ФГБОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА»

На правах рукописи

ВАСИЛЬЕВ АНТОН НИКОЛАЕВИЧ

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: Д. Ф.-М. Н., ПРОФЕССОР
ЧУБАРИКОВ ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ

МОСКВА – 2013

Оглавление

Введение

Актуальность темы

Область исследования диссертации относится к разделу теории чисел, занимающемуся оценками тригонометрических сумм. В работе доказываются верхние оценки рациональных тригонометрических сумм специального вида и их арифметические приложения.

Тригонометрической суммой называется сумма вида

$$S(X,F)=\sum_{x\in X} e^{2\pi i F(x)},$$

где X - конечное подмножество $\mathbb{Z}$, а $F: X\to\mathbb{R}$ - функция.

Такую сумму можно оценить сверху тривиально:

$$|S(X,F)|\le |X|,$$

где $|X|$ - количество элементов X.

Но интерес представляют только такие верхние оценки, в которых присутствует понижающий множитель, то есть оценки вида

$$|S(X,F)|\le |X|\cdot\delta,$$

где $0\le\delta<1$ - понижающий множитель.

Рациональной тригонометрической суммой называется сумма вида

$$S(X,f,q)=\sum_{x\in X} e^{2\pi i\frac{f(x)}{q}},$$

где $f: X\to\mathbb{Z}$ - функция, а q - натуральное число.

Тригонометрические суммы впервые появились в работах К. Гаусса. В дальнейшем ими занимались Г. Вейль, Г. Харди и Д. Литтлвуд, Л. Морделл и многие другие.

После работ И. М. Виноградова [6], посвященных решению проблем Варинга и Гольдбаха, в которых был значительно развит и усовершенствован аппарат тригонометрических сумм, интерес к этой тематике многократно возрос. В частности, появилось много работ и о рациональных тригонометрических суммах.

Полной рациональной тригонометрической суммой называется сумма вида

$$S(f,q)=\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i\frac{f(x)}{q}},$$

где $f:\{1,2,\dots,q\}\to\mathbb{Z}$ - функция.

Важным частным случаем являются полные рациональные полиномиальные тригонометрические суммы (частный случай сумм Г.Вейля), когда в показателе экспоненты стоит многочлен с целыми коэффициентами.

Хуа Ло Кен доказал следующий результат [17, 20]:

$$|S(f,q)|=O\left(q^{1-\frac{1}{n}}\right)$$

для любого натурального q и любого многочлена $f(x)=a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$, у которого $(a_1,a_2,\dots,a_n,q)=1$, причем постоянная в знаке O зависит только от n.

В 1948 году А. Вейль [25] получил оценку для сумм с простым знаменателем, в этом специальном случае значительно улучшающую оценку Хуа Ло Кена. Он доказал, что

$$|S(f,p)|\le(n-1)\sqrt{p}$$

для любого простого p и любого многочлена $f(x)=a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$, у которого $(a_n,p)=1$.

Этот результат, простой и удобный в применении, не дает, тем не менее, нетривиальной оценки в большом числе случаев, а именно, при $n\ge\sqrt{p}+1$. Поэтому было бы полезным получить оценки в случае «больших» n. Однако, как правило, получить оценку для общего случая «больших» n не удается, а улучшение оценки А. Вейля производится только на некоторых классах многочленов.

Выделим две такие работы.

В 1965 году Н. М. Акулиничев доказал [1] следующую оценку для двучленов:

$$|S(f,p)|=\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{f(x)}{p}}\right|\le p\delta^{-1/2},$$

где $f(x)=ax+bx^n$ - многочлен с целыми коэффициентами, у которого $(a,p)=(b,p)=1$ и $1<n<p$, p - простое, а $\delta=(n,p-1)$.

В работе А. А. Карацубы 1967 года [10] было доказано несколько оценок полных рациональных полиномиальных тригонометрических сумм, в том числе такая оценка для двучленов:

$$|S(f,p)| = \left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p}}\right| \le (n-1)^{1/4} p^{3/4},$$

где $f(x) = ax + bx^n$ - многочлен с целыми коэффициентами, у которого $(a,p) = (b,p) = 1$ и $1 < n < p$, p – простое.

В первой главе данной диссертации получены аналоги результатов Н. М. Акулиничева и А. А. Карацубы для многочленов более общего вида.

Обратимся теперь к другому типу рациональных тригонометрических сумм, а именно, к суммам с рекуррентно заданной последовательностью в числителе, то есть

$$S\big((x_n), q, u\big) = \sum_{n=1}^{u} e^{2\pi i \frac{x_n}{q}},$$

где (x_n) - последовательность целых чисел, заданная целыми значениями начальных членов $x_1, \dots, x_k$ и рекуррентным соотношением -го порядка $x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_0 x_n$ с целыми коэффициентами $a_{k-1}, \dots, a_0$, а q и u – натуральные числа.

Одним из первых такими оценками стал заниматься Постников А. Г. [14]. Оценки сумм этого типа можно найти также в работах Бояринова Р. Н. и Чубарикова В. Н. [4, 5], Минеева М. П. [13].

