ФГБОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА»

На правах рукописи

ВАСИЛЬЕВ АНТОН НИКОЛАЕВИЧ

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

МОСКВА – 2014

Работа выполнена на кафедре математических и компьютерных методов анализа механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Чубариков Владимир Николаевич**

Официальные оппоненты: **Добровольский Николай Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии факультета математики, физики и информатики ФГБОУ ВПО «Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого»

Авдеев Иван Федорович, кандидат физико-математических наук, доцент, физико-математический факультет ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»

Ведущая организация: **ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет»**

Защита диссертации состоится 25 апреля 2014 г. в 16 ч. 45 мин. На заседании диссертационного совета Д.501.001.84, созданном на базе ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО МГУ имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан 24 марта 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО

МГУ имени М. В. Ломоносова,

профессор **Иванов Александр Олегович**

Актуальность темы

Область исследования диссертации относится к разделу теории чисел, занимающемуся оценками тригонометрических сумм. В работе доказываются верхние оценки рациональных тригонометрических сумм специального вида и их арифметические приложения.

Тригонометрической суммой называется сумма вида

$$S(X,F)=\sum_{x\in X} e^{2\pi i F(x)},$$

где X - конечное подмножество $\mathbb{Z}$, а $F\colon X\to\mathbb{R}$ - функция.

Такую сумму можно оценить сверху тривиально:

$$|S(X,F)|\le |X|,$$

где $|X|$ - количество элементов X.

Но интерес представляют только такие верхние оценки, в которых присутствует понижающий множитель, то есть оценки вида

$$|S(X,F)|\le |X|\cdot\delta,$$

где $0\le\delta<1$ - понижающий множитель.

Рациональной тригонометрической суммой называется сумма вида

$$S(X,f,q)=\sum_{x\in X} e^{2\pi i\frac{f(x)}{q}},$$

где $f\colon X\to\mathbb{Z}$ - функция, а q - натуральное число.

Тригонометрические суммы впервые появились в работах К. Гаусса. В дальнейшем ими занимались Г. Вейль, Г. Харди и Д. Литтлвуд, Л. Морделл и многие другие.

После работ И. М. Виноградова[1], посвященных решению проблем Варинга и Гольдбаха, в которых был значительно развит и усовершенствован аппарат тригонометрических сумм, интерес к этой тематике многократно возрос. В

[1] *Виноградов И. М.* Избранные труды. Москва: Изд-во АН СССР, 1952.

частности, появилось много работ и о рациональных тригонометрических суммах.

Полной рациональной тригонометрической суммой называется сумма вида

$$S(f,q)=\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i\frac{f(x)}{q}},$$

где $f:\{1,2,\dots,q\}\to\mathbb{Z}$ - функция.

Важным частным случаем являются полные рациональные полиномиальные тригонометрические суммы (частный случай сумм Г.Вейля), когда в показателе экспоненты стоит многочлен с целыми коэффициентами.

Хуа Ло Кен[2] доказал следующий результат:

$$|S(f,q)|=O\left(q^{1-\frac{1}{n}}\right)$$

для любого натурального q и любого многочлена $f(x)=a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$, у которого $(a_1,a_2,\dots,a_n,q)=1$, причем постоянная в знаке O зависит только от n.

В 1948 году А. Вейль[3] получил оценку для сумм с простым знаменателем, в этом специальном случае значительно улучшающую оценку Хуа Ло Кена. Он доказал, что

$$|S(f,p)|\le(n-1)\sqrt{p}$$

для любого простого p и любого многочлена $f(x)=a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$, у которого $(a_n,p)=1$.

Этот результат, простой и удобный в применении, не дает, тем не менее, нетривиальной оценки в большом числе случаев, а именно, при $n\ge\sqrt{p}+1$. Поэтому было бы полезным получить оценки в случае «больших» n. Однако, как правило, получить оценку для общего случая «больших» n не удается, а улучшение оценки А. Вейля производится только на некоторых классах многочленов.

Выделим две такие работы.

---

[2] *Хуа Ло Кен.* Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. Москва: Мир, 1964.

