ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

На правах рукописи
УДК 512.745

Перепечко Александр Юрьевич

Автоморфизмы конечномерных алгебр и аффинных многообразий

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель:	**Аржанцев Иван Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Гордеев Николай Леонидович** доктор физико-математических наук, профессор (ФГБОУ ВПО Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена)
	Смирнов Евгений Юрьевич кандидат физико-математических наук, доцент (ФГАОУ ВПО Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»)
Ведущая организация:	**ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН**

Защита диссертации состоится 28 марта 2014 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д.27, сектор А.

Автореферат разослан 28 февраля 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84, созданного на базе
ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор **Иванов Александр Олегович**

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена группам автоморфизмов конечномерных алгебр и аффинных многообразий.

Зарождение понятия группы автоморфизмов произошло в конце 1860-х годов, когда Феликс Клейн и Софус Ли провели совместное исследование «геометрических и аналитических объектов, которые переходят в себя под действием групп преобразований». Клейн был сосредоточен на дискретных группах, а Ли изучал непрерывные группы преобразований. Комплексные линейные алгебраические группы являются наиболее изучаемым семейством групп Ли. В 1940-х годах Клод Шевалле дополнил и обобщил методы теории групп и алгебр Ли. Наконец, после работ Бореля и Колчина теория линейных алгебраических групп приобрела упорядоченный вид.

Другим направлением исследований, порождённых работами Ли, стало изучение бесконечномерных групп преобразований. В первую очередь, бесконечномерные группы возникают при изучении преобразований дифференцируемых, комплексно-аналитических и алгебраических многообразий.

Аффинные алгебраические многообразия изучаются с середины XIX века. Теоремы Гильберта о базисе и о нулях связали аффинные многообразия с коммутативной алгеброй. В начале XX века итальянская школа алгебраической геометрии занималась вопросами классификации алгебраических многообразий. Её наиболее яркие представители — это Кастельнуово, Энриквес, Бертини, Севери, дель Пеццо, Сегре, Веронезе, Фано и другие. Ван дер Варден, Вейль и Зарисский разработали основы алгебраической геометрии в терминах идеалов и дискретных нормирований. В начале второй половины XX века Серр и Гротендик переработали их в терминах пучков и схем.

В диссертации исследуются актуальные вопросы из различных областей:

- Автоморфизмы конечномерных алгебр. Эту область исследовали и исследуют такие известные математики, как Джекобсон, Кошуль и другие. Во-первых, мы отметим исследование Гордеевым и Поповым соответствия между группами автоморфизмов конечномерных алгебр и аффинными алгебраическими группами. Во-вторых, в 1980-х годах С. Гальперин выдвинул гипотезу о спектральной последовательности Серра и предложил её вариацию о разрешимости группы автоморфизмов конечномерной алгебры. Эти гипотезы изучаются в работах Х. Крафта и К. Прочези[1], Люптона, Маркла, Аманна и ряде других.

- Теория особенностей. Изолированные особенности комплексно-аналитических многообразий являются классическим объектом математики, они изучались Маниным, Милнором и многими другими. В частности, для гиперповерхностей Мазер и Яу[2] установили соответствие изолированных особенностей и их алгебр модулей, также Яу[3] доказал разрешимость алгебр дифференцирований алгебр модулей, названных позже алгебрами Яу. Алгебры Яу простых особенностей были изучены в работе Элашвили и Химшиашвили[4].

- Автоморфизмы аффинных многообразий. Структурная теорема о группе автоморфизмов аффинной плоскости была получена впервые получена Юнгом и обобщена Ван дер Кульком на поля положительной характеристики. В дальнейшем различные доказательства этой теоремы появлялись в работах Абьянкара и Мо, Гурвица, Макар-Лиманова, Нагаты, Шафаревича и других. Более сильный результат об амальгамированном произведении также называется теоремой Шафаревича–Нагаты–Камбаяши. Аналогичные теоремы доказывались для других поверхностей Гизатуллиным, Аржанцевым и Зайденбергом, Коваленко. Действия однопараметрических унипотентных групп исследовались в работах Макар-Лиманова, Дерксена, Винкельманна, Фройденбурга. Наконец, в работе Аржанцева, Зайденберга, Калимана, Кутчебауха и Фленнера[5] была введена подгруппа специальных автоморфизмов и изучалась бесконечная транзитивность действия этой группы на аффинном многообразии.

