# ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Бударипой Натальи Викторовны "Метрическая теория совместных диофантовых приближений в полях действительных, комплексных и $p$-адических чисел", представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Длительное время после возникновения теории диофантовых приближений в работах Дирихле и Лиувилля математические исследования были связаны непосредственно с их классическими теоремами. Очень глубокой и плодотворной оказалась тематика об улучшении теоремы Лиувилля 1850 года. И только спустя более ста лет окончательная точка была поставлена Ф. Ротом, который доказал, что для любого алгебраического числа $\alpha$ степени $\deg\alpha = n \geq 3$ неравенство

$$|\alpha - p/q| < q^{-2-\epsilon} \tag{1}$$

имеет лишь конечное число решений. Заметим, что в самой теореме Лиувилля в показателе правой части стояла величина $-n$. Правда, доказательство Лиувилля было эффективным, и зная число $\alpha$ можно было вычислить величину $c(\alpha)$, при которой неравенство $|\alpha - p/q| > c(\alpha)q^{-n}$ выполняется для всех рациональных чисел $p/q$. Первое эффективное улучшение теоремы Лиувилля дал А. Бейкер в 1967 году. Затем в 1972 году Н.И. Фельдман получил степенное улучшение неравенства Лиувилля. Многие теоремы теории диофантовых приближений в упрощенной формулировке звучат так: теорема Дирихле для данного числа или класса чисел практически неулучшаема. А.Я. Хинчин впервые в 1924 году показал что для подавляющего большинства чисел или точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ теорему Дирихле можно улучшить. Так для чисел $\alpha$ из множества полной меры любого интервала неравенство $|\alpha - p/q| < q^{-2}\ln^{-1} q$ имеет бесконечное число решений в рациональных числах $p/q$. Это в частности дает серьезные основания верить в справедливость популярной сейчас гипотезы Литлвуда о том, что при любых $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ и $\epsilon > 0$ неравенство

$$q\|\alpha q\|\|\beta q\| < \epsilon \tag{2}$$

имеет бесконечное число решений в натуральных числах $q$. В самом деле, расстояние до ближайшего целого $\|\beta q\| \leq 1/2$ для всех $q$, а для почти всех $\alpha$ по теореме Хинчина справедливо неравенство (2). Это означает, что гипотеза Литлвуда верна для всех $\beta$ и почти всех $\alpha$ даже при $\epsilon = \ln^{-1} q$. Так происходит практически со всеми задачами теории диофантовых приближений. Прежде чем ее решать мы задаем себе вопрос, а что будет для почти всех значений приближаемых чисел? А.Я. Хинчин первым дал ответ на такой вопрос и в случае нелинейных функций. В своей значительно менее известной работе 1926 года он доказал, что при любом $\gamma > 0$ неравенство $|P(x)| < \gamma H^{-n}$ имеет для почти всех $x \in \mathbb{R}$ бесконечное число решений в целочисленных многочленах $P$, $\deg P = n$. Хотя мы знаем, например, что при $\xi = \sqrt[n+1]{2}$ верно неравенство $|P(\xi)| > c(\xi)H^{-n}$.

Диссертация Будариной Н.В. содержит фундаментальные обобщения теоремы Хинчина-Грошева по всем актуальным направлениям метрической теории диофантовых приближений.

Выделим **основные новые результаты** автора.

1. Установлено, что почти все точки пространства $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ не допускают хороших совместных приближений действительными, комплексными и $p$-адическими алгебраическими числами. В случае $\Omega = \mathbb{R}$ и $n = 1$ это классическая теорема Хинчина о приближении действительных чисел рациональными числами.

2. Доказана разрешимость системы полиномиальных неравенств для почти всех значений аргументов из пространства $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$, что является наиболее полным аналогом теоремы Хинчина в случае расходимости. Впервые в совместных приближениях построены регулярные системы векторов $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ с координатами $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha_3 \in \mathbb{Q}_p$. На первом этапе доказывается, что из теоремы Дирихле для многочленов и метрической теоремы следует, что все производные по $x, z$ и $w$ близки к своим максимальным значениям. Это приводит к тому, что рядом с такой точкой находится алгебраическая точка $\bar{\alpha}$. Далее дополнительным рассуждением устанавливается, что $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, а с использованием леммы Гензеля получаем, что $\alpha_3 \in \mathbb{Q}_p$. Без такого свойства точек $\bar{\alpha}$ нельзя получить ни аналог теоремы Хинчина в случае расходимости, ни оценку снизу для размерности Хаусдорфа множества точек из $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ хорошо приближаемых элементами регулярной системы.

