ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

Горяшин Дмитрий Викторович

Об аддитивных свойствах арифметических функций

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре математических и компьютерных методов анализа механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Чубариков Владимир Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Добровольский Николай Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор (ФГБОУ ВПО «Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого», факультет математики, физики и информатики, заведующий кафедрой)

Авдеев Иван Федорович, кандидат физико-математических наук, доцент (ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», физико-математический факультет)

Ведущая организация: **ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет»**

Защита диссертации состоится 28 марта 2014 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», по адресу: Российская Федерация, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВПО МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А).

Автореферат разослан 28 февраля 2014 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84, созданного на базе
ФГБОУ ВПО МГУ имени М. В. Ломоносова
доктор физико-математических наук,
профессор Александр Олегович Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к аналитической теории чисел. Одним из её объектов исследования является асимптотическое поведение арифметических (теоретико-числовых) функций, т. е. функций натурального аргумента. В первую очередь изучаются характеристические функции множеств натуральных чисел, обладающих специальными аддитивными или мультипликативными свойствами: например, простых чисел, чисел, представимых в виде суммы двух квадратов и т. п. Задачи об асимптотическом поведении средних значений этих функций сводятся к распределению соответствующих множеств чисел в натуральном ряду. Большой интерес представляют также вопросы о поведении арифметических функций и распределении последовательностей в заданных подмножествах множества натуральных чисел, таких как арифметические прогрессии, «сдвинутые» простые числа и т. п.

Наряду с обычными арифметическими прогрессиями в последнее время активно изучаются свойства обобщенных арифметических прогрессий — антье-последовательностей вида $[\alpha n]$ и, более общо, $[\alpha n + \beta]$, где α — некоторое иррациональное число (аналог разности прогрессии), β — некоторое вещественное число («первый член прогрессии»)[1].

В 1975 г. Д. Лейтман и Д. Вольке[2] рассмотрели задачу о распределении простых чисел в такой последовательности. Они установили, что если $\pi(N)$ — количество всех простых чисел, не превосходящих N, а $\pi(N,\alpha)$ — количество тех из них, которые принадлежат последовательности $[\alpha n]$, то для почти всех значений $\alpha > 0$ при $N \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\pi(N,\alpha) = \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p=[\alpha n],n\in\mathbb{N}}} 1 = \frac{\pi(N)}{\alpha} + O(N^{7/8+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. Таким образом, среди чисел вида $[\alpha n]$, $n \in \mathbb{N}$, содержится

[1] В англоязычной литературе последовательность чисел такого вида называют «Beatty sequence» по имени американского математика Самюэла Битти (Samuel Beatty), предложившего в 1926 г. в журнале American Mathematical Monthly (Beatty S. Problem 3173. American Mathematical Monthly, **33** (3), 1926. P. 159; см. также книгу: Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981, гл. II, вопрос 3) задачу о следующем свойстве таких последовательностей: если $\alpha, \beta > 1$ — иррациональные числа и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, то каждое натуральное число принадлежит ровно одной из последовательностей $[\alpha n]$ и $[\beta n]$, т. е. $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [\alpha n] \sqcup \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [\beta n]$.

[2] Leitman D., Wolke D. Primzahlen der Gestalt $[f(n)]$. Math. Z. **45**. 1975. 81—92.

«правильная» доля всех простых чисел.

Отметим также, что для случая иррациональных алгебраических значений α Д. Лейтман и Д. Вольке получили асимптотическую формулу

$$\pi(N,\alpha) = \frac{\pi(N)}{\alpha} + O(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}),$$

где $c = c(\alpha) > 0$ — некоторая постоянная.

Отечественные исследования по этой тематике инициировали профессора Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков, поставившие своим ученикам ряд задач, связанных с изучением теоретико-числовых свойств антье-последовательностей. Так, в 2004 г. А. В. Бегунц[3] получил новую оценку остаточного члена в асимптотических формулах Д. Лейтмана и Д. Вольке. Его результат формулируется следующим образом. Пусть $\alpha > 0$ — иррациональное число, $\nu \geqslant 2$, и пусть неравенство

$$\left|\frac{1}{\alpha} - \frac{a}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^\nu}$$

имеет место для любых достаточно больших значений q и всех чисел a, взаимно простых с q. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\pi(N,\alpha) = \frac{\pi(N)}{\alpha} + O(N^{\varkappa+\varepsilon}),$$

где $\varkappa = \max(1 - \frac{1}{2\nu}; 0{,}8)$, а $\varepsilon > 0$ произвольно. В частности, оценка остаточного члена в этой формуле вида $O(N^{0,8+\varepsilon})$ верна в двух следующих случаях: а) если иррациональное число α имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим; б) для почти всех вещественных значений $\alpha > 0$.

В этих же двух случаях многими авторами изучалось распределение значений других арифметических функций на числах вида $[\alpha n]$: функции делителей $\tau(n)$ (А. Г. Аберкромби[4], А. В. Бегунц[5], Ж. С. Лю и В. Г. Жай[6]) и многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ (В. Г. Жай[7]), функции суммы делителей $\sigma(n)$ и функции Эйлера

[3]Бегунц А. В. О простых числах в одной антье-последовательности. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. № 2. 71—74.

[4]Abercrombie A. G. Beatty sequences and multiplicative number theory. Acta Arith. 70 (1995), 195—207.