[1] H. Kraft, C. Procesi, *Graded morphisms of G-modules*, Annales de l'institut Fourier **37** (1987), no. 4, 161–166.

[2] J. Mather, S. S.-T. Yau, *Classification of isolated hypersurface singularities by their moduli algebras*, Inventiones Mathematicae **69** (1982), 243–251.

[3] S. S.-T. Yau, *Solvability of Lie algebras arising from isolated singularities and nonisolatedness of singularities defined by* $sl(2,\mathbb{C})$ *invariant polynomials*, American Journal of Mathematics **113** (1991), no. 5, 773–778.

[4] A. Elashvili, G. Khimshiashvili, *Lie Algebras of Simple Hypersurface Singularities*, Journal of Lie Theory **16** (2006), 621–649.

[5] I.V. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, and M. Zaidenberg, *Flexible varieties and automorphism groups*, Duke Mathematical Journal **162** (2013), no. 4, 767–823.

Цель работы

Изучение автоморфизмов конечомерных алгебр и аффинных многообразий. Перед автором стояли следующие задачи:

- Исследовать вопрос представимости произвольного аффинного алгебраического моноида в качестве моноида эндоморфизмов конечномерной алгебры.
- Изучить, при каких условиях группа автоморфизмов конечномерной алгебры разрешима.
- Найти семейства аффинных многообразий, обладающих свойством гибкости.

Научная новизна

Представленные в диссертации результаты являются новыми, полученными автором самостоятельно. Основные результаты диссертации следующие:

- предъявлена явная конструкция, реализующая произвольный аффинный алгебраический моноид в качестве моноида эндоморфизмов конечномерной алгебры;
- получен признак разрешимости связной компоненты единицы группы автоморфизмов конечномерной коммутативной алгебры, получена полная характеризация экстремальных алгебр с неразрешимой группой автоморфизмов;
- доказана гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы алгебраической геометрии, теории представлений, теории алгебраических групп преобразований и алгебраической теории локально нильпотентных дифференцирований.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны специалистам в теории алгебраических групп, теории инвариантов, алгебраической геометрии и теории особенностей.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах

(1) семинар «Группы Ли и теория инвариантов» кафедры высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ (2010-2013, неоднократно);

(2) семинар «Бесконечномерные алгебраические группы» кафедры высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ (2013);

(3) семинар «Algebra and geometry» под руководством профессора Х. Крафта, университет Базеля, Швейцария (2013);

а также на всероссийских и международных конференциях

(1) Летняя школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Самара, 8 - 15 июня 2009;

(2) Конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, 2-6 мая 2010;

(3) Вторая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, 31 января - 05 февраля 2011;

(4) Школа-конференция «Swiss-French workshop on algebraic geometry», Энней, Швейцария, 20-24 февраля 2012;

(5) Международная конференция «Алгебра и геометрия», приуроченная к 65-летию Аскольда Хованского, Москва, 4-9 июня 2012;

(6) Третья школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Тольятти, 24 июня – 1 июля 2012.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в трёх работах, список которых приводится в конце автореферата [1 - 3].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 63 страницы. Список литературы содержит 42 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении изложена история вопроса, показана актуальность темы, сформулированы основные результаты. Также описаны краткое содержание и структура диссертации.

Первая глава

В первой главе изучается связь между эндоморфизмами конечномерных алгебр и линейными алгебраическими моноидами.

Хорошо известно, что группа автоморфизмов конечномерной алгебры A является аффинной алгебраической группой, а именно изоморфна замкнутой по Зарисскому подгруппе общей линейной группы $\mathrm{GL}(A)$. Возникает естественный вопрос, верно ли обратное утверждение, т.е. верно ли, что любая аффинная алгебраическая группа может быть реализована как группа автоморфизмов конечномерной (возможно, некоммутативной и неассоциативной) алгебры. Н.Л. Гордеев и В.Л. Попов[6] рассматривали эту задачу над произвольным полем достаточно большого порядка. В частном случае алгебраически замкнутого поля результат Гордеева и Попова формулируется так:

Теорема (Гордеев–Попов). *Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле. Тогда для любой аффинной алгебраической группы G над $\mathbb{K}$ найдётся такая простая конечномерная $\mathbb{K}$-алгебра A, что G изоморфна группе $\mathbb{K}$-автоморфизмов $\operatorname{Aut} A$.*

В диссертации рассматривается аналогичная проблема для аффинных алгебраических моноидов.

