Отзыв официального оппонента д. ф. – м. н. Салихова В. Х. на работу Зудилина Вадима Валентиновича «Теорема Апери и задачи для значений дзета – функции Римана и их q - аналогов», представленную в совет в качестве диссертации на соискание ученой степени доктора физико – математических наук по специальности 01. 01. 06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Дзета – функцией Римана называется следующая функция комплексного переменного

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \qquad (1)$$

Впервые ряд (1) рассмотрел Л. Эйлер, доказавший расходимость гармонического ряда и сходимость ряда (1) при $s > 1$. Эйлер вычислил также значения $\zeta(2k)$ в виде $r_k \pi^{2k}$, $r_k \in Q$. Его попытки вычислить значения $\zeta(3)$ и другие значения в нечетных точках не увенчались успехом, хотя и привели к доказательству некоторых формул, связывающих, например, $\zeta(3)$ и некоторые кратные ряды, так называемые кратные дзета – значения. Обобщения этих формул представляют в настоящее время вполне самостоятельную и достаточно интенсивно развивающуюся область математики.

Вообще, различные обобщения функции (1) составляют существенную область современной математики. Во многом это связано с Б. Риманом, впервые рассмотревшим $\zeta(s)$ как функцию комплексного переменного и показавшим первые приложения $\zeta(s)$ к задачам распределения простых чисел.

Работа В. В. Зудилина связана с изучением арифметических свойств значений дзета – функции Римана в целых точках.

Первый результат, во многом сенсационный, касающийся нечетных дзета – значений, принадлежит французскому математику Апери, доказавшему в 1978 г. иррациональность числа $\zeta(3)$. Этот результат положил начало огромному количеству работ, в которых теорема Апери переосмысливалась с различных точек зрения. В их ряду и работы В. В. Зудилина, вошедшие в рассматриваемую диссертацию.

Диссертация В. В. Зудилина состоит из введения и семи глав.

Во введении подробно описана история вопроса, а также сформулированы основные полученные автором результаты (теоремы 1 – 7).

В первой главе диссертации доказывается теорема 1 об иррациональности хотя бы одного из четырех нечетных дзета – значений $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$. Этот результат существенно уточняет аналогичную теорему Т. Ривоаля об иррациональности хотя бы одного из девяти нечетных дзета – значений $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, …, $\zeta(21)$. Доказательство В. В. Зудилина существенно использует арифметический метод, позволяющий строить линейные формы от рассматриваемых дзета – значений с рациональными коэффициентами, имеющими относительно небольшой общий знаменатель.

Во второй главе изучается связь между кратными интегралами и совершенно уравновешенными гипергеометрическими рядами, представляющими линейные формы от дзета – значений одинаковой четности. Эта тематика началась с работы Бейкерса 1979 г., в которой он показал, что линейная форма Апери может быть представлена трехкратным интегралом определенного вида. В 2001 г. Д. Васильев показал, что аналогичные интегралы кратности 4 и 5 представляют линейные формы соответственно от 1, $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ и 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$. В теореме 2 доказывается подобный общий результат для произвольной кратности. Далее в работах С. Злобина, В. Салихова и А. Фроловичева этот результат был обобщен. Недостатком всей этой деятельности является отсутствие новых теоретико – числовых приложений.

В третьей главе диссертации рассмотрены арифметические свойства q - дзета – значений

$$\zeta_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{s-1}(n) q^n, \ s = 1,2,..., \tag{2}$$

где $q \in C$, $|q| < 1$, $\sigma_{s-1}(n) = \sum_{d|n} d^{s-1}$.

Ряды (2) при четных $s \geq 2$ тесно связаны с известными в теории модулярных функций рядами Эйзенштейна.

В 1996 г. Ю. В. Нестеренко, в частности, доказал, что числа $\zeta_q(2)$, $\zeta_q(4)$, $\zeta_q(6)$ алгебраически независимы над Q для алгебраического q, $0 < |q| < 1$, откуда следует знаменитый результат об алгебраической независимости чисел π и e^{π}.

Как и для обычной дзета – функции (1), для q - дзета – функции (2) при нечетных s возникают существенные трудности. П. Эрдёш в 1948 г. доказал иррациональность числа $\zeta_q(1)$ при $q = p^{-1}$, где $p \in Z \setminus \{0, \pm 1\}$. Бундшу и Ваананен получили в 1994 г. оценку меры иррациональности $\mu(\zeta_q(1)) \leq \dfrac{2\pi^2}{\pi^2 - 2}$ при тех же значениях q. В. Зудилин улучшает эту оценку, а также в теореме 3 получает для аналогичных значений q первую оценку меры иррациональности числа $\zeta_q(2)$.