[3] *Weil A.* On some exponential sums // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. 1948. 34. N5. P. 204-207.

В 1965 году Н. М. Акулиничев[4] доказал следующую оценку для двучленов:

$$|S(f,p)| = \left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p}}\right| \le p\delta^{-1/2},$$

где $f(x) = ax + bx^n$ - многочлен с целыми коэффициентами, у которого $(a,p) = (b,p) = 1$ и $1 < n < p$, p - простое, а $\delta = (n, p-1)$.

В работе А. А. Карацубы[5] 1967 года было доказано несколько оценок полных рациональных полиномиальных тригонометрических сумм, в том числе такая оценка для двучленов:

$$|S(f,p)| = \left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p}}\right| \le (n-1)^{1/4} p^{3/4},$$

где $f(x) = ax + bx^n$ - многочлен с целыми коэффициентами, у которого $(a,p) = (b,p) = 1$ и $1 < n < p$, p – простое.

В первой главе данной диссертации получены аналоги результатов Н. М. Акулиничева и А. А. Карацубы для многочленов более общего вида.

Обратимся теперь к другому типу рациональных тригонометрических сумм, а именно, к суммам с рекуррентно заданной последовательностью в числителе, то есть

$$S\big((x_n), q, u\big) = \sum_{n=1}^{u} e^{2\pi i \frac{x_n}{q}},$$

где (x_n) - последовательность целых чисел, заданная целыми значениями начальных членов $x_1, \dots, x_k$ и рекуррентным соотношением $x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_0 x_n$ с целыми коэффициентами $a_{k-1}, \dots, a_0$, а q и u – натуральные числа.

Одним из первых такими оценками стал заниматься Постников А. Г.[6] Оценки сумм этого типа можно найти также в работах Бояринова Р. Н.[7] и Чубарикова В. Н.[8], Минеева М. П.[9]

---

[4] *Акулиничев Н. М.* Оценки рациональных тригонометрических сумм специального вида // Доклады АН СССР. 1965. Т. 161. N4. С. 743-745.

[5] *Карацуба А. А.* Об оценках полных тригонометрических сумм // Математические заметки. 1967. Т. 1. N2. С. 199-208.

[6] *Постников А. Г.* Об очень короткой показательной рациональной тригонометрической сумме // Доклады АН. 1960. Т. 133. N6. С. 1298-1299.

В монографии Н. М. Коробова[10] приводятся оценки таких сумм в общем случае, однако, в этом виде оценки получаются достаточно грубыми.

В частных случаях, когда (x_n) – показательная функция от n (или, что то же, рекуррентно заданная последовательность первого порядка), указанные оценки можно улучшить. Эти улучшенные (или уточненные) оценки для показательной функции и для суммы показательной и линейной функций можно найти, например, в той же монографии Н. М. Коробова[11], а также в работах С. В. Конягина и И. Е. Шпарлинского[12].

Отдельно отметим следующий «статистический» результат Бояринова Р. Н. и Чубарикова В. Н. о рациональных тригонометрических суммах по числам Фибоначчи.

Теорема[13]: Пусть

$$S_m(h,a) = \sum_{n=0}^{h-1} e^{2\pi i \frac{af_n}{m}},$$

где условиями $f_0 = 1, f_1 = 2, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ задаются числа Фибоначчи,

$$N_m(\lambda) = \left|\left\{a: 0 \leq a \leq m-1, |S_m(h,a)| < \sqrt{\lambda h}\right\}\right|,$$

причем $m \to +\infty$ и h как функция от m удовлетворяет условиям $h = h(m) \to +\infty$ и $h \leq \frac{1}{2}\log_\alpha m$, где $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{N_m(\lambda)}{m} = 1 - e^{-\lambda}.$$

---

[7] *Бояринов Р. Н.* О распределении значений сумм, связанных с быстрорастущими последовательностями // Вестник МГУ. Серия математика, механика. 2003. N2. С. 57-58.

[8] *Бояринов Р. Н., Чубариков В. Н.* О распределении значений функций на последовательности Фибоначчи // Доклады АН. 2001. Т. 379. N1. С. 9-11.

