ОТЗЫВ
официального оппонента
на диссертацию Будариной Натальи Викторовны
“Метрическая теория совместных диофантовых приближений в полях действительных, комплексных и p-адических чисел”,
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

История теории диофантовых приближений насчитывает уже более трех столетий. К числу её основателей принадлежат такие классики науки как Л. Эйлер, Ж. Л. Лагранж, К. Ф. Гаусс, Э. Галуа и П. Г. Лежён-Дирихле. За время её развития получены красивые и глубокие результаты, лежащие в основе многих математических теорем. Некоторые из них получены более ста лет назад, некоторые в середине XX века, некоторые докладываются на последних международных конференциях по теории чисел как в России, так и за рубежом. Так еще Лиувилль в 1850 году доказал, что алгебраические числа нельзя слишком хорошо приблизить рациональными числами, что позволило ему доказать что число $\lambda = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ является трансцендентным. Фактически из его доказательства вытекает существование несчетного множества трансцендентных чисел вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n!}$, где $0 \le a_n \le 9$ – цифры в десятичной системе исчисления, но результат Лиувилля более чем на двадцать лет опережает появления теории множеств Кантора.

Известна задача о том, что числа последовательности $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно часто начинаются с любого наперед заданного натурального числа B. А частота, с которой такие числа встречаются, зависит от диофантовых приближений к числу $\lg 2$.

Многие авторы искали оценки снизу для величины $|\pi - p/q| > q^{-s}$, $q > q_0$. Имеется убывающая последовательность значений s. Последний шаг в этой задаче сделан участником данной защиты профессором В. Х. Салиховым (отзыв ведущей организации), который доказал, что $s = 7,6063\ldots$; но до наилучшего результата $s = 2 + \epsilon$, как в теореме К. Рота, еще далеко.

Много работ крупных математиков посвящены доказательству иррациональности ζ-функции Римана в нечетных точках. Однако уже прошло более 35 лет после доказательства Р. Апери иррациональности $\zeta(3)$, а будет ли иррациональным числом $\zeta(5)$ еще никто не знает.

На этом фоне "индивидуальных" задач в теории диофантовых приближений выделяется метрическая теорема А. Я. Хинчина о приближении действительных чисел рациональными числами. Она утверждает, что разрешимость неравенства $|\alpha - p/q| < \Psi(q)/q$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $p/q \in \mathbb{Q}$ зависит от сходимости и расходимости ряда $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \Psi(q)$. При этом результаты совершенно противоположные. В случае сходимости мера таких α равна нулю, а в случае расходимости мера α полная на любом интервале. Но в первом случае мы можем взять функцию $\Psi(q)$ равной

$$\Psi_1(q) = q^{-1} \ln^{-1} q \ldots (\underbrace{\ln \ln \ldots \ln q}_{2014})^{-\gamma_1}, \quad \gamma_1 > 1,$$

а во втором случае равной

$$\Psi_2(q) = q^{-1} \ln^{-1} q \ldots (\underbrace{\ln \ln \ldots \ln q}_{2014})^{-\gamma_2}, \quad \gamma_2 \le 1.$$

Функции $\Psi_1(q)$ и $\Psi_2(q)$ в смысле порядка роста не отличит ни один компьютер, а результаты ведь противоположные!

Сделанное введение показывает, что диофантовы приближения чисел из множеств нулевой или полной меры очень точны, а приближения "индивидуальных" чисел как правило представляет собой очень трудную, часто неразрешимую проблему.

Начиная с середины прошлого века внимание специалистов, работающих в области диофантовых приближений, привлекла задача о приближении действительных чисел алгебраическими числами. Хотя и здесь есть своя нерешенная "индивидуальная" задача: до сих пор при $n \ge 3$ не доказана гипотеза Вирзинга (1960) о том, что для любого трансцендентного числа ξ неравенство

$$|\xi - \alpha| \ll H(\alpha)^{-n-1} \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений в алгебраических числах α степени $\deg \alpha = n$. При $n \le 2$ это неравенство верно: случай $n = 1$ — это теорема Дирихле, а при $n = 2$ неравенство (1) доказано Давенпортом и Шмидтом.

В диссертации Н. В. Будариной исследована возможность перенести теорему Хинчина на задачи вида (1). Для многочленов и невырожденных функций этой задачей занимались с 30-ых годов прошлого века К. Малер, Й. Кубилюс, В. Шмидт, В. Спринджук, А. Бейкер, Р. Бейкер, В. Берник, В. Бересневич, Д. Клейнбок, Г. Маргулис. Всё перечисленное позволяет утверждать, что диссертация выполнена на **актуальную** тему.

Выделим **основные новые научные результаты**, полученные в диссертации Н. В. Будариной:

1. Доказана теорема хинчинского типа для многочленов в случае сходимости для совместных приближений в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}_p$.

   Этот результат показывает, что при сходимости некоторого ряда множество хорошо аппроксимируемых точек, удовлетворяющих диофантовым неравенствам с многочленами в трех метриках, имеет меру нуль.

