ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

ЗУДИЛИН Вадим Валентинович

Теорема Апери и задачи для значений дзета-функции Римана и их q-аналогов

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва
2013

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова» на кафедре теории чисел механико-математического факультета

Научный консультант:	член-корреспондент РАН, профессор НЕСТЕРЕНКО Юрий Валентинович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор АПТЕКАРЕВ Александр Иванович (ФГБУН «Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН», заведующий отделом)
	доктор физико-математических наук, профессор САЛИХОВ Владислав Хасанович (ФГБОУ ВПО «Брянский государственный технический университет»)
	доктор физико-математических наук СПИРИДОНОВ Вячеслав Павлович (Объединенный институт ядерных исследований, Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, начальник сектора)
Ведущая организация:	ФГБУН «Математический институт им. В. А. Стеклова РАН»

Защита диссертации состоится 20 июня 2014 г. в 16:45 на заседании диссертационного совета Д.501.001.84, созданного на базе «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова», по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «МГУ им. М. В. Ломоносова» по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А.

Автореферат разослан 20 мая 2014 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84, созданного на базе
ФГБОУ ВПО «МГУ им. М. В. Ломоносова»,
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Изучение сумм вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

при целых положительных значениях параметра s восходит к Л. Эйлеру[1]. Он, в частности, доказал расходимость ряда в (1) при $s = 1$ и сходимость при $s > 1$, а также знаменитые соотношения

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{(2\pi i)^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \qquad \text{для} \quad k = 1, 2, 3, \dots, \tag{2}$$

связывающие значения ряда при четных положительных s с архимедовой постоянной[2] $\pi = 3.14159265\dots$ и числами Бернулли $B_s \in \mathbb{Q}$; последние могут быть определены с помощью производящей функции

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{s=2}^{\infty} B_s \frac{z^s}{s!} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

В 1882 году Ф. Линдеман[3] доказал трансцендентность числа π и, тем самым, трансцендентность $\zeta(s)$ для четных s.

Лишь веком спустя после Эйлера Б. Риман[4] рассмотрел ряд в (1) как функцию комплексного переменного s. Этот ряд представляет в области $\operatorname{Re} s > 1$ аналитическую функцию, которая может быть продолжена на всю комплексную плоскость до мероморфной функции $\zeta(s)$. Именно это аналитическое продолжение и ряд важных свойств функции $\zeta(s)$ были открыты Риманом в его мемуаре о простых числах. Дзета-функция Римана и ее обобщения играют неоценимую роль в аналитической теории чисел[5], но тематика настоящей диссертации посвящена изучению арифметических и аналитических свойств значений эйлеровых сумм $\zeta(s)$ в (1) при положительных $s > 1$ и обобщений этих чисел. Для краткости мы будем называть величины

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

при целых положительных s *дзета-значениями*, а также *четными* и *нечетными дзета-значениями* в зависимости от четности s.

---

[1] L. Euler, *Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol.* **9** (1737), 160–188; Meditationes circa singulare serierum genus, *Novi Comm. Acad. Sci. Petropol.* **20** (1775), 140–186; Reprinted, *Opera Omnia Ser. I* **15** (Teubner, Berlin 1927), 217–267.

[2] S. R. Finch, *Mathematical constants*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **94** (Cambridge University Press, Cambridge 2003).

[3] F. Lindemann, Über die Zalh π, *Math. Annalen* **20** (1882), 213–225.

[4] Б. Риман, О числе простых чисел, не превышающих данной величины, *Сочинения* (ОГИЗ, Москва 1948), 216–224.

[5] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана* (Физматлит, Москва 1994).

Как было отмечено выше, трансцендентность (а значит, и иррациональность) четных дзета-значений следуют из классических результатов Эйлера и Линдемана. Формулы, подобные (2), для нечетных дзета-значений неизвестны, и предположительно $\zeta(2k+1)/\pi^{2k+1}$ не является рациональным числом ни для какого целого $k \geqslant 1$. Арифметическая природа нечетных дзета-значений казалась неприступной вплоть до 1978 года, когда Р. Апери[6] предъявил последовательность рациональных приближений, доказывающих иррациональность числа $\zeta(3)$. Именно это результат известен в математике как *теорема Апери*, а число $\zeta(3)$ также известно в наши дни как *постоянная Апери*.

История этого открытия так же, как и строгое математическое обоснование наблюдений Апери, изложены А. ван дер Портеном[7]. В качестве рациональных приближений к $\zeta(3)$ Апери выбирает последовательность $v_n/u_n \in \mathbb{Q}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где знаменатели $\{u_n\} = \{u_n\}_{n=0,1,\ldots}$ и числители $\{v_n\} = \{v_n\}_{n=0,1,\ldots}$ удовлетворяют одной и той же полиномиальной рекурсии

$$(n+1)^3 u_{n+1} - (2n+1)(17n^2+17n+5)u_n + n^3 u_{n-1} = 0 \tag{3}$$

с начальными данными

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 5, \qquad v_0 = 0, \quad v_1 = 6.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \zeta(3), \tag{4}$$

но не менее важным обстоятельством являются неожиданные (с точки зрения рекурсии (3)) включения

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \in \mathbb{Z}, \quad D_n^3 v_n \in \mathbb{Z}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где через D_n обозначено наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$ (и $D_0 = 1$ для полноты). Применение теоремы Пуанкаре[8] к разностному уравнению (3) приводит к предельным соотношениям

$$\lim_{n\to\infty} |u_n\zeta(3) - v_n|^{1/n} = (\sqrt{2}-1)^4, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} |u_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |v_n|^{1/n} = (\sqrt{2}+1)^4 \tag{7}$$

согласно (4), где числа $(\sqrt{2}-1)^4$ и $(\sqrt{2}+1)^4$ являются корнями характеристического многочлена $\lambda^2 - 34\lambda + 1$ рекурсии (3). Собранная информация о свойствах последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ доказывает, что число $\zeta(3)$ не может быть рациональным. Действительно, в предположении $\zeta(3) = a/b$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, линейные формы $r_n = bD_n^3(u_n\zeta(3) - v_n)$ являются целыми

[6] R. Apéry, Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, *Astérisque* **61** (1979), 11–13.

[7] A. van der Poorten, A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$, *Math. Intelligencer* **1**:4 (1978/79), 195–203.

[8] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, 3-е изд. (Наука, Москва 1967).

числами, ненулевыми ввиду (6). С другой стороны, $D_n^{1/n} \to e$ при $n \to \infty$ согласно асимптотическому закону распределения простых чисел; следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} |r_n|^{1/n} = e^3(\sqrt{2}-1)^4 = 0.59126300\ldots < 1,$$

что при достаточно большом n вступает в противоречие с оценкой $|r_n| \geqslant 1$ для целых ненулевых r_n. Более того, дополнительные предельные соотношения (7) и стандартные аргументы[9] позволяют измерить иррациональность постоянной Апери количественно:

$$\mu(\zeta(3)) \leqslant 1 + \frac{4\log(\sqrt{2}+1)+3}{4\log(\sqrt{2}+1)-3} = 13.41782023\ldots.$$

Здесь и далее *показателем иррациональности* $\mu(\alpha)$ вещественного иррационального числа α называется величина

$$\mu = \mu(\alpha) = \inf\{c \in \mathbb{R} : \text{неравенство } |\alpha - a/b| \leqslant |b|^{-c} \text{ имеет конечное число решений в } a, b \in \mathbb{Z}\};$$

в случае $\mu(\alpha) < +\infty$ говорят, что α — *нелиувиллево число.*

Оригинальные рассуждения Апери были настолько загадочны, что интерес к теореме Апери не ослабевает и в наши дни. Феномен последовательности рациональных приближений Апери неоднократно переосмысливался с точки зрения различных методов[10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19],

[9] M. Hata, Rational approximations to π and some other numbers, *Acta Arith.* **63**:4 (1993), 335–349.

[10] F. Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, *Bull. London Math. Soc.* **11**:3 (1979), 268–272.

[11] F. Beukers, Padé approximations in number theory, *Lecture Notes in Math.* **888** (Springer-Verlag, Berlin 1981), 90–99.

[12] F. Beukers, Irrationality proofs using modular forms, *Astérisque* **147–148** (1987), 271–283.

[13] S. Fischler, Irrationalité de valeurs de zêta [d'après Apéry, Rivoal, ...], *Astérisque* **294** (2004), 27–62.

[14] Л. А. Гутник, Об иррациональности некоторых величин, содержащих $\zeta(3)$, *Успехи матем. наук* **34**:3 (1979), 190; *Acta Arith.* **42**:3 (1983), 255–264.

[15] Ю. В. Нестеренко, Некоторые замечания о $\zeta(3)$, *Матем. заметки* **59**:6 (1996), 865–880.

[16] Yu. V. Nesterenko, Integral identities and constructions of approximations to zeta values, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **15**:2 (2003), 535–550.

[17] M. Prévost, A new proof of the irrationality of $\zeta(3)$ using Padé approximants, *J. Comput. Appl. Math.* **67** (1996), 219–235.

[18] В. Н. Сорокин, Аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина и иррациональность $\zeta(3)$, *Успехи матем. наук* **49**:2 (1994), 167–168.

[19] В. Н. Сорокин, Теорема Апери, *Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* № 3 (1998), 48–52.