В монографии Н. М. Коробова [11] приводятся оценки таких сумм в общем случае, однако, в этом виде оценки получаются достаточно грубыми.

В частных случаях, когда (x_n) – показательная функция от n (или, что то же, рекуррентно заданная последовательность первого порядка), указанные оценки можно улучшить. Эти улучшенные (или уточненные) оценки для показательной функции и для суммы показательной и линейной функций можно найти, например, в той же монографии Н. М. Коробова [11], а также в работах С. В. Конягина и И. Е. Шпарлинского [21].

Отдельно отметим следующий «статистический» результат Бояринова Р. Н. и Чубарикова В. Н. о рациональных тригонометрических суммах по числам Фибоначчи.

Теорема [5]: Пусть

$$S_m(h,a) = \sum_{n=0}^{h-1} e^{2\pi i \frac{af_n}{m}},$$

где условиями $f_0 = 1, f_1 = 2, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ задаются числа Фибоначчи,

$$N_m(\lambda) = \left|\left\{a: 0 \le a \le m-1, |S_m(h,a)| < \sqrt{\lambda h}\right\}\right|,$$

причем $m \to +\infty$ и h как функция от m удовлетворяет условиям $h = h(m) \to +\infty$ и $h \le \frac{1}{2}\log_\alpha m$, где $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{N_m(\lambda)}{m} = 1 - e^{-\lambda}.$$

Во второй главе данной диссертации в специальном случае доказывается верхняя оценка для среднего квадратического модулей рациональных тригонометрических сумм по обобщенным числам Фибоначчи.

Наконец, отметим, что большая часть верхних оценок рациональных тригонометрических сумм имеют арифметические приложения.

Во-первых, это оценки для количества решений сравнения (в нашем случае – полиномиального) по простому модулю p. Подобные взаимосвязи хорошо описаны, например, в книге З. И. Боревича и И. Р. Шафаревича [3], а также в работе Н. М. Акулиничева [1]. В третьей главе этой диссертации приводятся соответствующие теоремы для многочленов из теорем первой главы.

Во-вторых, рациональные тригонометрические суммы устроены таким образом, что хорошо «улавливают» арифметические свойства функции в показателе. Поэтому они могут быть полезны и в других задачах, в том числе в задачах аддитивной теории чисел.

В 1934 году Н. П. Романов [16] получил теорему о положительной плотности (в смысле плотности по Шнирельману) суммы множества простых чисел и множества степеней фиксированного натурального числа, большего единицы. Позже, в 1951 году П. Эрдеш доказал [19] аналог теоремы Романова, заменив степень фиксированного натурального на значение фиксированного многочлена с целыми коэффициентами от степени фиксированного натурального.

В. Н. Чубариковым была поставлена задача получения аналога теоремы Романова для чисел Фибоначчи. В своей работе К. Ли [22] приводит доказательство этого аналога, опираясь на результаты Шинцеля [23] и Зомера [24]. В опубликованной совсем недавно работе А. Дубицкас [18] обобщает результат К. Ли.

В третьей главе диссертации приводится новое доказательство аналога теоремы Романова для обобщенных чисел Фибоначчи.

Цель работы

Целью работы является получение новых верхних оценок модуля полной рациональной полиномиальной тригонометрической суммы в специальных случаях, верхней оценки среднего квадратического модулей рациональных тригонометрических сумм по обобщенным числам Фибоначчи в специальном случае, оценки количества решений некоторых полиномиальных сравнений по простому модулю и решение одной аддитивной задачи, связанной с обобщенной последовательностью Фибоначчи.

Методы исследования

В работе используются методы элементарной и аналитической теории чисел.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в области аналитической теории чисел.

Научная новизна

Диссертация содержит следующие новые результаты:

А) в специальных случаях получены верхние оценки модуля полной рациональной полиномиальной тригонометрической суммы

$$|S(f,p)| = \left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p}}\right|,$$

где $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ - многочлен с целыми коэффициентами, а p - простое число, не делящее a_n;

Б) в специальном случае получена верхняя оценка среднего квадратического модулей рациональных тригонометрических сумм по обобщенным числам Фибоначчи

$$\left(A(d,u)\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\left|\sum_{n=1}^{u} e^{2\pi i \frac{aG_n}{d}}\right|^2\right)^{1/2},$$

где (G_n) - обобщенная последовательность Фибоначчи, задающаяся по правилу:

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n \text{ при } n \geq 1, \text{причем } G_1, G_2 \in \mathbb{N},$$

а d и u - натуральные числа;

В) получены оценки для количества решений некоторых полиномиальных сравнений по простому модулю и альтернативное доказательство одного аддитивного результата, связанного с обобщенной последовательностью Фибоначчи.

Апробация результатов

Результаты диссертации неоднократно докладывались на научно-исследовательском семинаре кафедры математических и компьютерных методов анализа МГУ «Аналитическая теория чисел» под руководством проф. В. Н. Чубарикова и проф. Г. И. Архипова в 2012-2013 гг.

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

11-я Международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (СГУ имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, 9-14 сентября 2013 г.);

Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2009» (Астана, 10-12 апреля 2009 г.).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в трех работах, список которых приведен в конце введения. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии (28 наименований). Общий объем диссертации составляет 44 страницы.