2. Доказан результат хинчинского типа для совместных приближений точек $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{C}$ и $z \in \mathbb{Q}_p$ вещественными, комплексными и p-адическими алгебраическими числами.

   Этот результат дает необходимое и достаточное условие на монотонную погрешность аппроксимации в виде расходимости некоторого ряда, чтобы почти все наборы $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ приближались бесконечно часто наборами корней (α, β, γ), $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{Q}_p$, целочисленных многочленов с этой погрешностью аппроксимации. Далее, используя связь между полиномиальной аппроксимацией и приближениями алгебраическими числами, автором доказан случай расходимости в теореме хинчинского типа для многочленов при совместных приближениях в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}_p$. Метод доказательства опирается на построение оптимальной регулярной системы и использование теоремы хинчинского типа для приближений точками регулярных систем.

3. Доказана гипотеза Берника-Клейнбока-Маргулиса, о том что, при условии монотонности некоторой функции множество точек, удовлетворяющих полиномиальному неравенству и неравенству, содержащему производную, имеет полную или нулевую меру в зависимости от расходимости или сходимости некоторого ряда.

   Важным следствием данного результата является гипотеза Бейкера, доказанная ранее Берником и Бересневичем.

4. Доказана теорема хинчинского типа в случае сходимости для невырожденных кривых в $\mathbb{R}$, для нормальных кривых по Малеру в $\mathbb{Z}_p$, для кривой $V_n = (t, t^2, \ldots, t^n)$ при $t \in \mathbb{C}$ и $t \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{p_1} \times \ldots \times \mathbb{Q}_{p_s}$ без условия монотонности функции аппроксимации, что усиливает известные результаты Грошева, Берника, Бересневича.

   Во всех известных к настоящему времени случаях метрические теоремы с немонотонной правой частью основывались на теоремах о совместной малости значений многочлена (невырожденной функции) и его производной. В диссертации впервые доказана метрическая теорема с немонотонной правой частью в случае отсутствия такого утверждения; а также впервые доказана теорема с немонотонной функцией аппроксимации для совместных приближений в различных метриках.

5. Доказана теорема хинчинского типа для многочленов в случае сходимости для неоднородных совместных приближений в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}_p$, где изучается малость величин $|P(t) + d_t|$, $t = x, z$, и $|P(w) + d_w|_p$ (здесь $x, d_x \in \mathbb{R}$, $z, d_z \in \mathbb{C}$, $w, d_w \in \mathbb{Q}_p$). В однородном случае числа d_t, $t = x, z, w$, равны нулю.

   Предложен алгоритм построения $n+1$ линейно независимых целочисленных многочленов с теми же самыми функциями аппроксимации (с точностью до константы) как и в первоначальной неоднородной системе неравенств.

6. Доказаны метрические теоремы для совместных приближений в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$, включающие условия на первую и вторую производные, на основе которых получены оценки снизу для числа многочленов, дискриминанты которых малы одновременно в евклидовой и p-адической метриках, и оценки снизу для многочленов, имеющих близкие сопряженные корни в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}_p^*$ одновременно.

7. В коротких интервалах I изучено распределение действительных алгебраических чисел α высоты $H(\alpha) \le Q$, и получено, что существует постоянная c такая, что при $Q > c|I|^{-1}$ эти числа распределены регулярно на действительной оси.

По диссертации можно сделать следующее замечание. В главе 5 при условии $w > 2n-3$ доказано, что ближайший к аргументу $x \in \mathbb{R}$ корень многочлена $P(x)$ является действительным корнем. Хотелось бы, чтобы в этой главе содержались соображения о том, можно ли улучшить эту оценку.

Суммируя вышесказанное, считаю, что совокупность основных результатов диссертации — построение теории совместных диофантовых приближений зависимых величин в различных метриках — можно квалифицировать как новое крупное научное достижение.

Автореферат, составленный с соблюдением установленных требований, в достаточной степени отражает содержание диссертации. Основные результаты выполненных исследований опубликованы в 27 научных работах, включая 15 публикаций из перечня ВАК РФ, доложены на 18 российских и международных конференциях.

Тематика и содержание диссертации Будариной Н. В. отвечает паспорту специальности “01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел” по формуле специальности и области исследования.

Диссертационная работа “Метрическая теория совместных диофантовых приближений в полях действительных, комплексных и p-адических чисел” Будариной Натальи Викторовны является научно квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в области диофантовых приближений и метрической теории трансцендентных чисел.

Диссертационная работа соответствует критериям “Положения о порядке присуждения ученых степеней”, которым должна удовлетворять диссертация на соискание ученой степени доктора наук.

Её автор, Бударина Наталья Викторовна, заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук, профессор
заведующий кафедрой алгебры,
математического анализа и геометрии ФГБОУ ВПО
"Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого" Н. М. Добровольский

Подпись Добровольского Н. М.
заверяю. Начальник отдела
делопроизводства и связи
25.04.2014 г.