О Т З Ы В

официального оппонента о диссертации Зудилина Вадима Валентиновича "Теорема Апери и задачи для значений дзета-функции Римана и их q-аналогов", представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Теория чисел, как наиболее древняя и рафинированная форма математического знания, имеет приложения во всех разделах естествознания. Одним из ее подразделов является задача определения полей, которым принадлежат числа, определенные либо в виде бесконечных рядов, либо в виде определенных интегралов. Наиболее популярными функциями, арифметику значений которых интересно было бы понять, являются классические специальные функции, в частности, гипергеометрические функции и их q-аналоги.

Исследованию дзета-функции Римана $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ посвящено огромное число работ. Значительная их часть касается вопросов арифметической природы значений этой функции при целых значениях аргумента $s = 2, 3, \ldots$. Из монументального результата Линдемана о трансцендентности числа π вытекает, что числа $\zeta(2k)$, $k \in \mathbb{N}$, трансцендентны, т.к. они равны произведению известных рациональных чисел на π^{2k}, что было установлено еще Эйлером. Проблема описания арифметических свойств нечетных значений $\zeta(2k+1)$ казалась неприступной, и только в 1978 г. Апери установил, что $\zeta(3)$ иррационально. После этого дальнейшее продвижение в решении этой фундаментально важной задачи опять замерло на долгое время. Актуальность рассматриваемой диссертации определяется тем, что в ней предложены наиболее изощренные методы исследования арифметических свойств дзета-значений и других связанных задач теории чисел.

Только в 2000 гг. в работах Ривоаля, Болла-Ривоаля и диссертанта с помощью техники гипергеометрических функций и идей Е.М. Никишина и результатов Ю.В. Нестеренко, был достигнут значительный прогресс в получении принципиально новых утверждений о дзета-значениях. Так, было установлено, что среди $\zeta(2k+1)$ существует бесконечно много иррациональных чисел и были получены количественные ограничения на интервалы значений k, для которых должны возникать иррациональные числа. Рассматриваемая диссертация содержит наиболее сильные известные результаты в этом направлении.

Опишем основные результаты, полученные в диссертации. В первой главе доказано, что как минимум одно из четырех значений $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ является иррациональным числом. Это наиболее яркий результат об иррациональности нечетных дзета-значений, который был получен с помощью гипергеометрической техники. Тот факт, что он остается незыблем уже более 10 лет показывает, что диссертанту удалось, по-видимому, достичь вершин применимости гипергеометрической техники в решении этой задачи.

Во второй главе построено новое интегральное представление для совершенно уравновешенных гипергеометрических рядов. В частном случае теорема 8 дает гипергеометрическое описание интегралов типа Бэйкерса, что приводит к доказательству гипотезы Васильева о том, что эти интегралы представляют линейные формы над рациональными числами от конечного числа целых дзета-значений $\zeta(s)$. На самом деле эта теорема включает в себя значительно более общий результат, т.к. она определяет и интегральные представления для рядов Ривоаля. При этом автором получены несколько более слабые ограничения для знаменателей дробей возникающих при таких вложениях, чем у Васильева. "Сильную" форму этой гипотезы для нечетных s полностью подтвердили Краттенталер и Ривоаль на основе результата, полученного в диссертации.

Условие вполне уравновешенности используемых гипергеометрических рядов привело к кардинальному упрощению линейных форм по дзета-значениям. Аналогичное условие существует и для q-гипергеометрических рядов. Отметим, что для наиболее общих известных специальных функций гипергеометрического типа — эллиптических гипергеометрических функций, это свойство эквивалентно условию, что все параметры теории лежат на эллиптической кривой. Интересно было бы понять играет ли какую-либо роль скрытое использование эллиптических кривых в конструкциях, описанных в диссертации.

Третья глава посвящена доказательству наиболее сильной известной оценки меры иррациональности q-дзета-значения $\zeta_q(2)$ при $q = 1/m$, $m \in \mathbb{Z}$, $0 < |q| < 1$. Этот рекордный результат получен с помощью q-обобщения метода Рина-Виолы. Более того, автором построены q-аналоги рациональных приближений Апери для $\zeta_q(2)$ и $\zeta_q(3)$ и доказана иррациональность бесконечного числа нечетных q-дзета-значений.

