ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»
Механико-математический факультет

на правах рукописи

УДК 511.3

Горяшин Дмитрий Викторович

Об аддитивных свойствах арифметических функций

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Чубариков

Москва — 2013

Содержание

Используемые обозначения

Буквами $a, b, d, k, l, m, n, r, s, \ldots$ обозначаются целые или натуральные числа, p — простые числа, $M, N, K, P, \ldots, x, y, \ldots$ — достаточно большие натуральные или вещественные числа; ε — произвольное сколь угодно малое положительное число.

Кроме того, в диссертации используются следующие стандартные обозначения:

$[x]$ — целая часть вещественного числа x;

$\{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа x;

$\|x\| = \min(\{x\}, 1-\{x\}) = \min\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$ — расстояние от числа x до ближайшего целого числа;

$\tau(n) = \sum\limits_{d|n} 1$ — функция делителей (количество делителей числа n);

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = k^2 \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

— характеристическая функция множества точных квадратов;

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ (-1)^r, & \text{если } n = p_1 p_2 \ldots p_r,\ p_i \text{ — простые числа}; \\ 0, & \text{если } p^2 \mid n \text{ для некоторого простого числа } p \end{cases}$$

— функция Мёбиуса;

(в частности,

$$|\mu(n)| = \mu^2(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ бесквадратное;} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

— характеристическая функция множества бесквадратных чисел, т. е. чисел, не делящихся на квадрат простого числа);

$\pi(N) = \sum\limits_{p \leqslant N} 1$ — количество простых чисел, не превосходящих N;

$\pi(N; k, l) = \sum\limits_{\substack{p \leqslant N \\ p \equiv l \pmod k}} 1$ — количество простых чисел, не превосходящих N, в арифметической прогрессии $kn + l$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

$\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ — дзета-функция Римана.

Записи $f(x) = O(g(x))$ (символ Э. Ландау) и $f(x) \ll g(x)$ (символ И. М. Виноградова) при $x \to \infty$ означают, что существуют положительные числа C и x_0, такие, что $|f(x)| \leqslant Cg(x)$ при $x \geqslant x_0$.

Остальные обозначения вводятся непосредственно в тексте диссертации.

Введение

Настоящая диссертация относится к аналитической теории чисел. Одним из её объектов исследования является асимптотическое поведение арифметических (теоретико-числовых) функций, т. е. функций натурального аргумента. В первую очередь изучаются характеристические функции множеств натуральных чисел, обладающих специальными аддитивными или мультипликативными свойствами: например, простых чисел, чисел, представимых в виде суммы двух квадратов и т. п. Задачи об асимптотическом поведении средних значений этих функций сводятся к распределению соответствующих множеств чисел в натуральном ряду. Большой интерес представляют также вопросы о поведении арифметических функций и распределении последовательностей в заданных подмножествах множества натуральных чисел, таких как арифметические прогрессии, «сдвинутые» простые числа и т. п.

Наряду с обычными арифметическими прогрессиями в последнее время активно изучаются свойства обобщенных арифметических прогрессий — антье-последовательностей вида $[\alpha n]$ и, более общо, $[\alpha n + \beta]$, где α — некоторое иррациональное число (аналог разности прогрессии), β — некоторое вещественное число («первый член прогрессии»)[1].

В 1975 г. Д. Лейтман и Д. Вольке [31] рассмотрели задачу о распределении

[1]В англоязычной литературе последовательность чисел такого вида называют «Beatty sequence» по имени американского математика Самюэла Битти (Samuel Beatty), предложившего в 1926 г. в журнале American Mathematical Monthly [7] (см. также [57, гл. II, вопрос 3]) задачу о следующем свойстве таких последовательностей: если $\alpha, \beta > 1$ — иррациональные числа и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, то каждое натуральное число принадлежит ровно одной из последовательностей $[\alpha n]$ и $[\beta n]$, т. е. $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [\alpha n] \sqcup \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [\beta n]$.

простых чисел в такой последовательности. Они установили, что если $\pi(N)$ — количество всех простых чисел, не превосходящих N, а $\pi(N, \alpha)$ — количество тех из них, которые принадлежат последовательности $[\alpha n]$, то для почти всех значений $\alpha > 0$ при $N \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\pi(N, \alpha) = \sum_{\substack{p \leqslant N \\ p=[\alpha n], n \in \mathbb{N}}} 1 = \frac{\pi(N)}{\alpha} + O(N^{7/8+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. Таким образом, среди чисел вида $[\alpha n]$, $n \in \mathbb{N}$, содержится «правильная» доля всех простых чисел.

Отметим также, что для случая иррациональных алгебраических значений α Д. Лейтман и Д. Вольке получили асимптотическую формулу

$$\pi(N, \alpha) = \frac{\pi(N)}{\alpha} + O(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}),$$

где $c = c(\alpha) > 0$ — некоторая постоянная.

Отечественные исследования по этой тематике инициировали профессора Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков, поставившие своим ученикам ряд задач, связанных с изучением различных свойств антье-последовательностей. В 2004 г. А. В. Бегунц [53] получил новую оценку остаточного члена в этих асимптотических формулах. Его результат формулируется следующим образом. Пусть $\alpha > 0$ — иррациональное число, $\nu \geqslant 2$, и пусть неравенство

$$\left| \frac{1}{\alpha} - \frac{a}{q} \right| \geqslant \frac{1}{q^{\nu}}$$

имеет место для любых достаточно больших значений q и всех чисел a, взаимно простых с q. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\pi(N, \alpha) = \frac{\pi(N)}{\alpha} + O(N^{\varkappa+\varepsilon}),$$

где $\varkappa = \max(1 - \frac{1}{2\nu}; 0{,}8)$, а $\varepsilon > 0$ произвольно. В частности, оценка остаточного члена в этой формуле вида $O(N^{0{,}8+\varepsilon})$ верна в двух следующих случаях: а) если иррациональное число α имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим; б) для почти всех вещественных значений $\alpha > 0$.

В этих же двух случаях многими авторами изучалось распределение значений других арифметических функций на числах вида $[\alpha n]$: функции делителей $\tau(n)$ (А. Г. Аберкромби [1], А. В. Бегунц [54], Ж. С. Лю и В. Г. Жай [32]) и многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ (В. Г. Жай [47]), функции суммы делителей $\sigma(n)$ и функции Эйлера $\varphi(n)$ (А. В. Бегунц [55]), характеров Дирихле (В. Д. Бэнкс и И. Е. Шпарлинский [4, 5]), различных мультипликативных функций (А. М. Гулоглу и К. В. Неванс [24]), в частности, характеристических функций чисел, представимых в виде суммы двух квадратов, бесквадратных чисел и чисел, свободных от k-х степеней, $r_4(n)$ — количества представлений в виде суммы четырех квадратов и т. д. Для всех перечисленных арифметических функций доказываются результаты вида

$$\sum_{n\leqslant N} f([\alpha n]) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N} f(m) + R(N), \tag{1}$$

где $R(N)$ — остаточный член. Оценка величины $R(N)$, как правило, сводится к оценке тригонометрических сумм вида

$$\sum_{n\leqslant N} f(n)e^{2\pi i\alpha n}, \tag{2}$$

$$\sum_{m\leqslant M}\left|\sum_{n\leqslant N} f(n)e^{2\pi i\alpha mn}\right|. \tag{3}$$

В 2009 г. А. Г. Аберкромби, В. Д. Бэнкс и И. Е. Шпарлинский [2], применяя несколько другой подход, доказали асимптотическую формулу вида (1) для произвольной арифметической функции $f(n)$ и для почти всех значений

$\alpha > 1$ со следующей оценкой остаточного члена:

$$R(N) \ll N^{\frac{2}{3}+\varepsilon} M(f, N),$$

где $M(f, N) = 1 + \max\{|f(n)|, n \leqslant N\}$. Отметим, что методы этой работы неприменимы для случая каких-либо конкретных иррациональных значений α (например, алгебраических).

Первые две главы настоящей диссертации посвящены продолжению исследований распределения арифметических функций в последовательности вида $[\alpha n]$. В первой главе решается задача о распределении точных квадратов в этой последовательности, т. е. о нахождении асимптотической формулы для величины $S(N, \alpha)$ — количества точных квадратов среди чисел вида $[\alpha n]$, $n \leqslant N$. Более точно, доказывается следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть иррациональное число $\alpha > 1$ имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $N \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S(N, \alpha) = \sum_{n \leqslant N} \delta([\alpha n]) = \sqrt{\frac{N}{\alpha}} + O\left(N^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right).$$

Эта формула верна также для почти всех вещественных значений $\alpha > 1$.

Ключевым моментом доказательства этой теоремы является лемма об оценке двойной тригонометрической суммы вида (3) с функцией $f(n) = \delta(n)$. Метод оценки таких сумм был разработан Г. Вейлем [46] (его именем названы однократные суммы с многочленом в показателе экспоненты). Применяя метод Г. Вейля, мы сводим оценку рассматриваемой суммы к оценкам линейных тригонометрических сумм и получаем требуемый результат.

В некотором смысле противоположными по мультипликативным свойствам к точным квадратам являются *бесквадратные* числа — натуральные числа, не делящиеся на квадраты простых чисел. Они имеют вид $n = p_1 p_2 \dots p_s$, т. е. каждое простое число входит в каноническое разложение n не более чем в первой степени. Таким образом, функция $\mu^2(n)$, где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, является характеристической функцией множества бесквадратных чисел. Известно (см., например, [26, теорема 334]), что для количества бесквадратных чисел, не превосходящих N, имеет место асимптотическая формула

$$Q(N) = \sum_{n \leqslant N} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} N + O(\sqrt{N}).$$

т. е. в отличие от точных квадратов или простых чисел множество бесквадратных чисел имеет положительную плотность ($\lim\limits_{N\to\infty} \frac{Q(N)}{N} = \frac{6}{\pi^2} > 0$) в натуральном ряду.

Вопрос о распределении бесквадратных чисел в арифметической прогрессии рассматривал в 1958 г. К. Прахар [39] в связи с задачей о наименьшем бесквадратном числе в арифметической прогрессии. Он доказал, что

$$Q(N; k, l) = \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv l \pmod k}} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} \frac{N}{k} \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} + O(\sqrt{N}),$$

где постоянная в знаке O не зависит от k и l. Более того, он показал, что в случае растущего k остаточный член в этой формуле есть $O(N^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} + k^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$. В дальнейшем ряд авторов занимались оценкой остаточного члена в этой формуле в среднем и среднеквадратичном (см. [17, 45, 36]).

В 2008 г. А. М. Гулоглу и К. В. Неванс [24], опираясь на оценку тригонометрической суммы вида (2) с мультипликативными коэффициентами $f(n)$, полученную Х. Монтгомери и Р. Воном [33], доказали следующую теорему:

если $\alpha > 1$ — иррациональное число конечного типа[2], β — вещественное число и $f(n)$ — такая мультипликативная функция[3], что $|f(p)| \leqslant A$ для всех простых чисел p и $\sum\limits_{n\leqslant N} |f(n)|^2 \leqslant A^2 N$ для всех натуральных N, где $A \geqslant 1$ — некоторая постоянная, то

$$\sum_{[\alpha n+\beta]\leqslant N} f([\alpha n+\beta]) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n\leqslant N} f(n) + O\left(\frac{N\ln\ln N}{\ln N}\right).$$

В частности, для случая мультипликативной функции $f(n) = \mu^2(n)$ в качестве следствия получается следующая асимптотическая формула для количества $Q(N,\alpha)$ бесквадратных чисел вида $[\alpha n]$, $1 \leqslant n \leqslant N$:

$$Q(N,\alpha) = \sum_{n\leqslant N} \mu^2([\alpha n]) = \frac{6}{\pi^2}N + O\left(\frac{N\ln\ln N}{\ln N}\right). \tag{4}$$

При этом для почти всех $\alpha > 1$ упомянутая выше теорема из работы [2] дает более точную оценку остаточного члена: $O(N^{\frac{2}{3}+\varepsilon})$, однако не позволяет указать какие-либо конкретные значения α, для которых верна такая формула.

Вторая глава настоящей диссертации посвящена улучшению оценки остаточного члена в формуле (4) для случая имеющих ограниченные неполные частные и алгебраических α. Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 2.1. *Пусть иррациональное число $\alpha > 1$ имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим. Тогда при $N \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$Q(N,\alpha) = \sum_{n\leqslant N} \mu^2([\alpha n]) = \frac{6}{\pi^2}N + O\left(AN^{\frac{5}{6}}\ln^5 N\right),$$

где $A = A(N) = \max\limits_{1\leqslant m\leqslant N^2} \tau(m)$.

---

[2]Числами конечного типа являются почти все вещественные числа, а также все алгебраические числа.
[3]Т. е. $f(mn) = f(m)f(n)$, если $(m,n) = 1$.

Заметим, что в силу известной оценки $\max\limits_{1\leqslant m\leqslant N^2}\tau(m)\ll N^{\varepsilon}$ (для сколь угодно малых $\varepsilon>0$) остаточный член в этой формуле есть $O(N^{\frac{5}{6}+\varepsilon})$. Как и в теореме 1.1, доказательство основано на получении новой оценки тригонометрической суммы с бесквадратными числами, т. е. суммы вида (3) с функцией $f(n)=\mu^2(n)$.

Из теоремы 2.1 и оценки тригонометрической суммы с функцией Мёбиуса, принадлежащей Д. Хаджеле и Б. Смиту [25], мы выводим также следующее утверждение.

Следствие 2.3. *Пусть $Q_0(N,\alpha)$ и $Q_1(N,\alpha)$ — количества бесквадратных чисел вида $[\alpha n]$, $1\leqslant n\leqslant N$, имеющих четное и нечетное число простых делителей соответственно, а иррациональное число $\alpha>1$ имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим. Тогда справедливы асимптотические формулы*

$$Q_0(N,\alpha)=\frac{3}{\pi^2}N+O\left(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}\right),\quad Q_1(N,\alpha)=\frac{3}{\pi^2}N+O\left(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}\right),$$

и, таким образом,

$$Q_0(N,\alpha)\sim Q_1(N,\alpha)\sim\frac{3}{\pi^2}N,\quad N\to\infty.$$

Более того, в предположении справедливости гипотезы Римана о нулях дзета-функции остаточный член в этих асимптотических формулах для $Q_0(N,\alpha)$, $Q_1(N,\alpha)$ можно заменить на $O\left(AN^{\frac{5}{6}}\ln^5 N\right)$, где $A=A(N)=\max\limits_{1\leqslant m\leqslant N^2}\tau(m)$.

Это следствие показывает, что бесквадратные числа с чётным и нечётным числом простых делителей распределены в последовательности $[\alpha n]$ асимптотически поровну.

Следует отметить также результаты, связанные с распределением бесквадратных чисел в другой антье-последовательности, а именно последовательности чисел вида $[n^c]$, где $c > 1$ — нецелое[4]. В 1998 г. Х. Као и В. Жай [14] доказали, что

$$\sum_{n \leqslant N} \mu^2([n^c]) = \frac{6}{\pi^2} N + O(N^{1-\varepsilon})$$

при некотором $\varepsilon > 0$ и $1 < c < \frac{61}{36}$. В 2008 г. теми же авторами верхняя граница для c была увеличена до $\frac{149}{87}$ в статье [15], содержащей лишь набросок доказательства. Подробное доказательство опубликовали в 2013 г. Р. Бейкер и др. [3] в числе других результатов, связанных с распределением арифметических функций в последовательностях вида $[n^c]$.

Методы аналитической теории чисел находят также широкое применение при решении аддитивных задач. Одна из наиболее известных среди них — знаменитая тернарная проблема Гольдбаха о представлении нечетных чисел в виде суммы трех простых чисел, решенная в 1937 г. И. М. Виноградовым [59] (доказательство изложено также в его книге [58]). Для решения этой проблемы И. М. Виноградов применил свой, усовершенствованный вариант кругового метода, разработанного в начале XX в. Г. Г. Харди, Дж. Литтлвудом и С. Рамануджаном (см., например, [60]), который с успехом применялся к решению проблемы Варинга (о представлении натуральных чисел суммой k-х степеней) и других задач. Более того, И. М. Виноградов не только доказал представимость каждого достаточно большого нечетного числа N суммой трех простых чисел, но и вывел асимптотическую формулу для количества таких представлений:

$$I(N) = \frac{N^2}{2 \ln^3 N} \mathfrak{S}(N) + O\left(\frac{N^2}{\ln^{3,5-\varepsilon} N}\right),$$

[4] Последовательность чисел такого вида называют также последовательностью Пятецкого-Шапиро по имени И. И. Пятецкого-Шапиро, впервые рассмотревшего задачу о распределении простых чисел в этой последовательности [67]. Он доказал асимптотический закон распределения таких простых чисел при $1 < c < \frac{11}{12}$. В дальнейшем верхняя граница для числа c неоднократно уточнялась.

где

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_{p} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p - 1}\right)$$

— особый ряд ($\mathfrak{S}(N) > 1$). Доказательство этой формулы стало возможным благодаря оценке тригонометрической суммы с простыми числами.

До сих пор нерешенной остается бинарная проблема Гольдбаха о представлении четных чисел суммой двух простых чисел. В отличие от тернарной проблемы круговой метод в этой задаче не позволяет получить асимптотическую формулу, однако оценки И. М. Виноградова тригонометрических сумм с простыми числами дали возможность доказать, что «почти все» четные числа представимы: множество четных чисел, не превосходящих N и не представимых суммой двух простых чисел (так называемое *особое*, или *исключительное*, множество), имеет мощность $|E(N)| = O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right)$ для любого фиксированного $A > 0$ (этот результат доказан в 1937–1938 гг. независимо пятью авторами: Ван дер Корпут, Н. Г. Чудаков, Т. Эстерман, Г. Хейльбронн, Хуа Ло-ген). Современная оценка мощности особого множества имеет вид $|E(N)| = O(N^{1-\delta})$, для некоторой постоянной $\delta > 0$ (Х. Л. Монтгомери и Р. К. Вон [35], Чен Джин Ран и Лю Ян Мин ($\delta = 0{,}05$) [16]).