[9] *Минеев М. П.* Метрическая теорема о тригонометрических суммах с быстрорастущими функциями // Успехи математических наук. 1959. Т. 14. В. 3. С. 169-171.

[10] *Коробов Н. М.* Тригонометрические суммы и их приложения. Москва: Наука, 1989. С. 70-78.

[11] *Коробов Н. М.* Тригонометрические суммы и их приложения. Москва: Наука, 1989. С. 70-78.

[12] *Konyagin S. V., Shparlinski I.* Character sums with exponential functions and their applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[13] *Бояринов Р. Н., Чубариков В. Н.* О распределении значений функций на последовательности Фибоначчи // Доклады АН. 2001. Т. 379. N1. С. 9-11.

Во второй главе данной диссертации в специальном случае доказывается верхняя оценка для среднего квадратического модулей рациональных тригонометрических сумм по обобщенным числам Фибоначчи.

Наконец, отметим, что большая часть верхних оценок рациональных тригонометрических сумм имеют арифметические приложения.

Во-первых, это оценки для количества решений сравнения (в нашем случае – полиномиального) по простому модулю p. Подобные взаимосвязи хорошо описаны, например, в книге З. И. Боревича и И. Р. Шафаревича[14], а также в работе Н. М. Акулиничева[15]. В третьей главе этой диссертации приводятся соответствующие теоремы для многочленов из теорем первой главы.

Во-вторых, рациональные тригонометрические суммы устроены таким образом, что хорошо «улавливают» арифметические свойства функции в показателе. Поэтому они могут быть полезны и в других задачах, в том числе в задачах аддитивной теории чисел.

В 1934 году Н. П. Романов[16] получил теорему о положительной плотности (в смысле плотности по Шнирельману) суммы множества простых чисел и множества степеней фиксированного натурального числа, большего единицы. Позже, в 1951 году П. Эрдеш[17] доказал аналог теоремы Романова, заменив степень фиксированного натурального на значение фиксированного многочлена с целыми коэффициентами от степени фиксированного натурального. В. Н. Чубариковым была поставлена задача получения аналога теоремы Романова для чисел Фибоначчи. В своей работе К. Ли[18] приводит доказательство этого аналога, опираясь на результаты Шинцеля[19] и Зомера[20].

---

[14] *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. Москва: Наука, 1985. С. 16-25.

[15] *Акулиничев Н. М.* Оценки рациональных тригонометрических сумм специального вида // Доклады АН СССР. 1965. Т. 161. N4. С. 743-745.

[16] *Романов Н. П.* Uber einige Satze der additiven Zahlentheorie // Mathematische Annalen. 1934. 109. P. 668-678.

[17] *Erdos P.* On some problems of Bellman and a theorem of Romanoff // Journal of Chinese Mathematical Society. 1951. 1.

[18] *Lee K. S. Enoch.* On the sum of a prime and a Fibonacci number // International Journal of Number Theory, 2010, Vol. 6, N 7, pp. 1-8.

[19] *Schinzel A.* Special Lucas Sequences, Including the Fibonacci Sequence, Modulo a prime // Baker A., Bollobas B., Hajnal A. (Eds.) A tribute of Paul Erdos. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. P. 349-357.

В опубликованной совсем недавно работе А. Дубицкас[21] обобщает результат К. Ли.

В третьей главе диссертации приводится новое доказательство аналога теоремы Романова для обобщенных чисел Фибоначчи.

Цель работы

Целью работы является получение новых верхних оценок модуля полной рациональной полиномиальной тригонометрической суммы в специальных случаях, верхней оценки среднего квадратического модулей рациональных тригонометрических сумм по обобщенным числам Фибоначчи в специальном случае, оценки количества решений некоторых полиномиальных сравнений по простому модулю и решение одной аддитивной задачи, связанной с обобщенной последовательностью Фибоначчи.

Методы исследования

В работе используются методы элементарной и аналитической теории чисел.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в области аналитической теории чисел.