Содержание главы 1

Первая глава «Верхние оценки полных рациональных полиномиальных тригонометрических сумм» состоит из трех параграфов. В первом параграфе доказываются следующие теоремы:

Теорема 1: Имеет место оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^m+bx^n}{p}}\right| \le \left(\frac{\frac{n}{m}(m,p-1)^3-1}{p}\right)^{1/4} p,$$

где $p \ge 3$ - простое число, m, n, a, b – натуральные числа, $2 \le n \le p-1$, $m|n$, $m < n$, $(a,p) = (b,p) = 1$.

Теорема 2: Справедлива оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p}}\right| \le \left(\frac{k!n}{p}\right)^{\frac{1}{2k+2}} p,$$

где $p \ge 3$ - простое число, $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + a_nx^n$ – многочлен с целыми коэффициентами, $1 \le k < n \le p-1$, $(k+1)|n$, $(a_1,p) = (a_2,p) = \cdots = (a_k,p) = (a_n,p) = 1$.

Во втором параграфе доказываются следующие теоремы:

Теорема 3: Имеет место оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n+bx^2}{p}}\right| \le \left(\sqrt{\frac{3+(-1)^n}{2\delta}}\right) p,$$

где $p \ge 7$ - простое число, $p \equiv 3 (mod\, 4)$, a, b, n - натуральные числа, $3 \le n \le p-1$, $(a,p) = (b,p) = 1$, а $\delta = (n-1,p)$.

Теорема 4: Справедлива оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)+g(x)}{p}}\right| \le \left(\delta_1^{-\frac{1}{2}} + \delta_2^{-\frac{1}{4}} + \cdots + \delta_t^{-\frac{1}{2^t}} + \left(\frac{k-1}{\sqrt{p}}\right)^{-\frac{1}{2^t}}\right) p,$$

где $p \ge 3$ - простое число, $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$ и $g(x) = b_1x^{n_1} + \cdots + b_tx^{n_t}$ - такие многочлены с целыми коэффициентами, что $p-1 \ge n_r > k$ и $(p-1, n_r, k) = 1$ при всех $1 \le r \le t$, $(a_k,p) = 1$, а $\delta_r = (p-1, n_r)$ при всех $1 \le r \le t$.

В третьем параграфе доказывается

Теорема 5: Имеет место оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^n}{p}}\right| \leq \frac{(2n-1)}{2\sqrt{2p}}p,$$

где $p \geq 3$ – простое число, a, n - натуральные числа, причем $\frac{p-1}{n}$ – нечетное целое и $(a, p) = 1$.

Содержание главы 2

Во второй главе «Оценка среднего квадратического модулей рациональных тригонометрических сумм по обобщенным числам Фибоначчи» исследуется величина

$$\left(A(d,u)\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\left|\sum_{n=1}^{u} e^{2\pi i\frac{aG_n}{d}}\right|^2\right)^{1/2},$$

где (G_n) - обобщенная последовательность Фибоначчи, задающаяся по правилу:

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n \text{ при } n \geq 1, \text{причем } G_1, G_2 \in \mathbb{N},$$

u - натуральное число, d - бесквадратное (не делящееся ни какой квадрат простого) натуральное число, взаимно простое с числами G_1, G_2 и $(G_1^2 + G1G2{-}G22$. Получена следующая

Теорема 6. Справедлива оценка

$$\left(A(d,u)\right)^{1/2} \leq \left(B(d,u)\right)^{1/2},$$

где $B(d,u)$ при $u \leq T'$ задается таким образом:

$$B(d,u) = \begin{cases} 3u - 2, \text{если } u < \sqrt{t} + 1 \\ 7u^2 t^{-\frac{1}{4}}, \text{если } \sqrt{t} + 1 \leq u \leq t^{\frac{3}{4}} \\ 14u^2 t^{-\frac{1}{8}}, \text{если } t^{\frac{3}{4}} < u \leq T' \end{cases}$$

Если же $u > T'$, то $B(d,u) = 56u^2 t^{-\frac{1}{8}}$. Здесь

$$t = min\{\tau \colon \tau \geq 1, d | F_\tau\},$$

$$T^{'} = min\{\mathrm{T} \colon \mathrm{T} \geq 1, G_{n+\mathrm{T}} \equiv G_n (mod\ d)\ \forall n\},$$

а (F_n) - обычная последовательность Фибоначчи, задающаяся по правилу: $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ при $n \geq 1$.

Содержание главы 3

Третья глава «Арифметические приложения» содержит два параграфа.

В первом приводятся доказываемые с помощью классического приема оценки количества решений полиномиальных сравнений по простому модулю (теоремы 7-11), являющиеся следствиями теорем, полученных в первой главе.

Во втором параграфе приводится альтернативное доказательство следующего аналога теоремы Романова (этот результат обобщает теорему в работе К. Ли [22], но является частным случаем теоремы из работы А. Дубицкаса [18], вышедшей в одно время с работой автора):

Теорема. Справедливо соотношение

$$\underline{lim}_{x\to+\infty} \frac{1}{x} card\{n: n \leq x, n = p + G_m\} > 0,$$

то есть множество натуральных чисел, представимых в виде суммы простого и обобщенного числа Фибоначчи, имеет положительную плотность (в смысле плотности по Шнирельману).