В 1997 г. Г. И. Архипов, К. Буриев и В. Н. Чубариков [48] рассмотрели особое множество в другой бинарной проблеме гольдбахова типа — о представлении натурального числа N в виде $p_1 + [\alpha p_2]$, где p_1, p_2 — простые числа. Для его мощности они получили следующую оценку: если α — алгебраическое число, то $|E(N, \alpha)| \ll N^{\frac{7}{9}+\varepsilon}$. В 2000 г. Й. Брюдерн [10] показал, что из работы [9] вытекает оценка $|E(N, \alpha)| \ll N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$ и рассмотрел более общую задачу о представлении N в виде $[\lambda_1 p_1] + [\lambda_2 p_2]$, где p_1, p_2 — простые числа. Для особого множества в этой задаче он получил оценку $|E(N, \lambda_1, \lambda_2)| \ll N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, если $\lambda_1, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ — алгебраические числа, причем $1, \lambda_1, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$. В 2002 г. Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков [50] при одном лишь условии, что $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ — иррациональное алгебраическое число, получили более сильную оценку: $|E(N, \lambda_1, \lambda_2)| \ll N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$. Существенную роль в ее доказательстве играет лемма о мере множества «больших дуг» в разбиении Фарея (ее полное доказательство опубликовано в статье Г. И. Архипова и В. Н. Чубарикова [51]; см. также [9, лемма 4]).

В 1999 г. С. Ю. Фаткина [70] рассмотрела видоизмененную тернарную проблему Гольдбаха и, пользуясь методами работ Г. И. Архипова, К. Буриева и В. Н. Чубарикова, доказала асимптотическую формулу для числа представлений натурального числа N в виде $N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3]$ (p_1, p_2, p_3 — простые числа) с почти равными слагаемыми, т. е. с условиями $\dfrac{N}{3} - U < p_1 < \dfrac{N}{3} + U$, $\dfrac{N}{3} - U < p_2 < \dfrac{N}{3} + U$, $\dfrac{N}{3} - U < [\sqrt{2}p_3] < \dfrac{N}{3} + U$. При $U = N^{\frac{5}{8}} \ln^c N$ (c — некоторая константа) она доказала следующую асимптотическую формулу для количества таких представлений:

$$I(N, U, \sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{U^2}{\ln^3 N} + O\left(\frac{U^2}{\ln^4 N}\right).$$

В. Д. Бэнкс, А. М. Гулоглу и К. В. Неванс [6] рассматривали также задачу о представлении достаточно больших натуральных чисел в виде $N = p_1 + p_2 + \ldots + p_\nu$, где $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ — простые числа из последовательности $[\alpha n + \beta]$, $\nu \geqslant 3$, α — иррациональное число, $1 < \alpha < \nu$. А. Кумчев [30] обобщил их результаты на случай, когда каждое из простых чисел p_i принадлежит своей последовательности вида $[\alpha_i n + \beta_i]$, где хотя бы одно из отношений α_i/α_j иррационально, $1 \leqslant i, j \leqslant \nu$.

Наряду с задачами с простыми числами многими авторами рассматривались также аддитивные задачи с бесквадратными числами. В 1929–1933 гг. К. Эвелин и Е. Линфут в серии работ [22] получили следующие асимптотические формулы для количества $r_\nu(N)$ представлений числа в виде суммы ν бесквадратных чисел ($\nu \geqslant 2$):

$$r_\nu(N) = \frac{1}{(\nu-1)!}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^\nu \mathfrak{S}_\nu(N) N^{\nu-1} + O\big(N^{\nu-1-\theta(\nu)+\varepsilon}\big),$$

где $\theta(2) = \theta(3) = \frac{1}{3}$, $\theta(\nu) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\nu}$ при $\nu \geqslant 4$, $\varepsilon > 0$ произвольно и

$$\mathfrak{S}_\nu(N) = \prod_{p^2 \nmid N}\left(1 - \frac{1}{(p^2-1)^\nu}\right)\prod_{p^2 | N}\left(1 - \frac{1}{(p^2-1)^{\nu-1}}\right).$$

Оценки остаточного члена в этих формулах для случаев различных ν в дальнейшем неоднократно уточнялись (Л. Мирский [34], Д. Р. Хиз-Браун [28], Й. Брюдерн и А. Перелли [12], Д. И. Толев [42] и др.). Последний результат в этой задаче при $\nu \geqslant 3$ принадлежит Й. Брюдерну и А. Перелли [12], которые в 1999 г. круговым методом доказали оценку остаточного члена с $\theta(\nu) = \frac{1}{2}$ при $\nu \geqslant 3$. В случае $\nu = 2$ более простое доказательство оценки остаточного члена с $\theta(2) = \frac{1}{3}$ предложил в 1931 г. Т. Эстерман [19].

В третьей главе настоящей диссертации рассматриваются две следующие аддитивные задачи. Пусть $\alpha > 1$ — фиксированное иррациональное число и пусть $r_2(N,\alpha)$ и $r_3(N,\alpha)$ равны соответственно количествам разбиений натурального числа N на одно и два бесквадратных слагаемых и слагаемое вида $[\alpha q]$, где q также бесквадратное, т. е. числу представлений числа N в виде

$$q_1 + [\alpha q_2] = N,$$

и в виде

$$q_1 + q_2 + [\alpha q_3] = N,$$

соответственно, где q_1, q_2, q_3 — бесквадратные числа. Тогда имеют место следующие утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное алгебраическое число. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ для количества $r_3(N, \alpha)$ решений уравнения $q_1 + q_2 + [\alpha q_3] = N$ в бесквадратных числах q_1, q_2, q_3 справедлива асимптотическая формула*

$$r_3(N, \alpha) = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 N^2 + O\big(N^{\frac{11}{6}+\varepsilon}\big).$$

Теорема 3.2. *Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное алгебраическое число. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ для величины $r_2(N, \alpha)$ справедлива асимптотическая формула*

$$r_2(N, \alpha) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^2 N + O\big(N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\big).$$

Доказательства этих теорем существенно различаются. В случае $r_3(N, \alpha)$ асимптотическая формула выводится с помощью кругового метода Харди–Литтлвуда–Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова (параграф 3.1). При этом, как и в работе [50], существенную роль в доказательстве играет аналог леммы Г. И. Архипова и В. Н. Чубарикова о мере множества «больших дуг» в разбиении Фарея (лемма 3.3). Применяя круговой метод, мы также опираемся на теорему об оценке тригонометрической суммы с бесквадратными числами по «малым дугам» [11, 42, 40] (лемма 3.1). В случае $r_2(N, \alpha)$ мы применяем аналог элементарного подхода Т. Эстермана (параграф 3.2).

Многими авторами исследовались также задачи об асимптотическом поведении средних значений арифметических функций в последовательности «сдвинутых» простых чисел, т. е. на множестве вида $\{p-1 \mid p$ — простое число$\}$. Как правило, порядок роста среднего значения для многих арифметических функций на этом множестве соответствует порядку их роста по всем подряд идущим натуральным числам. Одной из наиболее известных задач такого типа является *проблема делителей Титчмарша* об асимптотическом поведении суммы

$$T(N) = \sum_{p \leqslant N} \tau(p-1)$$

при $N \to \infty$, где $\tau(n)$ — функция делителей. Для суммы $T(N)$ Е. Титчмарш [41] в 1930 г. в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана получил асимптотическую формулу

$$T(N) = \sum_{p \leqslant N} \tau(p-1) = c_0 N + O\left(N \frac{\ln \ln N}{\ln N}\right), \quad N \to \infty, \tag{5}$$

где $c_0 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = \frac{315\zeta(3)}{2\pi^4}$, $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ — дзета-функция Римана. Позднее Ю. В. Линник [64] с помощью разработанного им (весьма сложного) дисперсионного метода опубликовал безусловное доказательство этого результата. В конце 60-х годов прошлого века был разработан метод большого решета, на основе которого была доказана теорема о распределении простых чисел в среднем по арифметическим прогрессиям (теорема Э. Бомбьери — А. И. Виноградова), позволившая значительно упросить доказательство. В 1986 г. Э. Бомбьери, Ж. Фридландер и Г. Иванец [13] доказали, что оценку остаточного члена в формуле (5) можно заменить на $O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right)$ для любого фиксированного $A > 0$.

Рядом авторов рассматривались суммы вида (5) с другими арифметическими функциями (см. К. Хооли [29], Ж. Портер [38], Р. Вон [44], А. Фуджи [23], С. Пиллай [37], П. Эллиотт и Х. Халберстам [18], М. Б. Барбан [52], Т. М. Федулова [69], Е. П. Давлетярова [61] и др.). Отметим, что задача о точных квадратах вида $p-1$ является одной из труднейших нерешенных задач теории простых чисел. Доказать бесконечность точных квадратов в этой последовательности, или, другими словами, бесконечность простых чисел вида n^2+1, — одна из знаменитых четырёх проблем, сформулированных

Э. Ландау на Пятом Международном математическом конгрессе в Кембридже (Великобритания) в 1912 г., ни одна из которых не решена до сих пор.

Четвёртая глава диссертации посвящена исследованию распределения бесквадратных чисел на множестве «сдвинутых» простых чисел, т. е. задаче о нахождении асимптотического поведения суммы вида (5) с арифметической функцией $\mu^2(n)$. С помощью теоремы Э. Бомбьери — А. И. Виноградова мы получаем асимптотические формулы для сумм

$$\sum_{p\leqslant N}\mu^2(p-1),\qquad \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,k)}}\mu^2(p-1).$$

Приведем формулировки соответствующих теорем.

Теорема 4.1. *При $N\to\infty$ для любого $A>0$ справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{p\leqslant N}\mu^2(p-1)=c_1\,\mathrm{Li}(N)+O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right),$$

где $c_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n\varphi(n)}=\prod\limits_{p}\left(1-\frac{1}{p(p-1)}\right)$ *— постоянная,* $\mathrm{Li}(N)=\int\limits_2^N\frac{dt}{\ln t}$ *— интегральный логарифм.*

Теорема 4.2. *Пусть $1\leqslant a<k$, $(a,k)=1$. При $N\to\infty$ для любого $A>0$ справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,k)}}\mu^2(p-1)=c_1(a,k)\,\mathrm{Li}(N)+O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right),$$

где постоянная в символе O зависит только от параметров a,k, и

$$c_1(a,k)=\sum_{l|(k,a-1)}\sum_{\substack{n=1\\ (n^2,k)=l}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi(\frac{kn^2}{l})}.$$

Отметим следующее следствие теоремы 4.2, показывающее, что бесквадратные числа распределены по множествам «сдвинутых» простых чисел, принадлежащим различным прогрессиям по модулю k, $P(a,k) = \bigl\{p-1 \bigm| p - \text{простое}, p \equiv a \pmod{k}\bigr\}$, где $1 \leqslant a < k$, $(a,k)=1$, асимптотически неравномерно.

Следствие 4.1. *Пусть $1 \leqslant a < k$, $(a,k) = (a-1,k) = 1$. Тогда при $N \to \infty$ для любого $A > 0$ справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{p \leqslant N \\ p \equiv a \,(\mathrm{mod}\, k)}} \mu^2(p-1) = \frac{c_1}{\tilde{\varphi}(k)}\,\mathrm{Li}(N) + O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right),$$

где $c_1 = \prod\limits_{p}\left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right)$, $\tilde{\varphi}(k) = k\prod\limits_{p|k}\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right)$ и постоянная в символе O зависит только от параметров a, k.

Таким образом, для каждого из $\varphi(k)$ значений a в множества $P(a,k)$ попадают асимптотически неравные количества бесквадратных чисел: при условии $(a-1,k)=1$ их «аномально много», порядка $\sim \frac{c_1}{\tilde{\varphi}(k)}\,\mathrm{Li}(N) > \frac{c_1}{\varphi(k)}\,\mathrm{Li}(N)$, так как $\tilde{\varphi}(k) = k\prod\limits_{p|k}\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right) < \varphi(k) = k\prod\limits_{p|k}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Отсюда видно, что в отличие от исследованного во второй главе распределения значений $\mu^2(n)$ на множестве чисел вида $[\alpha n]$ по множествам $P(a,k)$ значения этой функции распределены асимптотически неравномерно.

Основные результаты, полученные в настоящей диссертации, опубликованы в работах автора [73, 74, 75, 76, 77].

В заключение автор выражает благодарность научному руководителю профессору В. Н. Чубарикову за постановку задач и внимание к работе, а также сотрудникам кафедры математического анализа за доброжелательное отношение и поддержку.

Глава 1

Точные квадраты вида $[\alpha n]$

Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное число. В данной главе рассматривается задача о нахождении асимптотической формулы для количества S точных квадратов в последовательности $[\alpha n]$, $n \leqslant N$ при $N \to \infty$. Обозначим

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = k^2 \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(характеристическая функция множества точных квадратов). Тогда S равно значению суммы

$$S = S(N, \alpha) = \sum_{n \leqslant N} \delta([\alpha n]).$$

Сформулируем основной результат настоящей главы.

Теорема 1.1. *Пусть иррациональное число $\alpha > 1$ имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $N \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S = \sum_{n \leqslant N} \delta([\alpha n]) = \sqrt{\frac{N}{\alpha}} + O\left(N^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right).$$

Эта формула верна также для почти всех вещественных значений $\alpha > 1$.

1.1. Вспомогательные леммы

Для доказательства основной теоремы этой главы нам потребуется ряд вспомогательных утверждений, которые мы будем использовать также и в других главах диссертации.

Одним из основных инструментов «снятия знака целой части» является следующая лемма о приближении функции $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$ частичной суммой ее ряда Фурье (см. [49, стр. 440, 601, 607]). (Здесь и далее мы переопределяем функцию $\rho(x)$ в целых точках регулярным образом, т. е. $\rho(n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.)

Лемма 1.1. *При всех $P \geqslant 2$ для функции $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$ имеет место разложение*

$$\rho(x) = \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant P} \frac{e^{2\pi ikx}}{2\pi ik} + O(r(x)),$$

где

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + P^2 \sin^2 \pi x}} = \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant P \ln P} c_k e^{2\pi ikx} + O\left(\frac{\ln P}{P}\right), \quad c_k \ll \frac{\ln P}{P} e^{-|k|/P}.$$

Пусть функция $\varphi_{(a,b)}(x)$ — характеристическая функция интервала $(a, b) \subset (0; 1]$, регулярная в точках разрыва:

$$\varphi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a < x < b; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = a \text{ или } x = b; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

и продолженная периодически на всю числовую ось.

Лемма 1.2. *Справедливо равенство*

$$\varphi_{(a,b)}(x) = (b - a) + \rho(x - a) - \rho(x - b).$$

Доказательство см. в [49, стр. 445].

Приведем две известные теоремы о приближении иррациональных чисел рациональными.

Лемма 1.3 (теорема Дирихле). *Пусть λ — вещественное число и $\tau \geqslant 2$. Тогда существуют такие числа $a \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, что $1 \leqslant q \leqslant \tau$, $(a, q) = 1$ и*

$$\left|\lambda - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Лемма 1.4 (теорема Рота). *Пусть λ — иррациональное алгебраическое число. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное количество пар (a, q) целых чисел, таких, что $q \geqslant 1$, $(a, q) = 1$ и*

$$\left|\lambda - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Доказательство лемм 1.3 и 1.4 см, например, в [63, гл. I, гл. VI]. Сформулируем в качестве отдельной леммы следствие теорем Дирихле и Рота для иррациональных алгебраических чисел.

Лемма 1.5. *Пусть λ — иррациональное алгебраическое число. Тогда для любых чисел $\tau \geqslant 2$ и $\varepsilon > 0$ существует такая пара целых чисел (a, q), что $q \geqslant 1$, $(a, q) = 1$ и*

$$\lambda = \frac{a}{q} + \frac{\theta'}{q\tau} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2},$$

где $|\theta| \leqslant 1$, $|\theta'| \leqslant 1$ и $\tau^{1-\varepsilon} \ll q \leqslant \tau$ (постоянная в знаке $\ll$, вообще говоря, зависит от ε).

Доказательство. Действительно, по теореме Рота неравенство

$$\left|\lambda - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

выполняется для конечного числа несократимых дробей $\frac{a}{q}$, поэтому для некоторого $c = c(\varepsilon) > 0$ неравенство

$$\left|\lambda - \frac{a}{q}\right| \geqslant \frac{c}{q^{2+\varepsilon}}$$

выполнено для всех пар целых чисел (a, q) таких, что $q \geqslant 1$, $(a, q) = 1$. С другой стороны, по лемме Дирихле для некоторой такой пары имеет место неравенство

$$\left|\lambda - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Поэтому для числа q в этой паре (т. е. для знаменателя соответствующей подходящей дроби к числу λ) имеем оценку

$$\frac{c}{q^{2+\varepsilon}} \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad \tau \gg q^{1+\varepsilon},$$

откуда $q \gg q^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \gg q^{1-\varepsilon}$, так как $\frac{1}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$. Лемма 1.5 доказана.

Для случая чисел λ с ограниченными неполными частными мы будем использовать следующую лемму.

Лемма 1.6. *Пусть λ — иррациональное число с ограниченными неполными частными. Тогда: 1) существует $C = C(\lambda) > 0$ такое, что для всех пар целых чисел (a, q) с условиями $q \geqslant 1$, $(a, q) = 1$ выполнено неравенство*

$$\left|\lambda - \frac{a}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^2};$$

2) для любого $\tau \geqslant 2$ существует такая пара целых чисел (a, q), $q \geqslant 1$, $(a, q) = 1$, что

$$\lambda = \frac{a}{q} + \frac{\theta'}{q\tau} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2},$$

где $|\theta| \leqslant 1$, $|\theta'| \leqslant 1$ и $\tau \ll q \leqslant \tau$ (постоянная в знаке $\ll$ зависит только от C).