[5]Бегунц А. В. Об одном аналоге проблемы делителей Дирихле // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. № 6. 52—56.

[6]Lü G. S., Zhai W. G. The divisor problem for the Beatty sequences. Acta Math. Sinica. **47**. 2004. 1213—1216.

[7]Zhai W. G. A note on a result of Abercrombie. Chinese Sci. Bull. **42**. 1997. 1151—1154.

$\varphi(n)$ (А. В. Бегунц[8]), характеров Дирихле (В. Д. Бэнкс и И. Е. Шпарлинский[9,10]), различных мультипликативных функций (А. М. Гулоглу и К. В. Неванс[11]), в частности, характеристических функций чисел, представимых в виде суммы двух квадратов, бесквадратных чисел и чисел, свободных от k-х степеней, $r_4(n)$ — количества представлений в виде суммы четырех квадратов и т. д. Для всех перечисленных арифметических функций доказываются результаты вида

$$\sum_{n\leqslant N} f([\alpha n]) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N} f(m) + R(N), \tag{1}$$

где $R(N)$ — остаточный член. Оценка величины $R(N)$, как правило, сводится к оценке тригонометрических сумм вида

$$\sum_{n\leqslant N} f(n)e^{2\pi i\alpha n}, \tag{2}$$

$$\sum_{m\leqslant M}\left|\sum_{n\leqslant N} f(n)e^{2\pi i\alpha mn}\right|. \tag{3}$$

В 2009 г. А. Г. Аберкромби, В. Д. Бэнкс и И. Е. Шпарлинский[12], применяя несколько другой подход, доказали асимптотическую формулу вида (1) для произвольной арифметической функции $f(n)$ и для почти всех значений $\alpha > 1$ со следующей оценкой остаточного члена:

$$R(N) \ll N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}M(f,N),$$

где $M(f,N) = 1+\max\{|f(n)|, n\leqslant N\}$. Отметим, что методы этой работы неприменимы для случая каких-либо конкретных иррациональных значений α (например, алгебраических).

Издавна внимание исследователей привлекают свойства *бесквадратных* чисел — натуральных чисел, не делящихся на квадраты простых чисел. Они имеют вид $n = p_1p_2\ldots p_s$, т. е. каждое простое число входит в каноническое разложение бес-

[8] Бегунц А. В. О распределении значений сумм мультипликативных функций на обобщенных арифметических прогрессиях. Чебышевский сборник. **6**. Вып. 2. 2005. 52—74.

[9] Banks W., Shparlinski I. E. Non-residues and primitive roots in Beatty sequences. Bull. Austral. Math. Soc. **73**. 2006. 433—443.

[10] Banks W., Shparlinski I. E. Short character sums with Beatty sequences. Math. Res. Lett. **13**. 2006. 539—547.

[11] Güloğlu A. M., Nevans C. W. Sums of multiplicative functions over a Beatty sequence. Bull. Austral. Math. Soc. **78**. 2008. 327—334.

[12] Abercrombie A. G., Banks W. D., Shparlinski I. E. Arithmetic functions on Beatty sequences. Acta Arith. **136**. 2009. No 1. 81—89.

квадратного числа n не более чем в первой степени. Таким образом, функция $\mu^2(n)$, где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, является характеристической функцией множества бесквадратных чисел. Известно[13], что для количества бесквадратных чисел, не превосходящих N, имеет место асимптотическая формула

$$Q(N) = \sum_{n \leqslant N} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} N + O(\sqrt{N}).$$

т. е. в отличие от точных квадратов или простых чисел множество бесквадратных чисел имеет положительную плотность ($\lim\limits_{N\to\infty} \frac{Q(N)}{N} = \frac{6}{\pi^2} > 0$) в натуральном ряду.

Вопрос о распределении бесквадратных чисел в арифметической прогрессии рассматривал в 1958 г. К. Прахар[14] в связи с задачей о наименьшем бесквадратном числе в арифметической прогрессии. Он доказал, что

$$Q(N; k, l) = \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv l \pmod k}} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} \frac{N}{k} \prod_{p \mid k} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} + O(\sqrt{N}),$$

где постоянная в знаке O не зависит от k и l. Более того, он показал, что в случае растущего k остаточный член в этой формуле есть $O(N^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} + k^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$. В дальнейшем ряд авторов занимались оценкой остаточного члена в этой формуле в среднем и среднеквадратичном[15,16,17].

В 2008 г. А. М. Гулоглу и К. В. Неванс[18], опираясь на оценку тригонометрической суммы вида (2) с мультипликативными коэффициентами $f(n)$, полученную Х. Монтгомери и Р. Воном[19], доказали следующую теорему: если $\alpha > 1$ — иррациональное число конечного типа[20], β — вещественное число и $f(n)$ — такая мультипликативная функция[21], что $|f(p)| \leqslant A$ для всех простых чисел p и $\sum\limits_{n \leqslant N} |f(n)|^2 \leqslant A^2 N$

[13] См., например, книгу: Hardy G. H., Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford University Press, 1975, теорема 334.

[14] Prachar K. Über die kleinste quadratfreie Zahl einer arithmetischen Reihe. Monatsh. Math. **62**. 1958. 173—176.