[20], [21], [22], [23], [24]. Новые подходы позволили усилить результат Апери количественно — получить лучшую оценку для показателя иррациональности числа $\zeta(3)$ (последние этапы соревнования в этом направлении — работы М. Хаты[25] и Дж. Рина, К. Виолы[26]. Мы прежде всего укажем явные формулы для последовательности $u_n\zeta(3)-v_n$, которые играют важную роль в дальнейшем изложении: представление Бэйкерса

$$u_n\zeta(3)-v_n=\iiint\limits_{[0,1]^3}\frac{x^n(1-x)^ny^n(1-y)^nz^n(1-z)^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{8}$$

в виде кратного вещественного интеграла, а также ряд Гутника–Нестеренко

$$u_n\zeta(3)-v_n=-\frac12\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\biggl(\frac{(t-1)(t-2)\cdots(t-n)}{t(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}\biggr)^2\bigg|_{t=\nu} \tag{9}$$

и ряд Болла[27]

$$u_n\zeta(3)-v_n=n!^2\sum_{\nu=1}^{\infty}\Bigl(t+\frac n2\Bigr)\frac{(t-1)\cdots(t-n)\cdot(t+n+1)\cdots(t+2n)}{t^4(t+1)^4\cdots(t+n)^4}\bigg|_{t=\nu}. \tag{10}$$

Отметим, что с помощью своего метода “ускорения сходимости” Апери установил также иррациональность числа $\zeta(2)$ без явного применения формулы $\zeta(2)=\pi^2/6$. На этот раз, знаменатели $\{u_n'\}$ и числители $\{v_n'\}$ линейных приближающих форм $u_n'\zeta(2)-v_n'$, $n=0,1,2,\dots$, удовлетворяют рекурсии

$$(n+1)^2u_{n+1}-(11n^2+11n+3)u_n-n^2u_{n-1}=0$$

с начальными данными

$$u_0'=1,\quad u_1'=3,\qquad v_0'=0,\quad v_1'=5;$$

при этом

$$u_n'=\sum_{k=0}^{n}\binom nk^2\binom{n+k}{k}\in\mathbb{Z},\quad D_n^2v_n'\in\mathbb{Z},\qquad n=0,1,2,\dots,$$

---

[20] В. Н. Сорокин, Циклические графы и теорема Апери, *Успехи матем. наук* **57**:3 (2002), 99–134.

[21] C. Viola, Birational transformations and values of the Riemann zeta-function, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **15**:2 (2003), 561–592.

[22] D. Zeilberger, Computerized deconstruction, *Adv. Appl. Math.* **31** (2003), 532–543.

[23] В. В. Зудилин, Разностные уравнения и мера иррациональности чисел, *Аналитическая теория чисел и приложения* (сб. статей), Труды МИАН **218** (1997), 165–178.

[24] W. Zudilin, Apéry's theorem. Thirty years after, *Intern. J. Math. Computer Sci.* **4**:1 (2009), 9–19.

[25] M. Hata, A new irrationality measure for $\zeta(3)$, *Acta Arith.* **92**:1 (2000), 47–57.

[26] G. Rhin, C. Viola, The group structure for $\zeta(3)$, *Acta Arith.* **97**:3 (2001), 269–293.

[27] K. Ball, T. Rivoal, Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs, *Invent. Math.* **146**:1 (2001), 193–207.

и

$$\lim_{n\to\infty}|u_n'\zeta(2)-v_n'|^{1/n}=\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^5<e^{-2},$$
$$\lim_{n\to\infty}|u_n|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}|v_n|^{1/n}=\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)^5.$$

Данная последовательность приближений приводит также к оценке

$$\mu(\zeta(2))=\mu(\pi^2)\leqslant 1+\frac{5\log((\sqrt5+1)/2)+2}{5\log((\sqrt5+1)/2)-2}=11.85078219\dots$$

для показателя иррациональности числа π^2. Приближения Апери к $\zeta(2)$ могут быть представлены в виде двухкратного вещественного интеграла

$$u_n'\zeta(2)-v_n'=(-1)^n\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{x^n(1-x)^ny^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{11}$$

а также в виде гипергеометрического ряда

$$u_n'\zeta(2)-v_n'=(-1)^n\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{n!\cdot(t-1)(t-2)\cdots(t-n)}{t^2(t+1)^2(t+2)^2\cdots(t+n)^2}\bigg|_{t=\nu}. \tag{12}$$

Вместе с тем, теорема Апери является первым существенным продвижением в решении следующей задачи (которую по праву можно назвать фольклорной; печатное упоминание см., например, в монографии А. Б. Шидловского[28]): *доказать иррациональность чисел* $\zeta(2k+1)$ *для* $k=1,2,3,\dots$.

К сожалению, естественные обобщения конструкции Апери приводят к линейным формам, содержащим значения дзета-функции как в нечетных, так и в четных точках; это обстоятельство не позволяло получить результаты об иррациональности $\zeta(s)$ для нечетных $s\geqslant 5$. Лишь в 2000 году Т. Ривоаль[29], используя обобщение представления Болла (10), построил линейные формы, содержащие только нечетные дзета-значения и позволяющие доказать следующий результат: *среди чисел*

$$\zeta(3),\ \zeta(5),\ \zeta(7),\ \zeta(9),\ \zeta(11),\ \dots$$

имеется бесконечно много иррациональных. Более точно, для размерности $\delta(s)$ *пространств, порожденных над* $\mathbb{Q}$ *числами* $1,\zeta(3),\zeta(5),\dots,\zeta(s-2),\zeta(s)$, *где* s *нечетно, справедлива оценка*

$$\delta(s)\geqslant\frac{\log s}{1+\log 2}(1+o(1))\qquad\text{при } s\to\infty.$$

По существу, теоремы Апери, Ривоаля и связанные с ними представления в виде рядов и кратных интегралов указывают на тесную связь

[28] А. Б. Шидловский, *Трансцендентные числа* (Наука, Москва 1987).

[29] T. Rivoal, La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331**:4 (2000), 267–270.

конструкций приближений с *обобщенными гипергеометрическими рядами*

$$ {}_{m+1}F_m\left(\begin{matrix} a_0, a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_m \end{matrix} \,\middle|\, z\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a_0)_\nu (a_1)_\nu \cdots (a_m)_\nu}{\nu!\,(b_1)_\nu \cdots (b_m)_\nu} z^\nu, \qquad (13) $$

где $(a)_\nu = \Gamma(a+\nu)/\Gamma(a)$ обозначает символ Похгаммера; условие

$$ \mathrm{Re}(a_0 + a_1 + \dots + a_m) < \mathrm{Re}(b_1 + \dots + b_m) $$

обеспечивает сходимость ряда (13) в области $|z| \leqslant 1$. Эти специальные функции и их многочисленные обобщения играют важную роль во всех разделах математики. Мы ограничимся здесь упоминанием классических монографий-энциклопедий У. Бейли[30], Л. Слейтер[31] и Дж. Энрюса, Р. Аски, Р. Роя[32], в которых обсуждаются не только результаты, но и приложения гипергеометрических функций. Отметим также монографию Г. Гаспера, М. Рахмана[33], посвященную q-обобщенным гипергеометрическим функциям и известную в среде специалистов под именем q-библии.

Именно связь приближающих линейных форм из теории чисел с теорией гипергеометрических функций позволила по-новому взглянуть на ряд открытых проблем в обеих областях математики, включая гипотезу Д. Васильева о разложении обобщенных интегралов бэйкерсова типа в линейные формы от дзета-значений фиксированной четности[34], гипотезу А. Шмидта о целочисленности последовательностей, связанных с обобщенными последовательностями Апери[35], гипотез Д. Бойда о выражении меры Малера через L-ряды[36] (т.е. обобщенные дзета-значения), а также проблем представления последних в виде периодов, сформулированных М. Концевичем и Д. Загиром[37]. Кроме того, гипергеометрические ряды позволили получить ряд новых качественных и количественных результатов в направлении теорем Апери и Риволяя.

[30] W. N. Bailey, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge Math. Tracts **32** (Cambridge Univ. Press, Cambridge 1935)

[31] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions* (Cambridge Univ. Press, Cambridge 1966).

[32] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **71** (Cambridge University Press, Cambridge 1999).

[33] Г. Гаспер, М. Рахман, *Базисные гипергеометрические ряды* (Мир, Москва 1993).

[34] D. V. Vasilyev, On small linear forms for the values of the Riemann zeta-function at odd points, Preprint № 1 (558) (Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., Minsk 2001).

[35] A. L. Schmidt, Generalized q-Legendre polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **49**:1–3 (1993), 243–249.

[36] D. Boyd, Mahler's measure and special values of L-functions, *Experiment. Math.* **7**:1 (1998), 37–82.

[37] M. Kontsevich, D. Zagier, Periods, *Mathematics unlimited — 2001 and beyond* (Springer, Berlin 2001), 771–808.