В четвертой главе получена новая рекордная оценка меры иррациональности $\zeta(2) = \pi^2/6$ (теорема 4), $\mu(\zeta(2)) \leq 5.095\ldots$. При этом использовалась новая гипергеометрическая техника, которая оказалась более эффективной чем метод Рина-Виолы. Конкретнее, построены новые линейные формы от $\zeta(2)$, определяемые с помощью некоторого интеграла типа Меллина-Барнса. Используя преобразование симметрии для специального случая этого интеграла, доказанное автором, найдено другое описание тех же самых линейных форм (в специальном случае), приводящее к более точному определению их арифметических свойств, что и позволяет улучшить предыдущий известный результат. Здесь необходимо отметить, что диссертант вскрыл некий новый класс преобразований симметрии гипергеометрических интегралов, который, возможно, был известен Бейли, но он не был опубликован. Было бы крайне интересно строго доказать эти общие преобразования и найти их q-аналоги и обобщения на эллиптические гипергеометрические интегралы.

В пятой главе приводится наиболее сильная известная оценка для расстояния положительных степеней 3/2 до ближайшего целого, $\|(3/2)^k\| > C^k$, $C = 0,58\ldots$, начиная с некоторой степени $k = K$, значение которой можно эффективно оценить. Аналогичные оценки получены и для степеней 4/3 и 5/4. Первые подобные результаты восходят к Малеру, полученные без конструктивной оценки K, и они связаны с проблемой Варинга о представимости всех целых чисел суммами степеней других целых чисел. Доказательство соответствующей теоремы 6 основано на гипергеометрической конструкции, возникающей при описании Паде-приближения для обобщенного биномиального ряда (5.2), и его арифметических свойствах.

Шестая глава посвящена решению задачи Шмидта о представлении сумм произвольной степени произведения биномиальных коэффициентов, зависящих от некоторого целого n, в виде суммы первых степеней биномиальных коэффициентов с целочисленными множителями. Возможность такого представления подсказывается свойствами целочисленности решений рекуррентных соотношений типа Апери и Франеля. В теореме 10 доказывается гипотеза Штреля о целочисленности определенной последовательности чисел, заданных суммами биномиальных коэффициентов специального вида. Элементы этой последовательности оказываются совершеннно уравновешенными гипергеометрическими рядами со специальным выбором параметров. Применение кратного преобразования Эндрюса к этим рядам явно доказывает целочисленность последовательности Штреля и решает задачу Шмидта.

В седьмой главе дается заключительный аккорд "гипергеометрический симфонии" в применении к L-функциям для эллиптических кривых. Получен пионерский результат по представлению $L(E,s)$ при $s=3$ для специальной эллиптических кривой $y^2=x^3-x$ в виде "периода" (трехкратного интеграла по отрезкам $[0,1]$ от алгебраической функции с целыми коэффициентами), что приводит к явному выражению для $L(E,3)$ в виде суммы трех ${}_4F_3$-гипергеометрических рядов. Для этой же кривой вычислено и $L(E,2)$ в виде периода (двукратного интеграла), приводящего к сумме двух ${}_3F_2$-рядов. Предложен и общий алгоритм для вычисления величин $L(E,k)$.

Рассматриваемая диссертация в целом может быть охарактеризована тем, что в ней получены мировые рекордно точные результаты как об арифметике дзета-значений (иррациональность и мера иррациональности) и их q-аналогов, эффективной оценке расстояния до ближайшего целого степеней ряда дробей, так и полное решение проблемы Шмидта и первое явное гипергеометрическое представление для значений $L(E,s)$-функций эллиптических кривых при $s=3$. При решении некоторых из этих задач автором предложен новый метод исследования, основанный на тонкой игре с гипергеометрическими тождествами. В совокупности это приводит к новым приложениям специальных функций в аппроксимациях Паде и асимптотических оценках. Представленные результаты являются новыми, они строго обоснованы подробными доказательствами, опубликованными в ведущих математических журналах. Отметим, что произведенные расчеты демонстрируют виртуозное владение диссертантом гипергеометрической техникой, отражающее его высокую квалификацию. Хотелось бы пожелать автору разобраться с возможностью применения разработанных им методов к исследованию q-специальных функций, заданных с помощью обычных контурных интегралов типа Эйлера или Меллина-Барнса, определенными с помощью гиперболической гамма-функции, отличающейся от q-гамма-функции Джексона. В последнем случае функции корректно определены и при $|q|=1$, арифметических исследований q-специальных функций в этой области базисного параметра, насколько известно рецензенту, не проводилось.