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из [71, теорема

23]. Второе утверждение доказывается так же, как и в лемме 1.5.

Наконец, для случая почти всех λ нам потребуется следующее следствие из основной теоремы метрической теории цепных дробей [71, теорема 32].

Лемма 1.7. *При любом $\varepsilon > 0$ для почти всех вещественных чисел λ (в смысле меры Лебега): 1) неравенство*

$$\left|\lambda - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2 \ln^{1+\varepsilon} q}$$

имеет лишь конечное число решений в целых числах (a, q) с условиями $q \geqslant 1$, $(a, q) = 1$;

2) для любых чисел $\tau \geqslant 2$ и $\varepsilon > 0$ существует такая пара целых чисел (a, q), что $q \geqslant 1$, $(a, q) = 1$ и

$$\lambda = \frac{a}{q} + \frac{\theta'}{q\tau} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2},$$

где $|\theta| \leqslant 1$, $|\theta'| \leqslant 1$ и $\tau^{1-\varepsilon} \ll q \leqslant \tau$ (постоянная в знаке $\ll$, вообще говоря, зависит от ε).

Доказательство. Рассуждения здесь аналогичны случаю леммы 1.5, поскольку $\tau \ll q^2 \ln^{1+\varepsilon} q \ll q^{1+\varepsilon}$.

Следующие две классические леммы И. М. Виноградова приведем в форме, использованной Р. Воном в статье [43].

Лемма 1.8. *При $Y \geqslant 1$*

$$\left|\sum_{y \leqslant Y} e^{2\pi i \lambda y}\right| \leqslant \min\left(Y, \frac{1}{2\|\lambda\|}\right),$$

где $\|\lambda\|$ — расстояние от числа λ до ближайшего целого числа.

Лемма 1.9. *Пусть* $\lambda = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a,q) = 1$, $q \geqslant 1$, $|\theta| \leqslant 1$. *Тогда при* $X, Y \geqslant 1$

$$\sum_{x \leqslant X} \min\left(Y, \frac{1}{\|\lambda x\|}\right) \ll \frac{XY}{q} + (X+q)\ln 2q,$$

$$\sum_{x \leqslant X} \min\left(\frac{XY}{x}, \frac{1}{\|\lambda x\|}\right) \ll \left(\frac{XY}{q} + X + q\right)\ln 2XYq.$$

1.2. Сведение к оценке тригонометрических сумм

Приступим к доказательству теоремы 1.1. Заметим, что равенство $m = [\alpha n]$ равносильно тому, что $\alpha n - 1 < m < \alpha n$, $\frac{m}{\alpha} < n < \frac{m}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$, т. е. $\{\frac{m}{\alpha}\} > 1 - \frac{1}{\alpha}$.

Рассмотрим характеристическую функцию интервала $(1 - \frac{1}{\alpha}; 1)$

$$\omega(x) = \varphi_{(1-\frac{1}{\alpha};1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 - \frac{1}{\alpha} < x < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 1 - \frac{1}{\alpha} \text{ или } x = 1; \\ 0, & \text{если } 0 < x < 1 - \frac{1}{\alpha}, \end{cases}$$

продолженную периодически на всю числовую ось. Тогда

$$\sum_{n \leqslant N} \delta([\alpha n]) = \sum_{\substack{m \leqslant \alpha N \\ \{\frac{m}{\alpha}\} > 1 - \frac{1}{\alpha}}} \delta(m) = \sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m) \omega\left(\frac{m}{\alpha}\right).$$

Поскольку по лемме 1.2 $\omega(x) = \frac{1}{\alpha} + \rho(x + \frac{1}{\alpha}) - \rho(x)$, получаем

$$\sum_{k \leqslant N} \delta([\alpha n]) = \frac{1}{\alpha} \sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m) + \sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m) \rho\left(\frac{m+1}{\alpha}\right) - \sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m) \rho\left(\frac{m}{\alpha}\right).$$

Первое слагаемое в правой части даёт главный член доказываемой асимптотической формулы:

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m) = \frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\alpha N}\right] = \sqrt{\frac{N}{\alpha}} + O(1).$$

Рассмотрим теперь второе и третье слагаемые. Обозначим их через

$$R = \sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m)\rho\left(\frac{m+1}{\alpha}\right) - \sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m)\rho\left(\frac{m}{\alpha}\right)$$

и воспользуемся леммой 1.1 о разложении функции $\rho(x)$ в ряд Фурье:

$$R = \sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m)\left(\rho\left(\frac{m+1}{\alpha}\right) - \rho\left(\frac{m}{\alpha}\right)\right) =$$

$$= \sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m) \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant P} \frac{e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}}}{2\pi i k}\left(e^{2\pi i \frac{k}{\alpha}} - 1\right) + O\left(\sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m)\left(r\left(\tfrac{m+1}{\alpha}\right) + r\left(\tfrac{m}{\alpha}\right)\right)\right) =$$

$$= \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant P} \frac{e^{2\pi i \frac{k}{\alpha}} - 1}{2\pi i k} \sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}} + O\left(\sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m)\left(r\left(\frac{m+1}{\alpha}\right) + r\left(\frac{m}{\alpha}\right)\right)\right).$$

Параметр P выберем позднее, а пока считаем, что $2 \leqslant P \leqslant N$. Первая сумма оценивается следующим образом:

$$\left|\sum_{1 \leqslant |k| \leqslant P} \frac{e^{2\pi i \frac{k}{\alpha}} - 1}{2\pi i k} \sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}}\right| \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant P} \frac{1}{k} \left|\sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}}\right|.$$

Далее,

$$\sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m) r\left(\frac{m+1}{\alpha}\right) = \sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m)\left(\sum_{1 \leqslant |k| \leqslant P \ln P} c_k e^{2\pi i k \frac{m+1}{\alpha}} + O\left(\frac{\ln P}{P}\right)\right) =$$

$$= \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant P \ln P} c_k e^{2\pi i k \frac{1}{\alpha}} \sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}} + O\left(\frac{\sqrt{\alpha N}}{P} \ln^2 N\right).$$

Поскольку $c_k \ll \frac{\ln P}{P}$, отсюда получаем оценку

$$\sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m) r\left(\frac{m+1}{\alpha}\right) \ll \frac{\ln P}{P} \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant P \ln P} \left|\sum_{m \leqslant \alpha N} \delta(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}}\right| + \frac{\sqrt{\alpha N}}{P} \ln^2 N.$$

Аналогично оценивается и вторая сумма в остатке. Таким образом, требуется оценить тригонометрические суммы

$$W_1 = \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{k} \left| \sum_{m\leqslant \alpha N} \delta(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}} \right| = \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{k} \left| \sum_{r\leqslant \sqrt{\alpha N}} e^{2\pi i\lambda k r^2} \right|,$$

$$W_2 = \frac{\ln P}{P} \sum_{1\leqslant k\leqslant P\ln P} \left| \sum_{m\leqslant \alpha N} \delta(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}} \right| = \frac{\ln P}{P} \sum_{1\leqslant k\leqslant P\ln P} \left| \sum_{r\leqslant \sqrt{\alpha N}} e^{2\pi i\lambda k r^2} \right|.$$

где $\lambda = \frac{1}{\alpha}$. Обозначим также для краткости $M = \sqrt{\alpha N}$.

1.3. Лемма об оценке тригонометрической суммы

Лемма 1.10. *Пусть* $\lambda = \frac{1}{\alpha} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $|\theta| \leqslant 1$, $1 \leqslant K, M \leqslant N$, $A = \max\limits_{n\leqslant N^2} \tau(n)$. *Тогда*

$$W = \sum_{k\leqslant K} \left| \sum_{r\leqslant M} e^{2\pi i\lambda k r^2} \right| \ll A \ln^{\frac{1}{2}} N \left(\frac{KM}{\sqrt{q}} + K\sqrt{M} + \sqrt{qK} \right).$$

Для доказательства леммы 2 воспользуемся методом Г. Вейля. Возведем данную сумму в квадрат и применим неравенство Коши:

$$|W|^2 \leqslant K \sum_{k\leqslant K} \left| \sum_{r\leqslant M} e^{2\pi i\lambda k r^2} \right|^2 = K \sum_{k\leqslant K} \sum_{r,s\leqslant M} e^{2\pi i\lambda k (r^2 - s^2)}.$$

Перейдем во внутренней сумме от переменной r к новой переменной суммирования h, $r = s + h$. Поскольку $r^2 - s^2 = (s+h)^2 - s^2 = 2sh + h^2$, имеем:

$$|W|^2 \leqslant K \sum_{k\leqslant K} \sum_{h=-M}^{M} \sum_{X\leqslant s\leqslant Y} e^{2\pi i\lambda k (2sh + h^2)},$$

где $X = \max(1, 1-h)$, $Y = \min(M, M-h)$. Выделим в сумме по h отдельно слагаемое, соответствующее $h=0$ и равное M. Получим:

$$|W|^2 \leqslant K^2 M + K \sum_{k\leqslant K} \sum_{\substack{h=-M\\h\neq 0}}^{M} e^{2\pi i \lambda k h^2} \sum_{X\leqslant s\leqslant Y} e^{2\pi i \lambda\cdot 2ksh} \leqslant$$

$$\leqslant K^2 M + K \sum_{k\leqslant K} \sum_{\substack{h=-M\\h\neq 0}}^{M} \left| \sum_{X\leqslant s\leqslant Y} e^{2\pi i\cdot 2\lambda ksh} \right|.$$

Для оценки внутренней суммы воспользуемся леммами 1.8, 1.9. Применяя лемму 1.8, получаем:

$$\left| \sum_{X\leqslant s\leqslant Y} e^{2\pi i\cdot 2\lambda ksh} \right| \ll \min\left(Y-X, \frac{1}{\|2\lambda kh\|}\right) \ll \min\left(M, \frac{1}{\|2\lambda kh\|}\right),$$

$$\sum_{k\leqslant K} \sum_{1\leqslant h\leqslant M} \left| \sum_{X\leqslant s\leqslant Y} e^{2\pi i\cdot 2\lambda ksh} \right| \ll \sum_{k\leqslant K} \sum_{1\leqslant h\leqslant M} \min\left(M, \frac{1}{\|2\lambda kh\|}\right) \ll$$

$$\ll \sum_{v\leqslant 2KM} \tau(v) \min\left(M, \frac{1}{\|\lambda v\|}\right).$$

Оценим сверху $\tau(v)$ величиной $A = \max\limits_{n\leqslant N^2} \tau(n)$ и применим лемму 1.9, считая, что $1\leqslant q\leqslant N$:

$$\sum_{v\leqslant 2KM} \tau(v) \min\left(M, \frac{1}{\|\lambda v\|}\right) \ll A \sum_{v\leqslant 2KM} \min\left(M, \frac{1}{\|\lambda v\|}\right) \ll$$

$$\ll A \ln N \left(\frac{KM^2}{q} + KM + q\right).$$

Следовательно,

$$|W|^2 \ll K^2 M + AK \ln N \left(\frac{KM^2}{q} + KM + q\right) \ll$$

$$\ll A \ln N \left(\frac{K^2M^2}{q} + K^2 M + qK\right),$$

откуда и следует утверждение леммы 1.10.

1.4. Завершение доказательства теоремы

Воспользуемся теперь доказанной леммой 1.10 для оценки сумм W_1, W_2. Разобьем внешнюю сумму по k в сумме W_1 на $\ll \ln N$ сумм по промежуткам вида $(K;2K]$, $2K \leqslant P$. Тогда

$$W_1 \ll (\ln N) \max_{K\leqslant P/2} \frac{1}{K} \sum_{K<k\leqslant 2K} \left| \sum_{r\leqslant M} e^{2\pi i\lambda kr^2} \right| \ll A \ln^{\frac{3}{2}} N \left(\frac{M}{\sqrt{q}} + \sqrt{M} + \sqrt{\frac{q}{K}} \right).$$

Известно, что справедлива оценка $A \ll N^{\frac{\varepsilon}{3}}$. Далее, если число α (а значит и $\lambda = \frac{1}{\alpha}$) имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим, то по лемме 1.5 (или, соответственно, лемме 1.6) знаменатель q подходящей дроби к λ можно выбрать так, чтобы были выполнены неравенства $(MK^{\frac{1}{2}})^{1-\varepsilon} \ll q \leqslant MK^{\frac{1}{2}}$. Это же утверждение в силу леммы 1.7 справедливо и для почти всех чисел λ. Тогда во всех этих случаях

$$W_1 \ll N^{\frac{\varepsilon}{3}} \ln^{\frac{3}{2}} N \left(\frac{M}{\sqrt{q}} + \sqrt{M} + \sqrt{\frac{q}{K}} \right) \ll$$

$$\ll N^{\frac{\varepsilon}{3}} \ln^{\frac{3}{2}} N \left(\frac{M^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{K^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{4}}} + \sqrt{M} + \frac{\sqrt{M}}{K^{\frac{1}{4}}} \right) \ll M^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \ll N^{\frac{1}{4}+\varepsilon}.$$

С помощью леммы 1.10 оценивается и сумма W_2:

$$W_2 \ll A\frac{\ln^{\frac{3}{2}} N}{P} \left(\frac{MP\ln P}{\sqrt{q}} + P\ln P\sqrt{M} + \sqrt{qP\ln P} \right) \ll$$

$$\ll A \ln^{\frac{5}{2}} N \left(\frac{M}{\sqrt{q}} + \sqrt{M} + \sqrt{\frac{q}{P}} \right).$$

Выбирая $P = \sqrt{M}$ и $(MP^{\frac{1}{2}})^{1-\varepsilon} \ll q \leqslant MP^{\frac{1}{2}}$, получим $W_2 \ll M^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \ll N^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$. Теорема 1.1 доказана.

Глава 2

Бесквадратные числа вида $[\alpha n]$

Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное число и пусть $Q(N,\alpha)$ равно количеству бесквадратных чисел вида $[\alpha n]$, $1 \leqslant n \leqslant N$. Эта величина равна также значению суммы

$$Q(N,\alpha) = \sum_{n \leqslant N} \mu^2([\alpha n]),$$

где $\mu(n)$, как обычно, функция Мебиуса.

Асимптотическое поведение величины $Q(N,\alpha)$ при $N \to \infty$ с теми или иными ограничениями на число α исследовалось ранее разными авторами. Так, в работе [24] доказано, что если α — иррациональное число конечного типа (например, имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим), то

$$Q(N,\alpha) = \frac{6}{\pi^2}N + O\left(\frac{N \ln\ln N}{\ln N}\right).$$

С другой стороны, в работе [2] доказана асимптотическая формула для средних значений мультипликативных функций для почти всех значений α. В применении к мультипликативной функции $\mu^2(n)$ эта теорема дает

$$Q(N,\alpha) = \frac{6}{\pi^2}N + O\big(N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\big)$$

для почти всех α. При этом, в отличие от работы [24], метод данной статьи не позволяет указать какие-либо конкретные значения α, для которых верно это равенство.

Настоящая глава посвящена доказательству следующей основной теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть иррациональное число $\alpha > 1$ имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим. Тогда при $N \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$Q(N,\alpha) = \sum_{n\leqslant N} \mu^2([\alpha n]) = \frac{6}{\pi^2}N + O\left(AN^{\frac{5}{6}}\ln^5 N\right),$$

где $A = A(N) = \max\limits_{1\leqslant m\leqslant N^2} \tau(m)$.

Заметим, что имеет место оценка $A = \max\limits_{1\leqslant m\leqslant N^2} \tau(m) \ll N^{\frac{2}{\ln\ln N}} \ll N^{\varepsilon}$ для сколь угодно малых $\varepsilon > 0$, поэтому остаточный член в теореме 2.1 есть $O\big(N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\big)$.

2.1. Сведение задачи к оценке тригонометрических сумм

Сведение задачи к оценке тригонометрических сумм производится по той же схеме, что и в предыдущей главе. Равенство $m = [\alpha n]$ равносильно тому, что $\alpha n - 1 < m < \alpha n$, $\frac{m}{\alpha} < n < \frac{m}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$, т. е. $\{\frac{m}{\alpha}\} > 1 - \frac{1}{\alpha}$. Снова зададим характеристическую функцию $\omega(x)$ на полуинтервале $(0;1]$ следующим образом:

$$\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1-\frac{1}{\alpha} < x < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 1-\frac{1}{\alpha} \text{ или } x = 1; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

и продолжим периодически на всю числовую ось. Тогда

$$\sum_{n\leqslant N}\mu^2([\alpha n]) = \sum_{\substack{m\leqslant \alpha N\\ \{\frac{m}{\alpha}\}>1-\frac{1}{\alpha}}}\mu^2(m) = \sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)\omega\left(\frac{m}{\alpha}\right).$$

Поскольку $\omega(x)=\frac{1}{\alpha}+\rho(x+\frac{1}{\alpha})-\rho(x)$, где $\rho(x)=\frac{1}{2}-\{x\}$, получаем

$$\sum_{k\leqslant N}\mu^2([\alpha n]) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)+\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)\left(\rho\left(\frac{m+1}{\alpha}\right)-\rho\left(\frac{m}{\alpha}\right)\right).$$

Первое слагаемое в правой части дает главный член доказываемой асимптотической формулы:

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)=\frac{1}{\alpha}\frac{6}{\pi^2}\alpha N+O(\sqrt{\alpha N})=\frac{6}{\pi^2}N+O(\sqrt{N}).$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое. Применим к нему лемму 1.1:

$$\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)\left(\rho\left(\frac{m+1}{\alpha}\right)-\rho\left(\frac{m}{\alpha}\right)\right)=$$

$$=\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P}\frac{e^{2\pi i\frac{km}{\alpha}}}{2\pi ik}\left(e^{2\pi i\frac{k}{\alpha}}-1\right)+O\left(\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)\left(r\left(\tfrac{m+1}{\alpha}\right)+r\left(\tfrac{m}{\alpha}\right)\right)\right)=$$

$$=\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P}\frac{e^{2\pi i\frac{k}{\alpha}}-1}{2\pi ik}\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)e^{2\pi i\frac{km}{\alpha}}+O\left(\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)\left(r\left(\tfrac{m+1}{\alpha}\right)+r\left(\tfrac{m}{\alpha}\right)\right)\right).$$

Считаем, что $2\leqslant P\leqslant N$ (значение P в зависимости от N выберем позднее). Первая сумма оценивается следующим образом:

$$\left|\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P}\frac{e^{2\pi i\frac{k}{\alpha}}-1}{2\pi ik}\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)e^{2\pi i\frac{km}{\alpha}}\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P}\frac{1}{k}\left|\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)e^{2\pi i\frac{km}{\alpha}}\right|.$$

Далее,

$$\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)r\left(\frac{m+1}{\alpha}\right)=\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)\left(\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P\ln P}c_k e^{2\pi ik\frac{m+1}{\alpha}}+O\left(\frac{\ln P}{P}\right)\right)=$$

$$=\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P\ln P}c_k e^{2\pi ik\frac{1}{\alpha}}\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)e^{2\pi i\frac{km}{\alpha}}+O\left(\frac{\alpha N}{P}\ln^2 N\right).$$

Поскольку $c_k \ll \frac{\ln P}{P}$, отсюда получаем оценку

$$\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)r\left(\frac{m+1}{\alpha}\right)\ll\frac{\ln P}{P}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P\ln P}\left|\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)e^{2\pi i\frac{km}{\alpha}}\right|+\frac{\alpha N}{P}\ln^2 N.$$

Таким же образом оценивается и вторая сумма в остатке. Положим $P=\sqrt{\alpha N}$. Тогда последнее слагаемое равно $O(\sqrt{\alpha N}\ln^2 N)$. Итак, требуется оценить тригонометрические суммы

$$W_1=\sum_{1\leqslant k\leqslant P}\frac{1}{k}\left|\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)e^{2\pi i\lambda km}\right|,\ \ W_2=\frac{\ln P}{P}\sum_{1\leqslant k\leqslant P\ln P}\left|\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)e^{2\pi i\lambda km}\right|,\tag{2.1}$$

где $\lambda=\frac{1}{\alpha}$.