Цель и задачи исследования. Основной целью работы является решить ряд открытых проблем в теории чисел, комбинаторике и теории специальных функций, прямым или косвенным образом связанных с теоремой Апери об иррациональности $\zeta(3)$. Именно, в диссертации исследуются следующие задачи:

- количественное усиление теоремы Ривоаля;
- гипотеза Д. Васильева о представлении обобщенных кратных интегралов в виде линейных форм от дзета-значений;
- иррациональность q-дзета-значений;
- новые оценки меры иррациональности дзета-значений;
- приближения Паде и их приложения к задачам о расстоянии натуральных степеней рационального (нецелого) числа до ближайшего целого;
- преобразование Лежандра последовательностей, связанных с последовательностью Апери (5), и гипотеза А. Шмидта;
- гипергеометрические представления L-рядов — обобщенных дзета-значений.

Методика исследования. Методика диссертации включает использование многочисленных классических теорем из вещественного и комплексного анализа, теории чисел, методы теории обобщенных гипергеометрических функций, включая их преобразования, суммирования и интегральные представления, асимптотические методы, методы теории модулярных функций, специальные (арифметические) дифференциальные уравнения и методы собственно теории диофантовых приближений (иррациональных и трансцендентных чисел).

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. В частности, в работе установлены следующие теоремы:

- по крайней мере одно из четырех чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ и $\zeta(11)$ иррационально;
- новое интегральное представление для вполне-уравновешенных гипергеометрических рядов и, с его помощью, решение гипотезы Д. Васильева;
- оценка сверху для меры иррациональности $\zeta_q(2) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n/(1-q^n)^2$, q-аналога числа $\zeta(2)$;
- лучшая оценка сверху для меры иррациональности $\zeta(2)$;
- лучшая оценка для расстояния от $(3/2)^k$, $k = 1, 2, \dots$, до ближайшего целого;
- решение гипотезы А. Шмидта в общем случае;
- гипергеометрические представления для $L(E, 2)$ и $L(E, 3)$ в случае эллиптической кривой E кондуктора 32.

Практическая и теоретическая ценность. Исследование, проведенное в диссертации, носит теоретический характер. Развитые в работе методы могут применяться и применяются в задачах теории чисел, комбинаторике, теории гипергеометрических рядов, теории модулярных форм, а также в вещественном и комплексном анализе, p-адическом анализе, алгебраической геометрии, дифференциальных уравнениях, математической физике, K-теории.

Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Апробация результатов диссертации. Результаты работы докладывались и обсуждались на семинаре теории чисел МГУ; на семинарах математического института им. М. Планка (Бонн, Германия); научных семинарах университетов Париж 6, Лион 1, Гренобля, Лилля, Метца (Франция); Гёттенбурга, Кёльна, Франкфурта, Майнца, Касселя (Германия); Оулу (Финляндия); Цюриха (Швейцария); Лунда (Швеция); Копенгагена (Дания); Пизы (Италия); Сингапура (Сингапур); Ньюкасла, Мельбурна и Брисбана (Австралия); Осака (Япония); Монреаля (Канада).

Также результаты диссертации докладывались на международных конференциях, включая: Diophantische Approximationen (Обервольфах, Германия, 2000 & 2007 & 2012); Problèmes diophantiens et nombres transcendants (Париж, 2001); Recent Advances in Mathematical Analysis and Number Theory (МИАН, Москва, 2001); Problèmes diophantiens (CIRM, Марсель Люмини, Франция, 2002) Elementare und Analytische Zahlentheorie (Обервольфах, Германия, 2003); 13th Journées Arithmétiques (Грац, Австрия, 2003); Diophantine Approximation (Лейден, Голландия, 2003); 7th Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications (Копенгаген, Дания, 2003); 35th Annual Iranian Mathematical Conference (Ахваз, Иран, 2005); Analytical Methods in Number Theory, Probability Theory and Mathematical Statistics (Санкт-Петербург, 2005); Gauss–Dirichlet Conference (Гёттинген, Германия, 2005); 14th Journées Arithmétiques (Марсель, Франция, 2005); Diophantine Approximation and Heights (Вена, Австрия, 2006); Diophantine approximation and transcendental numbers (CIRM, Марсель Люмини, Франция, 2006); Diophantine and analytic problems in number theory (МГУ, Москва, 2007); 9th Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications (Марсель, Франция, 2007); Développements récents en approximation diophantienne (CIRM, Марсель Люмини, Франция, 2007); Analytical and Combinatorial Methods in Number Theory and Geometry (Ираклион, Крит, Греция, 2007); p-adic Aspects of Differential Equations: Crystals, Mirror symmetry, Modular Forms (Лозанна, Швейцария, 2007); Combinatorics and Statistical Physics (Вена, Австрия, 2008); Number Theory and Physics at the Crossroads (Банфф, Канада, 2008); Geometry and Arithmetic around Hypergeometric Functions (Обервольфах, Германия, 2008); 10th Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications (Лёвен, Бельгия, 2009); 53rd Annual Meeting of the Australian Mathematical Society (Аделаида, Австралия, 2009); 54th Annual Meeting of the

Australian Mathematical Society (Брисбан, Австралия, 2010); Computational and Analytical Mathematics (Барнаби, Канада, 2011); Explicit Methods in Number Theory (Обервольфах, Германия, 2011 & 2013); 11th Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications (Мадрид, Испания, 2011); 55th Annual Meeting of the Australian Mathematical Society (Воллонгонг, Австралия, 2011); Analytic Number Theory (Киото, Япония, 2011); Hypergeometric series and their generalizations in algebra, geometry, number theory and physics (Париж, Франция, 2012); The works of Srinivasa Ramanujan and related topics (Майсур, Индия, 2012); The Legacy of Srinivasa Ramanujan (Дели, Индия, 2012); Arctic Number Theory Workshop (Саарисселкя, Финляндия, 2013); Special Functions and Special Numbers (Утрехт, Голландия, 2013); 57th Annual Meeting of the Australian Mathematical Society (Сидней, Австралия, 2013).

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 27 работах, входящих в список изданий, рекомендуемых ВАК России для публикации научных результатов на соискание ученой степени доктора наук. Кроме того, 4 работы по теме диссертации опубликованы в прочих изданиях; они отмечены звездочкой (*) в приводимом далее списке основных публикаций по теме диссертационного исследования.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из оглавления, введения, семи глав, заключения и списка цитируемой литературы, насчитывающего 165 наименований. Для обозначения теорем используется одинарная нумерация; леммы и предложения имеют двойную нумерацию, в которой первое число отвечает номеру главы, а второе — текущему номеру утверждения внутри главы.

Полный объем диссертации составляет 118 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во ***введении*** подробно описываются задачи исследования с историей соответстующей тематики, описываются методика и теоретическая значимость, а также формулируются основные результаты (теоремы 1–7).

Линейные приближающие формы Ривоаля записываются в виде

$$F_n = F_{s,r,n} = n!^{s+1-2r} \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(t + \frac{n}{2}\Big) \frac{\prod_{j=1}^{rn}(t-j)\cdot\prod_{j=1}^{rn}(t+n+j)}{\prod_{j=0}^{n}(t+j)^{s+1}}\bigg|_{t=\nu}, \qquad s \text{ нечетно}, \tag{14}$$

где вспомогательный параметр $r < s/2$ имеет порядок $r \sim s/\log^2 s$; в частности, ряд $F_{3,1,n}$ совпадает с представлением (10) для последовательности

Апери. Раскладывая рациональную функцию параметра t под зна́ком суммирования в сумму простейших дробей и используя идеи работ Е. Никишина[38] и Ю. Нестеренко[39], можно показать, что справедливы включения

$$2D_n^{s+1}F_n \in \mathbb{Z}\zeta(s)+\mathbb{Z}\zeta(s-2)+\cdots+\mathbb{Z}\zeta(5)+\mathbb{Z}\zeta(3)+\mathbb{Z}.$$

Кроме того, явные формулы (14) для линейных форм от нечетных дзета-значений позволяют вычислить асимптотическое поведение этих форм и их коэффициентов при $n\to\infty$. Заключительный этап доказательства теоремы Ривоаля — применение критерия линейной независимости Нестеренко[40].

Тот факт, что величины (14) являются $\mathbb{Q}$-линейными формами от 1 и дзета-значений одной четности, связан со специальной симметрией рациональной функции параметра t, стоящей в (14) под зна́ком суммы. Возможность использования менее экзотической рациональной функции обсуждается в работах Л. Гутника, Т. Хессами Пилеруд, Т. Ривоаля: в итоге получаются результаты о размерности пространств, порожденных над $\mathbb{Q}$ значениями полилогарифмов

$$\operatorname{Li}_s(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^s}$$

в рациональной точке z, $0<|z|\leqslant 1$.

Несмотря на то, что доказательство теоремы Ривоаля использует некоторое обобщение конструкции для доказательства теоремы Апери, ее результат дает лишь частичное решение задачи об иррациональности дзета-значений. Для следующего за $\zeta(3)$ иррационального нечетного $\zeta(s)$ теорема Ривоаля устанавливает лишь диапазон[41]: $5\leqslant s\leqslant 169$. Дифференцирование рациональной функции под зна́ком суммирования (подобно представлению (9)) дает возможность строить $\mathbb{Q}$-линейные формы от нечетных дзета-значений, не содержащие $\zeta(3)$. Это позволяет доказать[42], что "по крайней мере одно из девяти нечетных дзета-значений $\zeta(5),\zeta(7),\dots,\zeta(21)$ иррационально" Мы доказываем следующую теорему, дающую новое продвижение в решении задачи об иррациональности нечетных дзета-значений.