[15] Croft M. J. Square-free numbers in arithmetic progressions. Proc. London Math. Soc. **30** (2). 1975. 143—159.

[16] Warlimont R. On squarefree numbers in arithmetic progressions. Monatsh. Math. **73**. 1969. 433—448.

[17] Orr R. C. Remainder estimates for squarefree integers in arithmetic progression. J. Number Theory. **3**. 1971. 474—497.

[18] Güloğlu A. M., Nevans C. W. Sums of multiplicative functions over a Beatty sequence. Bull. Austral. Math. Soc. **78**. 2008. 327—334.

[19] Montgomery H. L., Vaughan R. C. Exponential sums with multiplicative coefficients. Invent. Math. **43** (1). 1977. 69—82.

[20] Числами конечного типа являются почти все вещественные числа, а также все алгебраические числа.

[21] Т. е. $f(mn) = f(m)f(n)$, если $(m, n) = 1$.

для всех натуральных N, где $A \geqslant 1$ — некоторая постоянная, то

$$\sum_{[\alpha n+\beta]\leqslant N} f([\alpha n+\beta]) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n\leqslant N} f(n) + O\left(\frac{N\ln\ln N}{\ln N}\right).$$

В частности, для случая мультипликативной функции $f(n) = \mu^2(n)$ в качестве следствия получается следующая асимптотическая формула для количества $Q(N,\alpha)$ бесквадратных чисел вида $[\alpha n]$, $1 \leqslant n \leqslant N$:

$$Q(N,\alpha) = \sum_{n\leqslant N} \mu^2([\alpha n]) = \frac{6}{\pi^2}N + O\left(\frac{N\ln\ln N}{\ln N}\right). \tag{4}$$

При этом для почти всех $\alpha > 1$ упомянутая выше теорема А. Г. Аберкромби, В. Д. Бэнкса и И. Е. Шпарлинского[22] дает более точную оценку остаточного члена: $O(N^{\frac{2}{3}+\varepsilon})$, однако не позволяет указать какие-либо конкретные значения α, для которых верна такая формула.

Следует отметить также результаты, связанные с распределением бесквадратных чисел в другой антье-последовательности, а именно последовательности чисел вида $[n^c]$, где $c > 1$ — нецелое[23]. В 1998 г. Х. Као и В. Жай[24] доказали, что

$$\sum_{n\leqslant N} \mu^2([n^c]) = \frac{6}{\pi^2}N + O(N^{1-\varepsilon})$$

при некотором $\varepsilon > 0$ и $1 < c < \frac{61}{36}$. В 2008 г. теми же авторами[25] верхняя граница для c была увеличена до $\frac{149}{87}$ в статье, содержащей лишь набросок доказательства. Подробное доказательство опубликовали в 2013 г. Р. Бейкер и др.[26] в числе других результатов, связанных с распределением арифметических функций в последовательностях вида $[n^c]$.

[22]Abercrombie A. G., Banks W. D., Shparlinski I. E. Arithmetic functions on Beatty sequences. Acta Arith. **136**. 2009. No 1. 81—89.

[23]Последовательность чисел такого вида называют также последовательностью Пятецкого-Шапиро по имени И. И. Пятецкого-Шапиро, впервые рассмотревшего задачу о распределении простых чисел в этой последовательности (Пятецкий-Шапиро И. И. О распределении простых чисел в последовательности вида $[f(n)]$. Матем. сборник. **33**. 1953. С. 559—566). Он доказал асимптотический закон распределения таких простых чисел при $1 < c < \frac{11}{12}$. В дальнейшем верхняя граница для числа c неоднократно уточнялась.

[24]Cao X. D., Zhai W. G. The distribution of square-free numbers of the form $[n^c]$. J. Théor. Nombres Bordeaux. **10**. No 2. 1998. 287—299.

[25]Cao X. D., Zhai W. G. The distribution of square-free numbers of the form $[n^c]$, II // Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) **51**. 2008. 1187—1194.

[26]Baker R., Banks W., Brüdern J., Shparlinski I., Weingartner A. Piatetski-Shapiro sequences. Acta Arith. **157**. № 1. 2013. 37—68.

Методы аналитической теории чисел находят также широкое применение при решении аддитивных задач. Одна из наиболее известных среди них — знаменитая тернарная проблема Гольдбаха о представлении нечетных чисел в виде суммы трех простых чисел, решенная в 1937 г. И. М. Виноградовым[27]. Для решения этой проблемы И. М. Виноградов применил свой, усовершенствованный вариант кругового метода, разработанного в начале XX в. Г. Г. Харди, Дж. Литтлвудом и С. Рамануджаном[28], который с успехом применялся к решению проблемы Варинга (о представлении натуральных чисел суммой k-х степеней) и других задач. Более того, И. М. Виноградов не только доказал представимость каждого достаточно большого нечетного числа N суммой трех простых чисел, но и вывел асимптотическую формулу для количества таких представлений:

$$I(N) = \frac{N^2}{2\ln^3 N}\mathfrak{S}(N) + O\left(\frac{N^2}{\ln^{3,5-\varepsilon} N}\right),$$

где

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p - 1}\right)$$

— особый ряд ($\mathfrak{S}(N) > 1$). Доказательство этой формулы стало возможным благодаря оценке тригонометрической суммы с простыми числами.