2.2. Оценки тригонометрических сумм с бесквадратными числами

Лемма 2.1. *Пусть λ — алгебраическое число или число с ограниченными неполными частными. Тогда для любого $\varepsilon>0$ для сумм W_1, W_2, определеных равенствами* (2.1), *справедливы оценки*

$$|W_1|\ll AN^{\frac{5}{6}}\ln^3 N,\quad |W_2|\ll AN^{\frac{5}{6}}\ln^5 N.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала сумму W_1. Воспользуемся известной формулой $\mu^2(m) = \sum\limits_{d^2|m} \mu(d)$:

$$W_1 = \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{k} \left| \sum_{m\leqslant \alpha N} \left(\sum_{d^2|m} \mu(d) \right) e^{2\pi i\lambda km} \right| = \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{k} \left| \sum_{d\leqslant \sqrt{\alpha N}} \mu(d) \sum_{r\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda krd^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{k} \sum_{d\leqslant \sqrt{\alpha N}} |\mu(d)| \left| \sum_{r\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda krd^2} \right| \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{k} \sum_{d\leqslant \sqrt{\alpha N}} \left| \sum_{r\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda krd^2} \right|.$$

Разобьем внешние суммы по k и по d каждую на $\ll \ln N$ сумм по промежуткам вида $(K;2K]$ и $(D;2D]$ и соответственно, где $2K \leqslant P$, $2D \leqslant \sqrt{\alpha N}$. Тогда получим оценку

$$W_1 \ll \ln^2 N \max_{\substack{1\leqslant K\leqslant P/2 \\ 1\leqslant D\leqslant \sqrt{\alpha N}/2}} W(K,D),$$

где

$$W(K,D) = \sum_{K<k\leqslant 2K} \frac{1}{k} \sum_{D<d\leqslant 2D} \left| \sum_{r\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda krd^2} \right|.$$

Далее в зависимости от величин K и D рассмотрим два случая: $KD \leqslant (\alpha N)^{1/3}$ и $KD > (\alpha N)^{1/3}$.

Случай 1. Пусть выполнено неравенство $KD \leqslant (\alpha N)^{1/3}$. Применяя лемму 1.8, оценим сумму $W(K,D)$ следующим образом:

$$W(K,D) \ll \sum_{K<k\leqslant 2K} \frac{1}{k} \sum_{D<d\leqslant 2D} \min\left(\frac{\alpha N}{d^2}, \frac{1}{\|\lambda kd^2\|} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{K<k\leqslant 2K} \sum_{D<d\leqslant 2D} \min\left(\frac{\alpha N}{kd^2}, \frac{1}{\|\lambda kd^2\|} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{K<k\leqslant 2K} \sum_{D<d\leqslant 2D} \min\left(\frac{\alpha N}{KD^2}, \frac{1}{\|\lambda k d^2\|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{KD^2<m\leqslant 8KD^2} \left(\sum_{\substack{d^2|m\\ d\leqslant 2D}} 1\right) \min\left(\frac{\alpha N}{KD^2}, \frac{1}{\|\lambda m\|}\right).$$

Теперь воспользуемся неравенством $\sum\limits_{\substack{d^2|m\\ d\leqslant 2D}} 1 \leqslant \tau(m) \leqslant A = \max\limits_{1\leqslant m\leqslant N^2} \tau(m)$ и леммой 1.9:

$$W(K,D) \ll A \sum_{KD^2<m\leqslant 8KD^2} \min\left(\frac{\alpha N}{KD^2}, \frac{1}{\|\lambda m\|}\right) \ll A \ln N \left(\frac{\alpha N}{q} + KD^2 + q\right).$$

Если число α (а значит и $\lambda = \frac{1}{\alpha}$) имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим, то знаменатель q подходящей дроби к λ можно выбрать так, чтобы были выполнены неравенства $(\alpha N)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \ll q \leqslant (\alpha N)^{\frac{1}{2}}$ (леммы 1.5 и 1.6). Учитывая также неравенства $KD \leqslant (\alpha N)^{1/3}$ и $D \leqslant \sqrt{\alpha N}$, получаем

$$W(K,D) \ll A \ln N \left((\alpha N)^{1/2+\varepsilon} + (\alpha N)^{5/6} + (\alpha N)^{1/2}\right) \ll A(\alpha N)^{5/6} \ln N.$$

Случай 2. Пусть теперь выполнено неравенство $KD > (\alpha N)^{1/3}$. Возведем сумму $W(K,D)$ в квадрат и воспользуемся неравенством Коши:

$$W^2(K,D) \leqslant \frac{1}{K^2} KD \sum_{K<k\leqslant 2K} \sum_{D<d\leqslant 2D} \left| \sum_{r\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i \lambda k r d^2} \right|^2 =$$

$$= \frac{D}{K} \sum_{K<k\leqslant 2K} \sum_{D<d\leqslant 2D} \sum_{1\leqslant r', r''\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i \lambda k (r'-r'')d^2}.$$

Выделим во внутренней сумме слагаемые, соответствующие $r' = r''$. Получим

$$W^2(K,D)\leqslant \frac{D}{K}\sum_{K<k\leqslant 2K}\sum_{D<d\leqslant 2D}\left(\frac{\alpha N}{d^2}+\sum_{1\leqslant r'\neq r''\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda k(r'-r'')d^2}\right)\ll$$

$$\ll \alpha N+\frac{D}{K}\sum_{K<k\leqslant 2K}\sum_{D<d\leqslant 2D}\sum_{1\leqslant r'\neq r''\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda k(r'-r'')d^2}.$$

Для оценки полученной тройной суммы изменим в ней порядок суммирования:

$$\sum_{K<k\leqslant 2K}\sum_{D<d\leqslant 2D}\sum_{1\leqslant r'\neq r''\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda k(r'-r'')d^2}=$$

$$=\sum_{1\leqslant r'\neq r''\leqslant \frac{\alpha N}{D^2}}\ \sum_{D<d\leqslant \min(2D,\sqrt{\frac{\alpha N}{r'}},\sqrt{\frac{\alpha N}{r''}})}\ \sum_{K<k\leqslant 2K} e^{2\pi i\lambda k(r'-r'')d^2}\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant r'\neq r''\leqslant \frac{\alpha N}{D^2}}\ \sum_{D<d\leqslant \min(2D,\sqrt{\frac{\alpha N}{r'}},\sqrt{\frac{\alpha N}{r''}})}\min\left(K,\frac{1}{\|\lambda(r'-r'')d^2\|}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha N}{D^2}\sum_{\substack{-\frac{\alpha N}{D^2}\leqslant s\leqslant \frac{\alpha N}{D^2}\\ s\neq 0}}\ \sum_{D<d\leqslant 2D}\min\left(K,\frac{1}{\|\lambda s d^2\|}\right)\ll$$

$$\ll \frac{\alpha N}{D^2}\sum_{v\leqslant 4\alpha N}\left(\sum_{\substack{d^2|v\\ d\leqslant 2D}}1\right)\min\left(K,\frac{1}{\|\lambda v\|}\right).$$

Снова пользуясь неравенством $\sum\limits_{\substack{d^2|v\\ d\leqslant 2D}} 1\leqslant \tau(v)\leqslant A=\max\limits_{1\leqslant v\leqslant N^2}\tau(v)$ и леммой 1.9, получим

$$W^2(K,D)\leqslant \alpha N+A\frac{D}{K}\frac{\alpha N}{D^2}\left(\frac{\alpha NK}{q}+\alpha N+q\right)\ln N\ll$$

$$\ll A\ln N\left(\alpha N+\frac{(\alpha N)^2}{qD}+\frac{(\alpha N)^2}{KD}+\frac{\alpha N q}{KD}\right).$$

Следовательно,

$$W(K,D) \ll \sqrt{A\ln N}\left(\sqrt{\alpha N}+\frac{\alpha N}{\sqrt{qD}}+\frac{\alpha N}{\sqrt{KD}}+\sqrt{\frac{\alpha Nq}{KD}}\right).$$

Аналогично случаю 1, знаменатель q подходящей дроби к λ можно выбрать так, чтобы были выполнены неравенства $(\alpha NK)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \ll q \leqslant (\alpha NK)^{\frac{1}{2}}$. С учетом неравенства $KD > (\alpha N)^{1/3}$ в этом случае получим

$$W(K,D) \ll \sqrt{A\ln N}\left(\sqrt{\alpha N}+\frac{(\alpha N)^{3/4+\frac{\varepsilon}{2}}}{K^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}}\sqrt{D}}+\frac{\alpha N}{\sqrt{KD}}+\frac{(\alpha N)^{3/4}}{\sqrt[4]{K}\sqrt{D}}\right) \ll$$
$$\ll A(\alpha N)^{5/6}\ln N.$$

Итак, в обоих случаях для суммы W_1 получаем оценку

$$W_1 \ll \ln^2 N \max_{\substack{1\leqslant K\leqslant P/2\\ 1\leqslant D\leqslant\sqrt{\alpha N}/2}} W(K,D) \ll A(\alpha N)^{5/6}\ln^3 N.$$

Сумму W_2 оценим следующим образом:

$$W_2 = \frac{\ln P}{P}\sum_{1\leqslant k\leqslant P\ln P}\left|\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)e^{2\pi i\lambda km}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \ln^2 P\sum_{1\leqslant k\leqslant P\ln P}\frac{1}{k}\left|\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)e^{2\pi i\lambda km}\right|.$$

Для суммы в правой части, очевидно, справедлива та же оценка, что и для суммы W_1 (отличие от W_1 лишь в том, что количество слагаемых во внешней сумме по k в ней равно $P\ln P$ вместо P). Следовательно, $W_2 \ll AN^{\frac{5}{6}}\ln^5 N$. Лемма 2.1, а с ней и теорема 2.1, доказаны полностью.

2.3. Следствие о бесквадратных числах вида $[\alpha n]$ с чётным и нечётным числом простых делителей

Приведем формулировку теоремы, принадлежащей Д. Хаджеле и Б. Смиту [25], об оценке тригонометрической суммы с функцией Мёбиуса.

Теорема 2.2. *Пусть* $\lambda = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $|\theta| \leqslant 1$, $q \leqslant N$. *Тогда*

$$\left| \sum_{n \leqslant N} \mu(n) e^{2\pi i n \lambda} \right| \ll \left(\frac{N}{\sqrt{q}} + \sqrt{Nq} + N^{4/5} \right) \ln^3 N.$$

Рассмотрим сумму

$$Q'(N, \alpha) = \sum_{n \leqslant N} \mu([\alpha n]),$$

аналогичную рассматриваемой в этой главе сумме $Q(N, \alpha)$, но с функцией $\mu(n)$ вместо $\mu^2(n)$. Используя оценку тригонометрической суммы из теоремы 2.2, докажем следующую формулу для суммы $Q'(N, \alpha)$.

Следствие 2.1. *Пусть α — алгебраическое число или число с ограниченными неполными частными. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$Q'(N, \alpha) = \sum_{n \leqslant N} \mu([\alpha n]) = \frac{1}{\alpha} \sum_{m \leqslant \alpha N} \mu(m) + O(N^{4/5+\varepsilon}).$$

Доказательство. Повторяя все рассуждения параграфа 2.1 с заменой функции $\mu^2(n)$ на $\mu(n)$, получим:

$$\sum_{k \leqslant N} \mu([\alpha n]) = \frac{1}{\alpha} \sum_{m \leqslant \alpha N} \mu(m) + O\left(W_1'\right) + O\left(W_2'\right) + O\left(\frac{\alpha N}{P} \ln^2 N \right), \qquad (2.2)$$

где $P \geqslant 1$ — параметр, который будет выбран позднее,

$$W_1' = \sum_{1 \leqslant k \leqslant P} \frac{1}{k} \left| \sum_{m \leqslant \alpha N} \mu(m) e^{2\pi i \lambda k m} \right|, \quad W_2' = \frac{\ln P}{P} \sum_{1 \leqslant k \leqslant P \ln P} \left| \sum_{m \leqslant \alpha N} \mu(m) e^{2\pi i \lambda k m} \right|,$$

и $\lambda = \frac{1}{\alpha}$. Поскольку число α, а значит, и число $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ — алгебраическое или имеет ограниченные неполные частные, то по лемме 1.5 знаменатель q' подходящей дроби к этому числу можно выбрать так, что $Q^{1-\varepsilon} \ll q' \leqslant Q$ (здесь Q — параметр, $2 \leqslant Q \leqslant N$). Тогда знаменатель q подходящей дроби к числу $\lambda k = \frac{k}{\alpha}$ можно выбрать так, чтобы были выполнены неравенства $\frac{Q^{1-\varepsilon}}{k} \ll q \leqslant Q$. Следовательно, по теореме 2.2

$$W_1' = \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{k} \left| \sum_{m\leqslant \alpha N} \mu(m) e^{2\pi i\lambda km} \right| \ll \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{k} \left(\frac{N}{\sqrt{q}} + \sqrt{Nq} + N^{4/5} \right) \ln^3 N \ll$$
$$\ll \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{k} \left(\frac{N\sqrt{k}}{\sqrt{Q^{1-\varepsilon}}} + \sqrt{NQ} + N^{4/5} \right) \ln^3 N \ll$$
$$\ll \left(\frac{NQ^{\varepsilon/2}}{\sqrt{Q}} \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sqrt{NQ} \ln P + N^{4/5} \ln P \right) \ln^3 N \ll$$
$$\ll \left(\frac{N\sqrt{P}}{\sqrt{Q}} + \sqrt{NQ} + N^{4/5} \right) N^{\varepsilon/2} \ln^4 N.$$

Аналогично оценивается и сумма W_2':

$$W_2' = \frac{\ln P}{P} \sum_{1\leqslant k\leqslant P\ln P} \left| \sum_{m\leqslant \alpha N} \mu(m) e^{2\pi i\lambda km} \right| \ll$$
$$\ll \frac{\ln P}{P} \sum_{1\leqslant k\leqslant P\ln P} \left(\frac{N}{\sqrt{q}} + \sqrt{Nq} + N^{4/5} \right) \ln^3 N \ll$$
$$\ll \frac{\ln P}{P} \sum_{1\leqslant k\leqslant P\ln P} \left(\frac{N\sqrt{k}}{\sqrt{Q^{1-\varepsilon}}} + \sqrt{NQ} + N^{4/5} \right) \ln^3 N \ll$$
$$\ll \frac{\ln P}{P} \left(\frac{NQ^{\varepsilon/2}}{\sqrt{Q}} (P\ln P)^{3/2} + (\sqrt{NQ} + N^{4/5}) P\ln P \right) \ln^3 N \ll$$
$$\ll \left(\frac{N\sqrt{P}}{\sqrt{Q}} + \sqrt{NQ} + N^{4/5} \right) N^{\varepsilon/2} \ln^{5,5} N.$$

Выбирая параметры P и Q равными $P = N^{1/5}$, $Q = N^{3/4}P^{1/4} = N^{4/5}$, для сумм W_1', W_2' получим оценки

$$W_1' \ll N^{4/5+\varepsilon/2}\ln^4 N \ll N^{4/5+\varepsilon}, \quad W_2' \ll N^{4/5+\varepsilon/2}\ln^{5,5} N \ll N^{4/5+\varepsilon}.$$

Поскольку последнее слагаемое в (2.2) есть $O(\frac{\alpha N}{P}\ln^2 N) = O(N^{4/5}\ln^2 N)$, следствие 2.1 доказано.

