ОТЗЫВ

о диссертации Зудилина Вадима Валентиновича

"Теорема Апери и задачи для значений дзета-функции Римана и их q-аналогов"

представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.06 –
математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация относится к важному разделу теории чисел – теории диофантовых аппроксимаций. Основной задачей исследований является выяснение арифметической природы математических констант, т.е. речь идет об иррациональности, алгебраичности и трансцендентности конкретных действительных чисел. Для перечисления чисел, с известной арифметической структурой, хватит пальцев рук, а соответствующие результаты имеют исторической значение, ведь речь идет о таких результатах, как решение Ф. Линдеманом проблемы квадратуры круга или решение А.О. Гельфондом 7-ой проблемы Гильберта.

Постоянная Эйлера γ

$$\gamma \;:=\; \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\;-\;\ln(n)\right)\,.$$

и значения эйлеровых сумм (значения дзета функции Римана в натуральных точках)

$$\zeta(s)\;:=\;\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}\,.$$

являются известными и важными математическими константами. Арифметическая природа постоянной γ и значений $\zeta(s)$ в нечетных точках до сих пор не поддается исследованию (значения $\zeta(s)$ в четных точках были получены еще Эйлером). Пока единственным конкретным результатом в этом направлении является доказательство Р. Апери в 1978 году иррациональности $\zeta(3)$.

Теорема Апери. *Пусть числа u_n и v_n задаются следующим рекуррентным соотношением*

$$(n+1)^3u_{n+1}\;=\;(2n+1)(17n^2+17n+5)u_n-n^3u_{n-1}$$

с начальными условиями $\quad v_0:=0\,,\quad v_1:=6\,,\qquad u_0:=1\,,\quad u_1:=5\,.$

Тогда u_n, $D_n^3v_n\in\mathbb{Z}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (здесь D_n обозначает наименьшее общее кратное чисел $\{1,2,...,n\}$), и справедливы асимптотические формулы

$$|u_n|^{1/n}=(\sqrt{2}+1)^4+o(1),\qquad |v_n-\zeta(3)\,u_n|^{1/n}\;=(\sqrt{2}-1)^4+o(1).$$

Тем самым, рекуррентное соотношение теоремы Апери не только определяет рациональные приближения $\zeta(3)$

$$\frac{v_n}{u_n}\;\to\;\zeta(3),$$

но и (в виду того, что $D_n^{1/n} \to e$, и $e^3(\sqrt{2}-1)^4 \approx 0.591... < 1$) доказывает иррациональность $\zeta(3)$.

Учитывая факт, что со времен Эйлера это был первый новый результат об арифметической природе сумм обратных степеней, теорема Апери вызвала взрыв энтузиазма, направленного на получение аналогичных результатов для других значений дзета функции Римана в нечетных точках. Однако, усилия многих десятков первоклассных математиков в мире пока не привели к доказательству иррациональности других значений $\zeta(2k+1)$. При этом, нельзя сказать, что затраченные усилия пропали даром, в работах А. ван дер Портена, М. Хаты, Ф. Бейкерса, С. Фишлера, Л.А. Гутника, Ю.В. Нестеренко, М. Превоста, В.Н. Сорокина, К. Болла, Т. Ривоаля и В.Х. Салихова получены глубокие и тонкие результаты в этой тематике, которые безусловно вызвали большой интерес у математической общественности и нашли многочисленные приложения в теории специальных функций, в методах вычисления арифметических констант и ряде других областей.

Все вышесказанное определяет **актуальность тематики** рассматриваемой диссертации.

Перейдем непосредственно к рассмотрению диссертации В. В. Зудилина. В ней решается ряд открытых проблем в теории чисел, комбинаторике и теории специальных функций, прямым или косвенным образом связанных с теоремой Апери об иррациональности $\zeta(3)$. Диссертация, общим объемом 118 страниц, состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 165 наименования.

Во **Введении** формулируются основные задачи, рассматриваемые в диссертации, рассказывается об истории вопроса, приводится обзор классических и современных результатов по теме диссертации, обсуждаются основные результаты и структура диссертации.

