ФГБОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА»
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ПЕРЕПЕЧКО АЛЕКСАНДР ЮРЬЕВИЧ

АВТОМОРФИЗМЫ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР И АФФИННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор И.В. Аржанцев

Москва — 2013

Содержание

Введение

Данная диссертация посвящена изучению преобразований алгебро-геометрических структур, а именно конечномерных алгебр и аффинных алгебраических многообразий.

В конце 1860-х годов Феликс Клейн и Софус Ли провели совместное исследование «геометрических и аналитических объектов, которые переходят в себя под действием групп преобразований». Фактически, произошло зарождение понятия группы преобразований. Клейн был сосредоточен на дискретных группах, а Ли изучал непрерывные группы преобразований. Он понял, что эти группы являются мощным инструментом в геометрии дифференциальных уравнений. Основной идеей Ли было изучение инфинитезимальных образующих действий группы преобразований. Подобные инфинитезимальные образующие лежат в касательной алгебре, из которой выросло понятие абстрактной алгебры Ли.

Комплексные линейные алгебраические группы являются наиболее изучаемым семейством групп Ли. Одним из первых тщательное изучение этих групп и их касательных алгебр провёл Людвиг Маурер в 1888–1899 годах. В частности, он исследовал разложение Жордана, оболочку однопараметрических подгрупп и ряд других вопросов. В своей последней работе этого периода Маурер пытался доказать ложное утверждение о том, что инварианты связной группы Ли конечно порождены. Тем не менее, его доказательство оказалось верным для однопараметрических унипотентных групп, см. теорему Вейценбека.

С развитием понятия пространства и оснований геометрии, где наиболее заметные преобразования были произведены Бернхардом Риманом в XIX веке и Александром Гротендиком в XX веке, также развивалась и теория групп Ли.

В 1940-х годах Клод Шевалле дополнил и обобщил методы теории групп и алгебр Ли. Опираясь на работы Маурера, он применил эти методы к теории алгебраических групп над произвольным полем нулевой характеристики. В случае поля положительной характеристики методы теории алгебр Ли оказались не столь эффективными, поэтому общее исследование линейных алгебраических групп было проведено Эмилем Борелем с помощью методов алгебраической геометрии. После работ Бореля и Колчина теория линейных алгебраических групп приобрела упорядоченный вид.

Другим направлением исследований, порождённых работами Ли, стало изучение бесконечномерных групп преобразований. Например, в 1900-х годах Эли Картан изучал бесконечномерные обобщения простых групп Ли. Также в 1960-х годах Виктор Кац и Роберт Муди независимо друг от друга положили начало изучению нового типа бесконечномерных алгебр Ли, называемых теперь алгебрами Каца–Муди. Однако общая теория бесконечномерных групп Ли далека от завершения.

В диссертации изучаем как алгебраические, т.е. конечномерные, группы преобразований, так и бесконечномерные. В первой главе диссертации мы изучаем связь между эндоморфизмами конечномерных алгебр и линейными алгебраическими моноидами. Во второй главе мы рассматриваем проблему разрешимости групп автоморфизмов конечномерных алгебр. В третьей главе мы исследуем аффинные многообразия с бесконечномерной группой автоморфизмов, действующей бесконечно транзитивно на подмножестве гладких точек, и описываем несколько семейств таких многообразий.

Всюду в работе $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле, причём в главе 1 его характеристика может быть любой, а в главах 2 и 3 предполагается, что характеристика поля нулевая.

Хорошо известно, что каждая аффинная алгебраическая группа изоморфна замкнутой по Зарисскому подгруппе общей линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ некоторого конечномерного векторного пространства V. Аналогично, каждый аффинный алгебраический моноид изоморфен замкнутому подмоноиду моноида $\mathrm{L}(V)$ всех эндоморфизмов конечномерного векторного пространства V, см. например [31, теорема 3.8] или [8, лемма 1.11].

Пусть A — конечномерная алгебра над полем $\mathbb{K}$, т.е. конечномерное векторное пространство A вместе с билинейным отображением $\alpha\colon A \times A \to A$. Заметим, что ассоциативность или коммутативность умножения α не предполагаются. Мы будем обозначать через $\mathrm{vect}(A)$ векторное пространство алгебры A. Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, A$ алгебры A — это замкнутая подгруппа группы $\mathrm{GL}(\mathrm{vect}(A))$, значит, она является аффинной алгебраической группой. Аналогично, моноид эндоморфизмов $\mathrm{End}\, A$ является аффинным алгебраическим моноидом.

Возникает естественный вопрос, верно ли обратное утверждение, т.е. верно ли, что любая аффинная алгебраическая группа может быть реализована как группа автоморфизмов конечномерной алгебры. Н.Л. Гордеев и В.Л. Попов рассматривали эту задачу над произвольным полем достаточно большого размера. В частном случае алгебраически замкнутого поля результат Гордеева и Попова формулируется так:

Теорема [18, теорема 1]. *Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле. Тогда для любой аффинной алгебраической группы G над $\mathbb{K}$ найдётся такая простая конечномерная $\mathbb{K}$-алгебра A, что G изоморфна группе $\mathbb{K}$-автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\, A$.

Нашим первым результатом является аналог теоремы Гордеева–Попова для аффинных алгебраических моноидов, т.е. реализация произвольного аффинного алгебраического моноида M как моноида эндоморфизмов некоторой конечномерной алгебры A. Здесь возникают следующие два отличия. Во-первых, мы не можем требовать, чтобы алгебра A была простой, поскольку ядро всякого эндоморфизма является идеалом A. Во-вторых, моноид $\mathrm{End}(A)$ всегда содержит нулевой элемент $\mathfrak{z} \in \mathrm{End}(A)$, т.е. $\mathfrak{z}(a) = 0$ для любого $a \in A$, в то время как M может не содержать нуля. В этих обстоятельствах мы получаем следующий результат.

Теорема 1.1.1. *Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле. Для всякого аффинного алгебраического моноида M над $\mathbb{K}$ существует такая конечномерная алгебра A над $\mathbb{K}$, что*

$$\mathrm{End}(A) \cong M \sqcup \{\mathfrak{z}\},$$

где нулевой элемент $\mathfrak{z}$ *образует изолированную компоненту алгебраического моноида* $\mathrm{End}(A)$.

Доказательство теоремы 1.1.1 осуществляется в два этапа. На первом этапе мы для каждого конечномерного пространства U и подпространства S в $\mathrm{L}(U)$-модуле специального вида строим такую конечномерную алгебру A, что $\mathrm{End}(A) \cong \mathrm{L}(U)_S \sqcup \{\mathfrak{z}\}$, где $\mathrm{L}(U)_S$ обозначает нормализатор S. При этом мы отказались от большей части техники, использованной при доказательстве теоремы Гордеева–Попова, напрямую построив таблицу умножения алгебры. На втором этапе, повторяя логику доказательства Гордеева и Попова, мы представляем произвольный аффинный алгебраический моноид M в виде $\mathrm{L}(U)_S$ для подходящих U и S.

В **главе 2** мы переходим к задаче разрешимости группы автоморфизмов. Пусть S — конечномерная коммутативная и ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль. Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, S$ является аффинной алгебраической группой, причём её касательная алгебра — это алгебра Ли дифференцирований $\mathrm{Der}\, S$; см. [4, гл. 1, §2.3, прим. 2]. Таким образом, разрешимость связной компоненты единицы $\mathrm{Aut}^\circ S$ эквивалентна разрешимости алгебры Ли $\mathrm{Der}\, S$.

В 1987 году С. Гальперин сформулировал гипотезу о разрешимости связной компоненты единицы группы автоморфизмов полного пересечения. Рассмотрим конечный набор многочленов $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Предположим, что факторалгебра $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_n)$ нетривиальна и конечномерна. Иначе говоря, S является полным пересечением, а $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — регулярной последовательностью.

Гипотеза (Гальперин, 1987)**.** *Пусть конечномерная алгебра*

$$S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_n)$$

является полным пересечением. Тогда связная компонента единицы $\mathrm{Aut}^\circ S$ *группы автоморфизмов алгебры* S *разрешима.*

В случае однородных многочленов эта гипотеза была доказана Х. Крафтом и К. Прочези.

Теорема (Крафт–Прочези [26]). *Пусть* $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ *— такие однородные многочлены, что алгебра*

$$S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_n) \tag{1}$$

конечномерна. Тогда группа $\mathrm{Aut}^\circ S$ *разрешима.*

Обозначим через R алгебру формальных степенных рядов $\mathbb{K}[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ и через $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал $(x_1, \dots, x_n) \lhd R$. Возьмём такой идеал $I \subset \mathfrak{m}$, что $S = R/I$ — конечномерная (т.е. артинова) локальная алгебра с максимальным идеалом $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/I$. В 2009 г. М. Шульце получил следующий признак, некоторые приложения которого разобраны ниже.

Теорема (Шульце [33]). *Пусть* $S = R/I$ *— локальная конечномерная алгебра, причём* $I \subset \mathfrak{m}^l$. *Если выполняется неравенство*

$$\dim(I/\mathfrak{m}I) < n + l - 1, \tag{2}$$

то алгебра дифференцирований $\mathrm{Der}\, S$ *разрешима.*

Следует отметить, что алгебра S в теореме Крафта–Прочези является локальной. Таким образом, следующее следствие из теоремы Шульце является обобщением теоремы Крафта–Прочези.

Следствие (Шульце [33, следствие 2]). *Пусть* $S = R/(f_1, \dots, f_n)$ *— локальная алгебра, являющаяся полным пересечением. Тогда группа* $\mathrm{Aut}^\circ S$ *разрешима.*

Обратимся теперь к изолированным особенностям гиперповерхностей. Пусть $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ — такой многочлен, что у гиперповерхности $\{p = 0\} \subset \mathbb{K}^n$ имеется изолированная особенность $H = (\{p = 0\}, 0)$ в начале координат. Следуя терминологии Дж. Кемпфа [21], мы называем подпространство $J(p) = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_n}\right) \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ *якобианом* p. Факторалгебра $A(H) = \mathbb{K}[\![x_1, \dots, x_n]\!]/(p, J(p))$ называется *локальной алгеброй* или *алгеброй модулей* особенности H. В теории особенностей $A(H)$ также известна как *алгебра Тюриной*. Эта алгебра локальна и конечномерна.

Дж. Мазер и С.С.–Т. Яу доказали в работе [29], что две изолированные особенности гиперповерхностей биголоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда их алгебры модулей изоморфны. Таким образом, конечномерная локальная алгебра $A(H)$ определяет особенность H с точностью до аналитического изоморфизма. Для того, чтобы установить, какие конечномерные локальные алгебры являются алгебрами модулей особенностей, Яу ввёл в [38] алгебру дифференцирований $L(H) = \operatorname{Der} A(H)$, которую иногда называют *алгеброй Яу*. Он получил следующий результат.

Теорема (С.С.–Т. Яу [39]). *Алгебра $L(H)$ изолированной особенности H гиперповерхности разрешима.*

Заметим, что вообще говоря, алгебра Яу не определяет соответствующую алгебру модулей. Но для *простых* особенностей данное свойство выполняется лишь с одним исключением, а именно, для пары A_6 и D_5 алгебры Яу изоморфны; см. [14, теорема 3.1].

В работе [33] М. Шульце выводит теорему 2.1.5 из своего признака. Он использует следующий результат Дж. Кемпфа и ставит вопрос, можно ли без него обойтись.

Теорема (Кемпф [21, теорема 13]). *Пусть $p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ — однородный многочлен степени $d \geqslant 3$. Предположим, что пространство $\mathbb{C}^n$ снабжено линейным действием полупростой группы G. Если якобиан $J(p) \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ является G-инвариантным, то существует такой однородный G-инвариантный многочлен q степени d, что $J(p) = J(q)$.*

Мы отвечаем на этот вопрос М. Шульце положительно. Для этого мы вводим понятие экстремальных алгебр. Они являются граничным случаем, где признак Шульце уже неприменим.

Определение 2.1.9. Назовём локальную конечномерную алгебру S *экстремальной*, если выполнено равенство $\dim I/\mathfrak{m}I = l + n - 1$.

Описание экстремальных алгебр с неразрешимой алгеброй дифференцирований и позволяет вывести теорему Яу напрямую из признака Шульце, т.е. без использования теоремы Кемпфа.

Теорема 2.3.1. *Пусть S — экстремальная алгебра. Группа* $\operatorname{Aut}^\circ S$ *неразрешима тогда и только тогда, когда S имеет вид $S = S_1 \otimes S_2$, где*

$$S_1 \cong \mathbb{K}[\![x_1, x_2]\!]/(x_1^l, x_1^{l-1}x_2, \ldots, x_1 x_2^{l-1}, x_2^l) \text{ для некоторого } l \geqslant 2, \tag{3}$$

$$S_2 \cong \mathbb{K}[\![x_3, \ldots, x_n]\!]/(w_2, \ldots, w_{n-1}), \tag{4}$$

и $w_2, \ldots, w_{n-1} \in \mathfrak{m}^l \cap \mathbb{K}[\![x_3, \ldots, x_n]\!]$ образуют регулярную последовательность.

Также мы приводим упрощённое доказательство признака Шульце и предлагаем ещё один признак разрешимости групп автоморфизмов. Для нового признака нам понадобится следующее определение.

Определение 2.1.10. Пусть I — однородный идеал. Будем обозначать через I_k его k-ю однородную компоненту. Мы называем градуированную локальную конечномерную алгебру $S = R/I$ *узкой*, если неравенство

$$\dim I_k - \dim(\bar{\mathfrak{m}} I)_k \leqslant k \tag{5}$$

выполняется для всех $k = 1, 2 \ldots$. Иначе говоря, алгебра S узкая, если существует такой набор однородных образующих I, что количество образующих степени k не превосходит k для всех $k \geqslant 1$.

Напомним, что градуированной алгеброй, ассоциированной с локальной алгеброй S, называется алгебра

$$\operatorname{gr} S = \mathbb{K} \oplus (\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2) \oplus (\bar{\mathfrak{m}}^2/\bar{\mathfrak{m}}^3) \oplus \ldots,$$

т.е. $(\operatorname{gr} S)_i = \bar{\mathfrak{m}}^i/\bar{\mathfrak{m}}^{i+1}$.

Теорема 2.1.12. *Предположим, что градуированная алгебра* $\operatorname{gr} S$*, ассоциированная с локальной конечномерной алгеброй S, является узкой. Тогда связная компонента* $\operatorname{Aut}^\circ S$ *разрешима.*

Данный признак основан на тех же принципах, что и признак Шульце. Однако эти признаки применимы к различным классам алгебр.

Чтобы завершить доказательство гипотезы Гальперина, мы получаем следующие два результата. Следствие 2.4.3 является обобщением признака Шульце.

Теорема 2.4.2. *Пусть S — конечномерная алгебра с максимальными идеалами $\bar{\mathfrak{m}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{m}}_s$, а k — целое число, большее или равное максимальной длине убывающих цепочек идеалов в S.*[1] *В таком случае связная компонента $\mathrm{Aut}^\circ S$ разрешима тогда и только тогда, когда связная компонента $\mathrm{Aut}^\circ S_i$ локальной алгебры $S_i = S/\bar{\mathfrak{m}}_i^k$ разрешима для любого $i = 1, \ldots, s$.*

Следствие 2.4.3. *Предположим, что идеал $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ с m образующими и целое число $l > 1$ удовлетворяют следующим условиям:*

- *факторалгебра $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I$ конечномерна,*
- *для всякого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ выполнено либо $I \not\subset \mathfrak{m}$, либо $I \subset \mathfrak{m}^l$,*
- *выполняется неравенство $m < n + l - 1$.*

Тогда группа $\mathrm{Aut}^\circ S$ разрешима.

Кроме того, мы доказываем следующую нижнюю оценку для размерности группы автоморфизмов. Напомним, что сумма всех минимальных идеалов конечномерной алгебры S называется *цоколем* $\mathrm{Soc}\, S$.

Теорема 2.5.4. *Пусть S — локальная конечномерная алгебра с максимальным идеалом $\bar{\mathfrak{m}}$. Тогда*

$$\dim \mathrm{Aut}\, S \geqslant \dim(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2) \cdot \dim \mathrm{Soc}\, S.$$

В конце главы 2 мы приводим пример артиновой алгебры с унипотентной группой автоморфизмов, см. 2.5.6.

В **главе 3** мы переходим к изучению автоморфизмов аффинных алгебр. Хорошо известно, что каждая аффинная алгебра является алгеброй регулярных функций некоторого аффинного многообразия. Тем самым, мы можем перейти к геометрической интерпретации и рассматривать группы автоморфизмов аффинных многообразий. Стоит отметить, что аффинные алгебры бесконечномерны, так что группы их автоморфизмов, вообще говоря, не являются аффинными алгебраическими группами. Мы используем следующие понятия и определения, введённые в [9] и [1].

[1] В частности, достаточно взять $k = \dim S$.

Действие группы G на множестве A называется *m-транзитивным*, если для любых двух наборов из m попарно различных точек $(a_1, \ldots, a_m)$ и $(a'_1, \ldots, a'_m)$ из A существует такой элемент $g \in G$, что $g \cdot a_i = a'_i$ для $i = 1, \ldots, m$. Действие, m-транзитивное для всех $m \in \mathbb{N}$, называется *бесконечно транзитивным*.

Пусть X — алгебраическое многообразие размерности $\geqslant 2$, определённое над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим регулярное действие $\mathbb{G}_a \times X \to X$ аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$. Образ группы $\mathbb{G}_a$ в группе автоморфизмов $\operatorname{Aut} X$ является однопараметрической унипотентной подгруппой. Через $\operatorname{SAut} X$ мы обозначаем подгруппу в $\operatorname{Aut} X$, порождённую всеми однопараметрическими унипотентными подгруппами. Она называется *группой специальных автоморфизмов*. Очевидно, $\operatorname{SAut} X$ является нормальной подгруппой $\operatorname{Aut} X$.

Теперь предположим, что $\mathbb{K}$ имеет характеристику нуль. Аффинное алгебраическое многообразие X называется *гибким*, если касальное пространство к X в любой гладкой точке порождено касательными векторами орбит однопараметрических унипотентных подгрупп. Следующая теорема объясняет значение понятия гибкости.