До сих пор нерешенной остается бинарная проблема Гольдбаха о представлении четных чисел суммой двух простых чисел. В отличие от тернарной проблемы круговой метод в этой задаче не позволяет получить асимптотическую формулу, однако оценки И. М. Виноградова тригонометрических сумм с простыми числами дали возможность доказать, что «почти все» чётные числа представимы: множество четных чисел, не превосходящих N и не представимых суммой двух простых чисел (так называемое *особое*, или *исключительное*, множество), имеет мощность $|E(N)| = O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right)$ для любого фиксированного $A > 0$ (этот результат доказан в 1937—1938 гг. независимо пятью авторами: Ван дер Корпут, Н. Г. Чудаков, Т. Эстерман, Г. Хейльбронн, Хуа Ло-ген). Современная оценка мощности особого множества имеет вид $|E(N)| = O(N^{1-\delta})$, для некоторой постоянной $\delta > 0$ (Х. Л. Монтгомери и Р. К. Вон[29], Чен Джин Ран и Лю Ян Мин ($\delta = 0{,}05$)[30]).

[27] Виноградов И. М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел. Докл. АН СССР. **15**. 1937. 291—294.

[28] Описание метода см., например, в книге: Вон Р. Метод Харди—Литтлвуда. М.: Мир. 1985. 184 с.

[29] Montgomery H. L., Vaughan R. C. The exceptional set in Goldbach's problem. Acta Arith. **27**. 1975. 353—370.

[30] Chen Jing-run, Liu Jian Min. The exceptional set of Goldbach-numbers (III). Chinese Quart. J. Math.

В 1997 г. Г. И. Архипов, К. Буриев и В. Н. Чубариков[31] рассмотрели особое множество в другой бинарной проблеме гольдбахова типа — о представлении натурального числа N в виде $p_1 + [\alpha p_2]$, где p_1, p_2 — простые числа. Для его мощности они получили следующую оценку: если α — алгебраическое число, то $|E(N, \alpha)| \ll N^{\frac{7}{9}+\varepsilon}$. В 2000 г. Й. Брюдерн[32] показал, что имеет место оценка $|E(N, \alpha)| \ll N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$ и рассмотрел более общую задачу о представлении N в виде $[\lambda_1 p_1] + [\lambda_2 p_2]$, где p_1, p_2 — простые числа. Для особого множества в этой задаче он получил оценку $|E(N, \lambda_1, \lambda_2)| \ll N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, если $\lambda_1, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ — алгебраические числа, причем $1, \lambda_1, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$. В 2002 г. Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков[33] при одном лишь условии, что $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ — иррациональное алгебраическое число, получили более сильную оценку: $|E(N, \lambda_1, \lambda_2)| \ll N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$. Существенную роль в ее доказательстве играет лемма о мере множества «больших дуг» в разбиении Фарея (ее полное доказательство опубликовано в статье Г. И. Архипова и В. Н. Чубарикова[34]).

В 1999 г. С. Ю. Фаткина[35] рассмотрела видоизмененную тернарную проблему Гольдбаха и, пользуясь методами работ Г. И. Архипова, К. Буриева и В. Н. Чубарикова, доказала асимптотическую формулу для числа представлений натурального числа N в виде $N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2} p_3]$ (p_1, p_2, p_3 — простые числа) с почти равными слагаемыми, т. е. с условиями $\dfrac{N}{3} - U < p_1 < \dfrac{N}{3} + U$, $\dfrac{N}{3} - U < p_2 < \dfrac{N}{3} + U$, $\dfrac{N}{3} - U < [\sqrt{2} p_3] < \dfrac{N}{3} + U$. При $U = N^{\frac{5}{8}} \ln^c N$ (c — некоторая константа) она доказала следующую асимптотическую формулу для количества таких представлений:

$$I(N, U, \sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{U^2}{\ln^3 N} + O\left(\frac{U^2}{\ln^4 N}\right).$$

4 (1). 1989. 1—15.

[31] Архипов Г. И., Буриев К., Чубариков В. Н. О мощности особого множества в бинарных аддитивных задачах с простыми числами. Труды МИАН. **218**. 1997. 28—57.

[32] Brüdern J. Some additive problems of Goldbach's type. Funct. et Approx. Comment. Math. **28**. 2000. 45—73. См. также Brüdern J., Cook R.J., Perelli A. The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments. Sieve Methods, Exponential Sums and Their Applications in Number Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1997. 87—100.

[33] Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об исключительном множестве в бинарной проблеме гольдбахова типа. Докл. АН. **387**. № 3. 2002. 295—296.

[34] Архипов Г. И., Чубариков В. Н. О мере «больших дуг» в разбиении Фарея. Чебышевский сборник. **12**. 2011. Вып. 4. 35—38; см. также лемму 4 в работе Brüdern J., Cook R.J., Perelli A. The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments. Sieve Methods, Exponential Sums and Their Applications in Number Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1997. 87—100.

[35] Фаткина С. Ю. О представлении натурального числа суммой трех почти равных слагаемых, порожденных простыми числами. УМН. **55**. 2000. Вып. 1. 197—198.