Следствие 2.2. *Пусть α — алгебраическое число или число с ограниченными неполными частными. Тогда имеет место оценка*

$$|Q'(N,\alpha)| = \left|\sum_{n\leqslant N}\mu([\alpha n])\right| \ll Ne^{-c\sqrt{\ln N}},$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная. Более того, в предположении справедливости гипотезы Римана о нулях дзета-функции справедлива оценка $|Q'(N,\alpha)| \ll N^{4/5+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Утверждение следствия 2.2 вытекает непосредственно из следствия 2.1 и известных оценок

$$\left|\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu(m)\right| \ll Ne^{-c\sqrt{\ln N}}, \quad \left|\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu(m)\right| \ll N^{1/2+\varepsilon},$$

первая из которых безусловная, а вторая верна в предположении справедливости гипотезы Римана (см., например, [62, гл. IV, зад. 1, 2], [68, гл. XIV, п. 25, теорема 3]).

Следствие 2.3. *Пусть $Q_0(N,\alpha)$ и $Q_1(N,\alpha)$ — количества бесквадратных чисел вида $[\alpha n]$, $1 \leqslant n \leqslant N$, имеющих четное и нечетное число простых делителей соответственно, а иррациональное число $\alpha > 1$ имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим. Тогда спра-*

ведливы асимптотические формулы

$$Q_0(N,\alpha) = \frac{3}{\pi^2}N + O\left(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}\right), \quad Q_1(N,\alpha) = \frac{3}{\pi^2}N + O\left(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}\right),$$

и, таким образом,

$$Q_0(N,\alpha) \sim Q_1(N,\alpha) \sim \frac{3}{\pi^2}N, \quad N \to \infty.$$

Более того, в предположении справедливости гипотезы Римана о нулях дзета-функции остаточный член в этих асимптотических формулах для $Q_0(N,\alpha)$, $Q_1(N,\alpha)$ *можно заменить на* $O\left(AN^{\frac{5}{6}}\ln^5 N\right)$, *где* $A = A(N) = \max\limits_{1\leqslant m\leqslant N^2} \tau(m)$.

Следствие 2.3 показывает, что бесквадратные числа с четным и нечетным числом простых делителей распределены в последовательности $[\alpha n]$ асимптотически поровну.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\frac{\mu^2(n)+\mu(n)}{2} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = p_1\dots p_{2s}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и

$$\frac{\mu^2(n)-\mu(n)}{2} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = p_1\dots p_{2s+1}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

поэтому

$$Q_0(N,\alpha) = \sum_{n\leqslant N}\frac{\mu^2([\alpha n])+\mu([\alpha n])}{2}, \quad Q_1(N,\alpha) = \sum_{n\leqslant N}\frac{\mu^2([\alpha n])-\mu([\alpha n])}{2}.$$

Утверждение следствия 2.3 вытекает теперь непосредственно из теоремы 2.1 и следствия 2.2.

Глава 3

Аддитивные задачи с бесквадратными числами

В данной главе рассматриваются две следующие аддитивные задачи. Пусть $\alpha > 1$ — фиксированное иррациональное число и пусть $r_2(N,\alpha)$ и $r_3(N,\alpha)$ равны соответственно количествам разбиений натурального числа N на одно и два бесквадратных слагаемых и слагаемое вида $[\alpha q]$, где q также бесквадратное, т. е. числу представлений числа N в виде

$$q_1 + [\alpha q_2] = N,$$

и в виде

$$q_1 + q_2 + [\alpha q_3] = N,$$

соответственно, где q_1, q_2, q_3 — бесквадратные числа.

Целью данной главы является вывод следующих асимптотических формул для величин $r_2(N,\alpha)$ и $r_3(N,\alpha)$ при $N \to \infty$.

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное алгебраическое число. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ для количества $r_3(N,\alpha)$ решений уравнения $q_1 + q_2 + [\alpha q_3] = N$ в бесквадратных числах q_1, q_2, q_3 справедлива асимптотическая* *формула*

$$r_3(N,\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 N^2 + O\big(N^{\frac{11}{6}+\varepsilon}\big).$$

Теорема 3.2. *Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное алгебраическое число. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ для величины $r_2(N,\alpha)$ справедлива асимптотическая формула*

$$r_2(N,\alpha) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^2 N + O\big(N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\big).$$

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 существенно различаются. В случае $r_3(N,\alpha)$ асимптотическая формула выводится с помощью кругового метода (параграф 3.1). В случае $r_2(N,\alpha)$ мы применяем аналог элементарного подхода Т. Эстермана (параграф 3.2).

3.1. Тернарная задача

3.1.1. Применение кругового метода

Доказательство теоремы 3.1 проведем, как и в работах [12, 59, 70], круговым методом Харди–Литтлвуда–Рамануджана в форме триногометрических сумм И. М. Виноградова. Будем также использовать методы работ Г. И. Архипова, К. Буриева и В. Н. Чубарикова [48, 50] и оценку тригонометрической суммы с бесквадратными числами по «малым дугам» (см. [11, 42, 40]).

Круговой метод основан на представлении искомой величины $r_3(N,\alpha)$ в виде следующего интеграла:

$$r_3(N,\alpha) = \int\limits_0^1 S_1^2(\beta)S_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta, \tag{3.1}$$

где

$$S_1(\beta) = \sum_{\substack{q \leqslant N \\ q\, \text{бесквадратное}}} e^{2\pi i \beta q} = \sum_{n \leqslant N} \mu^2(n) e^{2\pi i \beta n}, \quad S_2(\beta) = \sum_{n \leqslant \frac{1}{\alpha} N} \mu^2(n) e^{2\pi i \beta [\alpha n]}.$$

Действительно, поскольку для целого числа m

$$\int_0^1 e^{2\pi i \beta m} d\beta = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0; \\ 0, & \text{если } m \neq 0, \end{cases}$$

получаем

$$r_3(N, \alpha) = \sum_{\substack{q_1 \leqslant N \\ q_2 \leqslant N \\ [\alpha q_3] \leqslant N}} \int_0^1 e^{2\pi i \beta (q_1 + q_2 + [\alpha q_3] - N)} d\beta =$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{q_1 \leqslant N} e^{2\pi i \beta q_1} \right) \left(\sum_{q_2 \leqslant N} e^{2\pi i \beta q_2} \right) \left(\sum_{[\alpha q_3] \leqslant N} e^{2\pi i \beta [\alpha q_3]} \right) e^{-2\pi i \beta N} d\beta,$$

откуда и следует представление (3.1).

Зафиксируем параметр Q так, что $1 \leqslant Q \leqslant \sqrt{N}$, и положим $\tau = \frac{N}{Q}$ (значение Q, а значит и τ, выберем позднее). В силу 1-периодичности подынтегральной функции интеграл в правой части (3.1) можно представить в следующем виде:

$$r_3(N, \alpha) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1 - \frac{1}{\tau}} S_1^2(\beta) S_2(\beta) e^{-2\pi i \beta N} d\beta =$$

$$= \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} S_1^2(\beta) S_2(\beta) e^{-2\pi i \beta N} d\beta + \int_{\frac{1}{\tau}}^{1 - \frac{1}{\tau}} S_1^2(\beta) S_2(\beta) e^{-2\pi i \beta N} d\beta = I_1 + I_2.$$

Интегралы I_1 и I_2 исследуем отдельно. Первый из них будет давать главный член асимптотической формулы, а величину второго оценим сверху, получив нужную оценку остаточного члена.

3.1.2. Интеграл I_1: выделение главного члена

При $\beta \in \left[-\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau}\right]$ преобразуем сумму $S_1(\beta)$ следующим образом. Пусть

$$K(N) = \sum_{n \leqslant N} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} N + O(\sqrt{N}).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
S_1(\beta) &= \sum_{n \leqslant N} \mu^2(n) e^{2\pi i \beta n} = \sum_{n \leqslant N} (K(n) - K(n-1)) e^{2\pi i \beta n} = \\
&= \sum_{1 < n \leqslant N-1} K(n) \left(e^{2\pi i \beta n} - e^{2\pi i \beta (n+1)}\right) + K(N) e^{2\pi i \beta N} = \\
&= \frac{6}{\pi^2} \sum_{1 < n \leqslant N-1} n \left(e^{2\pi i \beta n} - e^{2\pi i \beta (n+1)}\right) + \frac{6}{\pi^2} N e^{2\pi i \beta N} + \\
&+ O\left(\sum_{1 < n \leqslant N-1} \sqrt{n} \left|e^{2\pi i \beta n} - e^{2\pi i \beta (n+1)}\right| + \sqrt{N}\right) = \\
&= \frac{6}{\pi^2} \sum_{1 < n \leqslant N} e^{2\pi i \beta n} + O\left(\sqrt{N}(N|\beta| + 1)\right) = \\
&= \frac{6}{\pi^2} \tilde{S}_1(\beta) + O\left(\sqrt{N}(N|\beta| + 1)\right).
\end{aligned}$$

Далее, сумму $S_2(\beta)$ представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
S_2(\beta) &= \sum_{n \leqslant \frac{1}{\alpha} N} \mu^2(n) e^{2\pi i \beta [\alpha n]} = \sum_{n \leqslant \frac{1}{\alpha} N} \mu^2(n) e^{2\pi i \beta \alpha n} e^{-2\pi i \beta \{\alpha n\}} = \\
&= \sum_{n \leqslant \frac{1}{\alpha} N} \mu^2(n) e^{2\pi i \beta \alpha n} (1 + O(|\beta|)) = \sum_{n \leqslant \frac{1}{\alpha} N} \mu^2(n) e^{2\pi i \beta \alpha n} + O(N|\beta|).
\end{aligned}$$

К получившейся сумме в правой части применяем такое же преобразование, как к сумме $S_1(\beta)$ (с заменой N на $\frac{1}{\alpha} N$ и β на $\beta\alpha$). Получим

$$S_2(\beta) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{1 < n \leqslant \frac{1}{\alpha} N} e^{2\pi i \beta \alpha n} + O\left(\sqrt{N}(N|\beta| + 1)\right).$$

Учитывая, что

$$\sum_{1<n\leqslant\frac{1}{\alpha}N} e^{2\pi i\beta\alpha n} = \sum_{1<n\leqslant\frac{1}{\alpha}N} e^{2\pi i\beta[\alpha n]}e^{2\pi i\beta\{\alpha n\}} = \sum_{1<n\leqslant\frac{1}{\alpha}N} e^{2\pi i\beta[\alpha n]} + O(N|\beta|),$$

сумму $S_2(\beta)$ можно записать также в виде

$$\begin{aligned} S_2(\beta) =& \frac{6}{\pi^2}\sum_{1<n\leqslant\frac{1}{\alpha}N} e^{2\pi i\beta[\alpha n]} + O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right) = \\ =& \frac{6}{\pi^2}\tilde{S}_2(\beta) + O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right). \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для $S_1(\beta)$ и $S_2(\beta)$ в интеграл I_1, будем иметь:

$$\begin{aligned} I_1 =& \int\limits_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} S_1^2(\beta)S_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta = \\ =& \int\limits_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left(\frac{6}{\pi^2}\tilde{S}_1(\beta) + O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right)\right)^2 \times \\ &\times\left(\frac{6}{\pi^2}\tilde{S}_2(\beta) + O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right)\right)e^{-2\pi i\beta N}d\beta = \\ =& \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 \int\limits_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta + O\left(R_1(N,\tau)\right), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{S}_1(\beta) = \sum_{1<n\leqslant N} e^{2\pi i\beta n}, \qquad \tilde{S}_2(\beta) = \sum_{1<n\leqslant\frac{1}{\alpha}N} e^{2\pi i\beta[\alpha n]}$$

и

$$R_1(N,\tau)=\int\limits_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\left(N^{\frac{5}{2}}(N|\beta|+1)+N^2(N|\beta|+1)^2+N^{\frac{3}{2}}(N|\beta|+1)^3\right)d\beta\ll$$
$$\ll\frac{N^{\frac{7}{2}}}{\tau^2}+\frac{N^{\frac{5}{2}}}{\tau}+\frac{N^4}{\tau^3}+\frac{N^3}{\tau^2}+\frac{N^2}{\tau}+\frac{N^{\frac{9}{2}}}{\tau^4}+\frac{N^{\frac{7}{2}}}{\tau^3}+\frac{N^{\frac{5}{2}}}{\tau^2}+\frac{N^{\frac{3}{2}}}{\tau}\ll$$
$$\ll\frac{N^{\frac{7}{2}}}{\tau^2}=N^{\frac{3}{2}}Q^2.$$

Полученный интеграл представим в виде

$$\int\limits_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta=\int\limits_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}-\int\limits_{\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}\tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta-\int\limits_{\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}\tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta.$$

Очевидно, первый из интегралов в правой части равен количеству решений уравнения

$$n_1+n_2+[\alpha n_3]=N$$

в натуральных числах n_1, n_2, n_3 с условиями $2\leqslant n_1,n_2\leqslant N$, $2\leqslant n_3\leqslant[\frac{1}{\alpha}N]$. Поскольку при фиксированном n_3 уравнение $n_1+n_2=N-[\alpha n_3]$ имеет $N-[\alpha n_3]-3$ решения в натуральных числах n_1, n_2 с условием $2\leqslant n_1,n_2\leqslant N$, искомое количество решений равно

$$\sum_{n_3=2}^{[\frac{1}{\alpha}N]}(N-[\alpha n_3]-3)=\frac{N^2}{\alpha}-\sum_{n_3=2}^{[\frac{1}{\alpha}N]}\alpha n_3+O(N)=$$

$$=\frac{N^2}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{N}{\alpha}\right)^2+O(N)=\frac{N^2}{2\alpha}+O(N).$$

Для оценки второго интеграла воспользуемся тривиальным неравенством

$$|\tilde{S}_1(\beta)| \leqslant \frac{1}{\|\beta\|} \leqslant \tau = \frac{N}{Q}, \quad \text{если} \quad \beta \in \left[\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau}\right].$$

Получим

$$\left| \int\limits_{\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} \tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta \right| \leqslant \int\limits_{\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} |\tilde{S}_1(\beta)|^2|\tilde{S}_2(\beta)|d\beta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N}{Q}\int\limits_0^1 |\tilde{S}_1(\beta)||\tilde{S}_2(\beta)|d\beta \ll \frac{N^2}{Q},$$

так как

$$\int\limits_0^1 |\tilde{S}_1(\beta)|^2 d\beta = N, \quad \int\limits_0^1 |\tilde{S}_2(\beta)|^2 d\beta = \left[\frac{1}{\alpha}N\right],$$

$$\int\limits_0^1 |\tilde{S}_1(\beta)||\tilde{S}_2(\beta)|d\beta \leqslant \left(\int\limits_0^1 |\tilde{S}_1(\beta)|^2 d\beta \int\limits_0^1 |\tilde{S}_2(\beta)|^2 d\beta\right)^{1/2} \ll N.$$

Таким образом,

$$I_1 = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 \frac{N^2}{2\alpha} + O\left(\frac{N^2}{Q}\right) + O\big(N^{\frac{3}{2}}Q^2\big). \tag{3.2}$$

3.1.3. Оценка интеграла I_2

Разобьем отрезок интегрирования $\left[\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau}\right] = \left[\frac{Q}{N}, 1 - \frac{Q}{N}\right]$ на два множества:

$$E_1 = \left[\frac{Q}{N}; 1 - \frac{Q}{N}\right] \cap \mathfrak{M}(Q), \quad E_2 = \left[\frac{Q}{N}; 1 - \frac{Q}{N}\right] \cap \mathfrak{m}(Q),$$

где

$$\mathfrak{M}(Q) = \bigcup_{q \leqslant Q} \bigcup_{\substack{a \\ (a,q)=1}} \left[\frac{a}{q} - \frac{Q}{qN}; \frac{a}{q} + \frac{Q}{qN}\right], \quad \mathfrak{m}(Q) = \mathbb{R} \backslash \mathfrak{M}(Q).$$

В соответствии с этим разбиением интеграл I_2 также разбивается на два интеграла; пусть $I_2' = \int_{E_1}$, $I_2'' = \int_{E_2}$. Интеграл I_2'' оценим с помощью следующей леммы об оценке тригонометрической суммы с бесквадратными числами по «малым дугам» (см. [11, 40, 42]). Отметим, что в работе [11] эта оценка доказана в предположении, что $Q \leqslant N^{1/3}$; при $Q \leqslant \sqrt{N}$ она доказана в 2004 г. независимо двумя авторами в работах [40, 42].

Лемма 3.1. *Пусть* $1 \leqslant Q \leqslant \sqrt{N}$. *Тогда* $S_1(\beta) \ll \frac{N^{1+\varepsilon}}{Q}$ *для всех* $\beta \in \mathfrak{m}(Q)$.

По лемме 3.1 имеем

$$|I_2''| \leqslant \int\limits_{E_2} |S_1(\beta)|^2 |S_2(\beta)| d\beta \leqslant \max_{\beta \in E_2} |S_1(\beta)| \int\limits_0^1 |S_1(\beta)||S_2(\beta)| d\beta \ll \frac{N^{2+\varepsilon}}{Q},$$

так как

$$\int\limits_0^1 |S_1(\beta)|^2 d\beta = \sum_{n \leqslant N} \mu^2(n) \ll N, \quad \int\limits_0^1 |S_2(\beta)|^2 d\beta = \sum_{n \leqslant \frac{1}{\alpha} N} \mu^2(n) \ll N, \tag{3.3}$$

$$\int\limits_0^1 |S_1(\beta)||S_2(\beta)| d\beta \leqslant \left(\int\limits_0^1 |S_1(\beta)|^2 d\beta \int\limits_0^1 |S_2(\beta)|^2 d\beta \right)^{1/2} \ll N.$$

Оценим теперь интеграл I_2' по множеству E_1. Для этого применим следующую лемму (см. [65, п. II, лемма 1]) о приближении частичной суммой ряда Фурье функции $f(x) = e^{-2\pi i \beta \{x\}}$ (ср. с леммой 1.1).