Теорема 1. *Одно из чисел*

$$\zeta(5),\ \zeta(7),\ \zeta(9),\ \zeta(11)$$

[38]Е. М. Никишин, Об иррациональности значений функций $F(x,s)$, *Матем. сб.* **109**:3 (1979), 410–417.

[39]Ю. В. Нестеренко, Некоторые замечания о $\zeta(3)$, *Матем. заметки* **59**:6 (1996), 865–880.

[40]Ю. В. Нестеренко, О линейной независимости чисел, *Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* № 1 (1985), 46–54.

[41]K. Ball, T. Rivoal, Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs, *Invent. Math.* **146**:1 (2001), 193–207.

[42]T. Rivoal, Irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5),\zeta(7),\dots,\zeta(21)$, *Acta Arith.* **103** (2002), 157–167.

иррационально.

Доказательству этой теоремы посвящена ***первая глава*** диссертации. Мы используем наиболее общую форму конструкции, предложенной в работах Ривоаля, а также арифметический метод[43], [44], традиционно применяемый для улучшения оценок меры иррациональности чисел. Отметим, что использованная техника успешно работает и в других арифметических задачах: в[45] аналоги теоремы Ривоаля и теоремы 1 установлены для значений бета-функции Дирихле

$$\beta(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

в четных точках $s\geqslant 2$. Уточнение критерия линейной независимости Нестеренко в работе[46] позволило также улучшить ряд других оценок из работы Болла–Ривоаля.

Доказательство Бэйкерса[47] иррациональности $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$, использующее интегральные представления (11) и (8), простое и короткое. Именно это послужило серьезным основанием для дальнейшего применения кратных интегралов с целью количественно усилить и обобщить результаты Апери. О. Василенко[48] предложил рассматривать следующее семейство s-кратных интегралов, обобщающих интегралы Бэйкерса:

$$J_{s,n}=\underset{[0,1]^s}{\int\cdots\int}\frac{\prod_{j=1}^{s}x_j^n(1-x_j)^n}{Q_s(x_1,\dots,x_s)^{n+1}}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_s, \tag{15}$$

где

$$Q_s(x_1,\dots,x_s)=1-x_1(1-x_2(1-\cdots(1-x_{s-1}(1-x_s))\cdots)).$$

Позднее Д. Васильев[49] изучил интегралы $J_{4,n}$, $J_{5,n}$ и доказал, что

$$4D_n^4J_{4,n}\in\mathbb{Z}\zeta(4)+\mathbb{Z}\zeta(2)+\mathbb{Z},\qquad D_n^5J_{5,n}\in\mathbb{Z}\zeta(5)+\mathbb{Z}\zeta(3)+\mathbb{Z}, \tag{16}$$

---

[43] G. V. Chudnovsky, On the method of Thue–Siegel, *Ann. of Math. II Ser.* **117**:2 (1983), 325–382.

[44] Е. А. Рухадзе, Оценка снизу приближения ln 2 рациональными числами, *Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* № 6 (1987), 25–29.

[45] T. Rivoal, W. Zudilin, Diophantine properties of numbers related to Catalan's constant, *Math. Annalen* **326**:4 (2003), 705–721.

[46] S. Fischler, W. Zudilin, A refinement of Nesterenko's linear independence criterion with applications to zeta values, *Math. Annalen* **347**:4 (2010), 739–763.

[47] F. Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, *Bull. London Math. Soc.* **11**:3 (1979), 268–272.

[48] О. Н. Василенко, Некоторые формулы для значения дзета-функции Римана в целых точках, *Теория чисел и ее приложения* (Ташкент, 26–28 сентября 1990 г.), Тезисы докладов Республиканской научно-теоретической конференции (Ташкент, Ташкентский гос. пед. институт 1990), 27.

[49] D. V. Vasilyev, On small linear forms for the values of the Riemann zeta-function at odd points, Preprint № 1 (558) (Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., Minsk 2001).

а также, что линейные формы в (15) стремятся (достаточно быстро) к нулю при $n \to \infty$ (к сожалению, не на столько быстро, чтобы получить новые результаты об иррациональности дзета-значений). Включения $D_n^2 J_{2,n} \in \mathbb{Z}\zeta(2)+\mathbb{Z}$, $D_n^3 J_{3,n} \in \mathbb{Z}\zeta(3)+\mathbb{Z}$, доказанные ранее Бэйкерсом, и (16) дали Васильеву основание высказать следующее предположение: *имеют место включения*

$$\begin{gathered}2^{s-2} D_n^s J_{s,n} \in \mathbb{Z}\zeta(s)+\mathbb{Z}\zeta(s-2)+\cdots+\mathbb{Z}\zeta(4)+\mathbb{Z}\zeta(2)+\mathbb{Z} \quad \textit{для } s \textit{ четного}, \\ D_n^s J_{s,n} \in \mathbb{Z}\zeta(s)+\mathbb{Z}\zeta(s-2)+\cdots+\mathbb{Z}\zeta(5)+\mathbb{Z}\zeta(3)+\mathbb{Z} \quad \textit{для } s \textit{ нечетного}.\end{gathered}$$

Частичное продвижение в задаче Васильева (с точностью до умножения на дополнительный множитель $2D_n$) дается в следующем утверждении.

Теорема 2. *Для каждого целого* $s \geqslant 2$ *и* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *справедливо тождество*

$$J_{s,n} = F_{s,n}, \tag{17}$$

где

$$F_{s,n} = 2n!^{s-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{(s+1)(t+n+1)} \Big(t+\frac{n}{2}\Big) \frac{\prod_{j=1}^{n}(t-j) \cdot \prod_{j=1}^{n}(t+n+j)}{\prod_{j=0}^{n}(t+j)^{s+1}}\bigg|_{t=\nu}. \tag{18}$$

Как следствие, имеют место включения

$$\begin{gathered}2^{s-2} D_n^{s+1} J_{s,n} \in \mathbb{Z}\zeta(s)+\mathbb{Z}\zeta(s-2)+\cdots+\mathbb{Z}\zeta(4)+\mathbb{Z}\zeta(2)+\mathbb{Z} \quad \textit{для } s \textit{ четного}, \\ D_n^{s+1} J_{s,n} \in \mathbb{Z}\zeta(s)+\mathbb{Z}\zeta(s-2)+\cdots+\mathbb{Z}\zeta(5)+\mathbb{Z}\zeta(3)+\mathbb{Z} \quad \textit{для } s \textit{ нечетного}.\end{gathered}$$

Отметим, что ряд (18) в точности совпадает с рядом (14) при s нечетном и $r = 1$, так что тождество (17) означает совпадение интегральной конструкции $\mathbb{Q}$-линейных форм от дзета-значений с конструкцией Ривоаля.

Ряды Болла (10) и Ривоаля (14) хорошо известны в теории обобщенных гипергеометрических функций как *вполне уравновешенные ряды*. Именно такое название дал Ф. Уиппл[50] гипергеометрическим рядам (13), удовлетворяющим условию

$$a_0 + 1 = a_1 + b_1 = \cdots = a_m + b_m;$$

известные преобразования относятся, как правило, именно к таким рядам. Особую роль среди вполне уравновешенных гипергеометрических рядов играют ряды *совершенно уравновешенные*, для которых выполнено дополнительное условие

$$a_1 = \tfrac{1}{2}a_0 + 1, \quad b_1 = \tfrac{1}{2}a_0;$$

[50] F. J. W. Whipple, On well-poised series, generalized hypergeometric series having parameters in pairs, each pair with the same sum, *Proc. London Math. Soc. II Ser.* **24** (1926), 247–263.

обзор истории и приложений вполне и совершенно уравновешенных рядов в различных областях математики написан Дж. Эндрюсом[51]. Ряд (18) (как и ряд (14)) является совершенно уравновешенным:

$$F_{s,n} = \frac{n!^{2s+1}(3n+2)!}{(2n+1)!^{s+2}} \cdot {}_{s+4}F_{s+3}\left(\begin{matrix} 3n+2, \frac{3}{2}n+2, \ n+1, \ \ldots, \ n+1 \\ \frac{3}{2}n+1, 2n+2, \ldots, 2n+2 \end{matrix} \,\middle|\, (-1)^{s+1}\right). \tag{19}$$

Теорема 2 является следствием общего результата о представлении совершенно уравновешенного ряда в виде кратного интеграла. Во ***второй главе*** диссертации приводятся не только подробные доказательства этого результата и теоремы 2, но и ряд других важных следствий.

Именно с помощью теоремы 2 в последовавшей работе[52] задача Васильева была полностью решена в случае нечетного $s \geqslant 3$. Для рядов (19) возможны и другие представления в виде кратных интегралов сорокинского типа[53]; соответствующие теоремы о преобразовании кратных интегралов установлены С. Злобиным[54], [55]. Позднее Злобин[56] и независимо В. Салихов, А. Фроловичев[57] получили другое решение задачи Васильева.