Теорема [9, теорема 0.1]. *Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие размерности $\geqslant 2$ над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *многообразие X является гибким;*

2. *группа $\operatorname{SAut} X$ действует транзитивно на множестве гладких точек X_{reg} многообразия X;*

3. *группа $\operatorname{SAut} X$ действует бесконечно транзитивно на X_{reg}.*

Следующие три класса гибких многообразий описаны в [1]: аффинные конусы над многообразиями флагов, невырожденные торические многообразия размерности $\geqslant 2$ и надстройки над гибкими многообразиями.

Мы строим новые классы гибких многообразий над $\mathbb{K}$. А именно, мы выводим признак гибкости аффинных конусов над проективными многообразиями и применяем его к поверхностям дель Пеццо.

В работах [22], [23] и [24] изложен метод получения однопараметрических унипотентных действий на аффинных конусах, нормализуемых гомотетиями. Фактически, там установлено взаимно однозначное соответствие между подобными действиями с точностью до множителя и подмножествами специального вида, называемыми цилиндрами.

Определение [24, определение 0.2]. Открытое подмножество U многообразия Y называется *цилиндром*, если $U \cong Z \times \mathbb{A}^1$, где Z — гладкое многообразие. Пусть H — дивизор на Y. Цилиндр $U \subset Y$ называется *H-полярным*, если $U = Y \setminus \operatorname{supp} D$ для некоторого эффективного дивизора $D \in |dH|$, где $d > 0$.

Для формулировки признака гибкости аффинных конусов мы вводим понятия множеств, инвариантных относительно цилиндров, и трансверсального покрытия многообразия цилиндрами.

Определение 3.2.2. Подмножество $W \subset Y$ мы называем *инвариантным* относительно цилиндра $U = Z \times \mathbb{A}^1$, если $W \cap U = \pi_1^{-1}(\pi_1(W))$, где $\pi_1 \colon U \to Z$ — проекция на первый сомножитель прямого произведения. Иначе говоря, каждый $\mathbb{A}^1$-слой цилиндра либо содержится в W, либо не пересекается с W.

Определение 3.2.3. Набор цилиндров U_i, $i = 1, \ldots, s$ называется *трансверсальным покрытием* подмножества $X \subset Y$, если $X = \bigcup U_i$ и не существует собственного подмножества $X \subset Y$, инвариантного относительно всех цилиндров U_i.

Теорема 3.2.7. *Пусть Y — нормальное проективное многообразие, а H — очень обильный дивизор на Y. Рассмотрим аффинный конус*

$$X = \operatorname{AffCone}_H Y \subset \mathbb{A}^{n+1}$$

над вложением $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, соответствующим поляризации Y по H. Если существует трансверсальное покрытие H-полярными цилиндрами подмножества Y_{reg}, то аффинный конус X является гибким.

Известно, что любая гладкая поверхность дель Пеццо степени $d \in \{1, \ldots, 9\}$, кроме $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, может быть получена раздутием проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ в

$9 - d$ точках общего положения. В первую очередь нас интересуют антиканонические вложения. Заметим, что аффинные конусы над поверхностями дель Пеццо степени $\geqslant 6$ являются торическими, значит, они гибкие по [1]. Что же касается поверхностей дель Пеццо степени $\leqslant 3$, на их плюриантиканонических конусах не существует $\mathbb{G}_a$-действий, как показано в [12, теорема 1.1] для степени 3 и в [25, следствие 1.8] для степени $\leqslant 2$. Итак, для поверхностей дель Пеццо степени 4 и 5 мы получаем следующие результаты.

Теорема 3.3.1. *Пусть H — очень обильный дивизор на поверхности дель Пеццо Y степени 5. Тогда соответствующий аффинный конус* $\mathrm{AffCone}_H Y$ *является гибким.*

Теорема 3.4.1. *Пусть Y — поверхность дель Пеццо степени 4. В пространстве Нерона–Севери $N^1_{\mathbb{Q}}(Y)$ существует такой открытый конус C, что для всякого очень обильного дивизора $H \in C$ аффинный конус* $\mathrm{AffCone}_H Y$ *является гибким. Более того, конус C содержит класс антиканонического дивизора $H = -K_Y$.*

Благодарности

Хочу выразить глубокую благодарность моему научному руководителю профессору Ивану Владимировичу Аржанцеву и профессору Михаилу Григорьевичу Зайденбергу за постановку интересных задач, внимание к работе, неизменно доброжелательное отношение и постоянную поддержку, которая позволила мне справиться с многочисленными затруднениями и сохранить присутствие духа в течение всего времени обучения в университете и в аспирантуре.

Я благодарю профессора Эрнеста Борисовича Винберга и доцента Дмитрия Андреевича Тимашёва за полезные дискуссии и за прекрасные семинары и лекции. Также я благодарен к.ф.-м.н. Сергею Гайфуллину, доктору Хендрику Зюссу, Полине Котенковой, к.ф.-м.н. Карине Куюмжиян, доктору Кевину Ланглуа, доктору Альваро Льендо, доктору Матеушу Мишалеку, к.ф.-м.н. Станиславу Федотову и многим другим за интересные обсуждения и плодотворное сотрудничество.

Благодарю моих родителей, Людмилу Николаевну и Юрия Вадимовича, а также Людмилу Николаевну Чусовитину за то, что открыли мне мир математики и поддержали в моих устремлениях.

Глава 1

Моноиды эндоморфизмов конечномерных алгебр

1.1 Введение

В этой главе мы предполагаем, что $\mathbb{K}$ является алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики. Напомним, что *аффинной алгебраической полугруппой* называется аффинное многообразие M над $\mathbb{K}$ с ассоциативным произведением $\mu\colon M \times M \to M$, который является морфизмом алгебраических многообразий. Обозначим элемент $\mu(a, b)$ через ab. Полугруппа называется *моноидом*, если она содержит единицу $e \in M$, т.е. $em = me = m$ для любого $m \in M$. Элемент $0 \in M$ называется *нулевым*, если $0m = m0 = 0$ для любого $m \in M$. Очевидно, что моноид не может содержать более одного нуля. Хорошо известно, что каждый аффинный алгебраический моноид изоморфен замкнутому по Зарисскому подмоноиду моноида $\mathrm{L}(V)$ всех линейных операторов в некотором конечномерном векторном пространстве V, например см. [31, Theorem 3.8] или [8, Lemma 1.11]. Систематическое изложение теории аффинных алгебраических моноидов дано в [30] и [31]. Классификация неприводимых аффинных моноидов с редуктивной группой обратимых элементов получена в [32] и [35].

Пусть A — конечномерная алгебра над полем $\mathbb{K}$, т.е. конечномерное $\mathbb{K}$-векторное пространство с билинейным отображением $\alpha\colon A \times A \to A$. Заметим, что ассоциативность или коммутативность отображения α не предполагаются. Мы будем обозначать через $\mathrm{vect}(A)$ векторное пространство алгебры A. Под идеалом алгебры A мы понимаем двусторонний идеал. Алгебра A

называется *простой*, если она не содержит собственных идеалов. Множество всех эндоморфизмов A

$$\mathrm{End}(A) := \{\phi \in \mathrm{L}(\mathrm{vect}(A)) \mid \alpha(\phi(a), \phi(b)) = \phi(\alpha(a,b)) \text{ для } a, b \in A\}$$

является моноидом относительно операции композиции. Легко проверить, что этот моноид замкнут по Зарисскому в $\mathrm{L}(\mathrm{vect}(A))$, то есть является аффинным алгебраическим моноидом.

Как показано в [18], любая аффинная алгебраическая группа может быть реализована как группа автоморфизмов некоторой конечномерной простой алгебры. В этой главе мы предлагаем аналогичную реализацию произвольного аффинного алгебраического моноида M как моноида эндоморфизмов конечномерной алгебры A. В этом случае возникают два отличия. Во-первых, мы не можем требовать простоты алгебры A, так как ядро любого эндоморфизма является идеалом A. Во-вторых, моноид $\mathrm{End}(A)$ всегда содержит нулевой элемент $\mathfrak{z} \in \mathrm{End}(A)$, где $\mathfrak{z}(a) = 0$ для всех $a \in A$, в то время как M может его не содержать. При данных ограничениях мы получаем следующий результат.

Теорема 1.1.1. *Пусть M — аффинный алгебраический моноид над $\mathbb{K}$. Тогда найдётся такая конечномерная алгебра A над $\mathbb{K}$, что*

$$\mathrm{End}(A) \cong M \sqcup \{\mathfrak{z}\},$$

где нулевой элемент $\mathfrak{z}$ образует изолированную компоненту алгебраического моноида $\mathrm{End}(A)$.

В частности, если M является аффинной алгебраической группой, то существует такая алгебра A, что $\mathrm{Aut}(A) \cong M$ (см. [18]).

Пример 1.1.2. Пусть $M = \mathrm{L}(V)$ — моноид операторов в конечномерном векторном пространстве V. Рассмотрим алгебру A, построенную следующим образом. Во-первых, пусть e — левая единица алгебры A и

$$\mathrm{vect}(A) := \langle e \rangle \oplus V,$$

где $\langle X \rangle$ обозначает линейную оболочку множества X. Далее, для любых $v, w \in V$ определим их произведение как $v \cdot w = 0$, $v \cdot e = \lambda v$, где λ является фиксированной константой из $\mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. Принимая во внимание равенства $e \cdot v = v$ и $e \cdot e = e$, получаем таблицу умножения в алгебре A.

Отметим, что любой эндоморфизм переводит e либо в e, либо в 0, поскольку два последних элемента являются единственными идемпотентами A. С помощью данного наблюдения легко доказать, что $\mathrm{End}(A) \cong \mathrm{L}(V) \sqcup \{\mathfrak{z}\}$, где $\mathfrak{z}$ — как в Теореме 1.1.1.

Пример 1.1.3. Предположим, что $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$. Рассмотрим двумерное пространство V над $\mathbb{K}$ с базисом $\{v_1, v_2\}$ и внешнюю алгебру $\Lambda(V)$ с базисом $\{1, v_1, v_2, v_1 \wedge v_2\}$. Рассмотрим моноид $M \subset \mathrm{L}(\mathrm{vect}(\Lambda(V)))$,

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & d \end{pmatrix} \middle| \, d = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, b_{ij}, c_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Можно показать, что M действует на $\Lambda(V)$ эндоморфизмами. Более того, $\mathrm{End}(\Lambda(V)) = M \sqcup \{\mathfrak{z}\}$. Обобщая данный результат, заметим, что аналогичное равенство справедливо для внешней алгебры произвольного векторного пространства.

Доказательство теоремы 1.1.1 осуществляется в два этапа. Во-первых, для каждого конечномерного пространства U и его подпространства S мы строим такую конечномерную алгебру A, что $\mathrm{End}(A) \cong \mathrm{L}(U)_S \sqcup \{\mathfrak{z}\}$, где $\mathrm{L}(U)_S$ является нормализатором некоторого векторного подпространства S в $\mathrm{L}(U)$-модуле специального вида. Во-вторых, мы представляем произвольный аффинный алгебраический моноид M в виде $\mathrm{L}(U)_S$ для подходящих U и S.

1.2 Некоторые специальные алгебры

В этом разделе мы определяем и изучаем некоторые конечномерные алгебры, которые будут полезны в дальнейшем.

1.2.1 Алгебра $A(V, S)$

Пусть V — ненулевое конечномерное векторное пространство. Обозначим через $\mathrm{T}(V)$ тензорную алгебру V и через $\mathrm{T}(V)_+$ её максимальный однородный идеал

$$\mathrm{T}(V)_+ := \bigoplus\nolimits_{i\geqslant 1} V^{\otimes i}, \tag{1.1}$$

снабжённый естественной $\mathrm{L}(V)$-структурой

$$g \cdot t_i := g^{\otimes i}(t_i), \quad g \in \mathrm{L}(V),\ t_i \in V^{\otimes i}. \tag{1.2}$$

Таким образом, $\mathrm{L}(V)$-действие на $\mathrm{T}(V)_+$ эндоморфизмами является точным. Следовательно, можно отождествить $\mathrm{L}(V)$ с соответствующим подмоноидом в $\mathrm{End}(\mathrm{T}(V)_+)$.

Зафиксируем целое $r > 1$. Для произвольного подпространства $S \subset V^{\otimes r}$ определим

$$I(S) := S \oplus (\bigoplus\nolimits_{i>r} V^{\otimes i}). \tag{1.3}$$

Это идеал в $\mathrm{T}(V)_+$. Через $A(V, S)$ обозначим факторалгебру по данному идеалу,

$$A(V, S) := \mathrm{T}(V)_+/I(S). \tag{1.4}$$

Тогда

$$\mathrm{vect}(A(V, S)) = (\bigoplus\nolimits_{i=1}^{r-1} V^{\otimes i}) \oplus (V^{\otimes r}/S). \tag{1.5}$$

Рассмотрим $\mathrm{L}(V)_S := \{\phi \in \mathrm{L}(V) \mid \phi(S) \subset S\} \subset \mathrm{L}(V)$.

Предложение 1.2.1. $\mathrm{L}(V)_S = \{\sigma \in \mathrm{End}(A(V, S)) \mid \sigma(V) \subset V\}$.

Доказательство. По определению, элементы $A(V, S)$ являются классами эквивалентности $x + I(S)$, $x \in \mathrm{T}(V)_+$. Покажем вложение "$\subset$". Рассмотрим такой $\sigma \in \mathrm{End}(A(V, S))$, что $\sigma(V) \subset V$. Тогда σ-действие совпадает с действием $\widetilde{\sigma} := \sigma|_V \in \mathrm{L}(V)$ на $A(V, S)$ в силу (1.2), поскольку алгебра $A(V, S)$ порождается V. Действие σ сохраняет нулевой элемент $A(V, S)$, следовательно, $\widetilde{\sigma}(I(S)) \subset I(S)$ и $\sigma \in \mathrm{L}(V)_S$.

Обратимся теперь к обратному вложению. Для произвольных подмножеств $X, Y \subset \mathrm{T}(V)$ обозначим

$$X \otimes Y := \{x \otimes y \mid x \in X, y \in Y\} \subset \mathrm{T}(V).$$

Пусть $\sigma \in \mathrm{L}(V)_S$. Тогда

$$\sigma((x+I(S))\otimes(y+I(S)))\subset\sigma(x\otimes y)+I(S)=\sigma(x)\otimes\sigma(y)+I(S)$$

по определению $\mathrm{L}(V)$-действия на $\mathrm{T}(V)_+$. Значит, $\sigma \in \mathrm{End}(A(V,S))$. □

1.2.2 Алгебра $D(P,U,S,\gamma)$

Лемма 1.2.2. *Пусть A является такой алгеброй с левой единицей $e \in A$, что* $\mathrm{vect}(A) = \langle e\rangle \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$*, где A_i — собственное подпространство оператора правого умножения на e в A, отвечающее собственному значению* $\alpha_i \neq 0, 1$. *Предположим, что 0 и e являются единственными идемпотентами в A. Тогда*

1. *элемент e является единственной левой единицей в A;*
2. *если $\sigma \in \mathrm{End}(A)$, то либо $\sigma(e) = e$ и $\sigma(A_i) \subset A_i$ для любого i, либо $\sigma = \mathfrak{z}$.*

Доказательство. (i) Левая единица является ненулевым идемпотентом. Следовательно, она единственна.

(ii) Поскольку образ идемпотента является идемпотентом, $\sigma(e) = 0$ или $\sigma(e) = e$. Если $\sigma(e) = 0$, то $\sigma(a) = \sigma(ea) = \sigma(e)\sigma(a) = 0$, т.е. $\sigma = \mathfrak{z}$. Предположим теперь, что $\sigma(e) = e$. Тогда $\sigma(A_i)$ есть собственное подпространство относительно оператора умножения справа на e, отвечающее собственному значению $\alpha_i \neq 0, 1$. Следовательно, $\sigma(A_i) \subset A_i$. □

Пусть P — двумерное векторное пространство с базисом $\{p_1, p_2\}$, U — ненулевое конечномерное пространство и

$$V := P \oplus U.$$

Зафиксируем целое $r > 1$, а также

(i) подпространство $S \subset V^{\otimes r}$;

(ii) последовательность $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_6) \in (\mathbb{K}\backslash\{0,1\})^6$, где $\gamma_i \neq \gamma_j$ для $i \neq j$.

Определим расширение алгебры $D(P,U,S,\gamma) \supset A(V,S)$ следующим образом. Пусть $b,c,d,e \in D(P,U,S,\gamma)$ таковы, что

$$\mathrm{vect}(D(P,U,S,\gamma)) = \langle e\rangle \oplus \langle b\rangle \oplus \langle c\rangle \oplus \langle d\rangle \oplus \mathrm{vect}(A(V,S)) \tag{1.6}$$

и выполняются следующие условия:

(D1) e — левая единица в $D(P,U,S,\gamma)$;

(D2) $\langle b\rangle$, $\langle c\rangle$, $\langle d\rangle$, а также $P,U \subset V = V^{\otimes 1} \subset A(V,S)$ и $(\bigoplus_{i=2}^{r-1} V^{\otimes i}) \oplus (V^{\otimes r}/S) \subset A(V,S)$ являются собственными пространствами оператора умножения справа на e, отвечающими собственным значениям $\gamma_1,\ldots,\gamma_6$ соответственно;

(D3) Таблица умножения b,c,d такова:

$$\begin{array}{lll} b\cdot b := 0, & b\cdot c := c+\gamma_{bc}b, & b\cdot d := 0,\\ c\cdot b := -c, & c\cdot c := b, & c\cdot d := e,\\ d\cdot b := p_1, & d\cdot c := d, & d\cdot d := p_2, \end{array} \tag{1.7}$$

где $\gamma_{bc} = \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_3}$;

(D4) $\langle b,c,d\rangle \cdot A(V,S) = A(V,S)\cdot\langle b,c,d\rangle = 0$.