Работы автора по теме диссертации

[1] *Васильев А. Н.* Оценки полных рациональных тригонометрических сумм с простым знаменателем, Вестник МГУ, Сер. 1, Математика. Механика, 2014, №2, с. 56-60.

[2] *Васильев А. Н.* Об арифметических свойствах обобщенной последовательности Фибоначчи и их следствиях, Известия СГУ, Нов. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2013, Т. 13, вып. 4, ч. 2, с. 34-41.

[3] *Васильев А. Н.* Оценки полных рациональных тригонометрических сумм, сборник докладов международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2009» (Астана, 10-12 апреля 2009 г.), с. 19-20.

Глава 1. Верхние оценки полных рациональных полиномиальных тригонометрических сумм

1.1

Прежде всего, отметим два классических соотношения при работе с рациональными тригонометрическими суммами, которые мы в дальнейшем будем часто использовать без объяснения.

А) Значение «разрывного множителя»:

$$\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{ax}{q}} = \begin{cases} q, \text{если } a \equiv 0 \ (mod\ q) \\ 0, \text{если } a \neq 0 \ (mod\ q) \end{cases}.$$

Б) Преобразование квадрата модуля суммы:

$$\left|\sum_{x \in X} e^{2\pi i F(x)}\right|^2 = \sum_{x_1, x_2 \in X} e^{2\pi i \left(F(x_1) - F(x_2)\right)}.$$

В этой главе мы будем рассматривать полные рациональные полиномиальные тригонометрические суммы с простым знаменателем

$$S = S(f, p) = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p}},$$

где $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ – многочлен с целыми коэффициентами, у которого $p - 1 \geq n \geq 2$ и $(a_n, p) = 1$.

Такие суммы можно оценить тривиально:

$$|S| \leq p,$$

но тривиальные оценки не имеют практической ценности в приложениях.

Поэтому встает задача нетривиальной оценки S, то есть оценки вида

$$|S| \leq p\delta,$$

где δ - понижающий множитель, $0 \leq \delta < 1$.

Самой известной нетривиальной оценкой полиномиальной суммы является классический результат Вейля [25]:

$$|S| \leq (n-1)\sqrt{p}.$$

В этой оценке $\delta = \frac{n-1}{\sqrt{p}}$.

В случае, когда на n, коэффициенты $f(x)$ (а, возможно, и на p) наложены некоторые дополнительные условия, то можно получить оценки, которые будут лучше оценки Вейля.

Это сделано, например, Карацубой А.А. [10].

Теорема (Карацуба А. А.): Пусть

$$f(x) = ax + bx^n,$$

где $(a,p) = (b,p) = 1$ и $2 \leq n \leq p-1$. Тогда имеем:

$$|S(f,p)| \leq \left(\frac{n-1}{p}\right)^{\frac{1}{4}} p.$$

Следующие две теоремы получены схожим образом. В них содержатся оценки сумм для других классов многочленов.

Теорема 1: Имеет место оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^m + bx^n}{p}}\right| \leq \left(\frac{\frac{n}{m}(m,p-1)^3 - 1}{p}\right)^{1/4} p,$$

где $p \geq 3$ - простое число, m, n, a, b – натуральные числа, $2 \leq n \leq p-1$, $m|n$, $m < n$, $(a,p) = (b,p) = 1$.

Доказательство: Обозначим $(m, p-1) = l$. Имеем

$$|S|^4 = \frac{1}{(p-1)}\sum_{t=1}^{p}\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{at^m x^m + bt^n x^n}{p}}\right|^4 - \frac{p^4}{p-1} \leq$$

$$\leq \frac{l}{(p-1)}\sum_{t_1,t_2=1}^{p}\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{t_1 x^m + t_2 x^n}{p}}\right|^4 - \frac{p^4}{p-1} =$$

$$=\frac{l}{(p-1)}\sum_{t_1,t_2=1}^{p}\sum_{x_1,x_2,y_1,y_2=1}^{p} e^{2\pi i\frac{t_1(x_1^m+y_1^m-x_2^m-y_2^m)+t_2(x_1^n+y_1^n-x_2^n-y_2^n)}{p}}-\frac{p^4}{p-1}=$$

$$=\frac{p^2lN}{(p-1)}-\frac{p^4}{p-1},$$

где N - число решений системы сравнений

$$\begin{cases} x_1^m+y_1^m\equiv x_2^m+y_2^m\ (mod\ p) \\ x_1^n+y_1^n\equiv x_2^n+y_2^n\ (mod\ p) \\ 1\le x_1,y_1,x_2,y_2\le p \end{cases}.$$

Пусть $n=km$. Тогда $N=N_1+N_2$, где N_1 - число решений системы

$$\begin{cases} x_1^m\equiv x_2^m\ (mod\ p) \\ y_1^m\equiv y_2^m\ (mod\ p) \\ 1\le x_1,y_1,x_2,y_2\le p \end{cases},$$

а N_2 - число решений системы

$$\begin{cases} x_1^m\neq x_2^m (mod\ p) \\ x_1^m+y_1^m\equiv x_2^m+y_2^m\ (mod\ p) \\ x_1^n+y_1^n\equiv x_2^n+y_2^n\ (mod\ p) \\ 1\le x_1,y_1,x_2,y_2\le p \end{cases}.$$

Заметим, что

$$N_1=(1+(p-1)l)^2.$$

Действительно, зафиксируем x_1. Если $x_1=p$, то $x_2=p$. Если же $1\le x_1\le p-1$, то x_2 может принимать ровно l различных значений.