Как обычно, величины, зависящие от числа q и превращающиеся в классические объекты в пределе $q \to 1$ (по крайней мере формально), называются *q-аналогами* или *q-расширениями*. Возможный способ q-расширить значения дзета-функции Римана выглядит следующим образом (здесь $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$):

$$\zeta_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{s-1}(n) q^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{s-1} q^\nu}{1-q^\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu \rho_s(q^\nu)}{(1-q^\nu)^s}, \qquad s = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

где $\sigma_{s-1}(n) = \sum_{d|n} d^{s-1}$ обозначает сумму степеней делителей, а многочлены $\rho_s(x) \in \mathbb{Z}[x]$ могут быть определены рекурсивно с помощью формул

$$\rho_1 = 1 \qquad \text{и} \qquad \rho_{s+1} = (1+(s-1)x)\rho_s + x(1-x)\rho_s' \quad \text{при } s = 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

[51]G. E. Andrews, The well-poised thread: An organized chronicle of some amazing summations and their implications, *Ramanujan J.* **1**:1 (1997), 7–23.

[52]C. Krattenthaler, T. Rivoal, *Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann*, Mem. Amer. Math. Soc. **186** (Amer. Math. Soc., Providence, RI 2007), no. 875.

[53]В. Н. Сорокин, О мере трансцендентности числа π^2, *Матем. сб.* **187**:12 (1996), 87–120.

[54]С. А. Злобин, Интегралы, представляемые в виде линейных форм от обобщенных полилогарифмов, *Матем. заметки* **71**:5 (2002), 782–787.

[55]С. А. Злобин, О некоторых интегральных тождествах, *Успехи матем. наук* **57**:3 (2002), 153–154.

[56]С. А. Злобин, Разложения кратных рядов в линейные формы, *Матем. заметки* **77**:5 (2005), 683–706.

[57]В. Х. Салихов, А. И. Фроловичев, О кратных интегралах, представимых в виде линейной формы от $1, \zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(2k-1)$, *Фундамент. и прикл. матем.* **11**:6 (2005), 143–178.

Тогда имеют место предельные соотношения

$$\lim_{\substack{q\to1\\|q|<1}}(1-q)^s\zeta_q(s)=\rho_s(1)\cdot\zeta(s)=(s-1)!\cdot\zeta(s),\qquad s=2,3,\dots;$$

равенство $\rho_s(1)=(s-1)!$ следует из (21). Определенные таким образом q-дзета-значения (20) приводят к ряду новых интересных задач в теории диофантовых приближений и трансцендентных чисел, которые являются расширениями соответствующих задач для обычных дзета-значений. Несложно показать, что $\zeta_q(s)$ трансцендентны как функции параметра q.

Для четных $s\geqslant2$ ряды $E_s(q)=1-2s\zeta_q(s)/B_s$, где $B_s\in\mathbb{Q}$ — числа Бернулли, известны как *ряды Эйзенштейна*. Поэтому модулярное происхождение (относительно параметра $\tau=\frac{\log q}{2\pi i}$) функций $E_4,E_6,E_8,\dots$ приводит к алгебраической независимости $\zeta_q(2),\zeta_q(4),\zeta_q(6)$ над $\mathbb{Q}[q]$, в то время как остальные четные q-дзета-значения являются многочленами от $\zeta_q(4)$ и $\zeta_q(6)$. В такой интерпретации следствие из теоремы Нестеренко[58] "числа $\zeta_q(2),\zeta_q(4),\zeta_q(6)$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$ для алгебраического q, $0<|q|<1$" является полным q-расширением следствия из теоремы Линдемана "$\zeta(2)=\pi^2/6$ трансцендентно". Об арифметической природе нечетных q-дзета-значений (например, q-аналог задачи об иррациональности дзета-значений) известно немного. П. Эрдёш[59] доказал иррациональность числа $\zeta_q(1)$ (*q-гармонического ряда*) в случае $q=p^{-1}$, где $p\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$; другие доказательства имеются в[60], [61], а в[62] и[63] получена оценка

$$\mu(\zeta_q(1))\leqslant\frac{2\pi^2}{\pi^2-2}=2.50828476\dots\tag{22}$$

для показателя иррациональности $\zeta_q(1)$ при тех же условиях на параметр q. Конструкция линейных приближающих форм для $\zeta_q(1)$ в последних двух статьях непрерывно зависит от q, однако в пределе $q\to1$, $|q|<1$, получаются расходящиеся величины. В связи с этим обстоятельством В. Фан Ассе сформулировал задачу о построении линейных приближающих форм для $\zeta_q(2)$ и $\zeta_q(3)$, переходящих при $q\to1$ в последовательности Апери $u_n'\zeta(2)-v_n'$ и $u_n\zeta(3)-v_n$ соответственно.

Методика изучения арифметических свойств чисел $\zeta(s)$, $s=2,3,\dots$, успешно переносится на случай q-дзета-значений. Именно, мы имеем в виду гипергеометрическую конструкцию линейных форм и арифметический

---

[58] Ю. В. Нестеренко, Модулярные функции и вопросы трансцендентности, *Матем. сб.* **187**:9 (1996), 65–96.

[59] P. Erdős, On arithmetical properties of Lambert series, *J. Indiana Math. Soc.* **12** (1948), 63–66.

[60] J.-P. Bezivin, Indépendence linéaire des valeurs des solutions transcendantes de certaines équations fonctionelles, *Manuscripta Math.* **61** (1988), 103–129.

[61] P. Borwein, On the irrationality of $\sum\frac{1}{q^n+r}$, *J. Number Theory* **37** (1991), 253–259.

[62] P. Bundschuh, K. Väänänen, Arithmetical investigations of a certain infinite product, *Compositio Math.* **91** (1994), 175–199.

[63] W. Van Assche, Little q-Legendre polynomials and irrationality of certain Lambert series, *Ramanujan J.* **5** (2001), 295–310.

метод, дополненный групповым подходом Дж. Рина и К. Виолы[64], [65]. Для каждой из этих составляющих мы указываем необходимые q-расширения. Гипергеометрическим рядам при этом соответствуют базисные гипергеометрические ряды, для которых также имеют место преобразования; кроме того, q-арифметический метод позволяет улучшать известные меры иррациональности q-дзета-значений и других q-постоянных[66]. Так, например, используя базисный гипергеометрический ряд, классическое преобразование Гейне[67] и q-арифметический метод мы улучшаем оценку (22) для показателя иррациональности q-гармонического ряда:

$$\mu(\zeta_q(1)) \leqslant 2.46497868\ldots .$$

Используя q-аналог гипергеометрического ${}_3F_2(1)$-ряда и преобразование Холла, мы не только решаем упомянутую задачу Фан Ассе для $\zeta_q(2)$, но и оптимизируем оценку для показателя иррациональности этого числа.

Теорема 3. *Для каждого $q = 1/p$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, число $\zeta_q(2)$ является иррациональным с показателем иррациональности, удовлетворяющим неравенству*

$$\mu(\zeta_q(2)) \leqslant 3.51887508\ldots . \tag{23}$$

Количественные оценки типа (23) для $\zeta_q(2)$ (доказывающие нелиувиллевость этой постоянной в случае $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$) до публикаций автора не были известны, хотя, как отмечалось выше, иррациональность[68] и даже трансцендентность числа $\zeta_q(2)$ для любого алгебраического q с условием $0 < |q| < 1$ следует из упомянутой выше теоремы Нестеренко. В результате более аккуратного вычисления вспомогательных параметров конструкции в работе[69] была установлена оценка

$$\mu(\zeta_q(2)) \leqslant \frac{10\pi^2}{5\pi^2 - 24} = 3.89363887\ldots .$$

Теорема 3 значительно улучшает этот результат.

Доказательство теоремы 3 приводится в ***третьей главе*** диссертации; там же мы устанавливаем, что частный случай

$$U_n(q)\zeta_q(2) - V_n(q) = (-1)^n \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n}(1-q^j)\cdot\prod_{j=1}^{n}(1-q^jT)}{\prod_{j=0}^{n}(1-q^{n+1+j}T)^2} T^{n+1}\bigg|_{T=q^\nu}$$

---

[64] G. Rhin, C. Viola, On a permutation group related to $\zeta(2)$, *Acta Arith.* **77**:1 (1996), 23–56.

[65] G. Rhin, C. Viola, The group structure for $\zeta(3)$, *Acta Arith.* **97**:3 (2001), 269–293.

[66] P. Bundschuh, W. Zudilin, Irrationality measures for certain q-mathematical constants, *Math. Scand.* **101**:1 (2007), 104–122.

[67] E. Heine, Untersuchungen über die Reihe ..., *J. Reine Angew. Math.* **34** (1847), 285–328.

[68] D. Duverney, Irrationalité d'un q-analogue de $\zeta(2)$, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **321**:10 (1995), 1287–1289.

[69] C. Smet, W. Van Assche, Irrationality proof of a q-extension of $\zeta(2)$ using little q-Jacobi polynomials, *Acta Arith.* **138**:2 (2009), 165–178.

нашей гипергеометрической конструкции также доказывает иррациональность числа $\zeta_q(2)$ в случае $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, а в пределе $q \to 1$ получаются рациональные приближения Апери (12) к $\zeta(2)$. В совместной работе[70] мы предъявляем q-аналог последовательности рациональных приближений (9), (10), однако это не приводит к иррациональности величины $\zeta_q(3)$. Вопрос об иррациональности $\zeta_q(3)$ остается открытым; известны только частичные результаты в духе теоремы 1.