Определим действие $g \in \mathrm{L}(V)_S$ на $\mathrm{vect}(D(P,U,S,\gamma))$ следующим образом: $g|_{\langle b\rangle} = g|_{\langle c\rangle} = g|_{\langle d\rangle} = g|_{\langle e\rangle} = \mathrm{id}$, $g|_V$ определяется как естественное $\mathrm{L}(V)$-действие на V, а на прочих слагаемых в $A(V,S)$ оно задано формулой (1.2). Согласно предложению 1.2.1, мы можем отождествить $\mathrm{L}(V)_S$ с соответствующими подмоноидами $\mathrm{L}(\mathrm{vect}(D(P,U,S,\gamma)))$. Далее, рассмотрим вложение $\mathrm{L}(U) \hookrightarrow \mathrm{L}(V)$, $h \mapsto \mathrm{id}|_P \oplus h$. Тогда $\mathrm{L}(U)_S \subset \mathrm{L}(V)_S$ и мы получаем $\mathrm{L}(U)_S$-действие на $\mathrm{vect}(D(P,U,S,\gamma))$.

Предложение 1.2.3. *Мы имеем*

$$\mathrm{End}(D(P,U,S,\gamma)) = \mathrm{L}(U)_S \sqcup \{\mathfrak{z}\},$$

где $\{\mathfrak{z}\}$ *— изолированная компонента алгебраического моноида* $\mathrm{End}(D(P,U,S,\gamma))$*, состоящая из нулевого элемента.*

Доказательство. Докажем, что 0 и ε являются единственными идемпотентами в $D(P,U,S,\gamma)$. В самом деле, пусть $\varepsilon = \lambda_e e + \lambda_b b + \lambda_c c + \lambda_d d + a$, где $a \in A(V,S)$. Тогда

$$\varepsilon^2 = (\lambda_e^2 + \lambda_c\lambda_d)e + (\lambda_b\lambda_e(1+\gamma_1) + \lambda_c^2 + \lambda_b\lambda_c\gamma_{bc})b + \\ + \lambda_c\lambda_e(1+\gamma_2)c + ((1+\gamma_3)\lambda_d\lambda_e + \lambda_d\lambda_c)d + a' = \\ = \lambda_1 e + \lambda_2 d + \lambda_3 c + \lambda_4 b + a, \text{ где } a, a' \in A(V,S).$$

Следовательно,

$$\lambda_e = \lambda_e^2 + \lambda_c\lambda_d,$$
$$\lambda_b = \lambda_b\lambda_e(1+\gamma_1) + \lambda_c^2 + \lambda_b\lambda_c\gamma_{bc},$$
$$\lambda_c = \lambda_c\lambda_e(1+\gamma_2),$$
$$\lambda_d = \lambda_d\lambda_e(1+\gamma_3) + \lambda_c\lambda_d.$$

Предположим, что $\lambda_c \neq 0$. Согласно (1.2.2),

$$1+\gamma_2 \neq 0, \lambda_e = \frac{1}{1+\gamma_2} \quad \text{and} \quad \lambda_c\lambda_d = \lambda_e - \lambda_e^2 \neq 0,$$

так что $\lambda_d \neq 0$. Следовательно, уравнение (1.2.2) влечёт

$$\lambda_c = 1 - \lambda_e(1+\gamma_3) = \frac{\gamma_2 - \gamma_3}{1+\gamma_2}.$$

Наконец, по (1.2.2) мы имеем

$$\lambda_c^2 = \lambda_b(1 - \lambda_e(1+\gamma_1) - \lambda_c\gamma_{bc}) = \lambda_b(\frac{\gamma_2-\gamma_1}{1+\gamma_2} - \frac{\gamma_2-\gamma_3}{1+\gamma_2}\cdot\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_3}) = 0.$$

Из данного противоречия мы заключаем, что $\lambda_c = 0$.

Более того, $\lambda_e = 0$ либо $\lambda_e = 1$ по (1.2.2). Если $\lambda_e = 0$, то $\lambda_b = \lambda_d = 0$, $\varepsilon = a \in A(V,S)$ и $\varepsilon = 0$, поскольку ноль является единственным идемпотентом в $A(V,S)$. Предположим теперь, что $\lambda_e = 1$. Из уравнений (1.2.2) и (1.2.2) следуют соответственно $\lambda_b = 0$ и $\lambda_d = 0$. Таким образом, $\varepsilon = e + a$, $a \in A(V,S)$.

Пусть $a = a_P + a_U + a_\Sigma$, где $a_P \in P, a_U \in U, a_\Sigma \in (\bigoplus_{i=2}^{r-1} V^{\otimes i}) \oplus (V^{\otimes r}/S)$. Тогда

$$\varepsilon^2 = e + (1+\gamma_4)a_P + (1+\gamma_5)a_U + a'_\Sigma = e + a_P + a_U + a_\Sigma,$$

где $a'_\Sigma \in (\bigoplus_{i=2}^{r-1} V^{\otimes i}) \oplus (V^{\otimes r}/S)$. Значит, $a_U = a_P = 0$. Пусть $a_\Sigma \neq 0$, тогда мы можем записать $a_\Sigma = a_k + \ldots + a_r$, $a_k \neq 0$, где $a_i \in V^{\otimes i}$ для $i < r$, и $a_r \in V^{\otimes r}/S$. Таким образом,

$$(e + a_k + \ldots + a_r)^2 = e + (1 + \gamma_6)a_k + a'' = e + a_k + \ldots + a_r,$$

где $a'' \in (\bigoplus_{i=k+1}^{r-1} V^{\otimes i}) \oplus (V^{\otimes r}/S)$ для $k < r$ и $a'' = 0$ для $k = r$. Это означает, что $a_k = 0$, противоречие. Следовательно, $a_\Sigma = 0$ и $\varepsilon = e$.

Таким образом, $D(P, U, S, \gamma)$ не содержит идемпотентов, отличных от 0 и e. Пусть $\sigma \in \mathrm{End}(D(P, U, S, \gamma)) \setminus \{\mathfrak{z}\}$. Согласно лемме 1.2.2, $\sigma(e) = e$ и подпространства $\langle b \rangle$, $\langle c \rangle$, $\langle d \rangle$, P, U, $A(V, S)$ являются σ-инвариантными. Пусть $\sigma(b) = \delta_b b$, $\sigma(c) = \delta_c c$, $\sigma(d) = \delta_d d$. Из уравнений $cd = e$, $dc = d$, $cb = -c$ следует, что $\delta_c\delta_d = 1$, $\delta_c\delta_d = \delta_d$, $\delta_b\delta_c = \delta_c$. Можно проверить, что $\delta_b = \delta_c = \delta_d = 1$. Наконец, равенства $db = p_1$, $dd = p_2$ влекут $\sigma|_P = \mathrm{id}_P$.

Поскольку V и $A(V, S)$ σ-инвариантны, $\sigma|_{A(V,S)} \in \mathrm{L}(V)_S$ по предложению 1.2.1. Учитывая, что $\sigma|_P = \mathrm{id}_P$ и $\sigma(U) \subset U$, получим $\sigma \in \mathrm{L}(U)_S$. $\square$

1.3 Аффинные моноиды как нормализаторы линейных подпространств

Предложение 1.3.1. *Пусть M — аффинный алгебраический моноид. Найдутся такие конечномерное векторное пространство U и целое число $r > 1$, что справедливо следующее. Пусть P —двумерное векторное пространство с тривиальным $\mathrm{L}(U)$-действием. Тогда $\mathrm{L}(U)$-модуль $(P \oplus U)^{\otimes r}$ содержит такое линейное подпространство S, что $\mathrm{L}(U)_S \cong M$.*

Доказательство. Поскольку существует замкнутое вложение $M \hookrightarrow \mathrm{L}(U)$ для некоторого конечномерного пространства U, мы можем считать, что $M \subset \mathrm{L}(U)$. Рассмотрим действие $\mathrm{L}(U)$ на себе левыми сдвигами. Кроме того, рассмотрим регулярное представление $\mathrm{L}(U)$ на алгебре $\mathbb{K}[\mathrm{L}(U)]$,

$$(g \cdot f)(u) := f(ug), \quad g, u \in \mathrm{L}(U), f \in \mathbb{K}[\mathrm{L}(U)].$$

Обозначим $d := \dim U$. Заметим, что $\mathrm{L}(U)$-модули $\mathbb{K}[\mathrm{L}(U)]$ и $\mathrm{Sym}(U^{\oplus d})$ изоморфны. Чтобы убедиться в этом, достаточно сопоставить линейную функцию на $\mathrm{L}(U)$ каждому вектору $(u_1, \ldots, u_d) \in U^{\oplus d}$, так как $\mathbb{K}[\mathrm{L}(U)] = \mathrm{Sym}(\mathrm{L}(U)^*)$. Отождествим U с $\mathbb{K}^d$, а $\mathrm{L}(U)$ — с $\mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{K})$. Пусть A лежит в $\mathrm{L}(U)$, а B — матрица со столбцами $u_1, \ldots, u_d$. Обозначим $l_{u_1,\ldots,u_d}(A) := \mathrm{tr}\, AB$. Тогда $(g \cdot l_{u_1,\ldots,u_d})(A) = \mathrm{tr}\, AgB = l_{gu_1,\ldots,gu_d}(A)$, т.е. это $\mathrm{L}(U)$-эквивариантный изоморфизм.

По определению симметрической алгебры зафиксируем естественное накрытие

$$\xi\colon \mathrm{T}(U^{\oplus d}) \to \mathrm{Sym}(U^{\oplus d}) \cong \mathbb{K}[\mathrm{L}(U)].$$

Существует такое конечномерное подпространство $W \subset \mathbb{K}[\mathrm{L}(U)]$, что

$$\mathrm{L}(U)_W = M. \tag{1.8}$$

Будем называть линейную оболочку множества $\{L(U)\cdot f\}$ $L(U)$-*разнесением* функции f. Чтобы убедиться в существовании W, покажем, что $\mathrm{L}(U)$-разнесение произвольной функции $f \in \mathbb{K}[\mathrm{L}(U)]$ конечномерно. В самом деле, поскольку $\mathrm{L}(U)$-действие задаётся морфизмом, $(g \cdot f)(u) = f(ug) \in \mathbb{K}[\mathrm{L}(U) \times \mathrm{L}(U)] = \mathbb{K}[\mathrm{L}(U)] \otimes \mathbb{K}[\mathrm{L}(U)]$, где $u, g \in \mathrm{L}(U)$, и найдутся такие функции $F_j, H_j \in \mathbb{K}[\mathrm{L}(U)]$, что

$$(g \cdot f)(u) = \sum_{j=1}^{n} F_j(u) H_j(g).$$

Таким образом, $\mathrm{L}(U)$-орбита функции f содержится в конечномерном подпространстве $\langle F_1, \ldots, F_n\rangle$.

Пусть $I(M) = (f_1, \ldots, f_t) \lhd \mathbb{K}[\mathrm{L}(U)]$ — идеал функций, обнуляющихся на M. Суммируя $\mathrm{L}(U)$-разнесения функций f_i, получаем конечномерное $\mathrm{L}(U)$-инвариантное подпространство $V \subset \mathbb{K}[\mathrm{L}(U)]$. Возьмём $W = I(M) \cap V$. Во-первых оно содержит $f_1, \ldots, f_t$. Во-вторых, оно M-инвариантно, так как идеал $I(M)$ является M-инвариантным. Очевидно, из $g \in M$ следует $g \cdot W \subset W$. С другой стороны , предположим, что $g \cdot W \subset W$, где $g \in \mathrm{L}(U)$. Тогда $f_i(g) = (g \cdot f_i)(E) = 0$ для $i = 1, \ldots, t$, где E — единица в $\mathrm{L}(U)$, и g автоматически содержится в M. Следовательно, $g \in M$. Это доказывает (1.8).

Кроме того, поскольку пространство W конечномерно, найдётся такое целое число $h \in \mathbb{Z}_+$, что

$$W \subset \xi(\textstyle\bigoplus_{i\leqslant h}(U^{\oplus d})^{\otimes i}).$$

Обозначим $W' := \xi^{-1}(W) \cap (\bigoplus_{i \leqslant h} (U^{\oplus d})^{\otimes i})$. Из $\mathrm{L}(U)$-эквивариантности ξ следует

$$\mathrm{L}(U)_{W'} = \mathrm{L}(U)_W. \tag{1.9}$$

Зафиксируем базис $\{p_1, p_2\}$ пространства P. Тогда существует вложение $\mathrm{L}(U)$-модулей

$$\iota\colon \mathrm{T}(U^{\oplus d}) \hookrightarrow \mathrm{T}(\langle p_1 \rangle \oplus U).$$

В самом деле, пусть U_i — i-е слагаемое прямой суммы $U^{\oplus d}$. Рассмотрим произвольный базис $\{f_{ij} \mid j = 1, \ldots, d\}$ пространства U_i и определелим вложение следующим образом:

$$\iota(f_{i_1 j_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_t j_t}) := p_1^{\otimes i_1} \otimes f'_{i_1 j_1} \otimes \ldots \otimes p_1^{\otimes i_t} \otimes f'_{i_t j_t}, \tag{1.10}$$

где f'_{ij} — образ f_{ij} относительно естественного изоморфизма $U_i \to U$. Легко проверить, что вложение $\iota\colon \mathrm{T}(U^{\oplus d}) \hookrightarrow \mathrm{T}(\langle p_1 \rangle \oplus U)$, определённое на базисе $\mathrm{T}(U^{\oplus d})_+$ формулой (1.10) и переводящее единицу в единицу, является искомым.

Теперь можно рассмотреть пространство $W'' := \iota(W')$, и тогда

$$\mathrm{L}(U)_{W''} = \mathrm{L}(U)_{W'}. \tag{1.11}$$

Поскольку W'' является конечномерным, найдётся такое целое число $b \in \mathbb{N}$, что

$$W'' \subset \bigoplus_{i \leqslant b} (\langle p_1 \rangle \oplus U)^{\otimes i}.$$

Возьмём такое целое $r \geqslant b$, что $r > 1$, и рассмотрим линейное отображение

$$\iota_r\colon \bigoplus_{i \leqslant b} (\langle p_1 \rangle \oplus U)^{\otimes i} \to (P \oplus U)^{\otimes r}, \quad f_i \mapsto p_2^{\otimes (r-i)} \otimes f_i, f_i \in (\langle p_1 \rangle \oplus U)^{\otimes i}. \tag{1.12}$$

Очевидно, ι_r является вложением $\mathrm{L}(U)$-модулей. Пусть $S = \iota_r(W'')$. Тогда

$$\mathrm{L}(U)_S = \mathrm{L}(U)_{W''}. \tag{1.13}$$

Теперь искомое утверждение следует из уравнений (1.8), (1.9), (1.11) и (1.13). $\square$

Доказательство теоремы 1.1.1

Пусть M — произвольный аффинный алгебраический моноид, а U, b, r, P, S — как в предложении 1.3.1. Зафиксируем такое множество $\gamma \in (\mathbb{K} \setminus \{0,1\})^6$, что $\gamma_i \neq \gamma_j$ для $i \neq j$, и рассмотрим алгебру $D(P,U,S,\gamma)$. Из предложений 1.3.1 и 1.2.3 следует, что $\mathrm{End}(D(P,U,S,\gamma)) \cong M \sqcup \{\mathfrak{z}\}$. Это завершает доказательство. $\square$

Глава 2

Разрешимость групп автоморфизмов

2.1 Введение

В этой главе предполагается, что поле $\mathbb{K}$ является алгебраически замкнутым характеристики нуль. Через R мы обозначаем алгебру формальных степенных рядов $\mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$, а через $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал $(x_1, \ldots, x_n) \lhd R$. Пусть идеал $I \subset \mathfrak{m}$ таков, что алгебра $S = R/I$ является конечномерной (или артиновой) и локальной с максимальным идеалом $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/I$.

Рассмотрим группу автоморфизмов $\operatorname{Aut} S$. Это аффинная алгебраическая группа, касательная алгебра которой является алгеброй Ли дифференцирований $\operatorname{Der} S$; см. [4, Ch.1, §2.3, ex. 2]. Таким образом, разрешимость связной компоненты единицы $\operatorname{Aut}^\circ S$ эквивалентна разрешимости алгебры Ли $\operatorname{Der} S$.

В 2009 году М. Шульце получил следующий признак, некоторые приложения которого обсуждаются ниже.

Теорема 2.1.1 (Шульце, [33]). *Пусть $S = R/I$ — конечномерная локальная алгебра, где $I \subset \mathfrak{m}^l$. Если выполняется неравенство*

$$\dim(I/\mathfrak{m}I) < n + l - 1, \tag{2.1}$$

то алгебра дифференцирований $\operatorname{Der} S$ *разрешима.*

В дальнейшем мы приводим обобщение данного признака на нелокальный случай, см. следствие 2.4.3, а также доказываем новый признак на основе аналогичных методов, см. теорему 2.1.12. Эти два признака применимы к разным типам алгебр.

Для того, чтобы привести некоторые приложения признака Шульце, рассмотрим *регулярную последовательность* $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$[1]. Это эквивалентно тому, что факторалгебра $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_n)$ нетривиальна и конечномерна. Она называется *глобальным полным пересечением.*

Гипотеза 2.1.2 (Гальперин, 1987[2])**.** *Пусть конечномерная алгебра*

$$S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_n)$$

является полным пересечением. Тогда связная компонента единицы $\mathrm{Aut}^\circ S$ *группы автоморфизмов алгебры* S *разрешима.*

В случае однородных многочленов $f_1, \ldots, f_n$ данная гипотеза была доказана Х. Крафтом и К. Прочези.

Теорема 2.1.3 (Крафт–Прочези, [26])**.** *Пусть* $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *— такие однородные многочлены, что алгебра*

$$S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_n)$$

конечномерна. Тогда группа $\mathrm{Aut}^\circ S$ *разрешима.*

Заметим, что в условиях теоремы 2.1.3 последовательность $f_1, \ldots, f_n$ регулярна. В данном случае алгебра S является локальной. Таким образом, следующее обобщение теоремы 2.1.3 оказывается прямым следствием теоремы Шульце 2.1.1.