Научная новизна

Диссертация содержит следующие новые результаты:

А) в специальных случаях получены верхние оценки модуля полной рациональной полиномиальной тригонометрической суммы

$$|S(f,p)| = \left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p}}\right|,$$

---

[20] *Somer L.* Distribution of Residues of Certain Second-Order Linear Recurrences Modulo p // Berum G. E., Philippou A. N., Horadam A. F. (Eds.) Applications of Fibonacci Numbers. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. Vol. 3. P. 311-324.

[21] *Dubickas A.* Sums of Primes and Quadratic Linear Recurrence Sequences // Acta Mathematica Sinica, English Series, Dec., 2013, Vol. 29, N 12, pp. 2251-2260.

где $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ - многочлен с целыми коэффициентами, а p - простое число, не делящее a_n;

Б) в специальном случае получена верхняя оценка среднего квадратического модулей рациональных тригонометрических сумм по обобщенным числам Фибоначчи

$$\left(A(d,u)\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\left|\sum_{n=1}^{u} e^{2\pi i\frac{aG_n}{d}}\right|^2\right)^{1/2},$$

где (G_n) - обобщенная последовательность Фибоначчи, задающаяся по правилу:

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n \text{ при } n \geq 1, \text{ причем } G_1, G_2 \in \mathbb{N},$$

а d и u - натуральные числа;

В) получены оценки для количества решений некоторых полиномиальных сравнений по простому модулю и альтернативное доказательство одного аддитивного результата, связанного с обобщенной последовательностью Фибоначчи.

Апробация результатов

Результаты диссертации неоднократно докладывались на научно-исследовательском семинаре кафедры математических и компьютерных методов анализа МГУ «Аналитическая теория чисел» под руководством проф. В. Н. Чубарикова и проф. Г. И. Архипова в 2012-2013 гг.

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

11-я Международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (СГУ имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, 9-14 сентября 2013 г.);

Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2009» (Астана, 10-12 апреля 2009 г.).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в трех работах, список которых приведен в конце автореферата. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии (28 наименований). Общий объем диссертации составляет 44 страницы.

Содержание главы 1

Первая глава «Верхние оценки полных рациональных полиномиальных тригонометрических сумм» состоит из трех параграфов. В первом параграфе доказываются следующие теоремы:

Теорема 1: Имеет место оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^m+bx^n}{p}}\right| \leq \left(\frac{\frac{n}{m}(m,p-1)^3-1}{p}\right)^{1/4} p,$$

где $p \geq 3$ - простое число, m, n, a, b – натуральные числа, $2 \leq n \leq p-1$, $m|n$, $m < n$, $(a,p) = (b,p) = 1$.

Теорема 2: Справедлива оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{f(x)}{p}}\right| \leq \left(\frac{k!n}{p}\right)^{\frac{1}{2k+2}} p,$$

где $p \geq 3$ - простое число, $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + a_nx^n$ – многочлен с целыми коэффициентами, $1 \leq k < n \leq p-1$, $(k+1)|n$, $(a_1,p) = (a_2,p) = \cdots = (a_k,p) = (a_n,p) = 1$.

Во втором параграфе доказываются следующие теоремы:

Теорема 3: Имеет место оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^n+bx^2}{p}}\right| \leq \left(\sqrt{\frac{3+(-1)^n}{2\delta}}\right) p,$$

где $p \geq 7$ - простое число, $p \equiv 3(mod\ 4)$, a, b, n - натуральные числа, $3 \leq n \leq p-1$, $(a,p) = (b,p) = 1$, а $\delta = (n-1,p)$.

Теорема 4: Справедлива оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{f(x)+g(x)}{p}}\right| \leq \left(\delta_1^{-\frac{1}{2}} + \delta_2^{-\frac{1}{4}} + \cdots + \delta_t^{-\frac{1}{2^t}} + \left(\frac{k-1}{\sqrt{p}}\right)^{-\frac{1}{2^t}}\right)p,$$

где $p \geq 3$ - простое число, $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$ и $g(x) = b_1x^{n_1} + \cdots + b_tx^{n_t}$ - такие многочлены с целыми коэффициентами, что $p-1 \geq n_r > k$ и $(p-1, n_r, k) = 1$ при всех $1 \leq r \leq t$, $(a_k, p) = 1$, а $\delta_r = (p-1, n_r)$ при всех $1 \leq r \leq t$.