В четвертой главе диссертации получен один из самых значимых результатов работы. В теореме 4 установлена новая оценка меры иррациональности числа $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, существенно улучшающая предыдущий результат Д. Рина и К. Виолы 1996 г.

Доказательство теоремы 4 содержит две новые идеи. Первая из них – использование двух гипергеометрических конструкций, дающих одинаковые линейные формы от 1 и $\zeta(2)$. Совпадение этих конструкций связано с тем, что они удовлетворяют одному и тому же разностному уравнению, весьма сложному, полученному с помощью соответствующей компьютерной программы. Вторая идея состоит в увеличении множества рассматриваемых параметров, точнее в ослаблении условий, накладываемых на параметры, и связана с непосредственным вычислением некоторых интегралов.

Пятая глава диссертации посвящена получению новой оценки сверху числа $\left\|\left(\frac{3}{2}\right)^k\right\|$, где для $x \in R$ $\|x\|$ обозначает расстояние от числа x до ближайшего целого. Эта задача тесно связана с известной в теории чисел проблемой Варинга. Последнее обстоятельство обеспечило значительный интерес к следующей задаче: получить нетривиальную и эффективную оценку вида

$$\left\|\left(\frac{3}{2}\right)^k\right\| > C^k, \tag{3}$$

где $C > \frac{1}{2}$, $k \geq K$.

Основным результатом пятой главы является теорема 5, в которой доказана новая оценка вида (3), где $C = 0{,}5803$, K – некоторая эффективная постоянная. Этот результат улучшает предыдущие оценки А. Бейкера и Дж. Коутса, Ф. Бейкерса, А. Дубицкаса и П. Хабсигера.

В шестой главе решена задача А. Шмидта, поставленная в 1993 г. в связи с последовательностью Апери: если $r \in \mathrm{N}$, $r \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^r \binom{n+k}{k}^r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} c_k^{(r)}, \quad n = 0,1,2,...,$$

где числа $c_k^{(r)}$ не зависят от n, то все $c_k^{(r)} \in \mathrm{Z}$.

В теореме 6 указаны явные формулы для чисел $c_k^{(r)}$, полученные с помощью преобразований обобщенных гипергеометрических рядов.

В последней седьмой главе диссертации изучаются обобщения ряда (1) – так называемые L – ряды Дирихле. В частности, ряды L(E, S), связанные с эллиптической кривой E: $y^2 = x^3 - x$ (кондуктора 32). В теореме 7 указаны явные формулы, выражающие значения L(E, 2) и L(E, 3) через интегралы и значения обобщенных гипергеометрических функций. Для ряда L(E, 3) подобное явное интегральное представление получено впервые.

Отличительной чертой диссертации является применение разнообразных формул и преобразований для обобщенных гипергеометрических функций. Кроме того, существенное значение имеют компьютерные вычисления, особенно в главах 1, 3 и 4. Если широкое применение компьютеров характерно для многих работ по теории диофантовых приближений последних десятилетий, то нетривиальное применение теории специальных функций является достаточно редким для работ в данной области теории чисел.

Многие результаты диссертации получены в очень непростой конкурентной борьбе, так как область теории чисел, связанная с изучением арифметических свойств значений дзета – функции Римана, весьма бурно развивается в последние 35 лет.

Оформлению диссертации можно дать весьма высокую оценку. Доказательства всех результатов изложены достаточно подробно, везде, где это возможно, выделены основные идейные моменты. Весьма полно и по существу представлен исторический обзор.

Результаты, представленные в диссертации, докладывались на нескольких десятках международных семинаров и конференций. Они опубликованы в 27 работах, входящих в список изданий, рекомендуемых ВАК России для публикаций научных результатов на соискание ученой степени доктора наук.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация В. В. Зудилина является научно – квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как новое крупное научное достижение, и её автор заслуживает присвоения ему ученой степени доктора физико – математических наук по специальности 01. 01. 06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

05.06.2014

Официальный оппонент,
профессор кафедры «Высшая математика»
ФГБОУ ВПО «Брянский государственный
технический университет», д. ф. – м. н. В. Х. Салихов