Следствие 2.1.4 (Шульце, [33, Corollary 2])**.** *Пусть* $S = R/(f_1, \ldots, f_n)$ *— локальная алгебра, являющаяся полным пересечением. Тогда группа* $\mathrm{Aut}^\circ S$ *разрешима.*

Доказательство. Мы можем считать, что $f_i \in \mathfrak{m}^2$. Тогда $\dim(I/\mathfrak{m}I) = n$ и можно применить (2.1). □

В п. 2.4 мы предлагаем признак разрешимости алгебры дифференцирований $\mathrm{Der}\, S$ нелокальной конечномерной алгебры S, см. теорему 2.4.2. Это

[1]т.е. для всех i образ f_i в факторалгебре $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_{i-1})$ не является делителем нуля.

[2]Данная гипотеза была выдвинута С. Гальпериным на конференции в честь Ж.–Л. Кошуля.

позволяет нам вывести из локального случая общий случай гипотезы 2.1.2 и завершить тем самым её доказательство.

Рассмотрим теперь изолированные особенности гиперповерхностей. Пусть многочлен $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ таков, что гиперповерхность $\{p = 0\} \subset \mathbb{K}^n$ имеет изолированную особенность $H = (\{p = 0\}, 0)$ в начале координат. Подпространство $J(p) = \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathbb{K}}$ мы называем *якобианом* многочлена p, а идеал $(J(p))$ — *якобиевым идеалом* p. Факторалгебра $A(H) = \mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]/(p, J(p))$ называется *локальной алгеброй* или *алгеброй модулей* изолированной особенности H. Она также известна как *алгебра Тюриной* в теории особенностей.

Поскольку кольцо формальных степенных рядов локально, алгебра $A(H)$ тоже локальна. Существует аналог теоремы Гильберта о нулях для ростков аналитических функций (называемый *теоремой Рюккерта о нулях*, см. [19, Theorem 3.4.4], [7, 30.12], [36]), который справедлив также для формальных степенных рядов, поскольку обладает чисто алгебраическим доказательством. Отсюда, радикал $\sqrt{(p, J(p))}$ совпадает с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Таким образом, идеал $(p, J(p))$ содержит некоторую степень максимального идеала, или, что то же самое, алгебра $A(H)$ является конечномерной. Наоборот, если алгебра $A(H)$ конечномерна, то особенность H является изолированной. В самом деле, конечномерность A эквивалентна вложению $\mathfrak{m}^r \subset I$ для некоторого r, то есть $\sqrt{(p, J(p))} = \mathfrak{m}$. Из этого следует равенство $\mathbb{V}(p, J(p)) = 0$, так что H является единственной особенностью в некоторой окрестности нуля.

Дж. Мазер и С.С.–Т. Яу доказали в работе [29], что две изолированные особенности гиперповерхностей биголоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда их алгебры модулей изоморфны. Таким образом, конечномерная локальная алгебра $A(H)$ определяет особенность H с точностью до аналитического изоморфизма.

Для того, чтобы установить, какие конечномерные локальные алгебры могут являться алгебрами модулей некоторых особенностей, Яу ввёл в [38] алгебру дифференцирований $L(H) = \operatorname{Der} A(H)$, которую иногда называют *алгеброй Яу*. Он получил следующий результат.

Теорема 2.1.5 (Яу, [39]). *Алгебра $L(H)$ изолированной особенности H гиперповерхности является разрешимой.*

Заметим, что, вообще говоря, алгебра Яу не определяет однозначно соответствующую алгебру модулей. Но для *простых* особенностей данное свойство выполняется лишь с одним исключением. Классификация простых особенностей хорошо известна и состоит из двух бесконечных серий A_k, D_k и трёх исключительных особенностей E_6, E_7, E_8; например, см. [2, глава 2]. А. Элашвили и Г. Химшиашвили доказали следующий факт.

Теорема 2.1.6 (Элашвили–Химшиашвили [14, Theorem 3.1]). *Пусть H_1 и H_2 — две простые изолированные особенности гиперповерхностей, кроме пары A_6 и D_5. В таком случае $L(H_1) \cong L(H_2)$ тогда и только тогда, когда H_1 и H_2 аналитически изоморфны.*

Замечание 2.1.7. Пусть многочлен p является квазиоднородным, т.е.

$$p(\lambda^{k_1}x_1, \ldots, \lambda^{k_n}x_n) = \lambda^k p(x_1, \ldots, x_n) \text{ для фиксированных } k, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $p \in J(p)$, а алгебра модулей $\mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]/(p, J(p))$ является полным пересечением. При данном условии теорема 2.1.5 оказывается частным случаем следствия 2.1.4.

В [33] М. Шульце выводит теорему 2.1.5 из своего признака. Для её доказательства он использует следующий результат Дж. Кемпфа и ставит вопрос, можно ли без него обойтись.

Теорема 2.1.8 (Кемпф [21, Theorem 13]). *Пусть $p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ — однородный многочлен степени $d \geqslant 3$. Предположим, что пространство $\mathbb{C}^n$ снабжено линейным действием полупростой группы G. Если якобиан $J(p) \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ является G-инвариантным, то существует такой однородный G-инвариантный многочлен q степени d, что $J(p) = J(q)$.*

Определение 2.1.9. Мы называем локальную конечномерную алгебру S *экстремальной*, если выполнено равенство $\dim I/\mathfrak{m}I = l + n - 1$.

Описание экстремальных алгебр с неразрешимой алгеброй дифференцирований позволяет получить теорему 2.1.5 напрямую из признака Шульце, см. п. 2.3.

Определение 2.1.10. Пусть I — однородный идеал. Обозначим через I_k его k-ю однородную компоненту. Мы называем градуированную локальную конечномерную алгебру $S = R/I$ *узкой*, если неравенство

$$\dim I_k - \dim(\bar{\mathfrak{m}} I)_k \leqslant k \tag{2.2}$$

выполняется для всех $k = 1, 2\ldots$. Иначе говоря, алгебра S узкая, если существует такой набор однородных образующих идеала I, что число образующих степени k не превосходит k для всех $k \geqslant 1$.

Замечание 2.1.11. Пусть $I \subset \mathfrak{m}^r$. Тогда для того, чтобы алгебра $S = R/I$ была узкой, достаточно выполнения неравенства (2.2) для всех $k \leqslant r$. В самом деле, $I_k = (\mathfrak{m}I)_k$ при $k > r$.

Напомним, что градуированной алгеброй, ассоциированной с локальной алгеброй S, называется алгебра

$$\operatorname{gr} S = \mathbb{K} \oplus (\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2) \oplus (\bar{\mathfrak{m}}^2/\bar{\mathfrak{m}}^3) \oplus \ldots,$$

т.е. $(\operatorname{gr} S)_i = \bar{\mathfrak{m}}^i/\bar{\mathfrak{m}}^{i+1}$. В следующей теореме мы излагаем наш признак разрешимости.

Теорема 2.1.12. *Предположим, что градуированная алгебра* $\operatorname{gr} S$*, ассоциированная с локальной конечномерной алгеброй* S*, является узкой. Тогда алгебра дифференцирований* $\operatorname{Der} S$ *разрешима.*

Доказательство приводится в следующем параграфе. В последнем параграфе мы приводим нижнюю границу для размерности группы автоморфизмов и приводим пример алгебры с унипотентной группой автоморфизмов.

Отметим также сходный результат о разрешимости группы эквивариантных автоморфизмов. Рассмотрим связную аффинную алгебраическую группу G и неприводимое аффинное G-многообразие X. Предположим, что количество G-орбит на X конечно, и что X содержит точку, неподвижную относительно действия G. Тогда связная компонента единицы $\operatorname{Aut}^\circ_G X$ группы G-эквивариантных автоморфизмов многообразия X разрешима; см. [10, Theorem 1].

2.2 Признаки разрешимости

В данном разделе мы приводим упрощённое доказательство теоремы 2.1.1 и получаем новый признак разрешимости.

Если $I \supset \mathfrak{m}^r \lhd \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ для некоторого r, то $R/\widetilde{I} \cong \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I$, где $\widetilde{I}$ — идеал в алгебре формальных степенных рядов, порождённый I. Таким образом, нет никакой разницы, была ли локальная алгебра получена факторизацией алгебры многочленов или же факторизацией алгебры формальных степенных рядов.

Предложение 2.2.1. *Пусть идеал $I \lhd R$ представлен в виде $I = W \oplus \mathfrak{m}I$, то есть подпространство $W \subset I$ — дополнительное к $\mathfrak{m}I$. Тогда идеал (W), порождённый подпространством W, совпадает с I.*

Доказательство. Рассмотрим отображение факторизации $\varphi\colon R \to R/(W)$. Его образ является локальной алгеброй с максимальным идеалом $\varphi(\mathfrak{m})$. Из разложения $I = W \oplus \mathfrak{m}I$ следует, что $\varphi(I) = \varphi(\mathfrak{m}I)$. Поскольку кольцо R нётерово, идеалы I и $\varphi(I)$ конечно порождены. Тогда по лемме Накаямы (см. [3, Proposition 2.6]) имеем $\varphi(I) = 0$, т.е. $(W) = I$. $\square$

Следствие 2.2.2. *Базис пространства W является минимальным набором образующих идеала I.*

Отметим, что предложение 2.2.1 не выполняется для алгебры многочленов. Например, возьмём идеал $I = \mathfrak{m}^2 \lhd \mathbb{K}[x]$ и разложим его следующим образом:

$$\mathfrak{m}^2 = \langle x^2 - x^3 \rangle \oplus \mathfrak{m}^3.$$

Легко видеть, что идеал $(x^2 - x^3)$ не совпадает с $\mathfrak{m}^2$.

2.2.3. Ниже мы следуем идеям из [33].

Как всегда, мы подразумеваем, что $S = R/I$, где $\mathfrak{m}^l \supset I \lhd R = \mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ для $l \geqslant 2$. Предположим, что алгебра $\operatorname{Der} S$ неразрешима. Тогда она содержит $\mathfrak{sl}_2$-тройку $\{e, f, h\}$ с соотношениями $[e, f] = h$, $[h, f] = -2f$, $[h, e] = 2e$. Заметим, что автоморфизмы S сохраняют максимальный идеал

$\bar{\mathfrak{m}} \lhd S$, поскольку он единственный, а также все его степени. Таким образом, $\bar{\mathfrak{m}}$ и $\bar{\mathfrak{m}}^2$ являются $\mathfrak{sl}_2$-подмодулями. Поскольку представления $\mathfrak{sl}_2$ вполне приводимы, идеал $\bar{\mathfrak{m}}$ содержит такой $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль $\overline{V}$, что

$$\bar{\mathfrak{m}} = \overline{V} \oplus \bar{\mathfrak{m}}^2.$$

Обозначим через $\varphi\colon R \to S$ факторизацию по идеалу I. Так как $\varphi(\mathfrak{m}^2) = \bar{\mathfrak{m}}^2$, найдётся такое подпространство $V \subset \mathfrak{m}$, что $\mathfrak{m} = V \oplus \mathfrak{m}^2$ и $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$. Значит, в соответствии с теоремой 2.2.1 подпространство V порождает идеал $\mathfrak{m}$ как подалгебру. Поэтому он порождает и алгебру R. Таким образом, с точностью до замены координат мы можем считать, что $V = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ и $\overline{V} = \langle \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \rangle$, где $\bar{x}_i = \varphi(x_i)$.

Введём структуру $\mathfrak{sl}_2$-представления на V посредством данного изоморфизма и продолжим её на R. Заметим, что отображение факторизации φ является гомоморфизмом $\mathfrak{sl}_2$-модулей. Следовательно, идеал $I \lhd R$ является инвариантным подпространством $\mathfrak{sl}_2$-представления на R.

Для *весового вектора* z, то есть собственного вектора оператора $h \in \mathfrak{sl}_2$, обозначим его вес через $\mathrm{wt}(z) \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ весовые векторы $\mathfrak{sl}_2$-модуля V, причём $x_1, \ldots, x_k$, $k \leqslant n$, — старшие векторы с весами $n_i = \mathrm{wt}(x_i)$, где $n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_k \geqslant 0$, $\sum(n_i + 1) = n$. Пусть $V_{high} := \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$, $V_{rest} := \langle x_{k+1}, \ldots, x_n \rangle$.

Идеал $\mathfrak{m}I \subset R$ является $\mathfrak{sl}_2$-инвариантным как произведение $\mathfrak{sl}_2$-инвариантных идеалов. Значит, I содержит такой дополнительный $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль W, что $I = W \oplus \mathfrak{m}I$. По следствию 2.2.2 его базис является минимальным набором, порождающим I.

По аналогии с $V = V_{high} \oplus V_{rest}$ рассмотрим разложение

$$W = W_{high} \oplus W_{rest}$$

в сумму подпространства $W_{high} = \langle w_1, \ldots, w_s \rangle$, где w_i — старшие вектора в W, и подпространства W_{rest} остальных весовых векторов W. Заметим, что $W_{rest} \subset \operatorname{Im} f \subset (x_{k+1}, \ldots, x_n)$, так как $\operatorname{Im} f$ порождён весовыми векторами, которые не являются старшими.

Пусть $\varphi_i\colon R \to R/J_i$ — факторизация по идеалу $J_i = (x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $\quad i = 1 \ldots, k$. Поскольку $J_i \supset (x_{k+1}, \ldots, x_n) \supset W_{rest}$, справедливо равенство

$W_i := \varphi_i(W) = \varphi_i(W_{high})$. Заметим, что $\dim W_i \geqslant i$, так как факторалгебра $\mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_i]\!]/(W_i) \cong R/(J_i, W_i) \cong S/(\bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n)$ конечномерна. В частности, $s \geqslant k$.

По индукции мы можем задать порядок старших векторов $w_1, \ldots, w_s \in W_{high}$ таким образом, что $\varphi_i(w_1), \ldots, \varphi_i(w_i)$ станут линейно независимыми в W_i для всех i. Тогда $\mathrm{wt}(w_i) \geqslant ln_i$, потому что w_i содержит мономы от переменных $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i$ степени хотя бы l, и $\mathrm{wt}(x_j) = n_j \geqslant n_i$ для $j \leqslant i$.

Доказательство теоремы 2.1.1. Из приведённых выше рассуждений следует, что подпространство V содержит нетривиальный $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль и что $n_1 > 0$. Тогда

$$\dim I/\mathfrak{m}I = \dim W \geqslant \sum_{i=1}^{k}(ln_i + 1) = (n_1 - 1)l + l + 1 + \sum_{i=2}^{k}(ln_i + 1) \geqslant$$
$$(n_1 - 1) + l + 1 + \sum_{i=2}^{k}(n_i + 1) = \sum_{i=1}^{k}(n_i + 1) + l - 1 = n + l - 1, \quad (2.3)$$

как и требовалось. □

Предложение 2.2.4. *Существует естественное отображение* $\varphi\colon \operatorname{Aut} S \to \operatorname{Aut}(\operatorname{gr} S)$ *с унипотентным ядром.*

Доказательство. Идеалы $\bar{\mathfrak{m}}^i$ инвариантны относительно $\operatorname{Aut} S$ при всех i, поскольку являются степенями единственного максимального идеала. Следовательно, группа $\operatorname{Aut} S$ естественным образом действует на $\bar{\mathfrak{m}}^i/\bar{\mathfrak{m}}^{i+1}$ при всех i, а значит, она действует на $\operatorname{gr} S$. Получаем естественное отображение $\varphi\colon \operatorname{Aut} S \to \operatorname{Aut}(\operatorname{gr} S)$.

Выберем базис S, согласованный с цепочкой подпространств $0 \subset \bar{\mathfrak{m}}^r \subset \ldots \subset \bar{\mathfrak{m}} \subset S$. Рассмотрим произвольный оператор $g \in \ker \varphi$. Тогда $g(z) \in z + \bar{\mathfrak{m}}^{i+1}$ для любого $z \in \bar{\mathfrak{m}}^i$, и g представлен унитреугольной матрицей в выбранном базисе. Следовательно, $\ker \varphi$ унипотентно. □

Следствие 2.2.5. *Если связная компонента единицы* $\operatorname{Aut}^\circ(\operatorname{gr} S)$ *разрешима, то связная компонента единицы* $\operatorname{Aut}^\circ S$ *также разрешима.*

Теорема 2.2.6. *Алгебра дифференцирований* $\operatorname{Der} S$ *узкой алгебры* S *разрешима.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Der} S$ неразрешима. Тогда применимы рассуждения из п. 2.2.3. Рассмотрим простой $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль $F = \mathfrak{sl}_2 \cdot w_1 \subset I$. Он имеет нулевое пересечение с идеалом $\mathfrak{m}I$. Пусть k — наибольшее такое целое число, что $F \subset \mathfrak{m}^k$. Тогда пересечение F с $\mathfrak{m}^{k+1}$ также нулевое, и старший вес F равен $kn_1 \geqslant k$. После факторизации по $\mathfrak{m}^{k+1}$ это влечёт $\dim I_k \geqslant \dim(\mathfrak{m}I)_k + \dim F > \dim(\mathfrak{m}I)_k + k$, а значит, алгебра S не является узкой. ☐

Доказательство теоремы 2.1.12. Искомое утверждение является прямым следствием теоремы 2.2.6 и следствия 2.2.5. ☐

Замечание 2.2.7. На самом деле, в доказательстве теоремы 2.1.12 можно обойтись без предложения 2.2.4, однако оно делает доказательство более понятным.

Пример 2.2.8. Алгебры

$$\begin{aligned} A =&\mathbb{K}[x,y]/(x^2, y^3, xy^2), \\ B =&\mathbb{K}[x,y,z]/(x^3, x^2y, x^2z, y^4, z^4) \end{aligned}$$

являются экстремальными, и признак Шульце к ним неприменим, однако их алгебры дифференцирований являются разрешимыми по теореме 2.1.12. На самом деле, группы автоморфизмов алгебр A и B также разрешимы. Например, непосредственным вычислением получаем

$$\operatorname{Aut} A = \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} \mapsto c_1\bar{x} + a_2\bar{x}\bar{y} + a_3\bar{y}^2, \\ \bar{y} \mapsto c_2\bar{y} + a_4\bar{x} + a_5\bar{x}\bar{y} + a_6\bar{y}^2 \end{array} \middle| \, a_i \in \mathbb{K}, c_i \in \mathbb{K}^\times \right\}.$$

Пример 2.2.9. С другой стороны, для алгебры

$$A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^l, x_2^l, \ldots, x_n^l), \text{ где } l < n,$$

выполняется признак Шульце, но не признак из теоремы 2.1.12. Заметим, что при $n \geqslant 5$ группа $\operatorname{Aut} A$ неразрешима, так как содержит подгруппу перестановок координат.