Аналогично с y_1 и y_2.

Оценивая N_2, фиксируем x_1,x_2 с условием $x_1^m\neq x_2^m\ (mod\ p)$. Таких пар, как мы показали, ровно $\left(p^2-(1+(p-1)l)\right)$. Тогда, если

$$x_1^m\equiv A\ (mod\ p),\ x_2^m\equiv B\ (mod\ p),\ A\neq B\ (mod\ p),$$

то $y_2^m \equiv A - B + y_1^m \ (mod\, p)$ и второе уравнение системы переписывается в виде

$$(A - B + y_1^m)^k - y_1^{mk} + B^k - A^k \equiv 0 \ (mod\, p).$$

Имеем

$$N_2 \leq (k-1)l^2\big(p^2 - (1 + (p-1)l)\big).$$

Действительно, $(A - B + y_1^m)^k - y_1^{mk} + B^k - A^k$ есть многочлен степени $(k-1)$ от y_1^m. По известной теореме Лагранжа такой многочлен имеет не более $(k-1)$ корней в поле вычетов $\mathbb{Z}_p$. Далее, для каждого корня этого многочлена имеется не более l значений для y_1 и не более l значений для y_2.

Получаем

$$N = N_1 + N_2 \leq$$

$$\leq (1 + (p-1)l)^2 + (k-1)l^2\big(p^2 - (1 + (p-1)l)\big) \leq kp(p-1)l^2.$$

Отсюда

$$|S|^4 \leq \frac{p^2 lN}{(p-1)} - \frac{p^4}{p-1} \leq \frac{kl^3p^3(p-1)}{(p-1)} - \frac{p^4}{p-1} \leq (kl^3 - 1)p^3,$$

что и требовалось.

Теорема 2: Справедлива оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p}}\right| \leq \left(\frac{k!n}{p}\right)^{\frac{1}{2k+2}} p,$$

где $p \geq 3$ - простое число, $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + a_nx^n$ – многочлен с целыми коэффициентами, $1 \leq k < n \leq p-1$, $(k+1)|n$, $(a_1, p) = (a_2, p) = \cdots = (a_k, p) = (a_n, p) = 1$.

Доказательство: С помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям из доказательства теоремы 1, получаем

$$|S|^{2k+2} \le \frac{p^{k+1}N}{p-1} - \frac{p^{2k+2}}{p-1},$$

где N - число решений системы сравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} \equiv y_1 + y_2 + \cdots + y_{k+1} \ (mod\ p) \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{k+1}^2 \equiv y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{k+1}^2 \ (mod\ p) \\ \dots \\ x_1^k + x_2^k + \cdots + x_{k+1}^k \equiv y_1^k + y_2^k + \cdots + y_{k+1}^k \ (mod\ p) \\ x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{k+1}^n \equiv y_1^n + y_2^n + \cdots + y_{k+1}^n \ (mod\ p) \\ 1 \le x_1, x_2, \dots, x_{k+1}, y_1, y_2, \dots, y_{k+1} \le p \end{cases}.$$

Пусть

$$P_j(z_1, z_2, \dots, z_t) = z_1^j + z_2^j + \cdots + z_t^j$$

- j-я степенная сумма, а

$$S_j(z_1, z_2, \dots, z_t) = z_1 \dots z_j + \cdots + z_{t-j+1} \dots z_t$$

- j-ый элементарный симметрический многочлен.

Используем формулы Ньютона [12, с. 225]:

$$P_j - P_{j-1}S_1 + P_{j-2}S_2 - \cdots + (-1)^{j-1}P_1S_{j-1} + (-1)^j jS_j = 0$$

при $1 \le j \le t$ и

$$P_j - P_{j-1}S_1 + P_{j-2}S_2 - \cdots + (-1)^{t-1}P_{j-t+1}S_{t-1} + (-1)^t P_{j-t}S_t = 0$$

при $j > t$.

Зафиксируем $y_1, y_2, \dots, y_{k+1}$ (таких наборов p^{k+1} штук).

Выражаем через $y_1, y_2, \dots, y_{k+1}$ элементарные симметрические многочлены от $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ (они определяются однозначно):

$$S_1(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1},$$

$$\dots$$

$$S_k(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = x_1 \dots x_k + \cdots + x_2 \dots x_{k+1}.$$

Нетрудно увидеть, что при $(k+1)|n$ выражение

$$y_1^n + y_2^n + \cdots + y_{k+1}^n - x_1^n - x_2^n - \cdots - x_{k+1}^n$$

есть многочлен степени $\frac{n}{k+1}$ относительно

$$S_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = x_1 x_2 \dots x_{k+1}$$

со старшим коэффициентом $\pm(k+1)$.