В **Главе 1** доказывается результат диссертанта, получивший наибольшую известность в мире. Речь идет о теореме, дающей лучшее на сегодняшний день продвижение в решении задачи об иррациональности нечетных дзета-значений.

Теорема 1. *Одно из чисел*

$$\zeta(5),\ \zeta(7),\ \zeta(9),\ \zeta(11)$$

иррационально.

В доказательстве этой теоремы используется наиболее общая форма конструкции, предложенной в работах Ривоаля, а также арифметический метод Чудновского, традиционно применяемый для улучшения оценок меры иррациональности чисел. Отметим, что использованная техника успешно работает и в других арифметических задачах.

В **Главе 2** изучаются обобщения интегралов Бейкерса, которые появились в одном из первых альтернативных простейших доказательств теоремы Апери. В качестве основного результата второй главы диссертации можно выделить Теорему 8, которая устанавливает тождество между обобщенными интегралами Бейкерса и общими совершенно уравновешенными гипергеометрическими рядами. Частный случай этого тождества (Теорема 2), точнее следствие из него, впоследствии стал ключевым моментом, использованными Кратенхалером и Ривоалем при доказательстве гипотезы Д. Васильева о представлении обобщенных кратных интегралов в виде линейных форм от дзета-значений.

В **Главе 3** методика изучения арифметических свойств чисел $\zeta(s)$, $s = 2, 3, \dots$, успешно переносится на случай q-дзета-значений. Конкретно речь идет о гипергеометрической конструкции линейных форм и арифметическом методе. Для каждой из этих составляющих метода найдены необходимые q-расширения. Гипергеометрическим рядам при этом соответствуют базисные гипергеометрические ряды, для которых также имеют место преобразования; кроме того, q-арифметический метод позволяет улучшать известные меры иррациональности q-дзета-значений и других q-постоянных. Так, например, используя базисный гипергеометрический ряд, в этой главе улучшена оценка Эрдоша меры иррациональности q-гармонического ряда:

$$\mu(\zeta_q(1)) \le 2.46497868\dots .$$

Также решена задача Ван Ассе для $\zeta_q(2)$, и получена оптимимальная оценка для меры иррациональности этого числа.

Теорема 3 *Для каждого $q = 1/p$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, число $\zeta_q(2)$ является иррациональным с показателем иррациональности, удовлетворяющим неравенству*

$$\mu(\zeta_q(2)) \le 3.51887508\dots .$$

В **Главе 4** — центральной главе диссертации — получена новая оценка меры иррациональности $\zeta(2) = \pi^2/6$. Доказана

Теорема 4 *Показатель иррациональности числа $\zeta(2) = \pi^2/6$ удовлетворяет неравенству*

$$\mu(\zeta(2)) \le 5.09541178\dots .$$

Доказательство теоремы 4 использует две гипергеометрические конструкции построения рациональных приближений к $\zeta(2)$. Отметим, что гипергеометрические конструкции позволяют строить совместные рациональные приближения к $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$, однако пока они недостаточно хорошие для доказательства линейной независимости этих дзета-значений.

В **Главе 5** рассматривается одна из задач диофантовых приближений, которая имеет приложения в аналитической теории чисел (в задачах типа проблемы Варинга). Здесь доказывается

Теорема 5 *Имеет место оценка*

$$\left\| \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\| > 0.5803^k = 2^{-k\cdot 0.78512916\dots} \qquad \text{для всех} \quad k \ge K,$$

где K — некоторая эффективная постоянная.

Здесь $\|x\| = \min(\{x\}, 1-\{x\})$ — расстояние от $x \in \mathbb{R}$ до ближайшего целого. Доказательство основано на некоторой модификации конструкции Бейкерса. Конкретно, рассмотрены приближения Паде к остатку ряда

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{m} z^n,$$

и получены точные оценки p-адических порядков возникающих биномиальных коэффициентов.