Таким образом, мы видим, что эти два признака имеют различные области применимости.

Замечание 2.2.10. Необходимо отметить, что при переходе к ассоциированной градуированной алгебре $\operatorname{gr} S$ левая часть (2.1), вообще говоря, возрастает. В самом деле, рассмотрим идеал $\hat{I} \lhd R$ младших однородных компонент элементов идеала I. Тогда $\operatorname{gr} S = R/\hat{I}$. Можно проверить, что $\operatorname{codim}_R(I) = \operatorname{codim}_R(\hat{I})$ и $\operatorname{codim}_R(\mathfrak{m}I) \leqslant \operatorname{codim}_R(\mathfrak{m}\hat{I})$. Отсюда следует неравенство $\dim I/\mathfrak{m}I \leqslant \dim \hat{I}/\mathfrak{m}\hat{I}$. Неравенство является строгим, например, для $I = (x^2 - y^3, x^3) \lhd \mathbb{K}[\![x, y]\!]$.

2.3 Экстремальные алгебры и теорема Яу

Напомним, что под экстремальной алгеброй мы понимаем конечномерную алгебру, удовлетворяющую равенству $\dim I/\mathfrak{m}I = l + n - 1$ из теоремы 2.1.1.

Теорема 2.3.1. *Экстремальная алгебра S имеет неразрешимую алгебру дифференцирований $\operatorname{Der} S$ тогда и только тогда, когда она имеет вид $S = S_1 \otimes S_2$, где*

$$S_1 \cong \mathbb{K}[\![x_1, x_2]\!]/(x_1^l, x_1^{l-1}x_2, \ldots, x_1 x_2^{l-1}, x_2^l) \text{ для некоторого } l \geqslant 2,$$
$$S_2 \cong \mathbb{K}[\![x_3, \ldots, x_n]\!]/(w_2, \ldots, w_{n-1}),$$

и где $w_i \in \mathfrak{m}^l \cap \mathbb{K}[\![x_3, \ldots, x_n]\!]$ образуют регулярную последовательность.

Доказательство. Предположим, что $S = S_1 \otimes S_2$ как в формулировке теоремы. Тогда группа $\mathrm{GL}(\langle x_1, x_2 \rangle)$ может быть вложена в $\operatorname{Aut} S_1$. Следовательно, подалгебра S_1 обладает естественной структурой $\mathfrak{sl}_2$-представления. Мы полагаем это представление тривиальным на S_2.

Наоборот, пусть алгебра дифференцирований $\operatorname{Der} S$ локальной алгебры $S = R/I$ неразрешима. Вспомним рассуждения из раздела 2.2. Из них следует, что S экстремальна тогда и только тогда, когда в цепочке неравенств (2.3) все члены являются равенствами. Первое равенство справедливо тогда и только тогда, когда W содержит ровно k простых $\mathfrak{sl}_2$-подмодулей, а их веса есть $ln_1, \ldots, ln_k$. Второе равенство выполняется тогда и только тогда, когда $n_1 = 1,\ n_2 = \ldots = n_k = 0$.

При этих условиях $k = n - 1$, а простые $\mathfrak{sl}_2$-подмодули $\overline{V}$ есть $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle$, $\langle \bar{x}_3 \rangle, \ldots, \langle \bar{x}_n \rangle$. Тогда $W_{high} = \langle w_1, \ldots, w_{n-1} \rangle$, где $\mathrm{wt}(w_1) = l,\ \mathrm{wt}(w_i) = 0$ при

$i = 2, \dots, n-1$. Имеем

$$S = R/(w_1, f \cdot w_1, \dots, f^l \cdot w_1, w_2, \dots, w_{n-1}). \tag{2.4}$$

Отметим, что алгебра $\mathfrak{sl}_2$ аннулирует ряд $w_2, \dots, w_{n-1}$, поэтому элементы ряда не зависят от x_1, x_2 и принадлежат $\mathbb{K}[\![x_3, \dots, x_n]\!] \cap \mathfrak{m}^l$. Поскольку w_1 является старшим вектором веса l, он имеет вид $x_1^l g$, где $g \in \mathbb{K}[\![x_3, \dots, x_n]\!]$. Тогда $f^k \cdot w_1 = x_1^{l-k} x_2^k g$.

Так как $x_1^r \in I$, равенство

$$x_1^r = p_0 x_1^l g + p_1 x_1^{l-1} x_2 g + \dots + p_l x_2^l g + q_2 w_2 + \dots + q_{n-1} w_{n-1} \tag{2.5}$$

выполняется при некоторых $p_i, q_j \in R$. Полагая $x_2 = x_1$, из (2.5) получаем

$$x_1^r = (\widetilde{p}_0 + \dots + \widetilde{p}_l) x_1^l g + \widetilde{q}_2 w_2 + \dots + \widetilde{q}_{n-1} w_{n-1},$$

где $\widetilde{p}_i = p_i(x_1, x_1, x_3, \dots, x_n)$, $\widetilde{q}_j = q_j(x_1, x_1, x_3, \dots, x_n)$. Очевидно, мы можем считать, что ряды $\widetilde{q}_j$ и $\widetilde{p} = \sum_{i=0}^{l} \widetilde{p}_i$ однородны по x_1. Тогда $\widetilde{p} = x_1^{r-l} \widehat{p}$, $\widetilde{q}_j = x_1^r \widehat{q}_j$, где $\widehat{p}, \widehat{q}_j \in \mathbb{K}[\![x_3, \dots, x_n]\!]$. Но это приводит к

$$x_1^l = \widehat{p} x_1^l g + x_1^l \widehat{q}_2 w_2 + \dots + x_1^l \widehat{q}_{n-1} w_{n-1}. \tag{2.6}$$

Таким образом, в (2.4) мы можем заменить $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль

$$\langle x_1^l, x_1^{l-1} x_2, \dots, x_1 x_2^{l-1}, x_2^l \rangle$$

на $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль

$$\langle w_1, f \cdot w_1, \dots, f^l \cdot w_1 \rangle.$$

Наконец, алгебра S раскладывается в тензорное произведение $S_1 \otimes S_2$, где S_i как в условии. $\square$

Хорошо известна следующая техническая лемма для степенных рядов, см. например [2, п. 11.1]. Для произвольного степенного ряда g обозначим через $g_{(k)}$ его k-ю однородную компоненту.

Лемма 2.3.2. *Пусть $p \in \mathfrak{m}^2 \backslash \mathfrak{m}^3 \subset R$. Тогда с точностью до аналитической замены координат мы имеем $p = x_1^2 + \dots + x_k^2 + q(x_{k+1}, \dots, x_n)$, где $q \in \mathfrak{m}^3 \cap \mathbb{K}[\![x_{k+1}, \dots, x_n]\!]$.*

Доказательство. Однородная компонента $p_{(2)}$ является квадратичной формой. Следовательно, она имеет вид $x_1^2 + \ldots + x_k^2$ с точностью до линейной замены координат. Рассмотрим следующее разложение:

$$p = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots,$$

где $a_i \in \mathbb{K}[\![x_2, \ldots, x_n]\!]$, причём a_2 обратим.

Рассмотрим теперь замену координат $\varphi : x_1 \mapsto x_1 + g$, $x_2 \mapsto x_2$, $\ldots$, $x_n \mapsto x_n$, где $g \in \mathfrak{m} \cap \mathbb{K}[\![x_2, \ldots, x_n]\!]$. Тогда

$$\varphi(p) = \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1 x_1 + \widetilde{a}_2 x_1^2 + \ldots$$

для некоторого $\widetilde{a}_i \in \mathbb{K}[\![x_2, \ldots, x_n]\!]$. В таком случае

$$\widetilde{a}_1 = a_1 + 2ga_2 + 3g^2 a_3 + \ldots = a_2 \left(\frac{a_1}{a_2} + 2g + 3g^2 \frac{a_3}{a_2} + \ldots \right). \tag{2.7}$$

Поскольку $a_1 \in \mathfrak{m}$, мы можем выбрать такое g, что $\widetilde{a}_1 = 0$. В самом деле, разложим ряд в скобках в правой части (2.7) на однородные компоненты вида $2g_{(k)} + P_k$, где P_k зависит только от первых $k-1$ однородных компонент g. Тогда по индукции все однородные компоненты g однозначно определены. Заметим, что $\widetilde{a}_2 = a_2 + 3a_3 g + 6a_4 g^2 + \ldots$ по-прежнему обратим.

Следовательно, мы можем считать, что $a_1 = 0$. Рассмотрим подстановку $x_1 \mapsto x_1 b$, где $b^2 = a_2^{-1}$ (остальные координаты прежние). Легко видеть, что требуемый ряд b существует и обратим, а значит, данная подстановка является заменой координат. Тогда мы можем также предположить, что $a_2 = 1$.

В заключение, рассмотрим замену координат

$$x_1 \mapsto x_1 + b_2 x_1^2 + b_3 x_1^3 + \ldots$$

Аналогично процедуре выбора g, найдём такие b_i, что $p \mapsto a_0 + x_1^2$. По индукции по n мы можем считать, что $a_0(x_2, \ldots, x_n)$ имеет требуемый вид. Тогда p также имеет искомый вид. $\square$

Доказательство теоремы 2.1.5. Согласно замечанию Яу в [39] мы можем считать, что $p \in \mathfrak{m}^3$. В самом деле, пусть $p \in \mathfrak{m}^2 \setminus \mathfrak{m}^3$. По лемме 2.3.2 имеем

$p = x_1^2 + \ldots + x_k^2 + q(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ с точностью до замены координат. Поскольку $\frac{\partial p}{\partial x_i} = 2x_i$ при $i = 1, \ldots, k$, справедливо равенство

$$\mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]/(p, J(p)) \cong \mathbb{K}[\![x_{k+1}, \ldots, x_n]\!]/(q, J(q)),$$

и мы можем заменить p рядом $q \in \mathfrak{m}^3 \cap \mathbb{K}[\![x_{k+1}, \ldots, x_n]\!]$.

Если $p \in \mathfrak{m}^3$, то $I = (p, J(p)) \subset \mathfrak{m}^2$ и $l \geqslant 2$. Требуется показать, что алгебра Яу $\operatorname{Der} S$ алгебры модулей $S = \mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]/I$ разрешима. Предположим противное.

Заметим, что $\dim(I/\mathfrak{m}I) \leqslant n+1 \leqslant n+l-1$. Следовательно, алгебра модулей либо удовлетворяет неравенству в признаке Шульце, и тогда $\operatorname{Der} S$ разрешима, либо является экстремальной, и $l = 2$. В последнем случае мы можем применить теорему 2.3.1, и тогда $S = S_1 \otimes S_2$, где $S_1 = \mathbb{K}[\![x_1, x_2]\!]/(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$ и $S_2 = \mathbb{K}[\![x_3, \ldots, x_n]\!]/(w_2, \ldots, w_{n-1})$.

Легко видеть, что однородная компонента $p_{(3)}$ имеет вид $p_1(x_1, x_2) + p_2(x_3, \ldots, x_n)$. В самом деле, иначе $(J(p))$ содержал бы ряд с членом вида x_ix_j, где $i \in \{1, 2\}, j \in \{3, \ldots, n\}$, и, следовательно,

$$\langle x_1^2, x_1x_2, x_2^2 \rangle \subset (p, J(p)) \cap (\mathbb{K}[x_1, x_2])_2 \subset \left\langle \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \frac{\partial p_1}{\partial x_2} \right\rangle.$$

Противоречие. □

2.4 Глобальный случай и гипотеза Гальперина

Пусть конечномерная алгебра $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I$ не является локальной. Поскольку для любого $i \in \mathbb{N}$ пересечение i различных максимальных идеалов имеет коразмерность в S, равную i, число максимальных идеалов конечно. Обозначим их через $\bar{\mathfrak{m}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{m}}_s$. Тогда найдётся такое целое $k \in \mathbb{N}$, что $\prod_{i=1}^s \bar{\mathfrak{m}}_i^k = 0$. Поскольку идеалы $\bar{\mathfrak{m}}_i^k$ взаимно просты, мы имеем $\bigcap_{i=1}^s \bar{\mathfrak{m}}_i^k = \prod_{i=1}^s \bar{\mathfrak{m}}_i^k$. Наконец, по [3, теорема 8.7] алгебра S может быть разложена в следующую прямую сумму локальных подалгебр:

$$S \cong \bigoplus_{i=1}^{s} S/\bar{\mathfrak{m}}_i^k. \tag{2.8}$$

Кроме того, любое разложение S в прямую сумму локальных подалгебр имеет вид (2.8), т.е. они однозначно определены с точностью до изоморфизма.

С другой стороны, существует единственное разложение единицы

$$1 = e_1 + \ldots + e_t \tag{2.9}$$

в сумму неразложимых ортогональных идемпотентов, т.е. $e_i e_i = e_i$ при всех i и $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, см. например [11, Section II.5]. Тогда имеется разложение

$$S = \bigoplus_{i=1}^{t} e_i S, \tag{2.10}$$

где подалгебры $e_i S$ неприводимы и, следовательно, локальны. Это означает, что

$$S_i = e_i S \cong S/\bar{\mathfrak{m}}_i^k \tag{2.11}$$

с точностью до перестановки индексов, и $t = s$. Таким образом, мы имеем однозначно определённое разложение (2.10) S в локальные подалгебры.

Предложение 2.4.1. $\operatorname{Aut}^\circ S = \operatorname{Aut}^\circ S_1 \times \ldots \times \operatorname{Aut}^\circ S_s$.

Доказательство. Поскольку разложение (2.9) единственно, идемпотенты e_i в данном разложении переходят в себя при действии $\operatorname{Aut}^\circ S$, также как и подалгебры S_i. Поскольку $S_i S_j = 0$ при $i \neq j$, требуемое утверждение верно. $\square$

Обозначим через $\mathfrak{m}_i = (x_1 - a_{1i}, \ldots, x_n - a_{ni})$, $i = 1 \ldots s$, максимальные идеалы в $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, соответствующие $\bar{\mathfrak{m}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{m}}_s \lhd S$. Тогда $\bigcap_{i=1}^s \mathfrak{m}_i^k \subset I$. Введём соответствующие алгебры формальных степенных рядов $R_i = \mathbb{K}[\![x_1 - a_{1i}, \ldots, x_n - a_{ni}]\!]$. Идеал $(\mathfrak{m}_j) \lhd R_i$ совпадает с R_i при $i \neq j$. Если же $i = j$, $(\bar{\mathfrak{m}}_i) \lhd R_i$ является максимальным идеалом, который мы обозначим через $\widetilde{\mathfrak{m}}_i$. Следовательно, имеется вложение $\widetilde{\mathfrak{m}}_i^k = \bigcap_{i=1}^s \left(\mathfrak{m}_i^k\right)$ в $(I) \lhd R_i$, и

$$S_i \cong S/\bar{\mathfrak{m}}_i^k \cong \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(I, \mathfrak{m}_i^k) \cong R_i/(I).$$

Принимая во внимание предложение 2.4.1, получаем следующий признак разрешимости.

Теорема 2.4.2. *Связная компонента единицы* $\operatorname{Aut}^\circ S$ *группы автоморфизмов конечномерной алгебры* $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I$ *с максимальными идеалами* $\bar{\mathfrak{m}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{m}}_s$ *разрешима если и только если связная компонента единицы* $\operatorname{Aut}^\circ S_i$ *группы автоморфизмов локальной алгебры* $S_i = R_i/(I)$ *разрешима при всех* $i = 1, \ldots, s$.

Теперь мы готовы доказать гипотезу Гальперина.

Доказательство гипотезы 2.1.2. Пусть $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_n)$. Поскольку локальная подалгебра $S_i = R_i/(f_1, \ldots, f_n)$ является локальным полным пересечением, группа $\operatorname{Aut}^\circ S_i$ разрешима для всех i по следствию 2.1.4. Тогда по теореме 2.4.2 группа $\operatorname{Aut}^\circ S$ также разрешима. $\square$

Теорема 2.4.2 позволяет вывести следующее обобщение признака Шульце.

Следствие 2.4.3. *Предположим, что идеал* $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *с* m *порождающими и целое число* $l > 1$ *таковы, что справедливо следующее:*

- *Факторалгебра* $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I$ *конечномерна.*
- *Для любого максимального идеала* $\mathfrak{m} \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *выполняется либо* $I \not\subseteq \mathfrak{m}$, *либо* $I \subset \mathfrak{m}^l$.
- *Справедливо неравенство* $m < n + l - 1$.

Тогда группа $\operatorname{Aut}^\circ S$ *разрешима.*

Доказательство. Пусть, как и прежде, $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s \lhd \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — единственные идеалы, содержащие I. Согласно следствию 2.2.2, $\dim(I/\mathfrak{m}_i I) \leqslant m < n + l - 1$ и признак Шульце применим к алгебрам $R_i/(I)$, $i = 1, \ldots, s$. Следовательно, $\operatorname{Aut}^\circ S$ разрешима по теореме 2.4.2. $\square$

2.5 Подгруппы автоморфизмов и ограничения на размерность

Как обычно, предположим, что $I \lhd R$ содержит $\mathfrak{m}^l$, где $l \geqslant 2$, и алгебра $S = R/I$ конечномерна и локальна, причём её максимальный идеал есть $\bar{\mathfrak{m}} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.

Напомним, что сумма всех минимальных идеалов конечномерной алгебры S называется *цоколем* $\operatorname{Soc} S$. Цоколь инвариантен относительно эндоморфизмов S. *Аннулятор* произвольного подмножества $X \subset S$ — это идеал $\operatorname{Ann} X = \{z \in S \mid zX = 0\}$.