В третьем параграфе доказывается

Теорема 5: Имеет место оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^n}{p}}\right| \leq \frac{(2n-1)}{2\sqrt{2p}}p,$$

где $p \geq 3$ – простое число, a, n - натуральные числа, причем $\frac{p-1}{n}$ – нечетное целое и $(a, p) = 1$.

Содержание главы 2

Во второй главе «Оценка среднего квадратического модулей рациональных тригонометрических сумм по обобщенным числам Фибоначчи» исследуется величина

$$\left(A(d,u)\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\left|\sum_{n=1}^{u} e^{2\pi i\frac{aG_n}{d}}\right|^2\right)^{1/2},$$

где (G_n) - обобщенная последовательность Фибоначчи, задающаяся по правилу:

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n \text{ при } n \geq 1, \text{ причем } G_1, G_2 \in \mathbb{N},$$

u - натуральное число, d - бесквадратное (не делящееся ни какой квадрат простого) натуральное число, взаимно простое с числами G_1, G_2 и $(G_1^2 + G1G2-G22$. Получена следующая

Теорема 6. Справедлива оценка

$$\left(A(d,u)\right)^{1/2} \leq \left(B(d,u)\right)^{1/2},$$

где $B(d,u)$ при $u \le T'$ задается таким образом:

$$B(d,u) = \begin{cases} 3u-2, \text{если } u < \sqrt{t}+1 \\ 7u^2 t^{-\frac{1}{4}}, \text{если } \sqrt{t}+1 \le u \le t^{\frac{3}{4}} \\ 14u^2 t^{-\frac{1}{8}}, \text{если } t^{\frac{3}{4}} < u \le T' \end{cases}$$

Если же $u > T'$, то $B(d,u) = 56u^2 t^{-\frac{1}{8}}$. Здесь

$$t = min\{\tau: \tau \ge 1, d|F_\tau\},$$

$$T^{'} = min\{\mathrm{T}: \mathrm{T} \ge 1, G_{n+\mathrm{T}} \equiv G_n (mod\ d)\ \forall n\},$$

а (F_n) - обычная последовательность Фибоначчи, задающаяся по правилу: $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ при $n \ge 1$.

Содержание главы 3

Третья глава «Арифметические приложения» содержит два параграфа.

В первом приводятся доказываемые с помощью классического приема оценки количества решений полиномиальных сравнений по простому модулю (теоремы 7-11), являющиеся следствиями теорем, полученных в первой главе.

Во втором параграфе приводится альтернативное доказательство следующего аналога теоремы Романова (этот результат обобщает теорему в работе К. Ли[22], но является частным случаем теоремы из работы А. Дубицкаса[23], вышедшей в одно время с работой автора):

Теорема. Справедливо соотношение

$$\underline{lim}_{x\to+\infty} \frac{1}{x} card\{n: n \le x, n = p + G_m\} > 0,$$

то есть множество натуральных чисел, представимых в виде суммы простого и обобщенного числа Фибоначчи, имеет положительную плотность (в смысле плотности по Шнирельману).

---

[22] *Lee K. S. Enoch.* On the sum of a prime and a Fibonacci number // International Journal of Number Theory, 2010, Vol. 6, N 7, pp. 1-8.

[23] *Dubickas A.* Sums of Primes and Quadratic Linear Recurrence Sequences // Acta Mathematica Sinica, English Series, Dec., 2013, Vol. 29, N 12, pp. 2251-2260.

Работы автора по теме диссертации

[1] *Васильев А. Н.* Оценки полных рациональных тригонометрических сумм с простым знаменателем, Вестник МГУ, Сер. 1, Математика. Механика, 2014, №2, с. 56-60.

[2] *Васильев А. Н.* Об арифметических свойствах обобщенной последовательности Фибоначчи и их следствиях, Известия СГУ, Нов. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2013, Т. 13, вып. 4, ч. 2, с. 34-41.

[3] *Васильев А. Н.* Оценки полных рациональных тригонометрических сумм, сборник докладов международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2009» (Астана, 10-12 апреля 2009 г.), с. 19-20.