ОТЗЫВ НАУЧНОГО КОНСУЛЬТАНТА

о докторской диссертации Зудилина Вадима Валентиновича
«Теорема Апери и задачи для значений дзета-функции Римана и их q-аналогов»

Теорема Апери, доказанная в 1978г., утверждает, что значение дзета-функции Римана в точке 3 иррационально. Ещё Эйлер установил, что значения $\zeta(s)$ в чётных точках могут быть выражены через π и потому, как это доказал в 1882г. Линдеман, трансцендентны, а значит иррациональны. Доказательство Апери оказалось неприменимым к значениям дзета-функции Римана в других нечётных точках, но породило множество интерпретаций и предположений, стимулировало специалистов по теории чисел и анализу к интенсивной деятельности в этом направлении. Выяснилось, что наиболее естественным для описания и обобщения доказательства Апери является язык гипергеометрических функций и их представлений в виде рядов и интегралов, как действительных (обобщения интеграла Эйлера), так и комплексных (интегралы типа Барнса). В.В. Зудилин принял активное участие в этой деятельности, доказав ряд новых важных результатов, предложил новые интересные методы исследования. Этот материал составил основу его докторской диссертации.

Несмотря на то, что иррациональность чисел $\zeta(2n+1)$ ни при каком $n>1$ не доказана, некоторые продвижения всё-таки получены. В 2000г. Т. Ривоаль доказал, что среди значений $\zeta(2n+1)$, $n>1$, имеется бесконечно много иррациональных. Этот интересный результат не говорит ничего о наименьшем среди иррациональных в этом множестве. Такой оценке были посвящены последовательно работы Ривоаля и В.В. Зудилина, улучшавшие оценку наименьшего иррационального. В 2001г. Зудилин доказал, что, по крайней мере, одно из четырёх чисел $\zeta 5,\ \zeta 7,\ \zeta 9,\ \zeta(11)$ иррационально. Это наилучший из известных в настоящее время результатов, и его доказательство составляет первую главу диссертации.

Для доказательства результатов о линейной независимости чисел необходимо уметь строить стремящуюся к нулю последовательность линейных форм от рассматриваемых чисел с целыми коэффициентами. Одна из таких конструкций – обобщение интеграла Бейкерса, дающего доказательство теоремы Апери, была предложена в 1990г. О.Н. Василенко. Д.Васильев доказал в 2001г. предположение Василенко для интегралов, дающих линейные формы отдельно для чисел 1, $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ и 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$. Он же высказал точную многомерную гипотезу об интегралах указанного Василенко типа. Почти полное доказательство этой гипотезы дал в 2003г. Зудилин. Оно составляет содержание второй главы диссертации. Точный результат был доказан в 2005г. С.А. Сорокиным и в том же году независимо В.Х. Салиховым и А.И. Фроловичевым, а также в 2007г. Х. Краттенталлером и Т. Ривоалем.

Арифметические свойства q-аналогов дзета-значений исследуются в третьей главе диссертации. Зудилин применяет здесь методы, развитые ранее для исследования значений гипергеометрических функций, к q-гипергеометрическим рядам, аналитические свойства которых были изучены ещё в XIX веке в работах Гейне. Основным результатом этой главы является теорема 3 об оценке показателя иррациональности числа $\zeta q2=n=1\infty\sigma1nqn$ при любом $q=1p$, где p - целое, |p|>1. Это число связано со значением ряда Эйзенштейна $E2\tau$ и потому трансцендентно даже при любом алгебраическом q, 0<|q|<1, что было доказано в 1996г. Ю.В. Нестеренко. Оценка показателя иррациональности числа $\zeta q2$, утверждаемая теоремой 3, в настоящее время наилучшая. Более того, до работ Зудилина опубликованных результатов о рациональных приближениях $\zeta q2$ вообще не было известно.