В. Д. Бэнкс, А. М. Гулоглу и К. В. Неванс[36] рассматривали также задачу о представлении достаточно больших натуральных чисел в виде $N = p_1+p_2+\ldots+p_\nu$, где $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ — простые числа из последовательности $[\alpha n + \beta]$, $\nu \geqslant 3$, α — иррациональное число, $1 < \alpha < \nu$. А. Кумчев[37] обобщил их результаты на случай, когда каждое из простых чисел p_i принадлежит своей последовательности вида $[\alpha_i n + \beta_i]$, где хотя бы одно из отношений α_i/α_j иррационально, $1 \leqslant i, j \leqslant \nu$.

Наряду с задачами с простыми числами многими авторами рассматривались также аддитивные задачи с бесквадратными числами. В 1929–1933 гг. К. Эвелин и Е. Линфут в серии работ[38] получили следующие асимптотические формулы для количества $r_\nu(N)$ представлений числа в виде суммы ν бесквадратных чисел ($\nu \geqslant 2$):

$$r_\nu(N) = \frac{1}{(\nu-1)!}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^\nu \mathfrak{S}_\nu(N) N^{\nu-1} + O\big(N^{\nu-1-\theta(\nu)+\varepsilon}\big),$$

где $\theta(2) = \theta(3) = \frac{1}{3}$, $\theta(\nu) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\nu}$ при $\nu \geqslant 4$, $\varepsilon > 0$ произвольно и

$$\mathfrak{S}_\nu(N) = \prod_{p^2\nmid N}\left(1 - \frac{1}{(p^2-1)^\nu}\right)\prod_{p^2|N}\left(1 - \frac{1}{(p^2-1)^{\nu-1}}\right).$$

Оценки остаточного члена в этих формулах для случаев различных ν в дальнейшем неоднократно уточнялись (Л. Мирский[39], Д. Р. Хиз-Браун[40], Й. Брюдерн и А. Перелли[41], Д. И. Толев[42] и др.). Последний результат в этой задаче при $\nu \geqslant 3$ принадлежит Й. Брюдерну и А. Перелли, которые в 1999 г. круговым методом доказали оценку остаточного члена с $\theta(\nu) = \frac{1}{2}$ при $\nu \geqslant 3$. В случае $\nu = 2$ более простое доказательство оценки остаточного члена с $\theta(2) = \frac{1}{3}$ предложил в 1931 г. Т. Эстерман[43].

[36] Banks W., Güloğlu A. M., Nevans C. W. Representations of integers as sums of primes from a Beatty sequence. Acta Arith. **130**. 2007. 255—275.

[37] Kumchev A. V. On sums of primes from Beatty sequences. Integers, **8**. 2008. 1—12.

[38] Evelyn C. J. A., Linfoot E. H. On a problem in the additive theory of numbers. I: Math. Z. **30** (1929), 433–448; II: J. Reine Angew. Math. **164** (1931), 131–140; III: Math. Z., **34** (1932), 637–644; IV: Ann. of Math. **32** (131), 261–270; V: Quart. J. Math. **3** (1932), 152–160; VI: Quart. J. Math. **4** (1933), 309–314.

[39] Mirsky L. On a theorem in the additive theory of numbers due to Evelyn and Linfoot. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **44**. 1948. 305—312.

[40] Heath-Brown D. R. The square sieve and consecutive square-free numbers. Math. Ann. **226**. 1984. 251—259.

[41] Brüdern J., Perelli A. Exponential Sums and Additive Problems Involving Square-free Numbers. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) Vol. XXVIII. 1999. 591—613.

[42] Tolev D. I. On the exponential sum with square-free numbers. Bull. London Math. Soc. **37**. 2005. 827—834.

[43] Estermann T. On the representations of a number as the sum of two numbers not divisible by k-th powers. J. London Math. Soc. **6**. 1931. 37—40.

Многими авторами исследовались также задачи об асимптотическом поведении средних значений арифметических функций в последовательности «сдвинутых» простых чисел, т. е. на множестве вида $\{p-1\,|\,p$ — простое число$\}$. Как правило, порядок роста среднего значения многих арифметических функций на этом множестве соответствует порядку их роста по всем подряд идущим натуральным числам. Одной из наиболее известных задач такого типа является *проблема делителей Титчмарша* об асимптотическом поведении суммы

$$T(N)=\sum_{p\leqslant N}\tau(p-1)$$

при $N\to\infty$, где $\tau(n)$ — функция делителей. Для суммы $T(N)$ Е. Титчмарш[44] в 1930 г. в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана получил асимптотическую формулу

$$T(N)=\sum_{p\leqslant N}\tau(p-1)=c_0N+O\left(N\frac{\ln\ln N}{\ln N}\right),\quad N\to\infty,\tag{5}$$

где $c_0=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}=\frac{315\zeta(3)}{2\pi^4}$, $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ — дзета-функция Римана. Позднее Ю. В. Линник[45] с помощью разработанного им (весьма сложного) дисперсионного метода опубликовал безусловное доказательство этого результата. В конце 60-х годов прошлого века был разработан метод большого решета, на основе которого удалось доказать теорему о распределении простых чисел в среднем по арифметическим прогрессиям (теорема Э. Бомбьери — А. И. Виноградова), позволившую значительно упросить доказательство. В 1986 г. Э. Бомбьери, Ж. Фридландер и Г. Иванец[46] доказали, что оценку остаточного члена в формуле (5) можно заменить на $O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right)$ для любого фиксированного $A>0$.

