"УТВЕРЖДАЮ"

Директор Математического института

им. В.А. Стеклова РАН

академик В.В. Козлов

Отзыв ведущей организации (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН) о диссертации Зудилина Вадима Валентиновича "Теорема Апери и задачи для значений дзета функции Римана и их q-аналогов ", представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06– математическая логика, алгебра и теория чисел

В диссертации В.В. Зудилина исследуются задачи иррациональности и оценивания показателя иррациональности значений дзета функции Римана и их q-аналогов, оценивания снизу расстояния от чисел $(3/2)^n$ и элементов аналогичных последовательностей до ближайшего целого числа, а также сопутствующие вопросы, связанные с интегральными конструкциями линейных форм от значений дзета функции, гипергео-метрическими рядами и арифметическими свойствами специальных рекуррентных последовательностей.

Из классических результатов Эйлера и Линдемана вытекает трансцендентность значений $\zeta(s)$ для всех положительных четных s. В то же время об арифметической природе значений $\zeta(s)$ для нечетных $s \geq 3$ ничего не было известно до 1978 года, когда Апери доказал иррациоальность $\zeta(3)$. Проблема иррациональности $\zeta(s)$ для нечетных $s \geq 5$ по-прежнему остается открытой. В 2000 году Риоваль доказал, что среди значений $\zeta(5), \zeta(7), \dots$ имеется бесконечно много иррациональных. Диссертант добился существенного прогресса в этом направлении, показав, что среди значений $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ имеется хотя бы одно иррациональное. Доказательство этого результата, основанное на обобщении конструкции Риоваля и арифметическом методе, традиционно применяемом для улучшения оценок меры иррациональности чисел, изложено в первой главе диссертации.

В 1979 году Бэйкерс предложил короткое и прозрачное, ясно раскрывающее суть дела, доказательство иррациональности $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$, основанное на построении специальных интегралов, выражающихся в виде линейной комбинации единицы и значений дзета функции Римана с рациональными коэффициентами. В связи с этим возник вопрос об исседовании структуры более общих интегралов такого рода. Во второй главе диссертации получен принципиальный результат: любой такой интеграл выражается гипергеометрическим рядом.

В третьей главе установлена равномерная оценка показателя иррациональности q-аналогов дзета функции

$$\mu_q(2) = \sum_n \sigma(n) q^n$$

для $q = 1/p$, где $|p| \geq 2$– целое число.

Задача об оценке показателя иррациональности $\zeta(2)$ привлекала внимание многих специалистов. Диссертант в четвертой главе получил наилучшую на сегодняшний день оценку этого показателя, что в свою очередь дает равномерную оценку показателей иррациональности чисел вида $\pi\sqrt{d}$ для натуральных d. Рекордная оценка показателя получена за счет ноу-хау диссертанта: для некоторого малого числа вида $a\zeta(2)+b$, где a– целое число, b– рациональное число, В.В. Зудилин находит два разных представления его в виде интеграла. Комбинирование этих представлений позволяет улучшить оценку знаменателя b.

В пятой главе диссертации получены новые оценки снизу расстояний от чисел вида x^n, $x = 3/2.4/3, 5/4$, до ближайшего целого числа.

В исходном доказательстве Апери иррациональности $\zeta(3)$ использовались специальные рекуррентные последовательности. А. Шмидт (1993, 1995) рассмотрел обобщенные последовательности аналогичной структуры и поставил вопрос об их целочисленности. Положительный ответ на него дан в шестой главе диссертации.

В седьмой главе находятся интегральные и гипергеометрические представления L-функций $L(E,2)$ и $L(E,3)$ эллиптических кривых.

Таким образом, в диссертации В.В. Зудилина получено существенное продвижение или полное решение ряда актуальных задач теории диофантовых приближений, достигнут более высокий уровень понимания взаимосвязей различных используемых в этой теории конструкций, предложены новые перспективные подходы для дальнейшего развития этой теории.

Текст написан достаточно четко и аккуратно. Можно указать несколько замечаний, носящих в основном технический характер.

1. В (1.14) требуются какие-то условия на Z. например, $\Re z \geq 0$. Очевидно, формула неверна, в частности, при $z \to -1$.

2. В начале §1.3 указывается, что числа η_j строятся по заданным h_j, и тогда возникает вопрос, почему они будут целочисленными. Этот фрагмент лучше было бы записать по другому: фиксируем целые числа $\eta_0, \dots, \eta_q$ и по ним строим $h_0, \dots, h_q$ в соответствии с (1.36).

3. Утверждение леммы 1.6 является очевидным вследствие π-периодичности котангенса. Однако, автор приводит неубедительное доказательство этого утверждения. Он оценивает рассматриваемую функцию сверху π-периодической функций, из чего формально не следует, что исходная функция является π-периодической.

4. Следует пояснить, что первое неравенство (3.36) означает, что $b_1 \leq a_i < b_j$ для всех $i = 1, 2, 3$, $j = 2, 3$.

5. Слово "лемма"означает "вспомогательное утверждение". Поэтому название §4.1 звучит не очень хорошо. Лучше было бы написать, например, "Прелюдия: вспомогательные утверждения".

6. В середине страницы 94 содержится опечатка: имеется ссылка на задачу, на задача не идентифицирована.

Указанные погрешности не могут повлиять на оценку в целом данной работы, которая является глубоким научным исследованием и вносит значительный вклад в теорию диофантовых приближений. Развитые в работе методы могут применяться в комбинаторике, теории гипергеометрических рядов, тории модулярных форм, в комплексном анализе, p-адическом анализе, математической физике, K-теории. Они могут быть полезны, в частности, специалистам, работающим в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Математическом институте имени В.А. Стеклова РАН, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Брянском государственном техническом университете, Объединенном институте ядерных исследований, Тульском государственном университете.

Основное содержание диссертации опубликовано в 27 статьях автора.

Таким образом, данная работа соответствует п. 9 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 No. 842., и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к докторским диссертациям, а ее автор Зудилин Вадим Валентинович заслуживает присуждению ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06–математическая логика, алгебра и теория чисел

Отзыв обсужден и одобрен на заседании алгебры и отдела теории чисел МИАН 15 апреля 2014 г.

Зав. отделом алгебры и теории чисел академик А.Н. Паршин

Главный научный сотрудник член-корр. РАН С.В. Конягин