ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Будариной Натальи Викторовны «Метрическая теория совместных диофантовых приближений в полях действительных, комплексных и p-адических чисел», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

А.Я. Хинчин в 1924 году доказал простую по формулировке и очень точную теорему. Пусть $\psi(x)$ – некоторая функция действительного аргумента x, μ – мера Лебега на $\mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ – отрезок. Тогда множество $B_1 \subset I$, состоящее из точек $x \in I$, для которых неравенство

$$|x - p/q| < \frac{\psi(q)}{q} \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений в рациональных числах p/q, $q > 0$, имеет меру нуль если ряд $\sum_{q=1}^{\infty} \psi(q)$ сходится. Если же функция ψ монотонная и ряд расходится, то для множества $B_2 \subset I$, для которого неравенство (1) имеет бесконечное число решений в $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ справедливо равенство $\mu B_2 = \mu I$, т.е. множество B_2 имеет полную меру.

Первым естественным обобщением неравенства (1) стала задача о разрешимости неравенств

$$|P(x)| < H^{-n+1}\psi(H) \tag{2}$$

в целочисленных многочленах P, $\deg P = n \geq 2$, при высоте $H = H(P)$ равной максимальному модулю коэффициентов P. При $\psi(H) = H^{-v}$, $v > 1$, неравенство (2) связано с известной гипотезой К. Малера (1932), решенной В.Г. Спринджуком (1964). К настоящему времени в метрических задачах, связанных с (2), для произвольной степени многочленов P известно ровно столько же, сколько известно о разрешимости неравенства (1).

Соответствующая теория разработана в статьях Й. Кубилюса, Б. Фолькмана, В. Шмидта, А. Бейкера, Р. Бейкера, В. Спринджука, В. Берника, В. Бересневича, Д. Клейнбока, Г. Маргулиса.

В диссертации Будариной Н.В. систематически исследуется неравенство, более общее чем неравенство (2).

Рассматриваются a) системы неравенств, b) неравенства в полях действительных, комплексных и p-адических чисел одновременно, c) неравенства в неоднородных многочленах, например, унитарных, d) неравенства с немонотонной правой частью, e) приложения метрических теорем к другим задачам теории диофантовых приближений. В каждом из указанных направлений получены новые результаты, превышающие по уровню общности и глубины ранее известные теоремы.

К числу новых результатов в теории диофантовых приближений, полученных автором, можно отнести следующие:

1. Доказана метрическая теорема о совместных приближениях нуля значениями целочисленных многочленов в пространстве действительных, комплексных и p-адических чисел. Это наиболее общая к настоящему времени форма классической теоремы Хинчина о приближении действительных чисел рациональными числами. При доказательстве проблемы Малера В.Г. Спринджук использовал для оценок мер множеств действительных чисел с малым значением многочлена только первую и вторую производные. В совместных приближениях величина малости может задаваться величиной H^{-t}, $t > 0$, при значениях близких к нулю. Поэтому оценки мер по первой и второй производной могут оказаться не только далекими от реальных, но даже хуже тривиальных. Для выхода из такого положения надо привлекать производные всех порядков по всем переменным x, z, w. Бударина Н.В. впервые получила такие оценки, которые позволили получить в точности полный аналог теоремы Хинчина. Вторая особенность задач первой главы состоит в том, что по каждой переменной надо применять два принципиально различных рассуждения. В диссертации впервые введено понятие типа задачи совместных приближений. В теореме Спринджука этот тип можно было определить вектором $(0, 1)$.

При нулевом типе, который естественно назвать линейным, можно осуществлять переход к многочленам меньшей степени. При типе 1 множество решений не удовлетворяет таким законам и его естественно назвать нелинейным. В первой главе диссертации три переменные, и поэтому тип можно задать трехмерным вектором (i_1, i_2, i_3), где $i_j = 0$ или 1. Возникли задачи 8 типов, и только для типов вида $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$ имелись аналоги в работах других авторов. В диссертации впервые показано как от типа, например, вида $(0, 0, 1)_n$ для многочленов n-ой степени перейти к типу вида $(1, 1, 1)_k$ для многочленов меньшей степени k, для которого метод решения известен, или использовать здесь метод математической индукции.