3. Получено обобщение хинчинского типа теоремы Берника и Бересневича для многочленов, включающее естественное ограничение на производные. Этот результат представляет собой вероятностный критерий разрешимости системы неравенств $|P(x)| < \Psi_1(H)$ и $|P'(x)| < \Psi_2(H)$ в целочисленных многочленах $P$ степени $\leq n$ и высоты $H$, где $\Psi_1$ и $\Psi_2$ – аппроксимирующие функции достаточно общего вида.

4. Доказано, что теоремы типа Хинчина для невырожденных кривых в $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$ и кривой $V_n = (t, \ldots, t^n)$, $t \in \mathbb{C}$, справедливы без условия монотонности функции аппроксимации. Впервые доказан результат для совместных приближений нуля значениями целочисленных многочленов в $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_{p_1}, \ldots, \mathbb{Q}_{p_m}$ без условия монотонности функции аппроксимации.

5. Доказан неоднородный аналог теоремы Хинчина в случае расходимости для совместных приближений в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}_p$, основанный на конструировании оптимальных регулярных систем. При этом дополнительно обоб-

щается конструкция Шмидта и Давенпорта при построении многочлена, принимающего в точке малые значения и большие значения производной в этой точке.

6. Доказан неоднородный аналог теоремы Хинчина в случае сходимости для многочленов без условия монотонности функции аппроксимации, что усиливает результат Берника (гипотеза Бейкера) по двум направлениям – добавление неоднородности и ослабление условия на функцию аппроксимации. При доказательстве используется метод сведения неоднородного случая к однородному при малых значениях производных, и модификация метода существенных и несущественных областей при больших значениях производных.

7. На основании новых метрических результатов для совместных приближений в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$, включающих ограничения на многочлены, их первые и вторые производные, получена оценка снизу для числа целочисленных многочленов, дискриминанты которых малы в евклидовой метрике и делятся на большую степень простого числа $p$. Получена оценка снизу для числа целочисленных многочленов, имеющих по крайней мере по два близких корня в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}_p^*$. Доказательство базируется на изучении связи между расстоянием $|\alpha_1 - \alpha_2|$, $|P'(\alpha_1)|$ и дискриминантом $D(P)$, где $\alpha_1$ и $\alpha_2$ – различные корни целочисленного многочлена $P$.

8. Решена задача о принадлежности полю действительных чисел ближайшего к действительной точке корня многочлена, которая тесно связана с задачей о минимальном расстоянии между сопряженными алгебраическими числами. Задача впервые поставленна Малером в 1964 году. Опираясь на недавние результаты Бюжо, Миньота и Шенхаге, показано, что экпонента $2n - 3$ является оптимальной в классе неприводимых целочисленных многочленов степени $n$ для $n = 2, 3$.

Сделаем следующее замечание по диссертации. В нескольких местах диссертации при необходимости получить какое-нибудь утверждение или неравенство автор доказывает его в одной метрике, а затем пишет, что в другой метрике доказательство можно провести аналогично. Хорошо было бы в каком-то месте диссертации обсудить насколько значительны аналогии при доказательстве в различных пространствах.

Оценивая диссертационную работу в целом, можно констатировать ее актуальность и научную новизну и квалифицировать ее как крупное научное достижение в теории диофантовых приближений.

Автореферат полностью отражает содержание диссертации. Основные результаты выполненных исследований опубликованы в 27 научных работах, включая 15 работ из перечня ВАК РФ, доложены на 18 российских и международных конференциях.

Тематика и содержание диссертации Будариной Н.В. отвечает паспорту специальности “01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел” по формуле специальности и области исследования.

Диссертационная работа “Метрическая теория совместных диофантовых приближений в полях действительных, комплексных и $p$-адических чисел” Будариной Натальи Викторовны является научно квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в области диофантовых приближений и метрической теории трансцендентных чисел. Диссертационная работа соответствует критериям “Положения о порядке присуждения ученых степеней”, которым должна удовлетворять диссертация на соискание ученой степени доктора наук. Её автор, Бударина Наталья Викторовна, заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент:
Профессор кафедры математического анализа
ФГБОУ ВПО "Владимирский государственный
университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых"
(600000 г. Владимир, ул. Горького, 87,
тел. 8-4922-53-25-75, web-сайт http://www.vlsu.ru)
доктор физико-математических наук, профессор
( e-mail: VZhuravlev@mail.ru)

Владимир Георгиевич Журавлев

24.04.2014