Лемма 2.5.1. $\operatorname{Soc} S = \operatorname{Ann} \bar{\mathfrak{m}}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный минимальный идеал $J \subset \operatorname{Soc} S$. Очевидно, что $\bar{\mathfrak{m}}J \subset J$. Но $\bar{\mathfrak{m}}J \neq J$ по лемме Накаямы. Таким образом, $\bar{\mathfrak{m}}J = 0$ и $\operatorname{Soc} S \subset \operatorname{Ann} \bar{\mathfrak{m}}$.

Пусть $z \in \operatorname{Ann} \bar{\mathfrak{m}}$. Тогда $zS = \{z(c+w) \mid c \in \mathbb{K}, w \in \bar{\mathfrak{m}}\} = \{cz \mid c \in \mathbb{K}\}$, так что главный идеал (z) является одномерным, а значит, минимальным. Следовательно, $\operatorname{Ann} \bar{\mathfrak{m}} \subset \operatorname{Soc} S$. □

Считая S градуированной, И.–Цз. Сюй и С. С.–Т. Яу нашли следующую верхнюю грань размерности группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} S$ (см. [37, Proposition 2.3]):

$$\dim \operatorname{Aut} S \geqslant \dim S - \dim \operatorname{Soc} S. \tag{2.12}$$

В теореме 2.5.4 мы выводим нижнюю грань без этого предположения.

Определение 2.5.2. Будем называть *нижним цоколем* алгебры S идеал $\operatorname{LSoc} S = \operatorname{Soc} S \cap \bar{\mathfrak{m}}^2$. Выберем подпространство $\operatorname{USoc} S \subset \operatorname{Soc} S$ так, что

$$\operatorname{Soc} S = \operatorname{USoc} S \oplus \operatorname{LSoc} S,$$

и назовём его *верхним цоколем.* Отметим, что выбор верхнего цоколя не является однозначным. Тем не менее, с точностью до замены координат мы можем считать, что $\operatorname{USoc} S \subset \langle \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \rangle$.

Предложение 2.5.3. *Группа автоморфизмов конечномерной локальной алгебры S содержит унипотентную подгруппу $U \subset \operatorname{Aut} S$, причём*

$$\dim U = \dim(\operatorname{LSoc} S) \cdot \dim(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2) + \dim(\operatorname{USoc} S) \cdot (\dim(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2) - \\ - \dim(\operatorname{USoc} S)).$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{USoc} S = \langle \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s \rangle$. Рассмотрим унипотентную подгруппу линейных преобразований

$$U = \{u\colon \bar{x}_1 \mapsto \bar{x}_1 + F_1, \ldots, \bar{x}_n \mapsto \bar{x}_n + F_n \mid \\ F_1, \ldots, F_s \in \operatorname{LSoc} S,\ F_{s+1}, \ldots, F_n \in \operatorname{Soc} S\} \subset \operatorname{GL}(S),$$

действующую тривиально на подпространстве $\langle 1 \rangle \oplus \bar{\mathfrak{m}}^2$. Нетрудно видеть, что

$$u(\bar{x}_i)u(\bar{x}_j) = (\bar{x}_i + F_i)(\bar{x}_j + F_j) = \bar{x}_i\bar{x}_j = u(\bar{x}_i\bar{x}_j) \text{ при } i, j \in \{1, \ldots, n\}, u \in U.$$

Следовательно,

$$u(a)u(b) = ab = u(ab) \text{ при } a, b \in \bar{\mathfrak{m}}, u \in U.$$

Таким образом, действие U согласовано с умножением в S, то есть $U \subset \operatorname{Aut} S$. Наконец,

$$\dim U = s \cdot \dim(\operatorname{LSoc} S) + (n - s) \cdot \dim(\operatorname{Soc} S) = \\ = n \cdot \dim(\operatorname{LSoc} S) + (n - s) \cdot \dim(\operatorname{USoc} S).$$

□

Теорема 2.5.4. *Пусть S — локальная конечномерная алгебра с максимальным идеалом $\bar{\mathfrak{m}}$. Тогда*

$$\dim \operatorname{Aut} S \geqslant \dim(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2) \cdot \dim \operatorname{Soc} S.$$

Доказательство. Рассмотрим подгруппу $G = \operatorname{GL}(\operatorname{USoc} S) \subset \operatorname{Aut} S$. Вместе с подгруппой U из предложения 2.5.3 она порождает подгруппу $GU \subset \operatorname{Aut} S$. Чтобы доказать неравенство

$$\dim GU \geqslant \dim G + \dim U,$$

достаточно рассмотреть касательные алгебры к G и U. В самом деле, легко видеть, что они имеют нулевое пересечение, и значит,

$$\dim GU = \dim(\operatorname{Lie} GU) \geqslant \dim(\operatorname{Lie} G) + \dim(\operatorname{Lie} U) = \dim G + \dim U = \\ = (\dim(\operatorname{USoc} S))^2 + \dim(\operatorname{LSoc} S) \cdot \dim(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2) + \dim(\operatorname{USoc} S) \cdot (\dim(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2) - \\ - \dim(\operatorname{USoc} S)) = \dim(\operatorname{Soc} S) \cdot \dim(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2).$$

□

Следствие 2.5.5. *Пусть $S \neq \mathbb{K}$. Тогда группа* $\operatorname{Aut} S$ *бесконечна.*

Ясно, что группа автоморфизмов почти всегда содержит довольно большую унипотентную подгруппу. Возникает естественный вопрос, может ли вся группа автоморфизмов быть унипотентной. Рассмотрим следующий пример.

Пример 2.5.6. Мы утверждаем, что группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} S$ локальной алгебры

$$S = \mathbb{K}[x, y]/I, \quad I = (y^5, (x+y)^6, x^5 - x^3y^3, x^4y)$$

является унипотентной. В самом деле, базис Грёбнера идеала I относительно однородного лексикографического порядка с $x \prec y$ равен

$$\{x^6, y^5, x^3y^3 - x^5, 3x^2y^4 + 4x^5, x^4y\}.$$

Очевидно, $\mathfrak{m}^7 \subset I$. Обозначим через $\bar{x}, \bar{y}$ соответственно образы x, y при факторизации по I. Базис алгебры S следующий:

$$\begin{array}{lllll} 1 & \bar{x} & \bar{x}^2 & \bar{x}^3 & \bar{x}^4 \\ \bar{y} & \bar{x}\bar{y} & \bar{x}^2\bar{y} & \bar{x}^3\bar{y} & \\ \bar{y}^2 & \bar{x}\bar{y}^2 & \bar{x}^2\bar{y}^2 & \bar{x}^3\bar{y}^2 & \\ \bar{y}^3 & \bar{x}\bar{y}^3 & \bar{x}^2\bar{y}^3 & & \\ \bar{y}^4 & \bar{x}\bar{y}^4 & \bar{x}^2\bar{y}^4, & & \end{array}$$

причём $-\frac{3}{4}\bar{x}^2\bar{y}^4 = \bar{x}^3\bar{y}^3 = \bar{x}^5$.

Рассмотрим произвольный автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut} S$, и пусть

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{x}) &= a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + h_1(\bar{x}, \bar{y}), \quad h_1 \in \mathfrak{m}^2, \\ \varphi(\bar{y}) &= a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + h_2(\bar{x}, \bar{y}), \quad h_2 \in \mathfrak{m}^2. \end{aligned}$$

Заметим, что $\bar{y}$ является единственным линейным многочленом, чья 5-я степень равна нулю. Тогда из $\varphi(\bar{y}^5) = 0$ следует $a_{21} = 0$. С другой стороны, $\bar{x}$ является единственным линейным многочленом, чья 5-я степень не равна нулю и лежит в $\bar{\mathfrak{m}}^6$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{x}) &= a_{11}\bar{x} + h_1(\bar{x}, \bar{y}), \quad h_1 \in \mathfrak{m}^2, \\ \varphi(\bar{y}) &= a_{22}\bar{y} + h_2(\bar{x}, \bar{y}), \quad h_2 \in \mathfrak{m}^2, \end{aligned}$$

где $a_{11}, a_{22} \neq 0$, поскольку φ обратим. Заметим, что $\varphi((\bar{x}+\bar{y})^6) = 0$ тогда и только тогда, когда $a_{11} = a_{22} = c$. Наконец, $\varphi(x^3y^3 - x^5) = c^6x^3y^3 - c^5x^5 = 0$. Из этого следует, что $c = 1$.

Отсюда, для произвольного элемента $z \in \bar{\mathfrak{m}}^i$ справедливо вложение $(\operatorname{Aut} S) \cdot z \subset z + \bar{\mathfrak{m}}^{i+1}$. Таким образом, группа $\operatorname{Aut} S$ унипотентна.

Глава 3

Автоморфизмы аффинных конусов

3.1 Общие сведения

В этой главе основное поле $\mathbb{K}$ предполагается алгебраически замкнутым, характеристика уточняется отдельно. Мы используем следующие понятия и определения, введённые в [9] и [1].

Действие группы G на множестве A называется *m-транзитивным* если для любых двух наборов из m попарно различных точек $(a_1, \ldots, a_m)$ и $(a'_1, \ldots, a'_m)$ из A существует такой $g \in G$, что $g \cdot a_i = a'_i$ для $i = 1, \ldots, m$. Действие, m-транзитивное для всех $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, называется *бесконечно транзитивным*.

Пусть X — алгебраическое многообразие размерности $\geqslant 2$, определённое над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим регулярное действие $\mathbb{G}_a \times X \to X$ аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$. Образ группы $\mathbb{G}_a$ в группе автоморфизмов $\operatorname{Aut} X$ является однопараметрической унипотентной подгруппой. Через $\operatorname{SAut} X$ мы обозначаем подгруппу в $\operatorname{Aut} X$, порождённую всеми однопараметрическими унипотентными подгруппами. Она называется *группой специальных автоморфизмов*. Очевидно, $\operatorname{SAut} X$ является нормальной подгруппой $\operatorname{Aut} X$.

Теперь предположим, что $\mathbb{K}$ имеет характеристику нуль. Аффинное алгебраическое многообразие X называется *гибким*, если касальное пространство к X в любой гладкой точке порождено касательными векторами орбит однопараметрических унипотентных подгрупп. Следующая теорема объясняет значение понятия гибкости.

Теорема 3.1.1 ([9, Theorem 0.1]). *Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие размерности $\geqslant 2$ над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *многообразие X является гибким;*

2. *группа $\mathrm{SAut}\,X$ действует транзитивно на множестве гладких точек X_{reg} многообразия X;*

3. *группа $\mathrm{SAut}\,X$ действует бесконечно транзитивно на X_{reg}.*

Следующие три класса гибких многообразий описаны в [1]: аффинные конусы над многообразиями флагов, невырожденные торические многообразия размерности $\geqslant 2$ и надстройки над гибкими многообразиями.

Определение 3.1.2. Пусть Y — алгебраическое многообразие, и $\mathbb{K}[Y] = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ — алгебра регулярных функций на Y. Дифференцирование D на $\mathbb{K}[Y]$ называется *локально нильпотентным*, если для любой функции $f \in \mathbb{K}[Y]$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $D^n(f) = 0$.

В случае, когда Y — аффинное многообразие над полем нулевой характеристики, существует естественное взаимно-однозначное соответствие между локально нильпотентными дифференцированиями (обозначаемыми ЛНД для краткости) на $\mathbb{K}[Y]$ и $\mathbb{G}_a$-действиями на Y. В самом деле, регулярное действие $\mathbb{G}_a \times Y \to Y$ задаёт структуру рациональной $\mathbb{G}_a$-алгебры на $\mathbb{K}[Y]$, и инфитизимальная образующая этого действия является локально нильпотентным дифференцированием на $\mathbb{K}[Y]$. В обратную сторону, пусть D — ЛНД на $\mathbb{K}[Y]$. Тогда однопараметрическая группа $\{\exp(tD) \mid t \in \mathbb{K}\}$ является однопараметрической унипотентной подгруппой $\mathrm{Aut}\,Y$, см. [17]. Если Y является квазиаффинным многообразием, или же основное поле имеет положительную характеристику, то указанное соответствие, как правило, не имеет места.

Ядро ЛНД обладает свойствами, изложенными в следующей лемме.

Лемма 3.1.3 ([28, Lemma 1.7]). *Пусть A — конечнопорождённая область целостности над полем характеристики нуль. Если D и D' — два локально нильпотентных дифференцирования на A, то следующие свойства имеют место:*

(i) $\operatorname{Ker} D$ *— целостное кольцо.*

(ii) $\mathrm{tr.deg}\,\operatorname{Ker} D = \mathrm{tr.deg}\, A - 1$.

(iii) $\operatorname{Ker} D$ *факториально замкнуто, т.е.* $ab \in \operatorname{Ker} D \Rightarrow a, b \in \operatorname{Ker} D$.

(iv) *Если элемент* $a \in A$ *обратим, то* $a \in \operatorname{Ker} D$.

(v) *Если* $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} D'$, *то существуют такие функции* $f, f' \in \operatorname{Ker} D$, *что* $f'D = fD'$.

(vi) $Da \in (a) \Rightarrow Da = 0$, *где* $a \in A$.

(vii) *Если* $a \in \operatorname{Ker} D$, *то* aD *также является ЛНД.*

Пусть D — ЛНД, соответствующее $\mathbb{G}_a$-действию $H\colon \mathbb{G}_a \times X \to X$ на квазиаффинном многообразии Y, и пусть $f \in \operatorname{Ker} D$. Тогда дифференцирование fD локально нильпотентно и соответствует $\mathbb{G}_a$-действию на Y с теми же орбитами в $Y \setminus \operatorname{div}(f)$, что и H. Данное действие фиксирует каждую точку дивизора $\operatorname{div}(f)$. Однопараметрическая подгруппа $\operatorname{SAut}(Y)$, заданная fD, называется *репликой* подгруппы, порождённой D.

Следует отметить, что бесконечная транзитивность $\operatorname{SAut} Y$-действия на Y_{reg} влечёт бесконечномерность группы $\operatorname{SAut} Y$ (а значит, $\operatorname{SAut} Y$ не обладает структурой алгебраического множества). Это легко увидеть при помощи семейства всех реплик $\mathbb{G}_a$-действия на Y, соответствующего ЛНД D. В самом деле, поскольку $\operatorname{Ker} D \subset \mathbb{K}[Y]$ имеет коразмерность один, а $\dim Y \geqslant 2$, данное семейство образует бесконечномерную подгруппу в $\operatorname{Aut} Y$. Ещё одно тривиальное наблюдение заключается в том, что одномерные орбиты реплик совпадают, т.е. они определяются ядром $\operatorname{Ker} D$. Элементы ядра — это в точности функции, инвариантные относительно всех $\mathbb{G}_a$-действий из рассматриваемого семейства.

Особый интерес представляет вопрос, когда группа $\operatorname{SAut} Y$ действует на многообразии Y с открытой орбитой. Для его изучения используется следующий инвариант. Подполе рациональных функций, аннулируемое всеми продолжениями ЛНД,

$$\mathrm{FML}(Y) = \bigcap_{\delta \in \mathrm{LND}(Y)} \mathrm{Quot}\,(\ker \delta) \subset \mathbb{K}(Y)$$

называется *полевым инвариантом Макар–Лиманова.* Говорят, что этот инвариант *тривиален*, если он совпадает с $\mathbb{K}$.

Предложение 3.1.4 ([9, Proposition 5.1])**.** *Полевой инвариант Макар–Лиманова* $\mathrm{FML}(Y)$ *тривиален тогда и только тогда, когда группа* $\mathrm{SAut}\,Y$ *действует на* Y *с открытой орбитой.*

3.2 Гибкость аффинных конусов

В [22] доказано, что открытые цилиндрические подмножества проективного многообразия Y позволяют построить однопараметрические унипотентные подгруппы в группе автоморфизмов аффинного конуса над Y. Данное соображение получило развитие в [23] и [25], а также послужило основой для результатов этой главы.

Пусть Y — проективное многообразие, а H — очень обильный дивизор на Y. Поляризация многообразия Y по H задает вложение $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Рассмотрим аффинный конус $X = \mathrm{AffCone}_H\, Y \subset \mathbb{A}^{n+1}$ с вершиной в начале координат $0 \in \mathbb{A}^{n+1}$, отвечающий этому вложению. На нём имеется естественное действие гомотетиями мультипликативной группы $\mathbb{G}_m = \mathbb{G}_m(\mathbb{K})$ поля $\mathbb{K}$. Оно задаёт градуировку алгебры $\mathbb{K}[X]$. Дифференцирование на $\mathbb{K}[X]$ называется однородным, если оно переводит однородные элементы в однородные. Подмножество однородных локально нильпотентных дифференцирований обозначают через HLND(K[X]).

Определение 3.2.1 ([22, Definitions 3.5, 3.7])**.** Будем говорить, что открытое подмножество U многообразия Y является *цилиндром*, если $U \cong Z \times \mathbb{A}^1$, где Z — гладкое многообразие и $\mathrm{Pic}\, Z = 0$. Пусть теперь дан дивизор $H \subset Y$. Цилиндр U будем называть *H-полярным*, если $U = Y \setminus \mathrm{supp}\, D$ для некоторого эффективного дивизора $D \in |dH|$, где $d > 0$.

Определение 3.2.2. Подмножество $W \subset Y$ будем называть *инвариантным* относительно цилиндра $U = Z \times \mathbb{A}^1$, если $W \cap U = \pi_1^{-1}(\pi_1(W))$, где $\pi_1 \colon U \to Z$ — проекция на первую компоненту прямого произведения. Иначе говоря, каждый $\mathbb{A}^1$-слой цилиндра либо содержится в W, либо не пересекается с W.

Определение 3.2.3. Будем говорить, что многообразие Y *трансверсально покрывается* цилиндрами U_i, $i = 1, \ldots, s$, если $Y = \bigcup U_i$ и не существует собственного подмножества $W \subset Y$, инвариантного относительно всех U_i.

В следующей теореме мы даем достаточное условие гибкости аффинного конуса над проективным вложением $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, отвечающим поляризации H.