В первом разделе вводятся определения, формулируется основной результат, приводится план доказательства и разбираются примеры моноидов эндоморфизмов алгебр. Основным результатом является реализация произвольного аффинного алгебраического моноида M как моноида эндоморфизмов некоторой конечномерной алгебры A, дающая следующую теорему:

Теорема 1.1.1. *Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле. Для всякого аффинного алгебраического моноида M над $\mathbb{K}$ существует такая конечномерная алгебра A над $\mathbb{K}$, что*

$$\mathrm{End}(A) \cong M \sqcup \{\mathfrak{z}\},$$

[6]N.L. Gordeev and V.L. Popov, *Automorphism groups of finite dimensional simple algebras*, Annals of Mathematics **158** (2003), 1041–1065.

где нулевой элемент $\mathfrak{z}$ образует изолированную компоненту алгебраического моноида $\mathrm{End}(A)$.

Здесь возникают следующие два отличия от результата Гордеева–Попова. Во-первых, мы не можем требовать, чтобы алгебра A была простой, поскольку ядро всякого эндоморфизма является идеалом A. Во-вторых, моноид $\mathrm{End}(A)$ всегда содержит нулевой элемент $\mathfrak{z} \in \mathrm{End}(A)$, т.е. $\mathfrak{z}(a) = 0$ для любого $a \in A$, в то время как M может не содержать нуля.

Доказательство осуществляется в два этапа. На первом этапе мы для каждого конечномерного пространства U и подпространства S в $\mathrm{L}(U)$-модуле специального вида строим такую конечномерную алгебру A, что $\mathrm{End}(A) \cong \mathrm{L}(U)_S \sqcup \{\mathfrak{z}\}$, где $\mathrm{L}(U)_S$ обозначает нормализатор S в моноиде $\mathrm{L}(U)$ линейных операторов на U. При этом мы отказались от большей части техники, использованной при доказательстве теоремы Гордеева–Попова, напрямую построив таблицу умножения алгебры. На втором этапе, следуя доказательству Гордеева и Попова, мы представляем произвольный аффинный алгебраический моноид M в виде $\mathrm{L}(U)_S$ для подходящих U и S.

Во втором разделе осуществляется первый этап доказательства, а именно определяются промежуточные алгебры $A(V, S)$ и $D(U, S, \gamma) \supset A\left(V, S\right)$ следующим образом:

- Векторное пространство V есть прямая сумма пространства U, наделённого естественной структурой $\mathrm{L}(U)$-модуля, и двумерного пространства $P = \langle p_1, p_2 \rangle$, являющегося тривиальным $\mathrm{L}(U)$-модулем.

- Алгебра
$$A(V, S) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus V^{\otimes r-1} \oplus (V^{\otimes r}/S)$$
является фактором тензорной алгебры $V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots$ по идеалу, порождённому подпространством $S \subset V^{\otimes r}$.

- Наконец,
$$D(U, S, \gamma) = \langle e \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle \oplus \langle d \rangle \oplus A\left(V, S\right),$$
где e — левая единица, каждое слагаемое прямой суммы является собственным подпространством относительно оператора умножения справа на e, таблица умножения элементов b, c, d задаётся некоторой константой $\gamma \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$:

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & b & c & d \\
\hline
b & 0 & c+\gamma b & 0 \\
c & -c & b & e \\
d & p_1 & d & p_2,
\end{array}
$$

а также $\langle b, c, d\rangle \cdot A(V, S) = A(V, S) \cdot \langle b, c, d\rangle = 0$.

С помощью следующих предложений описана структура эндоморфизмов этих алгебр.

Предложение 1.2.1. $\mathrm{L}(V)_S = \{\sigma \in \mathrm{End}(A(V, S)) \mid \sigma(V) \subset V\}$.

Предложение 1.2.3. *Мы имеем*

$$\mathrm{End}(D(P, U, S, \gamma)) = \mathrm{L}(U)_S \sqcup \{\mathfrak{z}\},$$

где $\{\mathfrak{z}\}$ *— изолированная компонента алгебраического моноида* $\mathrm{End}(D(P, U, S, \gamma))$*, состоящая из нулевого элемента.*

В третьем разделе осуществляется второй этап доказательства — приводится реализация произвольного аффинного алгебраического моноида в виде нормализатора $\mathrm{L}(U)_S$.