Рядом авторов рассматривались суммы вида (5) с другими арифметическими

[44] Titchmarsh E. C. A divisor problem. Rend. Circ. Mat. Palermo. **54.** 1930. 414—429.

[45] Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л.: Изд-во ЛГУ. 1961. 207 с.

[46] Bombieri E., Friedlander J. B., Iwaniec H. Primes in arithmetic progressions to large moduli. Acta Math. **156**. 1986. 203—251.

функциями (К. Хооли[47], Ж. Портер[48], Р. Вон[49], А. Фуджи[50], С. Пиллай[51], П. Эллиотт и Х. Халберстам[52], М. Б. Барбан[53], Т. М. Федулова[54], Е. П. Давлетярова[55] и другие). Отметим, что задача о точных квадратах вида $p-1$ является одной из труднейших нерешённых задач теории простых чисел. Доказать бесконечность точных квадратов в этой последовательности, или, другими словами, бесконечность простых чисел вида n^2+1, — одна из знаменитых четырёх проблем, сформулированных Э. Ландау на Пятом Международном математическом конгрессе в Кембридже (Великобритания) в 1912 г., ни одна из которых не решена до сих пор.

Цель и задачи исследования

Решение задач аддитивного типа с точными квадратами и бесквадратными числами в антье-последовательностях вида $[\alpha n]$, где число α иррационально, а также в последовательности «сдвинутых» простых чисел; исследование асимптотического поведения количества решений.

Методы исследования

В работе применяются методы аналитической теории чисел (в частности, теории тригонометрических сумм и круговой метод), теории диофантовых приближений и математического анализа.

[47] Hooley C. On the representation of a number as a sum of two squares and a prime. Acta Math. **97**. 1957. 189—210.

[48] Porter J. W. The generalized Titchmarsh—Linnik divisor problem. Proc. London. Math. Soc. **24**. №1. 1972. 15—26.

[49] Vaughan R. C. On the number of solutions of the equation $p = a + n_1 \ldots n_k$ with $a < p \leqslant x$. J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **6**. 1972. 43—55.

[50] Fujii Akio. On some analogues of Titchmarsh divisor problem. Nagoya Math. J. **64**. 1976. 149—158.

[51] Pillai S. S. On the sum function connected with primitive roots. Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A. **13**. 1941. 526—529.

[52] Elliott P. D. T. A., Halberstam H. Some applications of Bombieri's theorem. Mathematika. **13**. 1966. 196—203.

[53] Барбан М. Б. Об аналогах проблемы делителей Титчмарша. Вестник Ленингр. ун-та. №19. 1963. 5—13.

[54] Федулова Т. М. Некоторые обобщения проблемы делителей Титчмарша. Волж. мат. сб. №8. 1971. 206—210.

[55] Давлетярова Е. П. О мультипликативных функциях на множестве $\{p-1\}$. Чебышевский сборник. **1**. 2001. 15—24.

Научная новизна

Результаты, полученные в диссертации, являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

1. Получены новые оценки двойных тригонометрических сумм с точными квадратами и бесквадратными числами, позволившие доказать асимптотические формулы для количества точных квадратов и бесквадратных чисел в последовательности чисел вида $[\alpha n]$, где α — иррациональное алгебраическое число или число, имеющее ограниченные неполные частные.

2. Решены следующие аддитивные задачи: о числе решений уравнения $q_1 + q_2 + [\alpha q_3] = N$ (тернарная задача) и о числе решений уравнения $q_1 + [\alpha q_2] = N$ (бинарная задача) в бесквадратных числах q_1, q_2, q_3; найдены асимптотические формулы со степенным понижением для числа решений в случае, если α — иррациональное алгебраическое число.

3. Доказаны асимптотические формулы для количества бесквадратных чисел в последовательности «сдвинутых» простых чисел $\{p-1 \,|\, p$ — простое число$\}$, а также в ее подпоследовательностях $\{p-1 \,|\, p$ — простое число$, p \equiv a \pmod{k}\}$.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Её результаты представляют интерес для специалистов в области аналитической теории чисел и могут найти применение в различных разделах теории чисел и математического анализа.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и всероссийских и международных конференциях:

1. Семинар «Аналитическая теория чисел» под руководством профессора Г. И. Архипова и профессора В. Н. Чубарикова. Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (2012—2013 гг.).

2. Семинар «Арифметические функции» под руководством профессора В. Н. Чубарикова и доцента Р. Н. Бояринова. Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (2011—2012 гг.).

3. XI Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, 9—14 сентября 2013 г.

4. Конференция памяти профессора А. А. Карацубы по теории чисел и приложениям. Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва, 31 января 2014 г.

5. VII Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная памяти профессора А. А. Карацубы. Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого, г. Тула, 11—16 мая 2010 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора, список которых приведён в конце автореферата [1—5]; из них первые две — в журналах из перечня ВАК.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из оглавления, списка используемых обозначений, введения, четырёх глав и списка литературы, насчитывающего 77 наименований. Объём диссертации составляет 77 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** к диссертации содержится обзор результатов, относящихся к теме диссертации, а также формулируются основные полученные в ней результаты.