Лемма 3.2.4. *Пусть $X \subset \mathbb{A}^{n+1}$ — аффинный конус над нормальным проективным многообразием $Y \subset \mathbb{P}^n$ степени > 1. Пусть также $G \subset \operatorname{Aut} X$ — подгруппа, порождённая некоторым набором алгебраических подгрупп, коммутирующих с естественным $\mathbb{G}_m$-действием на X гомотетиями. Предположим, что существует орбита $Gx_0 \subset X$, образ которой при проекции $X \setminus \{0\} \to Y$ совпадает с подмножеством всех регулярных точек $Y_{\text{reg}} \subset Y$. Тогда $Gx = X_{\text{reg}}$.*

Доказательство. Так как степень Y больше единицы, то X имеет особую точку в вершине. Поскольку естественное $\mathbb{G}_m$-действие на X гомотетиями нормализует действие $G : X$, оно переводит G-орбиты в G-орбиты. Следовательно,

$$X_{\text{reg}} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{G}_m} \lambda G x_0 = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{G}_m} G \lambda x_0.$$

Значит, X_{reg} является объединением G-орбит, замкнутых в X_{reg}, причём проекция каждой из них совпадает с Y_{reg}.

Покажем, что орбита Gx_0 открыта и, следовательно, совпадает с X_{reg}. Предположим противное. Тогда $\dim Gx_0 = \dim Y$ и стабилизатор $S \subset \mathbb{G}_m$ орбиты Gx_0 конечен. Более того, поскольку действие S на Gx_0 свободно, для любой точки $x' \in Gx_0$ пересечение $Gx_0 \cap \mathbb{G}_m x'$ есть S-орбита, состоящая из $|S|$ различных точек. Раздутие конуса X в вершине является тотальным пространством линейного расслоения $\mathcal{O}_Y(-1)$ на Y. Оно естественным образом пополняется до $\mathbb{P}^1$-расслоения $\hat{X} \to Y$. Для общей точки $x' \in Gx_0$

пересечение $\overline{Gx_0} \cap \overline{\mathbb{G}_m x'}$, где $\overline{Z}$ обозначает замыкание $Z \subset X_{\mathrm{reg}}$ в $\hat{X}$, совпадает с орбитой Sx'. Значит, индекс пересечения $\overline{Gx} \cdot \overline{\mathbb{G}_m x'}$ равен $|S|$. Поскольку индекс пересечения постоянен, для любой точки $x' \in Gx_0$ имеем $\overline{Gx_0} \cap \overline{\mathbb{G}_m x'} = Sx' \subset X_{\mathrm{reg}}$.

Пусть D — объединение нулевого сечения и сечения на бесконечности $\mathbb{P}_1$-расслоения $\hat{X} \to Y$. Тогда $\hat{X} \setminus D \cong X \setminus \{0\}$. Поскольку $Sx' \subset X_{\mathrm{reg}}$ для любого $x' \in Gx_0$, пересечение $D \cap \overline{Gx_0}$ содержится в прообразе Y_{sing}. С другой стороны, поскольку это пересечение двух дивизоров, оно должно иметь коразмерность один D. Значит, оно пусто.

Таким образом, квазиаффинное многообразие $\hat{X} \setminus D$ содержит проективное $\overline{Gx_0}$, что невозможно. Итак, группа G действует на X_{reg} транзитивно. $\square$

Предложение 3.2.5 ([22, Proposition 3.1.5(b)]). *Пусть проективное многообразие Y содержит H-полярный цилиндр U. Тогда аффинный конус $X = \mathrm{AffCone}_H Y$ допускает эффективное $\mathbb{G}_a$-действие.*

Чтобы описать возникающее $\mathbb{G}_a$-действие, мы приводим прямое доказательство несколько ограниченного варианта данного предложения.

Лемма 3.2.6. *Пусть Y — неприводимое проективное многообразие, вложенное в $\mathbb{P}^n$, и пусть U — дополнение к гиперплоскому сечению L, наделённое $\mathbb{G}_a$-действием $\phi\colon \mathbb{G}_a \times U \to U$. Тогда аффинный конус $X = \mathrm{AffCone}\, Y \subset \mathbb{A}^{n+1}$ обладает таким однородным $\mathbb{G}_a$-действием $\hat{\phi}\colon \mathbb{G}_a \times X \to X$, что*

- *$\phi(\mathbb{G}_a \times \{\pi(x)\}) = \pi(\hat{\phi}(\mathbb{G}_a \times \{x\}))$ для любой $x \in \pi^{-1}(U)$.*
- *$\hat{\phi}$ тождественно на $X \setminus \pi^{-1}(U)$.*

Иначе говоря, естественная проекция $\pi\colon X \setminus \pi^{-1}(L) \to U$ переводит $\hat{\phi}$-орбиты в ϕ-орбиты, причём прообраз произвольной ϕ-орбиты является однопараметрическим семейством $\hat{\phi}$-орбит.

Доказательство. Пусть многообразие Y задано однородным идеалом $I \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, который не содержит x_0, и пусть $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]/I$, а $U = \{x_0 \neq 0\} \subset Y$.

Тогда имеется естественное вложение $\rho\colon U \hookrightarrow X$, $\rho(U) = \{x_0 = 1\} \subset X$. С другой стороны, $\pi\colon X\backslash\{x_0 = 0\} \to U$ является тривиальным $\mathbb{C}^*$-расслоением. Таким образом, мы можем продолжить $\mathbb{G}_a$-действие ϕ на U до $\mathbb{G}_a$-действия $\tilde{\phi}$ на $X \setminus \{x_0 = 0\}$, порождённого однородным ЛНД $\tilde{\delta}$.

Найдётся такое $d \in \mathbb{N}$, что $x_0^d\tilde{\delta}(x_i) \in \mathbb{K}[X]$ для $i = 1, \ldots, n$. Поскольку $x_0 \in \ker\tilde{\delta}$, однородное дифференцирование $\hat{\delta} = x_0^{d+1}\tilde{\delta}$ на X локально нильпотентно. Соответствующее $\mathbb{G}_a$-действие $\hat{\phi}$ однородно, совпадает с ϕ на $U \cong \{x_0 = 1\} \subset X$ и тождественно на $\{x_0 = 0\} \subset X$. □

Теорема 3.2.7. *Предположим, что для некоторого очень обильного дивизора H на нормальном проективном многообразии Y существует трансверсальное покрытие H-полярными цилиндрами. Тогда аффинный конус $X = \operatorname{AffCone}_H Y$ является гибким.*

Доказательство. Утверждение очевидно для $X = \mathbb{A}^{n+1}$. Поэтому мы можем считать, что вершина конуса является его особой точкой.

Согласно [22, Proposition 3.1.5], каждому H-полярному цилиндру U покрытия Y соответствует $\mathbb{G}_a$-действие на X. Из явного построения в [22, Proposition 3.1.5] видно, что орбиты этого действия при проекции $\pi\colon X = X \setminus \{0\} \to Y$ переходят в слои цилиндра U, а множество неподвижных точек на X это прообраз дополнения к цилиндру. Более того, соответствующие $\mathbb{G}_a$-действия однородны.

Пусть $G \subset \operatorname{SAut} X$ — подгруппа, ими порожденная. Рассмотрим орбиту Gx некоторой гладкой точки $x \in X_{\mathrm{reg}}$. Её образ $\pi(Gx) \subset Y_{\mathrm{reg}}$ инвариантен относительно всех цилиндров покрытия. Из условия трансверсальности получаем $\pi(Gx) = Y_{\mathrm{reg}}$. Поскольку группа G порождена однородными действиями, естественное $\mathbb{G}_m$-действие на X гомотетиями нормализует действие G на X и переводит G-орбиты в G-орбиты. А значит, X_{reg} является объединением G-орбит, проекция каждой из которых совпадает с Y_{reg}. Наконец, по лемме 3.2.4 имеем $Gx = X_{\mathrm{reg}}$. □

3.3 Поверхность дель Пеццо степени 5

Пусть Y — поверхность дель Пеццо степени 5. Она получается раздутием четырех точек $P_1, \ldots, P_4$ на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, никакие три из которых не лежат на одной прямой [6, Theorem IV.2.5]. Поскольку автоморфизмы проективной плоскости действуют транзитивно на таких четверках точек, поверхность единственна с точностью до изоморфизма.

Теорема 3.3.1. *Пусть H — произвольный очень обильный дивизор на поверхности дель Пеццо Y степени 5. Тогда соответствующий аффинный конус $\operatorname{AffCone}_H Y$ является гибким.*

Доказательство проводится в несколько этапов, см. пп. 3.3.1 и 3.3.2. Через E_i будем обозначать исключительные дивизоры — прообразы точек раздутия P_i. Пусть e_0 — класс дивизоров, эквивалентных прямой, не проходящей через точки раздутия, а e_i $(i = 1, \ldots, 4)$ — класс дивизоров, эквивалентных E_i. Эти классы порождают группу Пикара $\operatorname{Pic} Y = \langle e_0, \ldots, e_4\rangle_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^5$. Индекс пересечения определяет симметричную билинейную форму на группе Пикара, причём набор $\{e_0, \ldots, e_4\}$ является ортогональным базисом с $e_0^2 = 1, e_i^2 = -1$. Классы исключительных дивизоров (или, иначе говоря, (-1)-кривых) исчерпываются e_i и $e_0 - e_i - e_j$ для различных $i, j \neq 0$.

По критерию обильности Клеймана [27, теорема 1.4.9] замыкание конуса обильных дивизоров $\operatorname{Ample} Y$ является двойственным к конусу эффективных дивизоров $\overline{\mathrm{NE}}(Y)$. В случае поверхностей дель Пеццо степени < 8 конус $\overline{\mathrm{NE}}(Y)$ порождён исключительными дивизорами, см. [13, Theorem 8.2.19]. Следовательно, конус обильных дивизоров задаётся неравенствами

$$\begin{aligned} x_0 > 0,\ x_i &< 0, \qquad i = 1, \ldots, 4, \\ x_0 + x_i + x_j &> 0, \qquad 0 \neq i \neq j \neq 0, \end{aligned}$$

где $(x_0, \ldots, x_4) \in \operatorname{Pic} Y$. У него всего десять экстремальных лучей — это

$$e_0,\ e_0 - e_j,\ 2e_0 - \sum_{i \neq 0} e_i,\ 2e_0 - \sum_{i \neq 0, j} e_i, \quad j = 1, \ldots, 4. \tag{3.1}$$

Для пяти из них в соответствующей ортогональной гиперграни конуса эффективных дивизоров лежит четверка непересекающихся (-1)-кривых. Она задает стягивание $Y \to \mathbb{P}^2$, соответствующее выбранному экстремальному лучу.

Каждый луч из оставшихся пяти определяет пучок квадрик на Y. А именно, в ортогональном дополнении к лучу лежат три пары пересекающихся (-1)-кривых, образующих вырожденные слои пучка квадрик. При этом класс слоя пучка лежит на выбранном луче.

3.3.1 Цилиндры

Зафиксируем стягивание $\varphi\colon Y \to \mathbb{P}^2$ четырёх непересекающихся (-1)-кривых $E_1, \ldots, E_4$ в точки $P_1, \ldots, P_4$ и используем обозначения, введённые выше. Пусть $l_{ij} \subset \mathbb{P}^2$ — прямая, проходящая через точки P_i и P_j. Рассмотрим открытое подмножество $U_1 = \varphi^{-1}(\mathbb{P}^2 \setminus (l_{12} \cup l_{34})) \subset Y$. Это цилиндр, определяемый пучком прямых, проходящих через базисную точку $\mathrm{Bs}(U_1) = l_{12} \cap l_{34}$, причём $U_1 \cong \mathbb{A}^1_* \times \mathbb{A}^1$, где $\mathbb{A}^1_* = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Аналогично положим $U_2 = \varphi^{-1}(\mathbb{P}^2 \setminus (l_{13} \cup l_{24}))$ и $U_3 = \varphi^{-1}(\mathbb{P}^2 \setminus (l_{14} \cup l_{23}))$, как на рис. 3.1. Рассмотрим далее стягивания других четвёрок непересекающихся (-1)-кривых на Y. Всего таких наборов пять, см. рис. 3.2. Каждому стягиванию соответствует три цилиндра, получаемых аналогично. Заметим, что таким цилиндрам взаимно однозначно соответствуют точки пересечения (-1)-кривых, и группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, Y \cong S_5$ действует на множестве этих точек транзитивно.

Итак, мы определили цилиндры $U_1, U_2, \ldots, U_{15}$ такого вида, как показано на рис. 3.1 и 3.2. Несложно проверить, что каждое пересечение (-1)-кривых лежит в каком-то цилиндре; поэтому $\bigcup U_i = Y$. Мы утверждаем, что не найдётся собственного подмножества $W \subset Y$, инвариантного относительно всех 15 цилиндров. Предположим противное, пусть такое W нашлось. Возьмём произвольную точку в W. Она содержится в слое S некоторого цилиндра. Тогда W содержит S. Без ограничения общности S — слой U_1. Тогда прямая $l = \overline{\varphi(S)} \subset \mathbb{P}^2$ проходит через базисную точку $\mathrm{Bs}(U_1)$. Поскольку точки $\mathrm{Bs}(U_1), \mathrm{Bs}(U_2), \mathrm{Bs}(U_3)$ не лежат на одной прямой, одна из них не лежит на l. Пусть $\mathrm{Bs}(U_2) \notin l$. Тогда слой S пересекается почти со всеми слоями цилиндра U_2, и W содержит почти все слои U_2, то есть плотно в Y. Дополнение $Y \setminus W$ также инвариантно относительно всех цилиндров, и по тем же

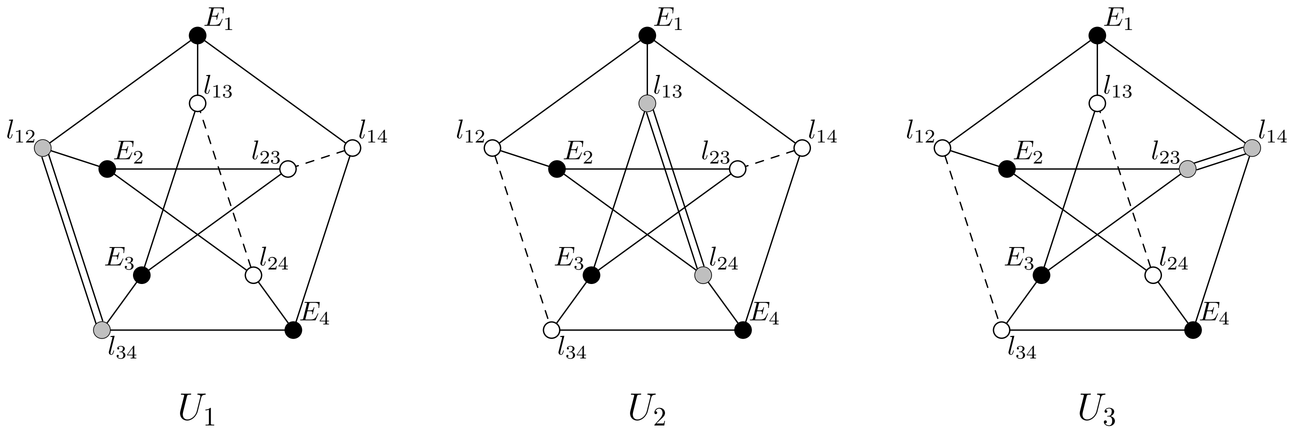

Рис. 3.1

Расположение цилиндров на графе инцидентности (-1)-кривых на поверхности дель Пеццо степени 5. Серым и чёрным точкам соответствуют (-1)-кривые, лежащие в дополнении к цилиндру. Рёбра, нарисованные пунктиром, отвечают пересечениям (-1)-кривых, принадлежащим цилиндру. Двойному ребру соответствует базисная точка соответствующего цилиндра.

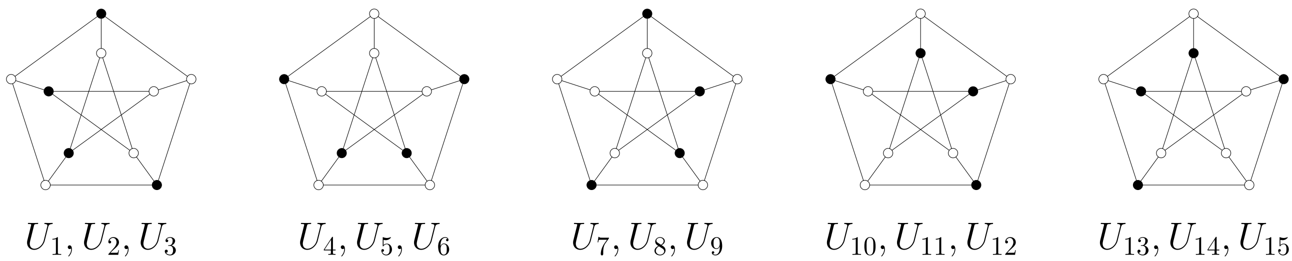

Рис. 3.2

Чёрным точкам отвечают стягиваемые четвёрки (-1)-кривых. По каждому стягиванию строится три цилиндра, как на рис. 3.1.

причинам плотно в Y, что невозможно.

3.3.2 Условие полярности

Здесь мы установим, что для любого обильного дивизора H на Y все 15 цилиндров U_i являются H-полярными. Рассмотрим множество эффективных дивизоров $\{\sum_{is=1}^{4} \alpha_i E_i + \beta_1 l_{12} + \beta_3 l_{34} \mid \alpha_i, \beta_i > 0\}$, дополнение к носителю которых совпадает с U_1. В группе Пикара ему соответствует открытый конус C, экстремальные лучи которого суть $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_0 - e_1 - e_2,\ e_0 - e_3 - e_4$. Легко проверить, что примитивные векторы обильного конуса (3.1) выражаются как линейные комбинации с неотрицательными рациональными коэффициентами примитивных векторов конуса C. Следовательно, цилиндр U_1 является

H-полярным для любого обильного дивизора H. Действуя автоморфизмами $\operatorname{Aut} Y$, мы можем перевести U_1 в любой цилиндр, поэтому все U_i будут H-полярными для любого обильного дивизора H. Применяя теорему 3.2.7, приходим к требуемому утверждению. Теорема 3.3.1 доказана.

