигель, Гельфонд, Рот). Но и сейчас многие задачи теории диофантовых приближений, связанные с неравенствами (1) и (2), далеки до своего завершения. Так, несмотря на десятки опубликованных работ, неясна величина θ такая, что неравенство $|\pi - p/q| < q^{-\theta}$ имеет бесконечно много решений, но уже при $q > q_0(\varepsilon)$ верно неравенство $|\pi - p/q| < q^{-\theta-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Борелем и Хинчиным была предложена в начале 20-го века следующая новая постановка задач типа (1) и (2). Что собой представляет множество действительных чисел x, для которых неравенство $|x - p/q| < \Psi(q)$ или

$$|qx - p| < \Psi(q) \tag{3}$$

имеет бесконечное число решений в натуральных числах q и целых числах p при монотонно убывающей функции $\Psi(x)$ положительного аргумента x? Если $\mu(A)$ - мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathrm{R}$, $I \subset \mathrm{R}$ - интервал, $L_1(\Psi)$ - множество $x \in I$, для которых неравенство (3) имеет бесконечно много решений, то теорема Хинчина утверждает, что

$$\mu(L_1(\Psi)) = \begin{cases} 0, \ \textit{если} \ \sum\limits_{q=1}^{\infty} \Psi(q) < \infty, \\ \mu(I), \ \textit{если} \ \sum\limits_{q=1}^{\infty} \Psi(q) = \infty. \end{cases}$$

Важным этапом теории диофантовых приближений является переход к приближению действительных чисел x алгебраическими числами α степени $\deg\ \alpha = n \ge 2$ и высоты $H = H(\alpha)$. Высота целочисленного многочлена определяется как максимум модулей коэффициентов минимального многочлена для α. Обозначим через $L_n(\Psi)$ множество действительных чисел $x \in \mathrm{R}$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1}\Psi(H) \tag{4}$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных многочленах P, $\deg\ P = n \ge 2$. К настоящему времени известно, что

$$\mu(L_n(\Psi)) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum\limits_{H=1}^{\infty}\Psi(H) < \infty, \\ \mu(I), & \text{если } \sum\limits_{H=1}^{\infty}\Psi(H) = \infty. \end{cases} \tag{5}$$

При $\Psi(H) = H^{-w}$, $w > 1$, такую гипотезу поставил Малер, а решил Спринджук. Для функций Ψ общего вида в случае сходимости ряда утверждение (5) было доказано Берником, а в случае расходимости Бересневичем.

Диссертация Будариной Н. В. посвящена всестороннему обобщению метрического подхода к задачам вида (4). Автором доказан ряд теорем, значительно обобщающих и усиливающих классические результаты Хинчина и Малера. Для этого автором разработаны новые методы, усиливающие методы работ Шмидта, Бейкера, Давенпорта, Спринджука, Берника, Бересневича, Клейнбока и Маргулиса.

Диссертация состоит из введения и пяти глав. В первой главе для кривой Веронезе $G = \left(t, t^2, \ldots, t^n\right)$ доказан полный аналог классической теоремы Хинчина для $t \in \mathrm{R} \times \mathrm{C} \times \mathrm{Q_p}$ в случае сходимости. До работ автора эта теорема была доказана только в каждом из пространств R^k, C, $\mathrm{Q_p}$ отдельно. Для оценки мер множеств автором разработан новый метод, основанный на разделении систем диофантовых неравенств по типу аппроксимации нуля значениями производных. В теореме Спринджука величина правой части в неравенстве (4) имеет порядок H^{-n}, и на оценку мер оказывают влияние только первая и вторая производные. В данном случае автору пришлось проанализировать влияние производных всех порядков.

Рациональные числа хоть и не наилучшим образом, но равномерно распределены на числовой прямой. Недавно Коледа из Минска доказал, что алгебраические числа степеней $n \geq 2$ не распределены равномерно. Для алгебраических чисел очень полезным оказалось понятие регулярных систем, которое ввели Бейкер и Шмидт. Во второй главе построена оптимальная регулярная система из векторов $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ с алгебраическими координатами $\alpha_1 \in \mathrm{R}$, $\alpha_2 \in \mathrm{C}$, $\alpha_3 \in \mathrm{Q_p}$. Этот результат обобщает конструкцию регулярных систем Бейкера-Шмидта, что позволило автору доказать аналог теоремы Хинчина в случае расходимости.