Предложение 1.3.1. *Пусть M — аффинный алгебраический моноид. Найдутся такие конечномерное векторное пространство U и целое число $r > 1$, что справедливо следующее. Пусть P —двумерное векторное пространство с тривиальным $\mathrm{L}(U)$-действием. Тогда $\mathrm{L}(U)$-модуль $(P \oplus U)^{\otimes r}$ содержит такое линейное подпространство S, что $\mathrm{L}(U)_S \cong M$.*

Предложения 1.2.3 и 1.3.1 позволяют завершить доказательство теоремы 1.1.1.

Вторая глава

Вторая глава посвящена проблеме разрешимости групп автоморфизмов конечномерных коммутативных ассоциативных алгебр. Основное поле $\mathbb{K}$ является алгебраически замкнутым характеристики нуль.

В первом разделе приводятся основные определения, формулируются результаты предшественников и результаты автора. Мотивировкой для исследования проблемы разрешимости послужила следующая гипотеза, выдвинутая С. Гальпериным на конференции в честь Ж.–Л. Кошуля.

Гипотеза 2.1.2 (Гальперин). *Пусть конечномерная алгебра*

$$S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_n)$$

является полным пересечением. Тогда связная компонента единицы $\operatorname{Aut}^\circ S$ *группы автоморфизмов алгебры* S *разрешима.*

Заметим, что разрешимость связной компоненты единицы $\operatorname{Aut}^\circ S$ эквивалентна разрешимости алгебры Ли $\operatorname{Der} S$.

Через R обозначается алгебра формальных степенных рядов $\mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$, а через $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал $(x_1, \ldots, x_n) \lhd R$. Пусть идеал $I \subset \mathfrak{m}$ таков, что алгебра $S = R/I$ является конечномерной (или артиновой) и локальной с максимальным идеалом $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/I$. В 2009 году М. Шульце[7] доказал следующий признак разрешимости.

Теорема 2.1.1 (Шульце). *Пусть* $S = R/I$ *— конечномерная локальная алгебра, где* $I \subset \mathfrak{m}^l$. *Если выполняется неравенство*

$$\dim(I/\mathfrak{m}I) < n + l - 1, \tag{2.1}$$

то алгебра дифференцирований $\operatorname{Der} S$ *разрешима.*

В случае локальной алгебры S гипотеза Гальперина является прямым следствием признака Шульце.

Рассмотрим теперь изолированные особенности гиперповерхностей. Пусть многочлен $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ таков, что гиперповерхность $\{p = 0\} \subset \mathbb{K}^n$ имеет изолированную особенность $H = (\{p = 0\}, 0)$ в начале координат. Факторалгебра

$$A(H) = \mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]/\left(p, \frac{\partial p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x_n}\right)$$

конечномерна и называется *локальной алгеброй* или *алгеброй модулей* изолированной особенности H.

Дж. Мазер и С.С.–Т. Яу[1] доказали, что две изолированные особенности гиперповерхностей биголоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда их алгебры модулей изоморфны. Для того, чтобы установить, какие конечномерные локальные алгебры могут являться алгебрами модулей некоторых особенностей, Яу[8] ввёл алгебру дифференцирований $L(H) =$

[7] M. Schulze, *A solvability criterion for the Lie algebra of derivations of a fat point*, Journal of Algebra **323** (2010), no. 10, 2916–2921.

[8] S. S.-T. Yau, *Continuous family of finite dimensional representations of a solvable Lie algebra arising from singularities*, Proceedings of the National Academy of Sciences **80** (Dec. 1983), 7694–7696.

$\operatorname{Der} A(H)$, которую иногда называют *алгеброй Яу*. Он получил следующий результат.

Теорема 2.1.5 (Яу). *Алгебра* $\operatorname{Der}(A(H))$ *изолированной особенности* H *гиперповерхности является разрешимой.*

М. Шульце выводит теорему 2.1.5 из своего признака. Для её доказательства он использует глубокий результат Дж. Кемпфа[9] и ставит вопрос, можно ли без него обойтись.

Мы вводим понятие экстремальных алгебр, которое позволяет получить прямое самодостаточное доказательство теоремы 2.1.5.