В **первой главе** решается задача о нахождении асимптотической формулы для величины $S(N,\alpha)$, равной количеству точных квадратов среди чисел вида $[\alpha n]$, $n \leqslant N$. Более точно, доказывается следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть иррациональное число $\alpha > 1$ имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $N \to \infty$*

справедлива асимптотическая формула

$$S(N,\alpha)=\sum_{n\leqslant N}\delta([\alpha n])=\sqrt{\frac{N}{\alpha}}+O\left(N^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right).$$

Эта формула верна также для почти всех вещественных значений $\alpha>1$.

Здесь $\delta(n)$ — характеристическая функция множества точных квадратов. Ключевым моментом доказательства этой теоремы является лемма об оценке двойной тригонометрической суммы вида (3) с функцией $f(n)=\delta(n)$. Метод оценки таких сумм был разработан Г. Вейлем (его именем названы однократные суммы с многочленом в показателе экспоненты). Применяя метод Г. Вейля, мы сводим оценку рассматриваемой суммы к оценкам линейных тригонометрических сумм и получаем требуемый результат.

Вторая глава диссертации посвящена улучшению оценки остаточного члена в формуле (4) для случая имеющих ограниченные неполные частные и алгебраических α. Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 2.1. *Пусть иррациональное число $\alpha>1$ имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим. Тогда при $N\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$Q(N,\alpha)=\sum_{n\leqslant N}\mu^2([\alpha n])=\frac{6}{\pi^2}N+O\left(AN^{\frac{5}{6}}\ln^5 N\right),$$

где $A=A(N)=\max\limits_{1\leqslant m\leqslant N^2}\tau(m)$.

Заметим, что в силу известной оценки $\max\limits_{1\leqslant m\leqslant N^2}\tau(m)\ll N^{\varepsilon}$ (для сколь угодно малых $\varepsilon>0$) остаточный член в этой формуле есть $O(N^{\frac{5}{6}+\varepsilon})$. Как и в теореме 1.1, доказательство основано на получении новой оценки тригонометрической суммы с бесквадратными числами, т. е. суммы вида (3) с функцией $f(n)=\mu^2(n)$.

Из теоремы 2.1 и оценки тригонометрической суммы с функцией Мёбиуса, принадлежащей Д. Хаджеле и Б. Смиту[56], мы выводим также следующее утверждение.

Следствие 2.3. *Пусть $Q_0(N,\alpha)$ и $Q_1(N,\alpha)$ — количества бесквадратных чисел вида $[\alpha n]$, $1\leqslant n\leqslant N$, имеющих чётное и нечётное число простых делителей соответственно, а иррациональное число $\alpha>1$ имеет ограниченные непол-*

[56] Hajela D., Smith B. On the maximum of an exponential sum of the Möbius function. Lecture Notes in Mathematics (Springer, Berlin, 1987). 145—164.

ные частные или является алгебраическим. Тогда справедливы асимптотические формулы

$$Q_0(N, \alpha) = \frac{3}{\pi^2}N + O\left(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}\right), \quad Q_1(N, \alpha) = \frac{3}{\pi^2}N + O\left(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}\right),$$

и, таким образом,

$$Q_0(N, \alpha) \sim Q_1(N, \alpha) \sim \frac{3}{\pi^2}N, \quad N \to \infty.$$

Более того, в предположении справедливости гипотезы Римана о нулях дзета-функции остаточный член в этих асимптотических формулах для $Q_0(N, \alpha)$, $Q_1(N, \alpha)$ *можно заменить на* $O\left(AN^{\frac{5}{6}}\ln^5 N\right)$, *где* $A = A(N) = \max\limits_{1\leqslant m\leqslant N^2} \tau(m)$.

Это следствие показывает, что бесквадратные числа с чётным и нёчетным числом простых делителей распределены в последовательности $[\alpha n]$ асимптотически поровну.

В **третьей главе** диссертации рассматриваются две следующие аддитивные задачи. Пусть $\alpha > 1$ — фиксированное иррациональное число и пусть $r_2(N, \alpha)$ и $r_3(N, \alpha)$ равны соответственно количествам разбиений натурального числа N на одно и два бесквадратных слагаемых и слагаемое вида $[\alpha q]$, где q также бесквадратное, т. е. числу представлений числа N в виде

$$q_1 + [\alpha q_2] = N,$$

и в виде

$$q_1 + q_2 + [\alpha q_3] = N,$$

соответственно, где q_1, q_2, q_3 — бесквадратные числа.

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha > 1$ *— иррациональное алгебраическое число. Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *для количества* $r_3(N, \alpha)$ *решений уравнения* $q_1 + q_2 + [\alpha q_3] = N$ *в бесквадратных числах* q_1, q_2, q_3 *справедлива асимптотическая формула*

$$r_3(N, \alpha) = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 N^2 + O\big(N^{\frac{11}{6}+\varepsilon}\big).$$

Теорема 3.2. *Пусть* $\alpha > 1$ *— иррациональное алгебраическое число. Тогда при* *любом $\varepsilon > 0$ для величины $r_2(N,\alpha)$ справедлива асимптотическая формула*

$$r_2(N,\alpha) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^2 N + O\big(N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\big).$$

Доказательства этих теорем для $r_3(N,\alpha)$ и $r_2(N,\alpha)$ существенно различаются. В случае $r_3(N,\alpha)$ асимптотическая формула выводится с помощью кругового метода Харди—Литтлвуда—Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова (параграф 3.1). При этом существенную роль в доказательстве играет аналог леммы Г. И. Архипова и В. Н. Чубарикова[57] о мере множества «больших дуг» в разбиении Фарея. Применяя круговой метод, мы также опираемся на теорему об оценке тригонометрической суммы с бесквадратными числами по «малым дугам», полученную ранее несколькими авторами[58,59,60]. В случае $r_2(N,\alpha)$ мы применяем аналог элементарного подхода Т. Эстермана (параграф 3.2).