Имеются небольшие замечания к тексту диссертации. Например, во введении на стр. 8 указывается, что гипотеза Васильева доказывается после домножения на дополнительный множитель $2D_n$ (здесь D_n - наименьшее общее кратное чисел от 1 до n), но сама оценка приведена в формуле (0.26) без множителя 2. В то же время, в главе 2 на стр. 40 аналогичная оценка приводится с множителем 2. То же самое несоответствие присутствует и в автореферате при обсуждении теоремы 2. С дидактической точки зрения здесь было бы уместно обрисовать то, как Краттенталер и Ривоаль доказали сильную форму гипотезы Васильева для нечетных s, а также представить обсуждение этой гипотезы для четных s. В качестве общего замечания укажем на несколько конспективный стиль диссертации, размер которой вполне позволяет вместить более подробное изложение как вспомогательного материала, так и результатов других авторов, существенных для рассматриваемых задач. Устранение этого недостатка превратило бы рассматриваемую диссертацию в полноценную монографию по данной теме, публикация которой представляет интерес для многих специалистов. Укажем на некоторые чисто технические огрехи. В главе 2, после формулы (2.13) идет ссылка на теорему 1 вместо теоремы 2. В главе 3, между формулами (3.2) и (3.3), приводится выражение с множителем ± 1 вместо $(-1)^n$. В главе 6, после формулы (6.2) имеется опечатка в ссылке на рассматриваемую задачу. В списке литературы ссылки упорядочены по смеси русского и английского алфавитов с приоритетом последнего. Совершенно очевидно, что все указанные недостатки несущественны и никак не затрагивают качество полученных в диссертации результатов.

Результаты диссертации имеют теоретический характер. По своей сути они относятся к теории чисел, однако вспомогательные утверждения и использованная техника имеют ценность сами по себе, т.к. дают существенный вклад в базу данных по описанию свойств специальных функций гипергеометрического типа. Все эти результаты могут иметь приложения в самых разных областях математики и математической физики, в частности, в теории решений разностных уравнений, теории аппроксимации и теории модулярных функций. Они могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Математическом институте РАН им. В.А. Стеклова (г. Москва и г. Санкт-Петербург), МИ СО РАН (г. Новосибирск), ИПМ им. М.В. Келдыша (г. Москва), Высшей школе экономики (г. Москва), механико-математическом факультете МГУ (г. Москва) и других учебных заведениях, в которых проводятся исследования по теории чисел. Текст диссертации оформлен должным образом, полученные результаты апробированы на множестве международных конференций как в России, так и за рубежом, на семинарах ведущих университетов в различных странах. Рецензент лично присутствовал на пленарном докладе диссертанта на юбилейной конференции, посвященной Рамануджану, в г. Дели, в котором были частично представлены результаты диссертации, вызвавшие большой интерес у аудитории. Все результаты своевременно опубликованы в авторитетных математических изданиях, а автореферат адекватно отражает содержание диссертации. Диссертация В.В. Зудилина представляет собой блестящую научную работу, в которой получены результаты, совокупность которых можно оценить как крупное продвижение в решении долго стоящих проблем трансцендентной теории чисел, основанное на новых приложениях теории обычных и q-гипергеометрических функций.

Рассматриваемая диссертационная работа "Теорема Апери и задачи для значений дзета-функции Римана и их q-аналогов" полностью соответствует специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел, она удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор Зудилин Вадим Валентинович, безусловно, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук.

05.06.2014

доктор физико-математических наук
начальник сектора ЛТФ ОИЯИ В.П. Спиридонов

Подпись д.ф.-м.н. В.П. Спиридонова заверяю,

Ученый секретарь Лаборатории
теоретической физики ОИЯИ С.Н. Неделько