Следовательно, для S_{k+1} мы имеем не более $\frac{n}{k+1}$ значений, далее по $S_1, S_2, \dots, S_{k+1}$ значения $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ определяются однозначно с точностью до перестановки. Отсюда получаем оценку

$$N \le p^{k+1} \frac{n}{k+1} (k+1)! = p^{k+1} n k!.$$

Следовательно,

$$|S|^{2k+2} \le \frac{p^{2k+2} n k!}{p-1} - \frac{p^{2k+2}}{p-1} \le n k!\, p^{2k+1}$$

при $nk! \le p$, откуда

$$|S| \le (n k!\, p^{2k+1})^{\frac{1}{2k+2}}$$

при $nk! \le p$.

При $p < nk!$ оценка становится хуже тривиальной. Теорема доказана.

1.2

В работе [1] Акулиничевым Н.М. были получены следующие оценки:

- Если $p \ge 3$ простое; a, b, n натуральные; $p > n$, $\delta = (n, p-1)$, $(a, p) = (b, p) = 1$, то

$$\left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n + bx}{p}} \right| \le \frac{p}{\sqrt{\delta}};$$

- Если $p \ge 3$ простое; a, b, k, n натуральные; $n | (p-1)$, $(n, k) = 1$, $\delta = (k, p-1)$, $(a, p) = (b, p) = 1$, то

$$\left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^n + bx^k}{p}} \right| \le \frac{p}{\sqrt{n}} + (\delta - 1)^{\frac{1}{2}} p^{\frac{3}{4}};$$

- Если $(a,p)=(b,p)=(c,p)=1$, $n_1|(p-1)$, $n_2|(p-1)$, $(n_1,n_2)=(k,p-1)=(k,n_1)=1$, то

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^{n_1}+bx^{n_2}+cx^k}{p}}\right|\leq\sqrt{2}\frac{p}{\sqrt[4]{n_2}}.$$

Две следующие теоремы получены в духе результатов Н. М. Акулиничева.

Теорема 3: Имеет место оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^n+bx^2}{p}}\right|\leq\left(\sqrt{\frac{3+(-1)^n}{2\delta}}\right)p,$$

где $p\geq 7$ - простое число, $p\equiv 3(mod\,4)$, a,b,n - натуральные числа, $3\leq n\leq p-1$, $(a,p)=(b,p)=1$, а $\delta=(n-1,p)$.

Доказательство: Обозначим

$$Y=\{y\colon 1\leq y\leq p, y^n\equiv 1\ (mod\ p)\},$$

$$S=\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^n+bx^2}{p}}.$$

Тогда

$$|Y|=(n,p-1)=\delta.$$

Имеем:

$$\delta S=\sum_{y\in Y}\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^n+bx^2y^2}{p}}=\sum_{x=1}^{p}\sum_{y\in Y} e^{2\pi i\frac{ax^n+by^2x^2}{p}},$$

отсюда

$$\delta|S|\leq\sum_{x=1}^{p}\left|\sum_{y\in Y} e^{2\pi i\frac{by^2x^2}{p}}\right|,$$

следовательно,

$$\delta^2|S|^2\leq p\sum_{x=1}^{p}\sum_{y_1,y_2\in Y} e^{2\pi i\frac{b\left(y_1^2-y_2^2\right)x^2}{p}}.$$

Пусть K_1 - множество пар $(y_1,y_2)\in Y\times Y$, таких, что $y_1^2\equiv y_2^2\ (mod\ p)$, а K_2 - множество всех остальных пар.

Тогда

$$\delta^2|S|^2 \le p^2|K_1| + p\sum_{(y_1,y_2)\in K_2}\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{b\left(y_1^2-y_2^2\right)x^2}{p}}.$$

Заметим, что $(y_1, y_2) \in K_2$ тогда, и только тогда, когда $(y_2, y_1) \in K_2$, причем $(y_1, y_2) \neq (y_2, y_1)$.

Далее, если $(y_1, y_2) \in K_2$, то $y_1^2 - y_2^2$ - квадратичный вычет тогда, и только тогда, когда $y_2^2 - y_1^2$ - квадратичный невычет, поскольку $p \equiv 3\ (mod\ 4)$ (т. е. (-1) - квадратичный невычет).

Поэтому для $(y_1, y_2) \in K_2$ имеем:

$$\sum_{x=1}^{p}\left(e^{2\pi i\frac{b\left(y_1^2-y_2^2\right)x^2}{p}} + e^{2\pi i\frac{b\left(y_2^2-y_1^2\right)x^2}{p}}\right) = 0.$$

Действительно, один из $b(y_1^2 - y_2^2)$ и $b(y_2^2 - y_1^2)$ - квадратичный вычет, другой – квадратичный невычет.

Нетрудно показать, что

$$\sum_{x=1}^{p}\left(e^{2\pi i\frac{Ax^2}{p}} + e^{2\pi i\frac{Bx^2}{p}}\right) = 0,$$

где A - квадратичный вычет, а B - квадратичный невычет.