Использование q-арифметического метода и гипергеометрической конструкции позволяет получить и другие качественные и количественные результаты для q-дзета-значений. Так, упомянутая в предыдущем абзаце работа содержит результат о бесконечности иррациональных чисел среди нечетных q-дзета-значений (q-аналог теоремы Ривоаля) в случае $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Также отметим, что для q-дзета-значений значительный интерес представляют и вопросы функциональной независимости. Здесь следует упомянуть работу Ю. Пупырёва[71], доказавшего линейную независимость q-дзета-значений, а также получившего частичные результаты об их алгебраической независимости.

Обзор[72] о гипергеометрической интерпретации выдержанных временем мер иррациональности $\log 2$, π и $\log 3$ был опубликован в 2004 г. Всплеск активности[73], [74], [75] в последовавшее пятилетие привел не только к количественным изменениям рассмотренных в обзоре мер, но и к возникновению принципиально новых конструкторских идей для их получения. Вместе с тем рекордные меры иррациональности

$$\mu(\zeta(2)) \leqslant 5.44124250\ldots \quad \text{и} \quad \mu(\zeta(3)) \leqslant 5.51389062\ldots,$$

полученные Рином и Виолой в 1996 г. и в 2001 г. соответственно, оставались незыблимыми. В основе метода Рина–Виолы — группа бирациональных преобразований двойных и тройных интегралов бэйкерсова типа (11), (8), дополненную арифметическим методом. По существу, наше доказательство оценки меры иррациональности q-аналога $\zeta(2)$ в ***третьей главе*** есть не что иное, как q-версия метода Рина–Виолы, переложенного на гипергеометрический язык.

---

[70] C. Krattenthaler, T. Rivoal, W. Zudilin, Séries hypergéométriques basiques, q-analogues des valeurs de la fonction zêta et formes modulaires, *Inst. Jussieu Math. J.* **5**:1 (2006), 53–79.

[71] Ю. А. Пупырёв, О линейной и алгебраической независимости q-дзета-значений, *Матем. заметки* **78**:4 (2005), 608–613.

[72] В. В. Зудилин, Эссе о мерах иррациональности π и других логарифмах, *Чебышёвский сб.* (ТГПУ, Тула) **5**:2 (2004), 49–65.

[73] R. Marcovecchio, The Rhin–Viola method for $\log 2$, *Acta Arith.* **139**:2 (2009), 147–184.

[74] В. Х. Салихов, О мере иррациональности $\log 3$, *Докл. РАН* **417**:6 (2007), 753–755.

[75] В. Х. Салихов, О мере иррациональности числа π, *Успехи матем. наук* **63**:3 (2008), 163–164.

Отметим, что необходимость использовать q-гипергеометрические ряды вместо q-аналогов интегралов (а понятие q-интеграла действительно существует[76]) продиктована отсутствием понятия замены переменных для последних.

Четвертая глава диссертации посвящена еще одной демонстрации успешности арифметико-гипергеометрического метода — доказательству новой оценки меры иррациональности $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Теорема 4. *Показатель иррациональности числа $\zeta(2) = \pi^2/6$ удовлетворяет неравенству $\mu(\zeta(2)) \leqslant 5.09541178\dots$.*

Одним из следствий теоремы 4 является общая оценка

$$\mu(\pi\sqrt{d}) \leqslant 10.19082357\dots,$$

справедливая для любого ненулевого рационального d. В то же время для некоторых частных значений $d \in \mathbb{Q}$ известны лучшие оценки: результаты

$$\mu(\pi) \leqslant 7.606308\dots, \quad \mu(\pi\sqrt{3}) \leqslant 4.601057\dots, \quad \mu(\pi\sqrt{10005}) \leqslant 10.021363\dots$$

получены в работах В. Салихова[77], В. Андросенко и Салихова[78] и диссертанта[79] соответственно.

Доказательство теоремы 4 использует две гипергеометрические конструкции построения рациональных приближений к $\zeta(2)$. Совпадение этих приближений — нетривиальное аналитическое тождество, не найденное в литературе. Кроме того, гипергеометрические конструкции позволяют строить совместные рациональные приближения к $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$, к сожалению, недостаточно хорошие для доказательства линейной независимости этих дзета-значений.

Гипергеометрическая конструкция и арифметический метод, применяющиеся для доказательства теорем 1, 3 и 4 находят приложения во многих других задачах на стыке диофантовой и аналитической теорий чисел. Яркий пример подобного симбиоза является основным сюжетом ***пятой главы*** диссертации.

Пусть $\lfloor\cdot\rfloor$ и $\{\cdot\}$ обозначают целую и дробную части числа соответственно. Как известно[80], неравенство $\{(3/2)^k\} \leqslant 1 - (3/4)^k$ при $k \geqslant 6$ дает точную формулу $g(k) = 2^k + \lfloor(3/2)^k\rfloor - 2$ для наименьшего целого $g = g(k)$ такого, что каждое натуральное число представимо в виде суммы не более

---

[76] R. Askey, The q-gamma and q-beta functions *Appl. Anal.* **8** (1978), 125–141.

[77] В. Х. Салихов, О мере иррациональности числа π, *Успехи матем. наук* **63**:3 (2008), 163–164.

[78] В. А. Андросенко, В. Х. Салихов, Интеграл Марковеккио и мера иррациональности $\pi/\sqrt{3}$, *Вестник БГТУ* **34**:4 (2011), 129–132.

[79] В. В. Зудилин, Формулы раманджанова типа и меры иррациональности некоторых кратных числа π, *Матем. сб.* **196**:7 (2005), 51–66.

[80] R. C. Vaughan, *The Hardy–Littlewood method*, Cambridge Tracts in Mathematics **125** (Cambridge Univ. Press, Cambridge 1997).

g положительных k-х степеней (проблема Варинга). К. Малер[81] использовал обобщение Риду известной теоремы Рота, чтобы показать, что неравенство $\|(3/2)^k\| \leqslant C^k$, где $\|x\| = \min(\{x\}, 1-\{x\})$ — расстояние от $x \in \mathbb{R}$ до ближайшего целого, имеет лишь конечное число решений в целых k для любого $C < 1$. В частном случае $C = 3/4$ получается приведенное выше значение $g(k)$ для всех $k \geqslant K$, где K — некоторая абсолютная, но неэффективная постоянная. В связи с этим возникает следующая задача: *получить нетривиальную* (*т.е.* $C > 1/2$) *и эффективную* (*в терминах* K) *оценку вида*

$$\left\| \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\| > C^k \qquad \text{для всех} \quad k \geqslant K. \tag{24}$$

Первое продвижение в этом направлении принадлежит А. Бейкеру и Дж. Коэтсу[82]; применив эффективные оценки линейных форм от логарифмов в p-адическом случае, они показали справедливость (24) с $C = 2^{-(1-10^{-64})}$. Ф. Бэйкерс[83] существенно улучшил этот результат, доказав, что неравенство (24) выполняется с $C = 2^{-0.9} = 0.5358\ldots$ при $k \geqslant K = 5000$ (хотя его доказательство давало и лучший выбор $C = 0.5637\ldots$, если не заботиться о явном вычислении эффективной границы для K). Доказательство Бэйкерса основано на приближениях Паде к остатку биномиального ряда $(1-z)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}(-z)^n$; позднее А. Дубицкас[84] и Л. Хабсигер[85] использовали конструкцию Бэйкерса для получения оценки (24) с $C = 0.5769$ и 0.5770 соответственно. Последняя работа также содержит оценку $\|(3/2)^k\| > 0.57434^k$ при $k \geqslant 5$ на основе вычислений из[86] и[87].

Модифицируя конструкцию Бэйкерса, именно, рассматривая приближения Паде к остатку ряда

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{m} z^n,$$

и получая точные оценки p-адических порядков возникающих биномиальных коэффициентов, мы доказываем в ***пятой главе*** следующий результат.

---

[81] K. Mahler, On the fractional parts of powers of real numbers, *Mathematika* **4** (1957), 122–124.

[82] A. Baker, J. Coates, Fractional parts of powers of rationals, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **77** (1975), 269–279.

[83] F. Beukers, Fractional parts of powers of rationals, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **90** (1981), 13–20.

[84] А. К. Дубицкас, Оценка снизу величины $\|(3/2)^k\|$, *Успехи матем. наук* **45**:1 (1990), 153–154.

[85] L. Habsieger, Explicit lower bounds for $\|(3/2)^k\|$, *Acta Arith.* **106** (2003), 299–309.

[86] F. Delmer, J.-M. Deshouillers, The computation of $g(k)$ in Waring's problem, *Math. Comp.* **54** (1990), 885–893.

[87] J. Kubina, M. Wunderlich, Extending Waring's conjecture up to 471600000, *Math. Comp.* **55** (1990), 815–820.

Теорема 5. *Имеет место оценка*

$$\left\|\left(\frac{3}{2}\right)^k\right\| > 0.5803^k = 2^{-k\cdot 0.78512916\ldots} \qquad \text{для всех} \quad k \geqslant K,$$

где K — некоторая эффективная постоянная.