Определение 2.1.9. Мы называем локальную конечномерную алгебру S *экстремальной*, если в терминах теоремы 2.1.1 выполнено равенство $\dim I/\mathfrak{m}I = l + n - 1$.

Наконец, с помощью понятия узкой алгебры мы формулируем новый признак разрешимости.

Определение 2.1.10. Пусть I — однородный идеал. Обозначим через I_k его k-ю однородную компоненту. Мы называем градуированную локальную конечномерную алгебру $S = R/I$ *узкой*, если неравенство

$$\dim I_k - \dim(\bar{\mathfrak{m}}I)_k \leqslant k \qquad (2.2)$$

выполняется для всех $k = 1, 2 \ldots$. Иначе говоря, алгебра S узкая, если существует такой набор однородных образующих идеала I, что число образующих степени k не превосходит k для всех $k \geqslant 1$.

Теорема 2.1.12. *Предположим, что градуированная алгебра* $\operatorname{gr} S$*, ассоциированная с локальной конечномерной алгеброй* S*, является узкой. Тогда алгебра дифференцирований* $\operatorname{Der} S$ *разрешима.*

Во втором разделе приводится упрощённое доказательство признака Шульце, доказывается теорема 2.1.12 и рассматриваются примеры алгебр, удовлетворяющих различным признакам разрешимости.

В третьем разделе проводится полное описание экстремальных алгебр с неразрешимой алгеброй дифференцирований и с его помощью доказывается теорема 2.1.5.

[9] G.R. Kempf, *Jacobians and Invariants*, Inventiones Mathematicae **112** (1993), 315–321.

Теорема 2.3.1. *Экстремальная алгебра S имеет неразрешимую алгебру диференцирований $\operatorname{Der} S$ тогда и только тогда, когда она имеет вид $S = S_1 \otimes S_2$, где*

$$S_1 \cong \mathbb{K}[\![x_1, x_2]\!]/(x_1^l, x_1^{l-1}x_2, \ldots, x_1x_2^{l-1}, x_2^l) \text{ для некоторого } l \geqslant 2,$$
$$S_2 \cong \mathbb{K}[\![x_3, \ldots, x_n]\!]/(w_2, \ldots, w_{n-1}),$$

и где $w_i \in \mathfrak{m}^l \cap \mathbb{K}[\![x_3, \ldots, x_n]\!]$ образуют регулярную последовательность.

В четвёртом разделе исследуется группа автоморфизмов нелокальной конечномерной алгебры и доказывается гипотеза 2.1.2 в общем случае.

Наконец, в пятом разделе приводится нижняя оценка размерности группы автоморфизмов и приводится пример алгебры с унипотентной группой автоморфизмов. Напомним, что сумма всех минимальных идеалов конечномерной алгебры S называется *цоколем* $\operatorname{Soc} S$.

Теорема 2.5.4. *Пусть S — локальная конечномерная алгебра с максимальным идеалом $\bar{\mathfrak{m}}$. Тогда*

$$\dim \operatorname{Aut} S \geqslant \dim(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2) \cdot \dim \operatorname{Soc} S.$$

Третья глава

В третьей главе изучаются аффинные многообразия с бесконечномерной группой автоморфизмов, действующие бесконечно транзитивно на множестве гладких точек.

В первом разделе приводятся определения, связанные с действием аддитивной группы поля на аффинном многообразии.

Действие группы G на множестве A называется *m-транзитивным*, если для любых двух наборов из m попарно различных точек $(a_1, \ldots, a_m)$ и $(a'_1, \ldots, a'_m)$ из A существует такой элемент $g \in G$, что $g \cdot a_i = a'_i$ для $i = 1, \ldots, m$. Действие, m-транзитивное для всех $m \in \mathbb{N}$, называется *бесконечно транзитивным.*

Пусть X — алгебраическое многообразие размерности $\geqslant 2$, определённое над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим регулярное действие $\mathbb{G}_a \times X \to X$ аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$. Образ группы $\mathbb{G}_a$ в группе автоморфизмов $\operatorname{Aut} X$ является однопараметрической унипотентной подгруппой. Через $\operatorname{SAut} X$ мы обозначаем подгруппу в $\operatorname{Aut} X$, порождённую всеми однопараметрическими унипотентными подгруппами. Она называется *группой специальных автоморфизмов*. Очевидно, $\operatorname{SAut} X$ является нормальной подгруппой $\operatorname{Aut} X$.