3.4 Поверхности дель Пеццо степени 4

Каждая поверхность дель Пеццо степени 4 изоморфна раздутию проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ в пяти точках, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Такие поверхности образуют двупараметрическое семейство.

Через E_i будем обозначать (-1)-кривые — прообразы точек раздутия P_i. Как и прежде, пусть e_0 — класс дивизоров, эквивалентных прямой, не проходящей через точки раздутия, а e_i $(i = 1, \ldots, 5)$ — класс дивизоров, эквивалентных E_i. Набор $\{e_0, \ldots, e_5\}$ является ортогональным базисом в группе Пикара $\operatorname{Pic} Y \cong \mathbb{Z}^6$, причём $e_0^2 = 1,\ e_i^2 = -1$. Классы исключительных дивизоров исчерпываются классами $e_i,\ e_0 - e_i - e_j,\ 2e_0 - \sum_{k\neq 0} e_k$ для различных $i, j \neq 0$. Конус обильных дивизоров задаётся неравенствами

$$x_0 > 0,\ x_i < 0 \qquad i = 1, \ldots, 5, \tag{3.2}$$

$$x_0 + x_i + x_j > 0, \qquad 0 \neq i \neq j \neq 0, \tag{3.3}$$

$$2x_0 + x_1 + \ldots + x_5 > 0, \tag{3.4}$$

где $(x_0, \ldots, x_5) \in \operatorname{Pic} Y$. Его экстремальные лучи — это

$$e_0,\ e_0 - e_j,\ 2e_0 - \sum_{k\neq 0,i} e_k,\ 2e_0 - \sum_{k\neq 0,i,j} e_k,\ \text{и } 3e_0 - \sum_{k\neq 0} e_k - e_i \tag{3.5}$$

для каждой пары различных индексов $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$. Как и в случае поверхности дель Пеццо степени 5, шестнадцать экстремальных лучей соответствуют стягиваниям $Y \to \mathbb{P}_2$, а десять — пучкам квадрик на Y.

3.4.1 Цилиндры

Для некоторой (-1)-кривой C_1 рассмотрим стягивание $\sigma_1\colon Y \to \mathbb{P}^2$ пяти (-1)-кривых $F_1, \ldots, F_5$, пересекающих C_1, см. рис. 3.3. Оно корректно определено, поскольку стягиваемые дивизоры не пересекаются. Образ $\sigma_1(C_1)$ — это гладкая квадрика c, проходящая через центры раздутия $Q_1, \ldots, Q_5$. Возьмём произвольную прямую $l \subset \mathbb{P}^2$, касающуюся c в точке, отличной от $Q_1, \ldots, Q_5$. Пучок квадрик в $\mathbb{P}^2$, порождённый дивизорами c и $2l$, определяет цилиндр $U \cong \mathbb{A}^1_* \times \mathbb{A}^1 \subset Y$, дополнение к которому есть полный прообраз носителя дивизора $c + 2l$ в $\mathbb{P}^2$. Обозначим через $\mathcal{U}_{C_1}$ семейство таких цилиндров в Y при всевозможных выборах касательной l к c. Заметим, что $Y \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{U}_{C_1}} U$ есть объединение C_1 и стягиваемых дивизоров F_i $(i = 1, \ldots, 5)$. С помощью аналогичной конструкции для (-1)-кривых $C_2, \ldots, C_5$, образующих с C_1 цикл длины 5 на графе инцидентности, см. рис. 3.3, мы получаем в итоге пять семейств цилиндров $\mathcal{U}_{C_1}, \ldots, \mathcal{U}_{C_5}$. Легко видеть, что их объединение покрывает Y.

Пусть W — собственное подмножество в Y, инвариантное относительно цилиндров всех семейств, а $w \in W$ — его произвольная точка. Можно считать, что w лежит в цилиндре семейства $\mathcal{U}_{C_1}$. Тогда образ $\sigma_1(W) \subset \mathbb{P}^2$ является инвариантным относительно семейства цилиндров $\{\sigma_1(U) \mid U \in \mathcal{U}_{C_1}\}$, каждый из которых является дополнением к квадрике c и её касательной. Известно, что через две точки на плоскости можно провести квадрику, касающуюся данной. Таким образом, для почти любой точки $x \in \mathbb{P}^2 \setminus c$ существует слой некоторого цилиндра, проходящий через x и $\sigma_1(w)$. А именно, точка x не должна лежать на касательной к c, проходящей через $\sigma_1(w)$, и на квадриках, касающихся c в точках раздутия и проходящих через $\sigma_1(w)$. Итак, W плотно в Y. Аналогично $Y \setminus W$ плотно в Y, что невозможно. Значит, семейства $\mathcal{U}_{C_1}, \ldots, \mathcal{U}_{C_5}$ образуют трансверсальное покрытие Y.

3.4.2 Условие полярности

Обильные дивизоры H, для которых цилиндры из семейства $\mathcal{U}_{C_1}$ являются H-полярными, — это в точности обильные дивизоры из открытого конуса $\operatorname{Ample} Y \cap \{\alpha_1 F_1 + \ldots + \alpha_5 F_5 + \alpha_6 C_1 + \alpha_7 \sigma_1^{-1}(l) \mid \alpha_j > 0\}$ в $\operatorname{Pic} Y$. Определим такой конус для каждого $\mathcal{U}_{C_i}$ и обозначим его через $\operatorname{Ample}(C_i, Y)$. Он не зависит от выбора касательной l к $\sigma_i(C_i)$, поскольку по определению l не проходит через центры раздутия. Тогда множество таких дивизоров H, что все цилиндры в $\bigcup_i \mathcal{U}_{C_i}$ являются H-полярными, является открытым кону-

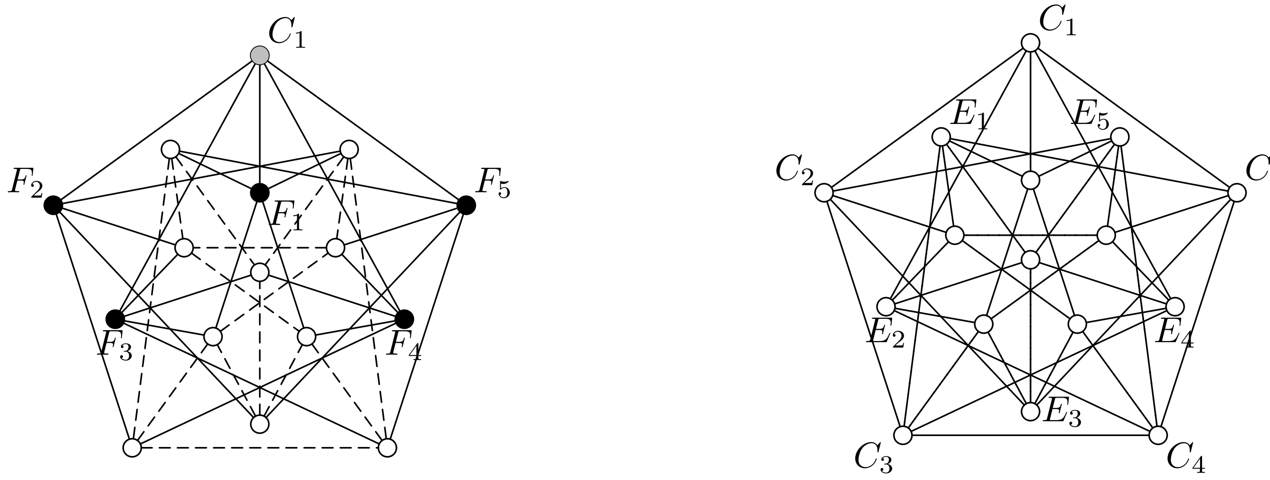

Рис. 3.3

Граф инцидентности (-1)-кривых на поверхности дель Пеццо степени 4. Слева отмечены прообраз квадрики C_1, задающий семейство цилиндров (серым), и стягиваемые (-1)-кривые (чёрным). Пунктирным рёбрам отвечают пересечения (-1)-кривых, лежащие в цилиндрах семейства. Прочие четыре семейства цилиндров получаются симметричным образом при вращении графа, и соответствуют $C_2, \dots, C_5$.

сом $\bigcup_i \mathcal{U}_{C_i}$. Вычисления показывают, что он имеет 72 экстремальных луча, а именно:

$$
\begin{array}{ll}
e_0, & 9e_0 - 5e_{i_1} - e_{i_2} - 2e_{i_3} - 4e_{i_4} - 3e_{i_5}, \\
4e_0 - 2e_{i_1} - 2e_{i_2} - e_{i_3} - e_{i_4} - e_{i_5}, & 9e_0 - 4e_{i_1} - 4e_{i_2} - 4e_{i_3} - 2e_{i_4} - 2e_{i_5}, \\
5e_0 - 2e_{i_1} - 2e_{i_2} - e_{i_3} - 3e_{i_4} - e_{i_5}, & 11e_0 - 6e_{i_1} - 2e_{i_2} - 2e_{i_3} - 4e_{i_4} - 4e_{i_5}, \\
5e_0 - 2e_{i_1} - 2e_{i_2} - 2e_{i_3} - 2e_{i_4}, & 11e_0 - 6e_{i_1} - 4e_{i_2} - 4e_{i_3} - 2e_{i_4} - 2e_{i_5}, \\
5e_0 - 2e_{i_1} - 2e_{i_2} - 2e_{i_3} - 2e_{i_4} - 2e_{i_5}, & 11e_0 - 6e_{i_1} - 2e_{i_2} - 4e_{i_3} - 4e_{i_4} - 4e_{i_5}, \\
6e_0 - 2e_{i_1} - 2e_{i_2} - 3e_{i_3} - e_{i_4} - 3e_{i_5}, & 11e_0 - 6e_{i_1} - 4e_{i_2} - 4e_{i_3} - 4e_{i_4} - 2e_{i_5}, \\
7e_0 - 4e_{i_1} - 2e_{i_2} - 2e_{i_3} - 2e_{i_4} - 2e_{i_5}, & 15e_0 - 8e_{i_1} - 2e_{i_2} - 4e_{i_3} - 6e_{i_4} - 6e_{i_5}, \\
9e_0 - 5e_{i_1} - 3e_{i_2} - 4e_{i_3} - 2e_{i_4} - 1e_{i_5}, & 15e_0 - 8e_{i_1} - 6e_{i_2} - 6e_{i_3} - 4e_{i_4} - 2e_{i_5},
\end{array}
$$

где в качестве наборов $(i_1, \dots, i_5)$ берутся циклические перестановки $(1, 2, 3, 4, 5)$.

Легко видеть, что антиканонический дивизор $(-K_Y)$ содержится в $\bigcap_i \mathrm{Ample}(C_i, Y)$. Аналогично теореме 3.3.1 получаем следующий результат.

Теорема 3.4.1. *Пусть Y — поверхность дель Пеццо степени 4, и H — очень обильный дивизор, принадлежащий конусу $\bigcap_{i=1}^{5} \mathrm{Ample}(C_i, Y)$. Тогда* *аффинный конус* $\operatorname{AffCone}_H Y$ *является гибким. В частности, это верно для антиканонического дивизора* $H = -K_Y$.

Доказательство. Поскольку семейства $\mathcal{U}_{C_1}, \ldots, \mathcal{U}_{C_5}$ образуют трансверсальное покрытие H-полярными дивизорами поверхности Y, конус $\operatorname{AffCone}_H Y$ является гибким по теореме 3.2.7. Включение $-K_Y \in \bigcap_{i=1}^{5} \operatorname{Ample}(C_i, Y)$ очевидно. □

Мы выделили такой подконус в конусе обильных дивизоров, что содержащиеся в нём очень обильные дивизоры определяют гибкие аффинные конусы. Однако он строго меньше обильного конуса. Вне этого подконуса лежит, например, класс обильных дивизоров $8e_0 - 2e_1 - 4e_2 - e_3 - e_4 - 3e_5$. Вопрос о гибкости аффинного конуса над поляризацией поверхности дель Пеццо степени 4 по произвольному очень обильному дивизору остаётся открытым.

Литература

[1] И.В. Аржанцев, М.Г. Зайденберг, К.Г. Куюмжиян, *Многообразия флагов, торические многообразия и надстройки: три примера бесконечной транзитивности*, Математический сборник **203**, № 7, (2012), 3–30.

[2] В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн–Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, изд. 3-е, стереотип., М.:МЦНМО, 2009.

[3] М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, М.: Мир, 1972.

[4] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, М.:Наука, 1988.

[5] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, *Теория инвариантов*, Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техники, Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления» **55**, М.:ВИНИТИ, 1989, 137—309.

[6] Ю.И. Манин, *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика*, М.: Наука, 1972.

[7] S.S. Abhyakar, *Local analytic geometry*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001.

[8] I.V. Arzhantsev, *Affine embeddings of homogeneous spaces*, in *"Surveys in Geometry and Number Theory"*, N. Young (Editor), LMS Lecture Notes Series **338**, Cambridge University Press, Cambridge, 2007, 1–51.

[9] I.V. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, and M. Zaidenberg, *Flexible varieties and automorphism groups*, Duke Mathematical Journal **162** (2013), no. 4, 767–823.

[10] I.V. Arzhantsev, D.A. Timashev, *On the canonical embedding of certain homogeneous spaces*. In: “Lie Groups and Invariant Theory: A.L. Onishchik’s jubilee volume” (E.B. Vinberg, Editor), AMS Translations, Series 2, vol. **213** (2005), 63–83.

[11] M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **36**, Cambridge University Press, 1995.

[12] I. Cheltsov, J. Park, and J. Won, *Affine cones over smooth cubic surfaces*, arXiv:1303.2648.

[13] I.V. Dolgachev, *Classical Algebraic Geometry: A Modern View*, Cambridge University Press, 2012.

[14] A. Elashvili, G. Khimshiashvili, *Lie Algebras of Simple Hypersurface Singularities*, Journal of Lie Theory **16** (2006), 621–649.

[15] H. Flenner, S. Kaliman, and M. Zaidenberg, *The Gromov-Winkelmann theorem for flexible varieties*. arXiv:1305.6417.

[16] H. Flenner and M. Zaidenberg, *Rational curves and rational singularities*, Mathematische Zeitschrift **244** (2003), 549–575.

[17] G. Freudenburg, *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **136**, Springer, Berlin, 2006.

[18] N.L. Gordeev and V.L. Popov, *Automorphism groups of finite dimensional simple algebras*, Annals of Mathematics **158** (2003), 1041–1065.

[19] T. de Jong, G. Pfister, *Local Analytic Geometry: Basic Theory and Applications*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, Braunschweig, 2000.

[20] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[21] G.R. Kempf, *Jacobians and Invariants*, Inventiones mathematicae **112** (1993), 315–321.

[22] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg, *Group actions on affine cones*, Montreal Centre de Recherches Mathématiques, CRM Proceedings and Lecture Notes **54** (2011), 123–163.

[23] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg. *Affine cones over Fano threefolds and additive group actions.* Osaka Journal of Mathematics (to appear); see also arXiv:1106.1312.

[24] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg. *Ga-actions on affine cones*, Transformation Groups **18** (2013), no. 4, 1137–1153.

[25] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg. *Unipotent Group Actions on Del Pezzo Cones*, Algebraic Geometry **1** (2014), no. 1, 46–56.

[26] H. Kraft, C. Procesi, *Graded morphisms of G-modules*, Annales de l'institut Fourier **37** (1987), no. 4, 161–166.

[27] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry I. Classical setting: line bundles and linear series*, Ergebnisse der Mathematik **48**, Springer, 2004.

[28] A. Liendo, *Affine T-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations*, Transformation Groups **15** (2010), no. 2, 389–425.

[29] J. Mather, S. S.-T. Yau, *Classification of isolated hypersurface singularities by their moduli algebras*, Inventiones Mathematicae **69** (1982), 243–251.

[30] M.S. Putcha, *Linear algebraic monoids*, LMS Lecture Notes Series **133**, Cambridge University Press, Cambridge, 1988

[31] L. Renner, *Linear algebraic monoids*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **134**, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 2005

[32] A. Rittatore, *Algebraic monoids and affine embeddings*, Transformation Groups **3** (1998) no. 4, 375–396

[33] M. Schulze, *A solvability criterion for the Lie algebra of derivations of a fat point*, Journal of Algebra **323** (2010), no. 10, 2916–2921.

[34] W. A. Stein et al., *Sage Mathematics Software (Version 4.6.1)*, The Sage Development Team, 2011, http://www.sagemath.org.

[35] E.B. Vinberg, *On reductive algebraic semigroups*, American Mathematical Society Translations (2) **169** (1995), 145–182

[36] V. Weispfenning, *Two Model Theoretic Proofs of Rückert's Nullstellensatz*, American Mathematical Society Translations **203** (1975), 331–342.

[37] Y.-J. Xu, S. S.-T. Yau, *Micro-Local Characterization of Quasi-Homogeneous Singularities*, American Journal of Mathematics **118** (1996), no. 2, 389–399.

[38] S. S.-T. Yau, *Continuous family of finite dimensional representations of a solvable Lie algebra arising from singularities*, Proceedings of the National Academy of Sciences **80** (Dec. 1983), 7694–7696.

[39] S. S.-T. Yau, *Solvability of Lie algebras arising from isolated singularities and nonisolatedness of singularities defined by* $sl(2, \mathbb{C})$ *invariant polynomials*, American Journal of Mathematics **113** (1991), no. 5, 773–778.

Публикации автора по теме диссертации

[40] А.Ю. Перепечко, *Гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5*, Функциональный анализ и его приложения **47**, вып. 4, 2013, 45–52.

[41] A. Perepechko, *Affine algebraic monoids as endomorphisms' monoids of finite-dimensional algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society **137** (2009), 3227–3233.

[42] А.Ю. Перепечко, *О разрешимости группы автоморфизмов конечномерной алгебры*, МГУ — М., 2013 — 25 с. Депонировано в ВИНИТИ 15.01.2014 №21-В2014.