Следовательно,

$$\delta^2|S|^2 \le p^2|K_1| + p \cdot 0 \cdot \frac{|K_2|}{2} = p^2|K_1|.$$

Замечаем, что если n нечетно, то $|K_1| = \delta$, если же n четно, то $|K_1| = 2\delta$.

Иными словами, $|K_1| = \frac{(3+(-1)^n)}{2}\delta$.

Отсюда

$$|S| \le p\sqrt{\frac{3+(-1)^n}{2\delta}},$$

что нам и хотелось доказать.

Теорема 4: Справедлива оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)+g(x)}{p}}\right| \le \left(\delta_1^{-\frac{1}{2}} + \delta_2^{-\frac{1}{4}} + \cdots + \delta_t^{-\frac{1}{2^t}} + \left(\frac{k-1}{\sqrt{p}}\right)^{-\frac{1}{2^t}}\right) p,$$

где $p \ge 3$ - простое число, $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ и $g(x) = b_1 x^{n_1} + \cdots + b_t x^{n_t}$ - такие многочлены с целыми коэффициентами, что $p - 1 \ge n_r > k$ и $(p-1, n_r, k) = 1$ при всех $1 \le r \le t$, $(a_k, p) = 1$, а $\delta_r = (p-1, n_r)$ при всех $1 \le r \le t$.

Доказательство: Обозначим

$$S = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)+g(x)}{p}}.$$

Доказательство проведем индукцией по t.

При $t = 1$ имеем:

$$f(x) + g(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + b_1 x^{n_1},$$

$$S = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + b_1 x^{n_1}}{p}}.$$

Обозначим

$$Y = \{y: 1 \le y \le p, y^{n_1} \equiv 1 \ (mod\ p)\}.$$

Тогда $|Y| = (n_1, p-1) = \delta_1$, откуда

$$\delta_1 S = \sum_{y \in Y} \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{a_1 xy + a_2 x^2 y^2 + \cdots + a_k x^k y^k + b_1 x^{n_1} y^{n_1}}{p}} =$$

$$= \sum_{x=1}^{p} \sum_{y \in Y} e^{2\pi i \frac{a_1 xy + a_2 x^2 y^2 + \cdots + a_k x^k y^k + b_1 x^{n_1}}{p}},$$

следовательно,

$$\delta_1 |S| \le \sum_{x=1}^{p} \left| \sum_{y \in Y} e^{2\pi i \frac{a_1 xy + a_2 x^2 y^2 + \cdots + a_k x^k y^k + b_1 x^{n_1}}{p}} \right| =$$

$$= \sum_{x=1}^{p} \left| \sum_{y \in Y} e^{2\pi i \frac{a_1 xy + a_2 x^2 y^2 + \cdots + a_k x^k y^k}{p}} \right|.$$

Далее воспользуемся неравенством о среднем арифметическом и среднем квадратическом:

$$\delta_1 |S|^2 \le p \sum_{x=1}^{p} \left| \sum_{y \in Y} e^{2\pi i \frac{a_1 xy + a_2 x^2 y^2 + \dots + a_k x^k y^k}{p}} \right|^2 =$$

$$= p \sum_{x=1}^{p} \sum_{y_1, y_2 \in Y} e^{2\pi i \frac{a_1 x(y_1 - y_2) + a_2 x^2 (y_1^2 - y_2^2) + \dots + a_k x^k (y_1^k - y_2^k)}{p}} \le$$

$$\le p \sum_{y_1, y_2 \in Y} \left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{a_1 x(y_1 - y_2) + a_2 x^2 (y_1^2 - y_2^2) + \dots + a_k x^k (y_1^k - y_2^k)}{p}} \right|.$$

Теперь заметим, что если $y_1, y_2 \in Y$ и $y_1 \neq y_2$, то $y_1^k - y_2^k \neq 0 \ (mod\ p)$ (в силу условия $(n_1, k, p-1) = 1$).

Разобъем Y^2 на два множества:

$$Y^2 = Y \times Y = (Y^2)' \cup (Y^2)'',$$

где

$$(Y^2)' = \{(y_1, y_2) : y_1, y_2 \in Y, y_1 = y_2\}$$

и

$$(Y^2)'' = \{(y_1, y_2) : y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2\}.$$

Тогда $|(Y^2)'| = \delta_1$ и $|(Y^2)''| = \delta_1^2 - \delta_1$.

Имеем:

$$\delta_1^2 |S|^2 \le p \sum_{(y_1, y_2) \in (Y^2)'} \left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{a_1 x(y_1 - y_2) + a_2 x^2 (y_1^2 - y_2^2) + \dots + a_k x^k (y_1^k - y_2^k)}{p}} \right| +$$

$$+ p \sum_{(y_1, y_2) \in (Y^2)''} \left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{a_1 x(y_1 - y_2) + a_2 x^2 (y_1^2 - y_2^2) + \dots + a_k x^k (y_1^k - y_2^k)}{p}} \right| \le$$

$$\le p^2 \delta_1 + p(\delta_1^2 - \delta_1)(k-1)\sqrt{p}$$

(здесь мы применили известную оценку Вейля к каждой из сумм).