Теперь предположим, что $\mathbb{K}$ имеет характеристику нуль. Аффинное алгебраическое многообразие X называется *гибким*, если касальное пространство к X в любой гладкой точке порождено касательными векторами к орбитам однопараметрических унипотентных подгрупп. Следующая теорема объясняет значение понятия гибкости.

Теорема (Аржанцев–Зайденберг–Калиман–Кутчебаух–Фленнер[5]). *Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие размерности $\geqslant 2$ над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *многообразие X является гибким;*
2. *группа $\operatorname{SAut} X$ действует транзитивно на множестве гладких точек X_{reg} многобразия X;*
3. *группа $\operatorname{SAut} X$ действует бесконечно транзитивно на X_{reg}.*

Во втором разделе формулируется и доказывается признак гибкости аффинного конуса над проективным многообразием.

Определение 3.2.1 (Зайденберг–Кишимото–Прохоров[10]). Будем говорить, что открытое подмножество U многобразия Y является *цилиндром*, если $U \cong Z \times \mathbb{A}^1$, где Z — гладное многообразие и $\operatorname{Pic} Z = 0$. Пусть теперь дан дивизор $H \subset Y$. Цилиндр U будем называть *H-полярным*, если $U = Y \setminus \operatorname{supp} D$ для некоторого эффективного дивизора $D \in |dH|$, где $d > 0$.

Определение 3.2.2. Подмножество $W \subset Y$ будем называть *инвариантным* относительно цилиндра $U = Z \times \mathbb{A}^1$, если $W \cap U = \pi_1^{-1}(\pi_1(W))$, где $\pi_1 \colon U \to Z$ — проекция на первую компоненту прямого произведения. Иначе говоря, каждый $\mathbb{A}^1$-слой цилиндра либо содержится в W, либо не пересекается с W.

Определение 3.2.3. Будем говорить, что многообразие Y *трансверсально покрывается* цилиндрами U_i, $i = 1, \ldots, s$, если $Y = \bigcup U_i$ и не существует собственного подмножества $W \subset Y$, инвариантного относительно всех U_i.

Теорема 3.2.7. *Предположим, что для некоторого очень обильного дивизора H на нормальном проективном многообразии Y существует трансверсальное покрытие H-полярными цилиндрами. Тогда аффинный конус $X = \operatorname{AffCone}_H Y$ является гибким.*

[10] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg, *Group actions on affine cones*, Montreal Centre de Recherches Mathématiques, CRM Proceedings and Lecture Notes **54** (2011), 123–163.

В третьем и четвёртом разделах доказывается гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 5 и 4 соответственно:

Теорема 3.3.1. *Пусть H — произвольный очень обильный дивизор на поверхности дель Пеццо Y степени 5. Тогда соответствующий аффинный конус $\mathrm{AffCone}_H Y$ является гибким.*

Теорема 3.4.1. *Пусть Y — поверхность дель Пеццо степени 4. В пространстве Нерона–Севери $N^1_{\mathbb{Q}}(Y)$ существует такой открытый конус C, что для всякого очень обильного дивизора $H \in C$ аффинный конус $\mathrm{AffCone}_H Y$ является гибким. Более того, конус C содержит класс антиканонического дивизора $H = -K_Y$.*

В работе присутствует описание конуса C в явном виде.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Ивану Владимировичу Аржанцеву и профессору Михаилу Григорьевичу Зайденбергу за постановку задач и внимание к работе.

Автор благодарен профессору Эрнесту Борисовичу Винбергу и доценту Дмитрию Андреевичу Тимашёву за полезные дискуссии и за прекрасные семинары и лекции, а также всему коллективу кафедры высшей алгебры МГУ имени М.В. Ломоносова за доброжелательное отношение и поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

[1] А.Ю. Перепечко, *Гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5*, Функциональный анализ и его приложения **47**, вып. 4, 2013, 45–52.

[2] A. Perepechko, *Affine algebraic monoids as endomorphisms' monoids of finite-dimensional algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society **137** (2009), 3227–3233.

[3] А.Ю. Перепечко, *О разрешимости группы автоморфизмов конечномерной алгебры*, МГУ — М., 2013 — 25 с. Депонировано в ВИНИТИ 15.01.2014 №21-В2014.