Лемма 3.2. *Пусть* β, x *— вещественные числа,* P *— натуральное число,* $P \geqslant 2$. *Тогда имеет место формула*

$$e^{-2\pi i \beta \{x\}} = \sum_{|k| \leqslant P} \frac{1 - e^{-2\pi i \beta}}{2\pi i (\beta + k)} e^{2\pi i k x} + O(R_P(x)),$$

где

$$R_P(x) = \frac{1}{\sqrt{1+P^2\sin^2\pi x}} = \sum_{1\leqslant|k|\leqslant P\ln P} c_k e^{2\pi ikx} + O\left(\frac{\ln P}{P}\right), \;\; c_k \ll \frac{\ln P}{P} e^{-|k|/P}.$$

Пользуясь леммой 3.2, преобразуем сумму $S_2(\beta)$ следующим образом:

$$S_2(\beta) = \sum_{n\leqslant\frac{1}{\alpha}N} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta[\alpha n]} =$$

$$= \sum_{n\leqslant\frac{1}{\alpha}N} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta\alpha n}\left(\sum_{|k|\leqslant P}\frac{1-e^{-2\pi i\beta}}{2\pi i(\beta+k)} e^{2\pi ik\alpha n} + R_P(\alpha n)\right) =$$

$$= \sum_{|k|\leqslant P}\frac{1-e^{-2\pi i\beta}}{2\pi i(\beta+k)} \sum_{n\leqslant\frac{1}{\alpha}N} \mu^2(n) e^{2\pi i(\beta+k)\alpha n} + O\left(\sum_{n\leqslant\frac{1}{\alpha}N}\mu^2(n)R_P(\alpha n)\right) =$$

$$= \frac{1-e^{-2\pi i\beta}}{2\pi i}\sum_{|k|\leqslant P}\frac{1}{\beta+k}\sum_{n\leqslant\frac{1}{\alpha}N}\mu^2(n)e^{2\pi i(\beta+k)\alpha n} + O(R_2(N)),$$

где

$$R_2(N) = \sum_{n\leqslant\frac{1}{\alpha}N}\mu^2(n)R_P(\alpha n) = \sum_{n\leqslant\frac{1}{\alpha}N}\mu^2(n)\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P\ln P} c_k e^{2\pi ik\alpha n} + O\left(\frac{N\ln P}{P}\right) \ll$$

$$\ll \frac{\ln P}{P}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P\ln P}\left|\sum_{n\leqslant\frac{1}{\alpha}N}\mu^2(n)e^{2\pi ik\alpha n}\right| + \frac{N\ln P}{P}.$$

Положим $P = N^{\frac{1}{6}}$. В правой части мы получили сумму W_2 из леммы 2.1. Поскольку α — алгебраическое число, то по этой лемме для $R_2(N)$ получаем оценку $R_2(N) \ll N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$. Следовательно,

$$|S_2(\beta)| \ll \left|\sum_{n\leqslant\frac{1}{\alpha}N}\mu^2(n)e^{2\pi i\beta\alpha n}\right| + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant P}\frac{1}{k}\left|\sum_{n\leqslant\frac{1}{\alpha}N}\mu^2(n)e^{2\pi i(\beta+k)\alpha n}\right| + N^{\frac{5}{6}+\varepsilon} \ll$$

$$\ll \sum_{|k|\leqslant P} \frac{|S_3(\alpha(\beta+k))|}{|k|+1} + N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}, \quad \text{где} \quad S_3(\beta) = \sum_{n\leqslant \frac{1}{\alpha}N} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta n}$$

(т. е. $S_3(\beta)$ отличается от $S_1(\beta)$ лишь длиной промежутка суммирования: $\frac{1}{\alpha}N$ вместо N). Таким образом,

$$I_2' = \int\limits_{E_1} |S_1(\beta)|^2|S_2(\beta)|d\beta \ll \sum_{|k|\leqslant P} \frac{1}{|k|+1} \int\limits_{E_1} |S_1(\beta)|^2|S_3(\alpha(\beta+k))|d\beta + N^{\frac{11}{6}+\varepsilon}$$

(здесь мы вновь воспользовались неравенством (3.3)).

Снова разобьем множество интегрирования E_1 на две части — E_{11} и E_{12}, в зависимости от того, принадлежит число $\alpha(\beta+k)$ множеству $\mathfrak{M}(Q)$ или $\mathfrak{m}(Q)$ соответственно. Тогда интеграл по множеству E_{12} также оценивается с помощью леммы 3.1, так как число $\alpha(\beta+k)$ удовлетворяет ее условиям:

$$\sum_{|k|\leqslant P} \frac{1}{|k|+1} \int\limits_{E_{12}} |S_1(\beta)|^2|S_3(\alpha(\beta+k))|d\beta \ll$$

$$\ll \frac{N^{1+\varepsilon}}{Q} \int\limits_0^1 |S_1(\beta)|^2 d\beta \sum_{|k|\leqslant P} \frac{1}{|k|+1} \ll \frac{N^{2+\frac{\varepsilon}{2}}}{Q} \ln P.$$

Наконец, для оценки интеграла по множеству E_{11} воспользуемся следующей леммой, являющейся вариантом леммы Г. И. Архипова и В. Н. Чубарикова о мере пересечения «больших дуг» в разбиении Фарея [51] (см. также [50, 9]).

Лемма 3.3. *Пусть* $1 \leqslant Q_1, Q_2 \leqslant \sqrt{N}$, $\alpha > 1$ *— некоторое фиксированное иррациональное алгебраическое число,* k *— целое число. Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *для меры* $\mu(T)$ *множества* T *точек* $\beta \in \left[\frac{Q_1}{N}; 1 - \frac{Q_1}{N}\right] \cap \mathfrak{M}(Q_1)$ *таких, что* $\alpha(\beta+k) \in \mathfrak{M}(Q_2)$*, справедлива оценка*

$$\mu(T) \ll (|k|+1)Q_1^2Q_2^2N^{-2+\varepsilon}.$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и в работе [51]. Пусть β принадлежит множеству T. Поскольку $\beta \in \left[\frac{Q_1}{N}; 1-\frac{Q_1}{N}\right] \cap \mathfrak{M}(Q_1)$ и $\alpha(\beta+k) \in \mathfrak{M}(Q_2)$, то найдутся такие числа $q_1 \leqslant Q_1$, $q_2 \leqslant Q_2$, a_1, a_2, $(a_1, q_1) = 1$, $1 \leqslant a_1 \leqslant q_1 - 1$, $(a_2, q_2) = 1$, что

$$\beta = \frac{a_1}{q_1} + z_1, \quad \alpha(\beta+k) = \frac{a_2}{q_2} + z_2, \quad |z_1| \leqslant \frac{Q_1}{q_1 N}, \quad |z_2| \leqslant \frac{Q_2}{q_2 N}.$$

Следовательно,

$$\beta = \frac{a_1}{q_1} + z_1 = \frac{a_2}{\alpha q_2} + \frac{z_2}{\alpha} - k,$$

$$\left|\frac{a_1}{q_1} - \frac{a_2}{\alpha q_2} + k\right| = \left|\frac{z_2}{\alpha} - z_1\right| \leqslant \frac{1}{N}\left(\frac{Q_1}{q_1} + \frac{Q_2}{q_2}\right).$$

Положим $b = a_1 + kq_1$. Тогда

$$\left|\frac{b}{q_1} - \frac{a_2}{\alpha q_2}\right| \leqslant \frac{1}{N}\left(\frac{Q_1}{q_1} + \frac{Q_2}{q_2}\right), \quad |bq_2\alpha - a_2 q_1| \leqslant \frac{\alpha}{N}\left(Q_1 q_2 + Q_2 q_1\right) \leqslant \frac{2\alpha Q_1 Q_2}{N}.$$

По условию, α — алгебраическое число, поэтому по теореме Рота (лемма 1.4) для знаменателей r_s его подходящих дробей выполняется неравенство $r_{s+1} \ll_\varepsilon r_s^{1+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$. Выберем наименьший номер s_0 подходящей дроби так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{2\alpha Q_1 Q_2}{N} < \frac{1}{4r_{s_0}}$. Тогда

$$\frac{N^{1-\varepsilon}}{Q_1 Q_2} \ll r_{s_0} \leqslant \frac{N}{8\alpha Q_1 Q_2}.$$

Заметим, что $b \neq 0$, так как $1 \leqslant a_1 \leqslant q_1 - 1$. Поэтому по экстремальному свойству подходящих дробей $|bq_2| \geqslant r_{s_0} = r$.

Пусть β, β' — два числа, принадлежащих множеству T. Для соответствующих им четверок чисел (a_1, q_1, a_2, q_2) и (a_1', q_1', a_2', q_2') имеем

$$|bq_2\alpha - a_2q_1| < \frac{1}{4r}, \;\; |b'q_2'\alpha - a_2'q_1'| < \frac{1}{4r}, \;\; |(bq_2 - b'q_2')\alpha - (a_2q_1 - a_2'q_1')| < \frac{1}{2r}.$$

Снова по экстремальному свойству подходящих дробей отсюда заключаем, что либо $bq_2 = b'q_2'$, либо $|bq_2 - b'q_2'| \geqslant r$.

Итак, выполнены неравенства $|bq_2| \leqslant (|k|+1)Q_1Q_2$, $|bq_2| \geqslant r$, $|bq_2 - b'q_2'| \geqslant r$. Следовательно, для натурального числа n на промежутке $E_n = \left(r(n-\frac{1}{2}); r(n+\frac{1}{2})\right]$ содержится не более одного значения $|bq_2|$, а количество промежутков не превосходит величины $H = \frac{(|k|+1)Q_1Q_2}{r}$. При этом значение $|a_2q_1|$ определяется однозначно по значению $|bq_2|$: $|a_2q_1| = [|bq_2|\alpha]$. Значит, количество таких четверок (b, q_1, a_2, q_2) (а тогда и четверок (a_1, q_1, a_2, q_2), т.к. $a_1 = b - kq_1$) по известной оценке количества делителей не превосходит $\ll N^{\varepsilon}$.

Таким образом, при заданном n имеется $\ll N^{\varepsilon}$ промежутков длины, не превосходящей

$$\delta = 2\min\left(\frac{Q_1}{q_1N}, \frac{Q_2}{q_2N},\right) \leqslant \frac{1}{N}\sqrt{\frac{Q_1Q_2}{q_1q_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N}\sqrt{\frac{(|k|+1)Q_1Q_2}{bq_2}} \leqslant \frac{1}{N}\sqrt{\frac{(|k|+1)Q_1Q_2}{r\left(n-\frac{1}{2}\right)}},$$

на которых могут располагаться точки из множества T. Следовательно, суммарная длина этих промежутков не превосходит

$$\mu(T) \ll \sum_{n=1}^{H} N^{\varepsilon}\frac{1}{N}\sqrt{\frac{(|k|+1)Q_1Q_2}{r\left(n-\frac{1}{2}\right)}} \ll N^{-1+\varepsilon}\sqrt{(|k|+1)Q_1Q_2}\sqrt{\frac{H}{r}} \ll$$

$$\ll N^{-1+\varepsilon}\frac{(|k|+1)Q_1Q_2}{r} \ll (|k|+1)Q_1^2Q_2^2N^{-2+2\varepsilon}.$$

Лемма 3.3 доказана.

Применим лемму 3.3 к интегралу по множеству E_{11} при $Q_1 = Q_2 = Q$.

Оценивая тривиально подынтегральные функции, получаем

$$\sum_{|k|\leqslant P} \frac{1}{|k|+1} \int\limits_{E_{11}} |S_1(\beta)|^2 |S_3(\alpha(\beta+k))| d\beta \ll N^3 Q^4 N^{-2+\varepsilon} \sum_{|k|\leqslant P} 1 = PQ^4 N^{1+\varepsilon}.$$

Выберем параметр Q равным $Q = P = N^{\frac{1}{6}}$. Тогда, собирая все оценки, для интеграла I_2 имеем

$$|I_2| \ll \frac{N^{2+\varepsilon}}{Q} + \frac{N^{2+\frac{\varepsilon}{2}}}{Q} \ln P + PQ^4 N^{1+\varepsilon} + N^{\frac{11}{6}+\varepsilon} \ll N^{\frac{11}{6}+\varepsilon}.$$

3.1.4. Окончание доказательства теоремы

Окончательно, учитывая асимптотическую формулу (3.2) для интеграла I_1, получаем

$$r_3(N,\alpha) = I_1 + I_2 = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 \frac{N^2}{2\alpha} + O\left(\frac{N^2}{Q}\right) + O\big(N^{\frac{3}{2}} Q^2\big) + O\big(N^{\frac{11}{6}+\varepsilon}\big) =$$

$$= \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 \frac{N^2}{2\alpha} + O\big(N^{\frac{11}{6}+\varepsilon}\big),$$

что и требовалось доказать.

3.2. Бинарная задача

Доказанная К. Эвелином и Е. Линфутом [22] асимптотическая формула для $r_2(N)$ (количество представлений числа N в виде суммы двух бесквадратных чисел) имеет вид

$$r_2(N) = N \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^2}\right) \prod_{p^2|N} \frac{p^2-1}{p^2-2} + O\big(N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\big),$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. Более простое доказательство этой асимптотической формулы в 1931 г. предложил Т. Эстерман [19].

В настоящем параграфе, пользуясь аналогом метода Т. Эстермана, мы доказываем теорему 3.2, т. е. следующую асимптотическую формулу для $r_2(N,\alpha)$ (количество представлений натурального числа N в виде суммы бесквадратного числа q_1 и числа вида $[\alpha q_2]$, где q_2 также бесквадратное: $q_1 + [\alpha q_2] = N$):

$$r_2(N,\alpha) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^2 N + O\big(N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\big),$$

где α — иррациональное алгебраическое число.

3.2.1. Выделение главного члена

Представим $r_2(N,\alpha)$ в виде суммы

$$r_2(N,\alpha) = \sum_{n+[\alpha m]=N} \mu^2(n)\mu^2(m)$$

и воспользуемся известным тождеством $\mu^2(n) = \sum\limits_{d^2|n} \mu(d)$. Тогда

$$r_2(N,\alpha) = \sum_{n+[\alpha m]=N} \sum_{d^2|n} \mu(d) \sum_{r^2|m} \mu(r) = \sum_{d^2 l+[\alpha r^2 s]=N} \mu(d)\mu(r) =$$

$$= \sum_{d\leqslant\sqrt{N}} \sum_{r\leqslant\sqrt{N/\alpha}} \mu(d)\mu(r) \sum_{d^2 l+[\alpha r^2 s]=N} 1.$$

Выделим в двойной сумме по d и r слагаемые, отвечающие условиям $d \leqslant N^{1/6}$, $r \leqslant N^{1/6}$. Получим

$$r_2(N,\alpha) = \sum_{d\leqslant N^{1/6}} \sum_{r\leqslant N^{1/6}} \mu(d)\mu(r) \sum_{d^2 l+[\alpha r^2 s]=N} 1 + R_1 + R_2,$$

$$|R_1| \leqslant \sum_{d>N^{1/6}} \sum_{l\leqslant \frac{N}{d^2}} K(N-d^2 l), \quad |R_2| \leqslant \sum_{r>N^{1/6}} \sum_{s\leqslant \frac{N}{\alpha r^2}} \tau(N-[\alpha r^2 s]),$$

где $K(m)$ равно числу решений в натуральных числах r, s уравнения $[\alpha r^2 s] =$

m. Поскольку $\alpha > 1$, существует не более одного значения k такого, что $[\alpha k] = m$, причем $k \leqslant \frac{m}{\alpha} \leqslant \frac{N}{\alpha} < N$. Следовательно, $K(m) \leqslant \max\limits_{k \leqslant N} \tau(k) \ll N^{\varepsilon}$. Значит,

$$|R_1| \ll N^{\varepsilon} \sum_{d > N^{1/6}} \frac{N}{d^2} = N^{1+\varepsilon} \sum_{d > N^{1/6}} \frac{1}{d^2} \ll N^{1+\varepsilon} \int\limits_{N^{1/6}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = N^{5/6+\varepsilon},$$

и аналогично

$$|R_2| \ll N^{\varepsilon} \sum_{r > N^{1/6}} \frac{N}{\alpha r^2} \ll N^{5/6+\varepsilon}.$$

Рассмотрим теперь сумму

$$S = \sum_{d \leqslant N^{1/6}} \sum_{r \leqslant N^{1/6}} \mu(d)\mu(r) \sum_{d^2 l + [\alpha r^2 s] = N} 1.$$

Равенство $d^2 l + [\alpha r^2 s] = N$ равносильно тому, что $\alpha r^2 s - 1 < N - d^2 l < \alpha r^2 s$, или $\frac{N-d^2 l}{\alpha r^2} < s < \frac{N-d^2 l}{\alpha r^2} + \frac{1}{\alpha r^2}$. Пусть функция $\omega(x)$ задана на полуинтервале $(0; 1]$ следующим образом:

$$\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 - \frac{1}{\alpha r^2} < x < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 1 - \frac{1}{\alpha r^2} \text{ или } x = 1; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

и продолжена периодически на всю числовую ось. Тогда

$$\sum_{d^2 l + [\alpha r^2 s] = N} 1 = \sum_{l \leqslant \frac{N}{d^2}} \omega\left(\frac{N - d^2 l}{\alpha r^2}\right).$$

Поскольку $\omega(x) = \frac{1}{\alpha r^2} + \rho(x + \frac{1}{\alpha r^2}) - \rho(x)$, где $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, получаем

$$S = \sum_{d \leqslant N^{1/6}} \sum_{r \leqslant N^{1/6}} \mu(d)\mu(r) \sum_{l \leqslant \frac{N}{d^2}} \left(\frac{1}{\alpha r^2} + \rho\left(\frac{N - d^2 l + 1}{\alpha r^2}\right) - \rho\left(\frac{N - d^2 l}{\alpha r^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{N}{\alpha} \sum_{d \leqslant N^{1/6}} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{r \leqslant N^{1/6}} \frac{\mu(r)}{r^2} + O(N^{\frac{1}{3}}) +$$

$$+ \sum_{d \leqslant N^{1/6}} \sum_{r \leqslant N^{1/6}} \mu(d)\mu(r) \sum_{l \leqslant \frac{N}{d^2}} \left(\rho\left(\frac{N - d^2 l + 1}{\alpha r^2} \right) - \rho\left(\frac{N - d^2 l}{\alpha r^2} \right) \right).$$