В четвёртой главе диссертации доказывается новая (2013) оценка показателя иррациональности для числа ζ(2) или, что то же самое, для числа $\pi2$, теорема 4. Иррациональность этого числа была доказана ещё Лежандром, первые количественные результаты о рациональных приближениях $\pi2$ были получены в 1953г. К. Малером. Таким образом, теорема 4 диссертации является последней в цепочке улучшающихся результатов. Она усиливает предшествующую оценку Дж.Рина и К.Виолы, опубликованную в 1996г. Доказательство теоремы 4, конечно, использует групповой метод Рина-Виолы, развитый специально для доказательства упомянутой выше оценки, но доказательство новой оценки Зудилиным, естественно, связано с привнесением новых идей в гипергеометрическую конструкцию диофантовых приближений. Во-первых, это исключение из рассмотрений в некоторых ситуациях гипергеометрических рядов и непосредственная работа с интегралами. Это позволяет существенно расширить область поиска параметров. Для лучших из них соответствующие ряды будут расходящимися, а интегралы позволяют проводить все необходимые преобразования. Во-вторых, Зудилин находит не известное ранее тождество, связывающее различные гипергеометрические интегралы. Это даёт возможность точного учёта сокращающихся множителей у конструируемых рациональных приближений и приводит к улучшению оценки.

В пятой главе диссертации рассматривается вопрос об оценке снизу расстояния от $32n$до ближайшего целого. Эта задача имеет отношение к проблеме Варинга. Основной результат пятой главы, теорема 5, даёт наилучшую в настоящее время эффективную оценку такого рода.

Неэффективный результат был впервые доказан К.Малером в 1957 году. Впервые гипергеометрический подход к исследованию подобных вопросов применил Ф. Бейкерс в 1981 году, что позволило получать эффективные результаты. Теорема 5 Зудилина связана с построением рациональных приближений к значениям иной гипергеометрической функции.

В шестой главе диссертации решается проблема А. Шмидта (1993г.) о целочисленности коэффициентов в некоторых специальных тождествах для биномиальных коэффициентов. Зудилин привлекает для исследования гипергеометрические функции и, пользуясь некоторыми тождествами для них, находит явные выражения этих коэффициентов, откуда, в частности, следует их целочисленность.

В последней седьмой главе на конкретном примере излагается новая методика, позволяющая выражать значения L - функций эллиптических кривых в целых точках $k>1$ через значения гипергеометрических функций. При $k=2$ она была разработана в совместных работах Зудилина и М. Роджерса. В диссертации рассматривается общий случай. Все рассуждения иллюстрируются на конкретном примере и при $k=3$. Заметим, что для $k=3$ подобные формулы для точки 3 вообще ранее известны не были (теорема 7).

Диссертация В.В.Зудилина содержит ряд новых, иногда принципиально новых, арифметических результатов. Объединяет их вместе использование в доказательствах гипергеометрических функций. Можно сказать, что при самом непосредственном участии В.В. Зудилина в теории трансцендентных чисел было сформировано новое направление исследований, связанное с эффективными конструкциями диофантовых приближений. Эти конструкции основаны на методах теории гипергеометрических функций и используют классические результаты этой теории для обоснования арифметических свойств конструируемых объектов. Все результаты диссертации принадлежат направлениям теории чисел, где активно ведётся исследовательская работа не только нашими, но и зарубежными специалистами. Результаты эти можно назвать рекордными, так как большая их часть связана с последовательным усилением известных ранее теорем, и получена в конкурентной борьбе. Все результаты диссертации связаны с использованием новых идей и подходов, они требуют технически сложных аналитических конструкций и рассуждений, зачастую связанных с оптимальным выбором многих параметров. Эти параметры находились с помощью длительных компьютерных вычислений.

В.В. Зудилин является известным специалистом по теории чисел и пользуется большим авторитетом в мировом теоретико-числовом сообществе. Перечень научных организаций и международных конференций, на которых он выступал с докладами о своих результатах, занимает страницу текста в автореферате диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих российских и зарубежных журналах, 27 статей входят в список ВАК.

Я полагаю, что В.В. Зудилин на основании результатов, изложенных в его диссертации, заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук.

Чл.-корр. РАН
доктор физико-математических наук
профессор

Ю.В. Нестеренко

17 декабря 2013 г.