Конструкция ***пятой главы*** диссертации позволяет также доказать оценки

$$\left\|\left(\frac{4}{3}\right)^k\right\| > 0.4914^k = 3^{-k\cdot 0.64672207\ldots} \qquad \text{при} \quad k \geqslant K_1,$$
$$\left\|\left(\frac{5}{4}\right)^k\right\| > 0.5152^k = 4^{-k\cdot 0.47839775\ldots} \qquad \text{при} \quad k \geqslant K_2,$$

где K_1, K_2 — эффективные постоянные. Наилучший результат для последовательностей $\|(1+1/N)^k\|$ принадлежит М. Беннетту[88]: $\|(1+1/N)^k\| > 3^{-k}$ при $4 \leqslant N \leqslant k3^k$. Наша оценка снизу для $\|(4/3)^k\|$ дополняет результат Беннетта[89] о порядке аддитивного базиса $\{1, N^k, (N+1)^k, (N+2)^k, \ldots\}$ в случае $N = 3$ (случай $N = 2$ отвечает классической проблеме Варинга); решение соответствующей задачи требует оценки $\|(4/3)^k\| > (4/9)^k$ при $k \geqslant 6$. Таким образом, остается ее проверить в диапазоне $6 \leqslant k \leqslant K_1$. Отметим, что Пупырёв[90] дает явное значение постоянной K_1.

В 1992 г. А. Шмидт[91] обратил внимание на тот факт, что с последовательностью чисел Апери $\{u_n\}_{n=0,1,\ldots}$ из (5) связано удивительное обстоятельство. Именно, если определить числа $\{c_k\}_{k=0,1,\ldots}$ последовательно с помощью равенств

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} c_k, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

то эти числа являются целыми. (Явные формулы

$$c_n = \binom{2n}{n}^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{2k+1}{n+k+1} \binom{2n}{n-k} u_k, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

---

[88] M. A. Bennett, Fractional parts of powers of rational numbers, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **114** (1993), 191–201.

[89] M. A. Bennett, An ideal Waring problem with restricted summands, *Acta Arith.* **66** (1994), 125–132.

[90] Ю. А. Пупырёв, Эффективизация нижней оценки для $\|(4/3)^k\|$, *Матем. заметки* **85**:6 (2009), 927–935.

[91] A. L. Schmidt, Generalized q-Legendre polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **49**:1–3 (1993), 243–249.

показывают, что ожидаемыми являются включения $D_n c_n \in \mathbb{Z}$.) Позднее сам Шмидт[92] и независимо Ф. Штрель[93] получили следующее явное выражение:

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^3 = \sum_j \binom{n}{j}^2 \binom{2j}{n}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{25}$$

экспериментально обнаруженное В. Дойбером, В. Тумзером и Б. Войтом. На самом деле, Штрель в упомянутой статье использовал соответствующее тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3$$

в качестве модели для иллюстрации различной техники доказательства биномиальных тождеств. Удивительным является тот факт, что последовательность (25) изучалась Дж. Франелем[94] еще в конце 19-го века: он доказал, что она удовлетворяет полиномиальной рекурсии

$$(n+1)^2 c_{n+1} - (7n^2 + 7n + 2) c_n - 8n^2 c_{n-1} = 0.$$

Шмидт отметил, что по всей видимости феномен целочисленности, связанный с последовательностями чисел Апери и Франеля, выполняется в следующей общей ситуации.

Задача Шмидта. *Пусть для любого целого $r \geqslant 2$ последовательность чисел $\{c_k^{(r)}\}_{k=0,1,\dots}$, не зависимых от параметра n, определяется равенством*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^r \binom{n+k}{k}^r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} c_k^{(r)}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Требуется показать, что все числа $c_k^{(r)}$ являются целыми.

Используя алгоритм Госпера–Цайльбергера созидательного телескопирования[95], Штрель доказал в своей работе целочисленность $c_k^{(r)}$ в случае

[92] A. L. Schmidt, Legendre transforms and Apéry's sequences, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **58**:3 (1995), 358–375.

[93] V. Strehl, Binomial identities—combinatorial and algorithmic aspects, *Discrete Math.* **136**:1–3 (1994), 309–346.

[94] J. Franel, *L'intermédiare des mathématiciens* **1** (Gauthier-Villars, Paris 1894), 45–47; Response 170, *L'intermédiare des mathématiciens* **2** (Gauthier-Villars, Paris 1895), 33–35.

[95] M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, *A = B* (A. K. Peters, Ltd., Wellesley 1996).

$r = 3$. Задача Шмидта была позднее сформулирована в книге[96] (упражнение 114 на с. 256) с указанием, что Г. Уилф доказал включения $c_n^{(r)} \in \mathbb{Z}$ для любого r, но только для $n \leqslant 9$.

Шестая глава диссертации посвящена решению задачи Шмидта. Именно, мы доказываем следующие явные формулы для $c_n^{(r)}$.

Теорема 6. *Числа $c_n^{(r)}$ в формулировке задачи Шмидта действительно являются целыми. Более точно, имеют место формулы*

$$c_n^{(4)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}^3 \binom{n}{j} \sum_{k \geqslant j} \binom{k+j}{k-j} \binom{j}{n-k} \binom{k}{j} \binom{2j}{k-j},$$

$$c_n^{(5)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}^4 \binom{n}{j}^2 \sum_{k \geqslant j} \binom{k+j}{k-j}^2 \binom{2j}{n-k} \binom{2j}{k-j}$$

и для произвольного $s = 2, 3, \dots$

$$c_n^{(2s)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}^{2s-1} \binom{n}{j} \sum_{k_1 \geqslant \dots \geqslant k_{s-1} \geqslant j} \binom{j}{n-k_1} \binom{k_1}{j} \binom{k_1+j}{k_1-j} \times \binom{2j}{k_{s-1}-j} \prod_{l=2}^{s-1} \binom{2j}{k_{l-1}-k_l} \binom{k_l+j}{k_l-j}^2,$$

$$c_n^{(2s+1)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}^{2s} \binom{n}{j}^2 \sum_{k_1 \geqslant \dots \geqslant k_{s-1} \geqslant j} \binom{2j}{n-k_1} \binom{k_1+j}{k_1-j}^2 \times \binom{2j}{k_{s-1}-j} \prod_{l=2}^{s-1} \binom{2j}{k_{l-1}-k_l} \binom{k_l+j}{k_l-j}^2,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. (Биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$ считаются равными нулю в случае $k < 0$ или $k > n$.)

В качестве заключительного аккорда диссертации мы приводим результаты, связанные с принадлежностью дзета-значений и их обобщений к так называемому классу периодов, введенному в фундаментальной работе М. Концевича и Д. Загира[97]. *Период* — это комплексное число, вещественная и мнимая части которого являются значениями абсолютно сходящихся интегралов от рациональных функций с рациональными коэффициентами, интегрируемых по областям в $\mathbb{R}^n$, заданных полиномиальными неравенствами с рациональными многочленами. Без видимого

---

[96] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics. A foundation for computer science*, 2nd edition (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA 1994).

[97] M. Kontsevich, D. Zagier, Periods, *Mathematics unlimited — 2001 and beyond* (Springer, Berlin 2001), 771–808.

ущерба прилагательное “рациональные” все три раза может быть заменено на “алгебраические”. Множество периодов $\mathcal{P}$ счетно и имеет естественную структуру кольца. Это множество содержит все “важные” математические постоянные, включая, разумеется, π, дзета-значения (1) и их многочисленные обобщения (например, *кратные дзета-значения*[98]); кроме того, множество $\mathcal{P}$ содержит все алгебраические числа. Вместе с тем, число $1/\pi$ предположительно не принадлежит кольцу $\mathcal{P}$, и многие другие примеры — такие, как значения гипергеометрических функций в алгебраических точках и специальные L-значения (еще одно обобщение дзета-значений) — естественным образом обитают в расширенном кольце периодов $\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}[1/\pi] = \mathcal{P}[(2\pi i)^{-1}]$. В обзоре[99] обсуждается важность представлений чисел в (канонической) “замкнутой форме” с приложениями как в чистой, так и прикладной математике.

Под L-функцией обычно понимается производящий ряд Дирихле

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

последовательности a_n, $n = 1, 2, \ldots$, имеющей “арифметическую значимость”; например, связанную со счетом точек по фиксированному модулю на алгебраическом многообразии $\mathcal{M}$ (обозначение для этого случая $L(s) = L(\mathcal{M}, s)$), либо отвечающую (параболической) модулярной форме $f(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ (тогда мы пишем $L(s) = L(f, s)$). Рассматривая в качестве $\mathcal{M}$ эллиптическую кривую $E : y^2 = x^3 - x$ (кондуктора 32), обозначим через N_p количество различных точек $(x \bmod p, y \bmod p) \in (\mathbb{Z}_p)^2$ на ней для каждого нечетного простого p и определим числа $a_p = p - N_p$. Тогда

$$L(E, s) = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{a_p}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Эта же самая L-функция может быть реализована как $L(f, s)$ для модулярной формы

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n = q \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{4m})^2 (1 - q^{8m})^2, \quad \text{где} \quad q = \exp(2\pi i \tau),$$

веса 2. Подобное соответствие $L(E, s) = L(f, s)$ выполняется для всех эллиптических кривых над $\mathbb{Q}$ благодаря знаменитой теореме о модулярности Э. Уайлса[100], известной ранее под именем гипотезы Таниямы–Шимуры.

---

[98] Y. Ohno, W. Zudilin, Zeta stars, *Commun. Number Theory Phys.* **2**:2 (2008), 325–347.