2. На основании новой метрической теоремы о приближении нуля значениями целочисленных многочленов с большой производной и построении оптимальной регулярной системы получено обобщение теоремы Хинчина в случае расходимости для совместных приближений в полях действительных, комплексных и p-адических чисел.

3. Доказана теорема (гипотеза Берника-Клейнбока-Маргулиса), являющаяся обобщением теоремы Хинчина, где нуль приближается не только значениями целочисленных многочленов, но и значениями их производных.

4. Доказаны метрические теоремы без требования монотонности пра-

вых частей неравенств. Они доказаны не только для полиномов, но и для невырожденных функций. В поле комплексных чисел приведена новая версия доказательства без использования теоремы Клейнбока-Маргулиса, так как для комплексных чисел она не доказана.

5. Установлена метрическая теорема типа теоремы Хинчина для неоднородных совместных приближений в различных метриках. Она основана на методе существенных и несущественных областей Спринджука в сочетании с построением последовательных минимумов Минковского для однородных приближений, и конструкции на них неоднородных приближений.

6. Доказана теорема типа теоремы Хинчина для неоднородных приближений на кривой Веронезе $G = (t, t^2, \ldots, t^n)$, $t \in \mathbb{R}$, без дополнительного условия монотонности функции аппроксимации. Тем самым, задача (2) обобщена одновременно в двух направлениях.

7. Дана оценка снизу для количества целочисленных многочленов ограниченной степени и высоты с различными диофантовыми свойствами: существованием пар корней, близких в действительной и p-адической метриках; дискриминантами, ограниченными степенью высоты и делящимися на большие степени простых чисел; наличием действительных корней в малой окрестности точек, в которых значения полинома и его производной лежат в заданных интервалах.

8. Найден критерий (в терминах функции от высоты многочлена), при котором ближайший к действительной точке корень многочлена принадлежит $\mathbb{R}$. Автор показал, что оценка (установленная в критерии) в ряде случаев является наилучшей для неприводимых многочленов второй и третьей степени.

По диссертационной работе можно сделать следующее замечание. В главе 1 случай сходимости доказан при различных правых частях, а в главе 2 случай расходимости получен при специальных правых частях. Было бы хорошо хотя бы прокомментировать такой выбор.

Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации. Основные положения выполненных исследований опубликованы в 27 научных статьях, из них в 15-ти – из перечня ВАК РФ, и доложены на 18 российских и международных конференциях.

Тематика и содержание диссертации Бударинной Н.В. отвечает паспорту специальности "01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел" по формуле специальности и области исследования.

Диссертационная работа "Метрическая теория совместных диофантовых приближений в полях действительных, комплексных и p-адических чисел" Бударинной Натальи Викторовны является научно квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в области диофантовых приближений и метрической теории трансцендентных чисел. Диссертационная работа соответствует критериям "Положения о порядке присуждения ученых степеней", которым должна удовлетворять диссертация на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор — Бударина Наталья Викторовна — заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент:
Профессор кафедры "Математика - 1"
Федерального государственного образовательного
бюджетного учреждения высшего профессионального
образования "Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации"
(125993 г. Москва ГСП-3, Ленинградский проспект, 49,
тел. 8-499-277-21-54, web-сайт http://www.fa.ru),
доктор физико-математических наук
(e-mail: sgritsenko@gmail.ru)

Сергей Александрович Гриценко

Подпись С. А. Гриценко

ЗАВЕРЯЮ
Ученый секретарь Ученого совета
Финансового университета
Д.А. Смирнов
«24» апреля 2014 г.