Первое из полученных слагаемых дает главный член доказываемой асимптотической формулы. Действительно,

$$\sum_{d \leqslant N^{1/6}} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\int_{N^{1/6}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \right) = \frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{6}}} \right),$$

поэтому учитывая, что $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, получаем

$$\frac{N}{\alpha} \sum_{d \leqslant N^{1/6}} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{r \leqslant N^{1/6}} \frac{\mu(r)}{r^2} = \frac{N}{\alpha} \left(\frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{6}}} \right) \right)^2 = \frac{N}{\alpha} \left(\frac{6}{\pi^2} \right)^2 + O\big(N^{\frac{5}{6}}\big).$$

3.2.2. Оценки тригонометрических сумм

Для оценки тройной суммы в последнем слагаемом применим лемму 1.1 о разложении функции $\rho(x)$ в ряд Фурье. Имеем

$$S_1 = \sum_{d \leqslant N^{1/6}} \sum_{r \leqslant N^{1/6}} \mu(d)\mu(r) \sum_{l \leqslant \frac{N}{d^2}} \left(\rho\left(\frac{N - d^2 l + 1}{\alpha r^2} \right) - \rho\left(\frac{N - d^2 l}{\alpha r^2} \right) \right) =$$

$$= \sum_{d \leqslant N^{1/6}} \sum_{r \leqslant N^{1/6}} \mu(d)\mu(r) \sum_{l \leqslant \frac{N}{d^2}} \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant P} \frac{e^{2\pi i k \frac{N - d^2 l + 1}{\alpha r^2}} - e^{2\pi i k \frac{N - d^2 l}{\alpha r^2}}}{2\pi i k} + O(R_3) =$$

$$= \sum_{r \leqslant N^{1/6}} \mu(r) \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant P} \frac{e^{2\pi i k \frac{N+1}{\alpha r^2}} - e^{2\pi i k \frac{N}{\alpha r^2}}}{2\pi i k} \sum_{d \leqslant N^{1/6}} \mu(d) \sum_{l \leqslant \frac{N}{d^2}} e^{-2\pi i \frac{k d^2 l}{\alpha r^2}} + O(R_3),$$

где

$$|R_3| \ll \frac{\ln P}{P} \sum_{r \leqslant N^{1/6}} \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant P \ln P} \sum_{d \leqslant N^{1/6}} \left| \sum_{l \leqslant \frac{N}{d^2}} e^{-2\pi i \frac{k d^2 l}{\alpha r^2}} \right| + O\left(\frac{N^{\frac{7}{6}} \ln P}{P} \right).$$

Каждую из получившихся сумм по k и по d разобьем теперь на суммы по промежуткам вида

$$K < k \leqslant 2K, \quad D < d \leqslant 2D$$

соответственно, где $2K \leqslant P \ln P$, $2D \leqslant N^{1/6}$; всего таких сумм будет $\ll \ln N$ (мы считаем, что $P \leqslant N$). Тогда, пользуясь неравенством

$$\left| \sum_{y \leqslant Y} e^{2\pi i \lambda y} \right| \leqslant \min \left(Y, \frac{1}{2\|\lambda\|} \right)$$

(лемма 1.8), получим

$$|S_1| \ll \frac{\ln^4 N}{K} \sum_{r \leqslant N^{1/6}} \max_{\substack{2K \leqslant P \ln P \\ 2D \leqslant N^{1/6}}} \sum_{K < |k| \leqslant 2K} \sum_{D < d \leqslant 2D} \min \left(\frac{N}{D^2}, \frac{1}{\| \frac{kd^2}{\alpha r^2} \|} \right) + \frac{N^{\frac{7}{6}} \ln N}{P} \ll$$

$$\ll \frac{\ln^4 N}{K} \sum_{r \leqslant N^{1/6}} \max_{\substack{2K \leqslant P \ln P \\ 2D \leqslant N^{1/6}}} \sum_{KD^2 < m \leqslant 8KD^2} \tau(m) \min \left(\frac{N}{D^2}, \frac{1}{\| \frac{m}{\alpha r^2} \|} \right) + \frac{N^{\frac{7}{6}} \ln N}{P}.$$

Для оценки внутренней суммы воспользуемся оценкой $\tau(m) \ll N^{\varepsilon}$ и леммой 1.9. Получаем

$$|S_1| \ll N^{\varepsilon} \sum_{r \leqslant N^{1/6}} \max_{\substack{2K \leqslant P \ln P \\ 2D \leqslant N^{1/6}}} \left(\frac{N}{q} + D^2 + \frac{q}{K} \right) + \frac{N^{\frac{7}{6}} \ln N}{P},$$

где $q = q(r)$ — знаменатель некоторой подходящей дроби к числу $\frac{1}{\alpha r^2}$. Зафиксируем некоторый параметр Q. Поскольку по условию число α, а значит, и число $\frac{1}{\alpha}$ — алгебраическое, то по лемме 1.5 знаменатель q' подходящей дроби к этому числу можно выбрать так, что $Q^{1-\varepsilon} \ll q' \leqslant Q$. Тогда знаменатель q подходящей дроби к числу $\frac{1}{\alpha r^2}$ можно выбрать так, что выполнены неравенства $\frac{Q^{1-\varepsilon}}{r^2} \ll q \leqslant Q$. Следовательно,

$$|S_1| \ll N^{\varepsilon} \left(\sum_{r \leqslant N^{1/6}} \left(\frac{Nr^2}{Q^{1-\varepsilon}} + Q \right) + N^{\frac{5}{6}} + \frac{N^{\frac{7}{6}}}{P} \right).$$

Выберем теперь параметры P и Q следующим образом: $P = N^{\frac{1}{3}}$, $Q = \sqrt{N}r$. Тогда получим $|S_1| \ll N^{\frac{5}{6}+2\varepsilon}$. Теорема 3.2 доказана.

Глава 4

Бесквадратные числа вида $p-1$

Целью настоящей главы является получение асимптотической формулы при $N \to \infty$ для количества бесквадратных чисел вида $p-1$ с условием $p \leqslant N$ (т. е. количества решений уравнения $p-q=1$ в простых числах $p \leqslant N$ и бесквадратных q), а также количества тех из них, для которых p принадлежит заданной арифметической прогрессии $a, a+k, a+2k, \ldots$, где $1 \leqslant a < k$, $(a,k)=1$. Эти количества равны соответственно значениям сумм

$$\sum_{p\leqslant N} \mu^2(p-1), \qquad \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\equiv a \pmod{k}}} \mu^2(p-1) \tag{4.1}$$

(здесь $\mu(n)$, как обычно, функция Мёбиуса).

При выводе асимптотических формул мы будем использовать следующие известные теоремы Бруна—Титчмарша и Бомбьери—Виноградова (см. [72], [8]) об оценке числа $\pi(N;m,l) = \sum\limits_{\substack{p\leqslant N\\ p\equiv l \pmod{m}}} 1$ простых чисел в арифметической прогрессии $mn+l$, $n=0,1,2,\ldots$, $(m,l)=1$.

Лемма 4.1 (неравенство В. Бруна — Э. Титчмарша). *Пусть* $(m,l)=1$

и $2 \leqslant m \leqslant N$. *Тогда при* $N \to \infty$

$$\pi(N; m, l) \ll \frac{N}{\varphi(m) \ln \frac{2N}{m}}.$$

Лемма 4.2 (теорема Э. Бомбьери — А. И. Виноградова)**.** *Для любого* $A > 0$ *существует число* $B = B(A) > 0$ *такое, что при* $N \to \infty$

$$\sum_{m \leqslant \frac{\sqrt{N}}{\ln^B N}} \max_{\substack{l \\ (m,l)=1}} \left| \pi(N; m, l) - \frac{\pi(N)}{\varphi(m)} \right| \ll \frac{N}{\ln^A N}.$$

4.1. Асимптотика количества бесквадратных чисел вида $p-1$

Следующая теорема устанавливает асимптотическое поведение при $N \to \infty$ количества бесквадратных чисел вида $p-1$ для всех простых чисел $p \leqslant N$. Отметим, что такую же асимптотическую формулу совершенно аналогично можно вывести и для количества бесквадратных чисел вида $p+a$ для любого фиксированного целого $a \neq 0$.

Теорема 4.1. *При* $N \to \infty$ *для любого* $A > 0$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{p \leqslant N} \mu^2(p-1) = c_1 \operatorname{Li}(N) + O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right),$$

где $c_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n\varphi(n)} = \prod\limits_{p} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right)$ *— постоянная,* $\operatorname{Li}(N) = \int\limits_2^N \frac{dt}{\ln t}$ *— интегральный логарифм.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\mu^2(n) = \sum\limits_{d^2|n} \mu(d)$:

$$U(N) = \sum_{p \leqslant N} \mu^2(p-1) = \sum_{p \leqslant N} \sum_{d^2|p-1} \mu(d) = \sum_{d \leqslant \sqrt{N-1}} \mu(d) \sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod{d^2} \\ p \leqslant N}} 1 =$$

$$= \sum_{d \leqslant \sqrt{N-1}} \mu(d) \pi(N; d^2, 1).$$

Разобьём получившуюся сумму на две: $U(N) = U_1 + U_2$, где

$$U_1 = \sum_{d \leqslant \frac{\sqrt[4]{N}}{\ln^{B/2} N}} \mu(d)\pi(N; d^2, 1), \quad U_2 = \sum_{\frac{\sqrt[4]{N}}{\ln^{B/2} N} < d \leqslant \sqrt{N-1}} \mu(d)\pi(N; d^2, 1).$$

Сумму U_1 в свою очередь представим в виде

$$U_1 = \sum_{d \leqslant \frac{\sqrt[4]{N}}{\ln^{B/2} N}} \mu(d) \left(\pi(N; d^2, 1) - \frac{\pi(N)}{\varphi(d^2)} \right) + \pi(N) \sum_{d \leqslant \frac{\sqrt[4]{N}}{\ln^{B/2} N}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d^2)} = U_1' + U_1''.$$

Оценим сумму U_1'. По теореме Бомбьери—Виноградова (лемма 4.2) имеем

$$|U_1'| \leqslant \sum_{d \leqslant \frac{\sqrt[4]{N}}{\ln^{B/2} N}} \left| \pi(N; d^2, 1) - \frac{\pi(N)}{\varphi(d^2)} \right| \leqslant \sum_{k \leqslant \frac{\sqrt{N}}{\ln^{B} N}} \left| \pi(N; k, 1) - \frac{\pi(N)}{\varphi(k)} \right| \ll \frac{N}{\ln^A N}.$$

Далее, поскольку $\varphi(d^2) = d\varphi(d)$, то

$$U_1'' = \pi(N) \sum_{d \leqslant \frac{\sqrt[4]{N}}{\ln^{B/2} N}} \frac{\mu(d)}{d\varphi(d)} = \pi(N) \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d\varphi(d)} - \sum_{d > \frac{\sqrt[4]{N}}{\ln^{B/2} N}} \frac{\mu(d)}{d\varphi(d)} \right).$$

Остаток сходящегося ряда $c_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n\varphi(n)}$ оценим следующим образом:

$$\left| \sum_{d > \frac{\sqrt[4]{N}}{\ln^{B/2} N}} \frac{\mu(d)}{d\varphi(d)} \right| \leqslant \sum_{d > \frac{\sqrt[4]{N}}{\ln^{B/2} N}} \frac{1}{d^{3/2}} \ll \frac{\ln^{B/4} N}{\sqrt[8]{N}}.$$

Следовательно, в силу асимптотического закона распределения простых чисел $\pi(N) = \mathrm{Li}(N) + O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right)$ получаем

$$U_1'' = \left(\mathrm{Li}(N) + O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right)\right)\left(c_1 + O\left(\frac{\ln^{B/4} N}{\sqrt[8]{N}}\right)\right) = c_1\,\mathrm{Li}(N) + O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right).$$

Наконец, сумму U_2 оценим сверху, применив неравенство Бруна–Титчмарша (лемма 4.1):

$$|U_2| \leqslant \sum_{\frac{\sqrt[4]{N}}{\ln^{B/2} N} < d \leqslant \sqrt{N-1}} \pi(N; d^2, 1) \ll \frac{N}{\ln N} \sum_{\frac{\sqrt[4]{N}}{\ln^{B/2} N} < d \leqslant \sqrt{N-1}} \frac{1}{\varphi(d^2)} \ll$$
$$\ll \frac{N}{\ln N} \sum_{d > \frac{\sqrt[4]{N}}{\ln^{B/2} N}} \frac{1}{d\varphi(d)} \ll N^{7/8} \ln^{B/4-1} N.$$

Собирая вместе оценки сумм U_1', U_1'' и U_2, получаем утверждение теоремы. Теорема 4.1 доказана.

4.2. Бесквадратные числа вида $p-1$ для простых чисел p, принадлежащих арифметической прогрессии

Пусть теперь простые числа $p \leqslant N$ принадлежат арифметической прогрессии с разностью k и первым членом a, $1 \leqslant a < k$, где a, k — фиксированные числа. Для того, чтобы сумма по простым числам из этой прогрессии была непустой, мы накладываем естественное ограничение $(a, k) = 1$.

Теорема 4.2. *Пусть $1 \leqslant a < k$, $(a, k) = 1$. При $N \to \infty$ для любого $A > 0$ справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{p \leqslant N \\ p \equiv a \,(\mathrm{mod}\, k)}} \mu^2(p-1) = c_1(a, k)\,\mathrm{Li}(N) + O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right),$$

где постоянная в символе O зависит только от параметров a, k, и

$$c_1(a,k) = \sum_{l|(k,a-1)} \sum_{\substack{n=1 \\ (n^2,k)=l}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi(\frac{kn^2}{l})}.$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 4.1, воспользуемся сначала тем, что $\mu^2(n) = \sum\limits_{d^2|n} \mu(d)$:

$$V(N) = \sum_{\substack{p\leqslant N \\ p\equiv a \,(\mathrm{mod}\, k)}} \mu^2(p-1) = \sum_{\substack{p\leqslant N \\ p\equiv a \,(\mathrm{mod}\, k)}} \sum_{d^2|p-1} \mu(d) = \sum_{d\leqslant\sqrt{N-1}} \mu(d) \sum_{\substack{p\leqslant N \\ p\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, d^2) \\ p\equiv a \,(\mathrm{mod}\, k)}} 1.$$

Получившаяся внутренняя сумма равна количеству простых чисел $p \leqslant N$, принадлежащих одновременно двум арифметическим прогрессиям: $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, d^2)$ и $p \equiv a \,(\mathrm{mod}\, k)$. Для оценки количества таких простых p воспользуемся следующей леммой ([57, гл. IV, вопр. 6а]).

Лемма 4.3. *Пусть $l = (m_1, m_2)$. Система сравнений*

$$x \equiv b_1 \,(\mathrm{mod}\, m_1), \quad x \equiv b_2 \,(\mathrm{mod}\, m_2)$$

разрешима тогда и только тогда, когда $b_2 - b_1$ кратно l, причём в случае разрешимости совокупность значений x, удовлетворяющих этой системе, определяется сравнением вида

$$x \equiv x_0 \left(\mathrm{mod}\, \frac{m_1 m_2}{l}\right).$$

Применяя эту лемму, заключаем, что одновременно двум сравнениям $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, d^2)$ и $p \equiv a \,(\mathrm{mod}\, k)$ удовлетворяют те и только те простые числа p, которые удовлетворяют сравнению $p \equiv x_0 \left(\mathrm{mod}\, \frac{kd^2}{l}\right)$, где $l = (k, d^2)$, причём

$l|a-1$ (в противном случае система сравнений неразрешима). Следовательно,

$$\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,d^2)\\ p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,k)}} 1 = \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\equiv x_0\,(\mathrm{mod}\,\frac{kd^2}{l})}} 1 = \pi\Big(N;\frac{kd^2}{l},x_0\Big),$$

и для суммы $V(N)$ получаем выражение

$$V(N) = \sum_{\substack{d\leqslant\sqrt{N-1}\\ (d^2,k)|a-1}} \mu(d)\pi\Big(N;\frac{kd^2}{(d^2,k)},x_0\Big) = \sum_{l|(k,a-1)}\sum_{\substack{d\leqslant\sqrt{N-1}\\ (d^2,k)=l}} \mu(d)\pi\Big(N;\frac{kd^2}{l},x_0\Big) =$$
$$= \sum_{l|(k,a-1)} V(N;k,l).$$

Разобьём сумму $V(N;k,l)$ на две: $V(N;k,l) = V_1+V_2$, где

$$V_1 = \sum_{\substack{d\leqslant\frac{\sqrt[4]{N}}{\sqrt{k}\ln^{B/2}N}\\ (d^2,k)=l}} \mu(d)\pi\Big(N;\frac{kd^2}{l},x_0\Big),\quad V_2 = \sum_{\substack{\frac{\sqrt[4]{N}}{\sqrt{k}\ln^{B/2}N}<d\leqslant\sqrt{N-1}\\ (d^2,k)=l}} \mu(d)\pi\Big(N;\frac{kd^2}{l},x_0\Big).$$

Сумму V_1 в свою очередь представим в виде

$$V_1 = \sum_{\substack{d\leqslant\frac{\sqrt[4]{N}}{\sqrt{k}\ln^{B/2}N}\\ (d^2,k)=l}} \mu(d)\left(\pi\Big(N;\frac{kd^2}{l},x_0\Big) - \frac{\pi(N)}{\varphi(\frac{kd^2}{l})}\right) +$$
$$+\,\pi(N)\sum_{\substack{d\leqslant\frac{\sqrt[4]{N}}{\sqrt{k}\ln^{B/2}N}\\ (d^2,k)=l}} \frac{\mu(d)}{\varphi(\frac{kd^2}{l})} = V_1'+V_1''.$$