Четвёртая глава диссертации посвящена исследованию распределения бесквадратных чисел на множестве «сдвинутых» простых чисел, т. е. задаче о нахождении асимптотического поведения суммы вида (5) с арифметической функцией $\mu^2(n)$. С помощью теоремы Э. Бомбьери — А. И. Виноградова мы получаем асимптотические формулы для сумм

$$\sum_{p\leqslant N}\mu^2(p-1), \qquad \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,k)}}\mu^2(p-1).$$

Приведем формулировки соответствующих теорем.

Теорема 4.1. *При $N\to\infty$ для любого $A>0$ справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{p\leqslant N}\mu^2(p-1) = c_1\,\mathrm{Li}(N) + O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right),$$

где $c_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n\varphi(n)} = \prod\limits_{p}\left(1-\frac{1}{p(p-1)}\right)$ — постоянная, $\mathrm{Li}(N) = \int\limits_2^N \frac{dt}{\ln t}$ — интегральный логарифм.

Теорема 4.2. *Пусть $1\leqslant a<k$, $(a,k)=1$. При $N\to\infty$ для любого $A>0$*

[57] Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об исключительном множестве в бинарной проблеме гольдбахова типа. Докл. АН. 2002. Т. 387. № 3. С. 295–296.

[58] Brüdern J., Granville A., Perelli A., Vaughan R. C., Wooley T. D. On the exponential sum over k-free numbers. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. **356**. 1998. 739—761.

[59] Tolev D. I. On the exponential sum with square-free numbers. Bull. London Math. Soc. **37**. 2005. 827—834.

[60] Schlage-Puchta J. C. The exponential sum over squarefree integers. Acta Arith. **115**. 2004. 265—268.

справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,k)}} \mu^2(p-1) = c_1(a,k)\,\mathrm{Li}(N) + O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right),$$

где постоянная в символе O зависит только от параметров a, k, и

$$c_1(a,k) = \sum_{l|(k,a-1)} \sum_{\substack{n=1\\ (n^2,k)=l}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi(\frac{kn^2}{l})}.$$

Отметим следующее следствие теоремы 4.2, показывающее, что бесквадратные числа распределены по множествам «сдвинутых» простых чисел, принадлежащим различным прогрессиям по модулю k, $P(a,k) = \left\{p-1 \,\middle|\, p \text{ — простое, } p \equiv a \pmod k\right\}$, где $1 \leqslant a < k$, $(a,k) = 1$, асимптотически неравномерно.

Следствие 4.1. *Пусть $1 \leqslant a < k$, $(a,k) = (a-1,k) = 1$. Тогда при $N \to \infty$ для любого $A > 0$ справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,k)}} \mu^2(p-1) = \frac{c_1}{\tilde{\varphi}(k)}\,\mathrm{Li}(N) + O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right),$$

где $c_1 = \prod\limits_{p}\left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right)$, $\tilde{\varphi}(k) = k\prod\limits_{p|k}\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right)$ и постоянная в символе O зависит только от параметров a, k.

Таким образом, для каждого из $\varphi(k)$ значений a в множества $P(a,k)$ попадают асимптотически неравные количества бесквадратных чисел: при условии $(a-1,k) = 1$ их «аномально много», порядка $\sim \frac{c_1}{\tilde{\varphi}(k)}\,\mathrm{Li}(N) > \frac{c_1}{\varphi(k)}\,\mathrm{Li}(N)$, так как $\tilde{\varphi}(k) = k\prod\limits_{p|k}\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right) < \varphi(k) = k\prod\limits_{p|k}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Отсюда видно, что в отличие от исследованного во второй главе распределения значений $\mu^2(n)$ на множестве чисел вида $[\alpha n]$ по множествам $P(a,k)$ значения этой функции распределены асимптотически неравномерно.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору В. Н. Чубарикову за постановку задач и внимание к работе, а также сотрудникам кафедры математического анализа за доброжелательное отношение и поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Горяшин Д. В. Об одной аддитивной задаче с бесквадратными числами. *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* **13**. Вып. 4. 2013. С. 41—47.

[2] Горяшин Д. В. Бинарная аддитивная задача с бесквадратными числами. *Ученые записки Орловского гос. ун-та.* № 6 (56). 2013. С. 38—41.

[3] Горяшин Д. В. Точные квадраты вида $[\alpha n]$. *Чебышевский сборник.* **14**. № 2. 2013. С. 68—73.

[4] Горяшин Д. В. Бесквадратные числа в последовательности $[\alpha n]$. *Чебышевский сборник.* **14**. № 3. 2013. С. 60—66.

[5] Горяшин Д. В. Бесквадратные числа вида $p-1$ для простых чисел p из заданной арифметической прогрессии. *Тезисы докладов XI Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения».* Саратов. 2013. С. 21—22.