В третьей главе впервые проанализированы совместные зависимые диофантовы приближения с немонотонной правой частью без изменения условия на сходимость ряда. Это является обобщением теоремы Хинчина в случае сходимости, в которой, как известно, условие монотонности для функции аппроксимации можно опустить. Развит метод построения близких сопряженных чисел, основанный на метрической теореме о приближении нуля значениями многочлена и всех его производных. Сделана модификация метода повсеместных систем, которая в специальных случаях оказывается эффективнее метода регулярных систем. Доказана гипотеза Берника-

Клейнбока-Маргулиса о приближении нуля значениями целочисленных многочленов и значениями производных для специального вида функций аппроксимации.

В четвертой главе найдена связь между однородными и неоднородными теоремами для совместных диофантовых приближений в пространстве $\Omega = R \times C \times Q_p$. Впервые доказан аналог теоремы Хинчина в случае расходимости для неоднородных приближений в Ω и аналог теоремы Хинчина в случае сходимости для неоднородных многочленов при немонотонной функции аппроксимации. Важной частью доказательства результата в Ω является использование теоремы Минковского о последовательных минимумах вместе с метрической теоремой, позволяющей оценить снизу первый минимум выпуклого тела, которое задается первоначальной системой диофантовых неравенств.

Несомненный интерес представляют результаты пятой главы, где решены актуальные проблемы, связанные с распределением алгебраических чисел. Наиболее интересными из них являются: проблема построения целочисленных полиномов с малыми дискриминантами в архимедовой и неархимедовой метриках, где автором доказана оценка снизу для таких полиномов, а также изучение алгебраических чисел, образующих регулярную систему в коротких интервалах, где автором получена точная оценка длин интервалов.

Необходимо отметить, что рассмотренные в диссертации задачи обобщают и усиливают известные классические результаты, а примененные методы их решения имеют большую общность и имеют применение в ряде других задач. В целом, в диссертации построена полная теория совместных диофантовых приближений в различных пространствах.

Основные результаты диссертации являются новыми, они полностью отражены в публикациях автора, опубликованы в 27 научных статьях, включая 15 публикаций из перечня ВАК РФ, доложены на 18 российских и международных конференциях.

Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Замечаний по стилю и оформлению нет. В целом изложение полученных результатов в диссертационной работе проведено ясно и последовательно. Вместе с тем следует сделать следующее замечание. В третьей главе метрические теоремы с немонотонной правой частью доказаны только в специальных случаях. Не совсем понятно чем обусловлен их выбор, и почему, скажем, не доказать теорему первой главы при немонотонной функции аппроксимации?

Диссертация носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, и разработанные в ней методы могут быть применены в задачах, возникающих в контексте классической теоремы Хинчина и её различных обобщениях, в задачах, связанных с изучением результантов, дискриминантов, расстояний между алгебраическими числами, а также в ряде других задач теории диофантовых приближений, связанных с получением эффективных оценок мер множеств, что находит применение в разработке новых способов передачи данных. Кроме того, полученные в диссертации результаты могут быть использованы в учебном процессе в рамках специальных курсов и специальных семинаров.

Тематика и содержание диссертации Будариной Н. В. отвечает паспорту специальности «01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел» по формуле специальности и области исследования.

Диссертационная работа «Метрическая теория совместных диофантовых приближений в полях действительных, комплексных и p-адических чисел» Будариной Натальи Викторовны является научно квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в области диофантовых приближений и метрической теории трансцендентных чисел. Диссертационная работа соответствует критериям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», которым должна удовлетворять диссертация на соискание ученой степени доктора наук. Её автор, Бударина Наталья Викторовна, заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел.

Диссертационная работа обсуждалась и получила одобрение на заседании кафедры «Высшая математика». Протокол № 7 от 26 марта 2014 г.

Профессор кафедры «Высшая математика»
ФГБОУ ВПО «Брянский государственный
технический университет»
(241035, г. Брянск, бул. 50-летия Октября, 7,
тел. 8-4832-561-477, web-сайт http://www.tu-bryansk.ru)
доктор физико-математических наук, доцент
(e-mail: svdh@rambler.ru)

Владислав Хасанович Салихов

Заведующий кафедрой «Высшая математика»
кандидат технических наук, доцент

Алексей Петрович Мысютин

Собственноручная подпись удостоверяется «26» 03 2014 г.
Начальник отдела кадров