Применяя теорему Бомбьери—Виноградова (лемма 4.2), для суммы V_1' получим оценку

$$|V_1'| \leqslant \sum_{\substack{d \leqslant \frac{\sqrt[4]{N}}{\sqrt{k}\ln^{B/2} N} \\ (d^2,k)=l}} \left| \pi\Big(N; \frac{kd^2}{l}, x_0\Big) - \frac{\pi(N)}{\varphi(\frac{kd^2}{l})} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m \leqslant \frac{\sqrt{N}}{\ln^B N}} \left| \pi(N; m, x_0) - \frac{\pi(N)}{\varphi(m)} \right| \ll \frac{N}{\ln^A N}.$$

Далее, поскольку ряд $c_1'(k,l) = \sum\limits_{\substack{d=1 \\ (d^2,k)=l}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{\varphi(\frac{kd^2}{l})}$ сходится и для его остатка справедлива оценка

$$\sum_{\substack{d>t \\ (d^2,k)=l}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{\varphi(\frac{kd^2}{l})} \ll \sum_{d>t} \frac{1}{d^{3/2}} \ll \frac{1}{\sqrt{t}},$$

то

$$V_1'' = \pi(N) \left(c_1'(k,l) + O\left(\frac{\ln^{B/4} N}{\sqrt[8]{N}} \right) \right).$$

Следовательно, в силу асимптотического закона распределения простых чисел $\pi(N) = \mathrm{Li}(N) + O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right)$ получаем

$$V_1'' = \left(\mathrm{Li}(N) + O\left(\frac{N}{\ln^A N} \right) \right) \left(c_1'(k,l) + O\left(\frac{\ln^{B/4} N}{\sqrt[8]{N}} \right) \right) =$$

$$= c_1'(k,l)\,\mathrm{Li}(N) + O\left(\frac{N}{\ln^A N} \right).$$

Наконец, сумму V_2 оценим сверху тривиальным образом (количество простых чисел $p \leqslant N$ в арифметической прогрессии с разностью $\frac{kd^2}{l}$ не превышает количества членов этой прогрессии, не превосходящих N, т. е. $\frac{Nl}{kd^2}$):

$$|U_2| \leqslant \sum_{\frac{\sqrt[4]{N}}{\sqrt{k}\ln^{B/2} N} < d \leqslant \sqrt{N-1}} \pi\Big(N; \frac{kd^2}{l}, x_0\Big) \ll \sum_{\frac{\sqrt[4]{N}}{\ln^{B/2} N} < d \leqslant \sqrt{N-1}} \frac{Nl}{kd^2} \ll N \sum_{d > \frac{\sqrt[4]{N}}{\ln^{B/2} N}} \frac{1}{d^2} \ll$$

$$\ll N \frac{\ln^{B/2} N}{\sqrt[4]{N}} \ll N^{3/4} \ln^{B/2} N,$$

так как $\sum\limits_{d>t}\frac{1}{d^2}\ll\frac{1}{t}$. Собирая вместе оценки сумм V_1', V_1'' и V_2, для суммы $V(N)$ получаем формулу

$$V(N)=\sum_{l|(k,a-1)}V(N;k,l)=\sum_{l|(k,a-1)}\left(c_1'(k,l)\,\mathrm{Li}(N)+O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right)\right)=$$
$$=\left(\sum_{l|(k,a-1)}c_1'(k,l)\right)\mathrm{Li}(N)+O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right)=c_1(a,k)\,\mathrm{Li}(N)+O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right),$$

где постоянная в символе O может зависеть только от параметров a, k, и

$$c_1(a,k)=\sum_{l|(k,a-1)}c_1'(k,l)=\sum_{l|(k,a-1)}\sum_{\substack{n=1\\(n^2,k)=l}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi(\frac{kn^2}{l})}.$$

Теорема 4.2 доказана.

В частности, если числа k и $a-1$ взаимно просты, то выражение для постоянной $c_1(a,k)$ принимает более простой вид:

$$c_1(a,k)=c_1'(k,1)=\sum_{\substack{n=1\\(n^2,k)=1}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi(kn^2)}=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\substack{n=1\\(n,k)=1}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n\varphi(n)}.$$

Пользуясь формулой $\varphi(k)=k\prod\limits_{p|k}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ и мультипликативностью функции $\frac{\mu(n)}{n\varphi(n)}$ (т. е. представляя ряд для нее в виде эйлерова произведения по простым числам), получаем

$$c_1(a,k)=\frac{1}{\varphi(k)}\prod_{p\nmid k}\left(1-\frac{1}{p(p-1)}\right)=\frac{1}{k\prod\limits_{p|k}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\frac{\prod\limits_{p}\left(1-\frac{1}{p(p-1)}\right)}{\prod\limits_{p|k}\left(1-\frac{1}{p(p-1)}\right)}=\frac{c_1}{\tilde{\varphi}(k)},$$

где $c_1=\prod\limits_{p}\left(1-\frac{1}{p(p-1)}\right)$, $\tilde{\varphi}(k)=k\prod\limits_{p|k}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p(p-1)}\right)=k\prod\limits_{p|k}\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}\right)$.

Таким образом, имеет место следующее следствие из теоремы 4.2.

Следствие 4.1. *Пусть* $1\leqslant a<k$, $(a,k)=(a-1,k)=1$. *Тогда при*

$N \to \infty$ для любого $A > 0$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{\substack{p \leqslant N \\ p \equiv a \,(\mathrm{mod}\, k)}} \mu^2(p-1) = \frac{c_1}{\tilde{\varphi}(k)}\,\mathrm{Li}(N) + O\left(\frac{N}{\ln^A N}\right),$$

где $c_1 = \prod\limits_{p}\left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right)$, $\tilde{\varphi}(k) = k\prod\limits_{p|k}\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right)$ и постоянная в символе O зависит только от параметров a, k.

Доказанное следствие устанавливает следующий любопытный факт: бесквадратные числа распределены по множествам сдвинутых простых чисел $P(a,k) = \{p-1 \,|\, p - \text{простое},\ p \equiv a \pmod{k}\}$, где $1 \leqslant a < k$, $(a,k) = 1$, асимптотически неравномерно. А именно, для каждого из $\varphi(k)$ значений a в такие множества попадают асимптотически неравные количества бесквадратных чисел. В частности, при дополнительном условии $(a-1,k) = 1$ их оказывается «аномально много», порядка $\sim \frac{c_1}{\tilde{\varphi}(k)}\,\mathrm{Li}(N) > \frac{c_1}{\varphi(k)}\,\mathrm{Li}(N)$, так как $\tilde{\varphi}(k) = k\prod\limits_{p|k}\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right) < \varphi(k) = k\prod\limits_{p|k}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Список литературы

[1] *Abercrombie A. G.* Beatty sequences and multiplicative number theory // Acta Arith. **70**. 1995. 195—207.

[2] *Abercrombie A. G., Banks W. D., Shparlinski I. E.* Arithmetic functions on Beatty sequences // Acta Arith. **136**. 2009. №. 1. 81—89.

[3] *Baker R., Banks W., Brüdern J., Shparlinski I., Weingartner A.* Piatetski-Shapiro sequences // Acta Arith. **157**. № 1. 2013. 37—68.

[4] *Banks W., Shparlinski I. E.* Non-residues and primitive roots in Beatty sequences // Bull. Austral. Math. Soc. **73**. 2006. 433—443.

[5] *Banks W., Shparlinski I. E.* Short character sums with Beatty sequences // Math. Res. Lett. **13**. 2006. 539—547.

[6] *Banks W., Güloğlu A. M., Nevans C. W.* Representations of integers as sums of primes from a Beatty sequence // Acta Arith. **130**. 2007. 255—275.

[7] *Beatty S.* Problem 3173 // American Mathematical Monthly. **33** (3). 1926. 159.

[8] *Bombieri E.* On the large sieve // Mathematika. **12**. 1965. 201—225.

[9] *Brüdern J., Cook R.J., Perelli A.* The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments // Sieve Methods, Exponential Sums and Their

Applications in Number Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1997. 87—100.

[10] *Brüdern J.* Some additive problems of Goldbach's type // Funct. et Approx. Comment. Math. **28**. 2000. 45—73.

[11] *Brüdern J., Granville A., Perelli A., Vaughan R. C., Wooley T. D.* On the exponential sum over k-free numbers // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. **356**. 1998. 739–761.

[12] *Brüdern J., Perelli A.* Exponential Sums and Additive Problems Involving Square-free Numbers. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) Vol. XXVIII. 1999. 591–613.

[13] *Bombieri E., Friedlander J. B., Iwaniec H.* Primes in arithmetic progressions to large moduli // Acta Math. **156**. 1986. 203—251.

[14] *Cao X. D., Zhai W. G.* The distribution of square-free numbers of the form $[n^c]$ // J. Théor. Nombres Bordeaux. **10**. No 2. 1998. 287—299.

[15] *Cao X. D., Zhai W. G.* The distribution of square-free numbers of the form $[n^c]$, II // Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) **51**. 2008. 1187—1194.

[16] *Chen Jing-run, Liu Jian Min.* The exceptional set of Goldbach-numbers (III) // Chinese Quart. J. Math. **4** (1). 1989. 1—15.

[17] *Croft M. J.* Square-free numbers in arithmetic progressions // Proc. London Math. Soc. **30** (2). 1975. 143—159.

[18] *Elliott P. D. T. A., Halberstam H.* Some applications of Bombieri's theorem // Mathematika. **13**. 1966. 196—203.

[19] *Estermann T.* On the representations of a number as the sum of two numbers not divisible by k-th powers // J. London Math. Soc. **6**. 1931. 37—40.

[20] *Estermann T.* On the representations of a number as the sum of a prime and a quadratfrei number // J. Lond. Math. Soc. **6.** No 3. 1931. 219–221.

[21] *Estermann T.* Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Producten // J. Reine Angew. Math. **164**. 1931. 173–182.

[22] *Evelyn C. J. A., Linfoot E. H.* On a problem in the additive theory of numbers. I: Math. Z. **30** (1929), 433–448; II: J. Reine Angew. Math. **164** (1931), 131–140; III: Math. Z., **34** (1932), 637–644; IV: Ann. of Math. **32** (131), 261–270; V: Quart. J. Math. **3** (1932), 152–160; VI: Quart. J. Math. **4** (1933), 309–314.

[23] *Fujii Akio.* On some analogues of Titchmarsh divisor problem // Nagoya Math. J. **64**. 1976. 149—158.

[24] *Güloğlu A. M., Nevans C. W.* Sums of multiplicative functions over a Beatty sequence // Bull. Austral. Math. Soc. **78**. 2008. 327—334.

[25] *Hajela D., Smith B.* On the maximum of an exponential sum of the Möbius function // Lecture Notes in Mathematics (Springer, Berlin, 1987). 145—164.

[26] *Hardy G. H., Wright E. M.* An Introduction to the Theory of Numbers. — Oxford University Press. — 1975. — 421 p.

[27] *Heath-Brown D. R.* The fourth power moment of the Riemann zeta function // Proc. London Math. Soc. **38**. No 3. 1979. 385–422.

[28] *Heath-Brown D. R.* The square sieve and consecutive square-free numbers // Math. Ann. **226**. 1984. 251—259.

[29] *Hooley C.* On the representation of a number as a sum of two squares and a prime // Acta Math. **97**. 1957. 189—210.

[30] *Kumchev A. V.* On sums of primes from Beatty sequences // Integers. **8**. 2008. 1—12.

[31] *Leitman D., Wolke D.* Primzahlen der Gestalt $[f(n)]$ // Math. Z. **45**. 1975. 81—92.

[32] *Lü G. S., Zhai W. G.* The divisor problem for the Beatty sequences // Acta Math. Sinica. **47**. 2004. 1213—1216.

[33] *Montgomery H. L., Vaughan R. C.* Exponential sums with multiplicative coefficients // Invent. Math. **43** (1). 1977. 69—82.

[34] *Mirsky L.* On a theorem in the additive theory of numbers due to Evelyn and Linfoot // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **44**. 1948. 305—312.

[35] *Montgomery H. L., Vaughan R. C.* The exceptional set in Goldbach's problem // Acta Arith. **27**. 1975. 353—370.

[36] *Orr R. C.* Remainder estimates for squarefree integers in arithmetic progression // J. Number Theory. **3**. 1971. 474—497.

[37] *Pillai S. S.* On the sum function connected with primitive roots // Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A. **13**. 1941. 526—529.

[38] *Porter J. W.* The generalized Titchmarsh–Linnik divisor problem // Proc. London. Math. Soc. **24**. No 1. 1972. 15—26.

[39] *Prachar K.* Über die kleinste quadratfreie Zahl einer arithmetischen Reihe // Monatsh. Math. **62**. 1958. 173—176.

[40] *Schlage-Puchta J. C.* The exponential sum over squarefree integers // Acta Arith. **115**. 2004. 265—268.

[41] *Titchmarsh E. C.* A divisor problem // Rend. Circ. Mat. Palermo. **54**. 1930. 414—429.

[42] *Tolev D. I.* On the exponential sum with square-free numbers // Bull. London Math. Soc. **37**. 2005. 827—834.

[43] *Vaughan R. C.* On the distribution of αp modulo 1 // Mathematika. **24**. No 48. 1977. 135–141.

[44] *Vaughan R. C.* On the number of solutions of the equation $p = a + n_1 \dots n_k$ with $a < p \leqslant x$ // J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **6**. 1972. 43—55.

[45] *Warlimont R.* On squarefree numbers in arithmetic progressions // Monatsh. Math. **73**. 1969. 433—448.

[46] *Weyl H.* Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Mathematische Annalen. **77**. 1916. 313—352.

[47] *Zhai W. G.* A note on a result of Abercrombie // Chinese Sci. Bull. **42**. 1997. 1151—1154.

[48] *Архипов Г. И., Буриев К., Чубариков В. Н.* О мощности особого множества в бинарных аддитивных задачах с простыми числами // Труды МИАН. **218**. 1997. 28—57.

[49] *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа. — 2003. — 640 с.

[50] *Архипов Г. И., Чубариков В. Н.* Об исключительном множестве в бинарной проблеме гольдбахова типа // Докл. АН. **387**. 2002. № 3. 295—296.

[51] *Архипов Г. И., Чубариков В. Н.* О мере «больших дуг» в разбиении Фарея //Чебышевский сборник. **12**. 2011. Вып. 4. 35—38.

[52] *Барбан М. Б.* Об аналогах проблемы делителей Титчмарша // Вестник Ленингр. ун-та. №19. 1963. 5—13.

[53] *Бегунц А. В.* О простых числах в одной антье-последовательности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. № 2. 71—74.

[54] *Бегунц А. В.* Об одном аналоге проблемы делителей Дирихле // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. № 6. 52—56.

[55] *Бегунц А. В.* О распределении значений сумм мультипликативных функций на обобщенных арифметических прогрессиях // Чебышевский сборник. **6**. Вып. 2. 2005. 52—74.

[56] *Бегунц А. В.* О простых числах в антье-последовательности специального вида // Чебышевский сборник. **7**. Вып. 1. 2006. 163—171.

[57] *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. — М.: Наука. — 1981. — 176 с.

[58] *Виноградов И. М.* Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука. — 1976. — 120 с.

[59] *Виноградов И. М.* Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // Докл. АН СССР. **15**. 1937. 291—294.

[60] *Вон Р.* Метод Харди—Литтлвуда. — М.: Мир. — 1985. — 184 с.

[61] *Давлетярова Е. П.* О мультипликативных функциях на множестве $\{p-1\}$ // Чебышевский сборник. **1**. 2001. 15—24.

[62] *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. Изд. 2-е, испр. — М.: Едиториал УРСС. — 2004. — 184 с.

[63] *Касселс Дж. В. С.* Введение в теорию диофантовых приближений. — М.: Изд-во иностр. лит-ры. — 1961. — 213 с.

[64] *Линник Ю. В.* Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. — Л.: Изд-во ЛГУ. — 1961. — 207 с.

[65] *Попов О. В.* Арифметические приложения оценок сумм Г. Вейля от многочленов растущей степени // Фунд. и прикл. матем. **4**. № 2. 1998. 595—640.

[66] *Постников А. Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. — 1971. — 416 с.

[67] *Пятецкий-Шапиро И. И.* О распределении простых чисел в последовательности вида $[f(n)]$ // Матем. сборник. **33**. 1953. 559—566.

[68] *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана. — М.: Изд-во иностр. лит. — 1953. — 407 с.

[69] *Федулова Т. М.* Некоторые обобщения проблемы делителей Титчмарша // Волж. мат. сб. № 8. 1971. 206—210.

[70] *Фаткина С. Ю.* О представлении натурального числа суммой трех почти равных слагаемых, порожденных простыми числами // УМН. **55**. Вып. 1. 2000. 197—198.

[71] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. Издание 4-е. — М.: Наука. — 1978. 111 с. (Стереотипное издание: М.: УРСС. — 2004. — 111 с.)

[72] *Хооли К.* Применение методов решета в теории чисел. Пер. с англ. В. Н. Чубарикова. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. — 1987. — 136 с.

Работы автора по теме диссертации:

[73] *Горяшин Д. В.* Точные квадраты вида $[\alpha n]$ // Чебышевский сборник. **14**. № 2. 2013. 68—73.

[74] *Горяшин Д. В.* Бесквадратные числа в последовательности $[\alpha n]$ // Чебышевский сборник. **14**. № 3. 2013. 60—66.

[75] *Горяшин Д. В.* Об одной аддитивной задаче с бесквадратными числами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. **13**. Вып. 4. 2013. 41—47.

[76] *Горяшин Д. В.* Бинарная аддитивная задача с бесквадратными числами // Ученые записки Орловского гос. ун-та. — № 6 (56). 2013. С. 38—41.

[77] *Горяшин Д. В.* Бесквадратные числа вида $p-1$ для простых чисел p из заданной арифметической прогрессии // Тезисы докладов XI Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». Саратов. 2013. 21—22.