[99] J. M. Borwein, R. E. Crandall, Closed forms: what they are and why we care, *Notices Amer. Math. Soc.* **60** (2013), 50–65.

[100] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat’s last theorem, *Annals of Math.* (2) **141**:3 (1995), 443–551.

Общие теоремы Бейлинсона и Денингера–Шолла устанавливают принадлежность (некритических) значений L-функции, отвечающей параболической модулярной форме $f(\tau)$ веса k, в точках $m \geqslant k$ кольцу $\widehat{\mathcal{P}}$. Несмотря на алгоритмический характер доказательства теоремы, реализация L-значений явно в виде периодов является трудной задачей даже в абсолютно конкретных ситуациях. Большинство подобных вычислений мотивировано (гипотетическими) выражениями для логарифмической меры Малера многочленов от многих переменных, которые, в свою очередь, эквивалентны частным случаям общих гипотез Бейлинсона–Блоха.

С целью доказательства ряда гипотез для меры Малера многочленов от двух переменных в совместных работах[101], [102] с М. Роджерсом мы разработали принципиально новую методику представления L-значения $L(f,2)$, отвечающего параболической модулярной форме $f(\tau)$ веса 2, в качестве периода. В ***седьмой главе*** диссертации мы приводим обзор этой методики на конкретном примере вычисления $L(E,2)$ для эллиптической кривой $E: y^2 = x^3 - x$, а затем описываем общий алгоритм вычисления некритических значений $L(f,k)$ в виде периодов и иллюстрируем его на примере $L(E,3)$.

Теорема 7. *Для эллиптической кривой $E: y^2 = x^3 - x$ кондуктора 32 справедливы следующие интегральные и гипергеометрические представления:*

$$\begin{aligned} L(E,2) &= \frac{\pi}{16}\int_0^1 \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{1/4}}\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1-x^2(1-y^2)} \\ &= \frac{\pi^{1/2}\Gamma(\frac14)^2}{96\sqrt{2}}\,{}_3F_2\biggl(\begin{matrix} 1,\, 1,\, \frac12 \\ \frac74,\, \frac32 \end{matrix}\biggm| 1\biggr) + \frac{\pi^{1/2}\Gamma(\frac34)^2}{8\sqrt{2}}\,{}_3F_2\biggl(\begin{matrix} 1,\, 1,\, \frac12 \\ \frac54,\, \frac32 \end{matrix}\biggm| 1\biggr), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(E,3) &= \frac{\pi^2}{128}\int_0^1 \frac{(1+\sqrt{1-x^2})^2}{(1-x^2)^{3/4}}\,\mathrm{d}x \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}w}{1-x^2(1-y^2)(1-w^2)} \\ &= \frac{\pi^{3/2}\Gamma(\frac14)^2}{768\sqrt{2}}\,{}_4F_3\biggl(\begin{matrix} 1,\, 1,\, 1,\, \frac12 \\ \frac74,\, \frac32,\, \frac32 \end{matrix}\biggm| 1\biggr) + \frac{\pi^{3/2}\Gamma(\frac34)^2}{32\sqrt{2}}\,{}_4F_3\biggl(\begin{matrix} 1,\, 1,\, 1,\, \frac12 \\ \frac54,\, \frac32,\, \frac32 \end{matrix}\biggm| 1\biggr) \\ &\qquad + \frac{\pi^{3/2}\Gamma(\frac14)^2}{256\sqrt{2}}\,{}_4F_3\biggl(\begin{matrix} 1,\, 1,\, 1,\, \frac12 \\ \frac34,\, \frac32,\, \frac32 \end{matrix}\biggm| 1\biggr). \end{aligned}$$

Отметим, что литература не содержит ни одного явного интегрального представления $L(E,3)$ для какой-либо эллиптической кривой. Полученные выражения увеличивают схожесть данных L-значений с $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$ — ср. с приведенными ранее формулами для приближений Апери.

[101] M. Rogers, W. Zudilin, From L-series of elliptic curves to Mahler measures, *Compositio Math.* **148** (2012), 385–414.

[102] M. Rogers, W. Zudilin, On the Mahler measure of $1+X+1/X+Y+1/Y$, *Intern. Math. Research Notices* **2014** (2014), in press (`doi: 10.1093/imrn/rns285`), 22 pp.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

[1] В. В. Зудилин, Разностные уравнения и мера иррациональности чисел, *Аналитическая теория чисел и приложения* (сб. статей), Труды МИАН **218** (1997), 165–178.

[2] В. В. Зудилин, Сокращение факториалов, *Матем. сб.* **192**:8 (2001), 95–122.

[3] В. В. Зудилин, Об иррациональности значений дзета-функции в нечетных точках, *Успехи матем. наук* **56**:2 (2001), 215–216.

[4] *В. В. Зудилин, Об иррациональности значений дзета-функции, *Современные исследования в математике и механике*, Материалы XXIII Конференции молодых ученых мех.-мат. фак-та МГУ (9–14 апреля 2001 г.), часть 2 (Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, Москва 2001), 127–135.

[5] В. В. Зудилин, Одно из восьми чисел $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(17), \zeta(19)$ иррационально, *Матем. заметки* **70**:3 (2001), 472–476.

[6] В. В. Зудилин, Одно из чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ иррационально, *Успехи матем. наук* **56**:4 (2001), 149–150.

[7] В. В. Зудилин, Об иррациональности $\zeta_q(2)$, *Успехи матем. наук* **56**:6 (2001), 147–148.

[8] В. В. Зудилин, Об иррациональности значений дзета-функции Римана, *Изв. РАН. Серия матем.* **66**:3 (2002), 49–102.

[9] W. Zudilin, Remarks on irrationality of q-harmonic series, *Manuscripta Math.* **107**:4 (2002), 463–477.

[10] В. В. Зудилин, О мере иррациональности q-аналога $\zeta(2)$, *Матем. сб.* **193**:8 (2002), 49–70.

[11] В. В. Зудилин, Совершенно уравновешенные гипергеометрические ряды и кратные интегралы, *Успехи матем. наук* **57**:4 (2002), 177–178.

[12] В. В. Зудилин, О диофантовых задачах для q-дзета-значений, *Матем. заметки* **72**:6 (2002), 936–940.

[13] В. В. Зудилин, Алгебраические соотношения для кратных дзета-значений, *Успехи матем. наук* **58**:1 (2003), 3–32.

[14] В. В. Зудилин, О функциональной трансцендентности q-дзета-значений, *Матем. заметки* **73**:4 (2003), 629–630.

[15] W. Zudilin, Well-poised hypergeometric service for diophantine problems of zeta values, *J. Théorie Nombres Bordeaux* **15**:2 (2003), 593–626.

[16] W. Zudilin, Heine's basic transform and a permutation group for q-harmonic series, *Acta Arith.* **111**:2 (2004), 153–164.

[17] W. Zudilin, Arithmetic of linear forms involving odd zeta values, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **16**:1 (2004), 251–291.

[18] W. Zudilin, Well-poised hypergeometric transformations of Euler-type multiple integrals, *J. London Math. Soc.* **70**:1 (2004), 215–230.

[19] *W. Zudilin, On a combinatorial problem of Asmus Schmidt, *Electron. J. Combin.* **11**:1 (2004), #R22, 8 pages.

[20] *В. В. Зудилин, Эссе о мерах иррациональности π и других логарифмах, *Чебышёвский сб.* (ТГПУ, Тула) **5**:2 (2004), 49–65.

[21] В. В. Зудилин, Об обратном преобразовании Лежандра одного семейства последовательностей, *Матем. заметки* **76**:2 (2004), 300–303.

[22] W. Zudilin, Approximations to q-logarithms and q-dilogarithms, with applications to q-zeta values, *Труды по теории чисел*, Записки научн. семинаров ПОМИ, СПб. **322** (2005), 107–124.

[23] В. В. Зудилин, Формулы рамануджанова типа и меры иррациональности некоторых кратных числа π, *Матем. сб.* **196**:7 (2005), 51–66.

[24] W. Zudilin, A new lower bound for $\|(3/2)^k\|$, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **19**:1 (2007), 313–325.

[25] W. Zudilin, Approximations to -, di- and tri- logarithms, *J. Comput. Appl. Math.* **202**:2 (2007), 450–459.

[26] W. Zudilin, Ramanujan-type formulae for $1/\pi$: A second wind?, *Modular Forms and String Duality*, N. Yui, H. Verrill, and C. F. Doran (eds.), Fields Inst. Commun. Ser. **54** (Amer. Math. Soc., Providence, RI 2008), 179–188.

[27] *W. Zudilin, Apéry's theorem. Thirty years after, *Intern. J. Math. Computer Sci.* **4**:1 (2009), 9–19.

[28] W. Zudilin, Ramanujan-type supercongruences, *J. Number Theory* **129**:8 (2009), 1848–1857.

[29] В. В. Зудилин, Арифметические гипергеометрические ряды, *Успехи матем. наук* **66**:2 (2011), 163–216.

[30] W. Zudilin, Period(d)ness of L-values, *Number Theory and Related Fields, In memory of Alf van der Poorten*, J. M. Borwein et al. (eds.), Springer Proceedings in Math. & Stat. **43** (Spinger, New York 2013), 381–395.

[31] В. В. Зудилин, О мере иррациональности числа π^2, *Успехи матем. наук* **68**:6 (2013), 171–172.