В **<u>Главе 6</u>** решается известная

Проблема А. Шмидта. Пусть для любого целого $r \geq 2$ последовательность чисел $\{c_k^{(r)}\}_{k=0,1,\dots}$, не зависимых от параметра n, определяется равенством

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^r \binom{n+k}{k}^r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} c_k^{(r)}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Требуется показать, что все числа $c_k^{(r)}$ являются целыми.

Решение этой проблемы дается в **Теореме 6**, в которой получены явные формулы для чисел $c_k^{(r)}$.

Наконец, в **<u>Главе 7</u>** получены результаты, связанные с принадлежностью значений $L(E, s)$-функции Дирихле на некоторой эллиптической кривой E к так называемому классу периодов, введенному М. Концевичем и Д. Загиром. Здесь *Период* — это комплексное число, вещественная и мнимая части которого являются значениями абсолютно сходящихся интегралов от рациональных функций с рациональными коэффициентами, интегрируемых по областям в $\mathbb{R}^n$, заданных полиномиальными неравенствами с рациональными многочленами. В **Теореме 7** получены интегральные представления решающие задачу о периодах для значений $s = 2, 3$. Отметим, что ранее не было известно ни одного явного интегрального представления $L(E, 3)$ для какой-либо эллиптической кривой. Также отметим "схожесть" данных L-значений с известными интегральными формулами для приближений Апери для $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$.

Итак, основные результаты диссертации состоят в доказательстве следующих теорем:

1. по крайней мере одно из четырех чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ и $\zeta(11)$ иррационально;
2. новое интегральное представление для вполне-уравновешенных гипергеометрических рядов и, с его помощью, решение гипотезы Д. Васильева;
3. оценка сверху для меры иррациональности $\zeta_q(2) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n/(1-q^n)^2$, q-аналога числа $\zeta(2)$;
4. лучшая оценка сверху для меры иррациональности $\zeta(2)$;
5. лучшая оценка для расстояния от $(3/2)^k$, $k = 1, 2, \dots$, до ближайшего целого;
6. решение гипотезы А. Шмидта в общем случае;
7. гипергеометрические представления для $L(E, 2)$ и $L(E, 3)$ в случае эллиптической кривой E кондуктора 32.

Характеризуя диссертацию в целом отметим, что полученные в ней результаты являются новыми, они снабжены строгими, подробными доказательствами. При доказательстве используются как классические методы анализа и теории специальных функций, так и новые методы, специально разработанные автором для решения изучаемых в диссертации задач. Большинство полученных результатов носит окончательный характер.

Сколько нибудь серьезных замечаний по работе нет. Можем лишь отметить наличие в тексте ряда опечаток. Очевидно, что они ни в какой мере не влияют на качество работы.

Результаты диссертации имеют теоретический характер. Они могут найти применение в теории аппроксимаций, в теории чисел, в теории специальных функций, в теории кодирования. Результаты могут быть использованы в исследованиях проводимых в МГУ, в МИРАН им. Стеклова, ИПМ им. Келдыша РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском государственном университете. Многие разделы диссертации могут быть включены в специальные курсы, читаемые на математических факультетах университетов.

Диссертация должным образом оформлена, результаты апробированы и своевременно опубликованы в ведущих математических изданиях (27 работ, входящих в список изданий, рекомендуемых ВАК России для публикации научных результатов на соискание ученой степени доктора наук). Автореферат адекватно отражает содержание диссертации.

Представленная диссертация являет собой научно-квалифицированную работу, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как новое крупное достижение в развитии "Терии чисел".

На основе изложенного считаем, что рассматриваемая диссертационная работа "Теорема Апери и задачи для значений дзета-функции Римана и их q-аналогов" соответствует специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел, она соответствует Положению о порядке присуждения ученых степеней и удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор Зудилин Вадим Валентинович, безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук.

05 июня 2014

Профессор, доктор физико-математических наук А.И.Аптекарев

Подпись д.ф.-м.н. А.И.Аптекарева заверяю,

Ученый секретарь Института Прикладной Математики им. М.В.Келдыша РАН, к.ф.-м.н. А.И.Маслов