Отсюда

$$|S|^2 \le \frac{p^2}{\delta_1} + p^{\frac{3}{2}}(k-1),$$

следовательно,

$$|S| \le \frac{p}{\sqrt{\delta}} + p^{\frac{3}{4}}\sqrt{k-1} = p\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} + \left(\frac{k-1}{\sqrt{p}}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Для $t = 1$ оценка доказана.

Пусть теперь она доказана для некоторого $t-1$, $t \ge 2$. Докажем ее для t.

Пусть, как и ранее,

$$Y = \{y: 1 \le y \le p, y^{n_1} \equiv 1\ (mod\ p)\},$$

$$|Y| = (n_1, p-1) = \delta_1.$$

Аналогично рассуждая, получаем:

$$\delta_1|S| \le \sum_{x=1}^{p}\left|\sum_{y\in Y} e^{2\pi i\frac{a_1xy + a_2x^2y^2+\dots+a_kx^ky^k+b_2x^{n_2}y^{n_2}+\dots+b_tx^{n_t}y^{n_t}}{p}}\right|,$$

следовательно,

$$\delta_1^2|S|^2 \le p^2\delta_1 + (\delta_1^2 - \delta_1)p^2\left(\delta_2^{-\frac{1}{2}} + \delta_3^{-\frac{1}{4}} + \dots + \delta_t^{-\frac{1}{2^{t-1}}} + \left(\frac{k-1}{\sqrt{p}}\right)^{\frac{1}{2^{t-1}}}\right),$$

откуда

$$|S|^2 \le \frac{p^2}{\delta_1} + p^2\left(\delta_2^{-\frac{1}{2}} + \delta_3^{-\frac{1}{4}} + \dots + \delta_t^{-\frac{1}{2^{t-1}}} + \left(\frac{k-1}{\sqrt{p}}\right)^{\frac{1}{2^{t-1}}}\right),$$

значит,

$$|S| \le p\left(\delta_1^{-\frac{1}{2}} + \delta_2^{-\frac{1}{4}} + \dots + \delta_t^{-\frac{1}{2^t}} + \left(\frac{k-1}{\sqrt{p}}\right)^{\frac{1}{2^t}}\right),$$

что и требовалось доказать.

1.3

И. М. Виноградовым [2] была получена следующая оценка для сумм Гаусса: если $(a, p) = 1$, $\delta = (n, p-1)$, то

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^n}{p}}\right| \le (\delta - 1)\sqrt{p}.$$

Следующая теорема уточняет эту оценку в специальном случае.

Теорема 5: Имеет место оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^n}{p}}\right| \le \frac{(2n-1)}{2\sqrt{2p}}p,$$

где $p \ge 3$ – простое число, a, n - натуральные числа, причем $\frac{p-1}{n}$ – нечетное целое и $(a, p) = 1$.

Доказательство: Имеем:

$$\sum_{a=1}^{p}\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^n}{p}}\right|^2 = \sum_{a=1}^{p}\sum_{x_1=1}^{p}\sum_{x_2=1}^{p} e^{2\pi i\frac{a(x_1^n-x_2^n)}{p}} =$$

$$\sum_{x_1=1}^{p}\sum_{x_2=1}^{p}\sum_{a=1}^{p} e^{2\pi i\frac{a(x_1^n-x_2^n)}{p}} = pN,$$

где N - число решений сравнения $x_1^n \equiv x_2^n \ (mod\ p)$, то есть $N = 1 + n(p-1)$.

Далее,

$$\sum_{a=1}^{p-1}\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^n}{p}}\right|^2 = p\big(1+n(p-1)\big) - p^2 = (p^2-p)(n-1).$$

Пусть g - первообразный корень по модулю p. И пусть $a \equiv g^{nh+t} \ (mod\ p)$, где h - целое, $t \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Введем обозначения

$$S(a) = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{ax^n}{p}}$$

для $a \in \{1,\dots,p-1\}$.

При одинаковых t (и разных h) суммы $S(a)$ одинаковы. Суммы $S(a)$ и $S(-a)$ одинаковы по модулю, причем у a и $(-a)$ разные t (т. к. из $-1 \equiv g^{nh'} \ (mod\ p)$ следует, что $-1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{n}} \equiv g^{(p-1)h'} \equiv 1 \ (mod\ p)$ - противоречие).

Тогда

$$\sum_{t=0}^{n-1}\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\frac{g^t x^n}{p}}\right|^2 = \frac{(p^2-p)(n-1)}{\frac{(p-1)}{n}} = pn(n-1)$$

и

$$2|S(a)|^2 = |S(a)|^2 + |S(-a)|^2 \leq \sum_{t=0}^{n-1} \left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{g^t x^n}{p}} \right|^2 = pn(n-1),$$

откуда

$$|S(a)| \leq \sqrt{\frac{pn\,(n-1)}{2}} \leq \frac{(2n-1)}{2\sqrt{2}} \sqrt{p},$$

что и требовалось.

Глава 2. Оценка среднего квадратического модулей рациональных тригонометрических сумм по обобщенным числам Фибоначчи

Здесь мы рассмотрим обобщенную последовательность Фибоначчи и докажем верхнюю оценку для среднего квадратического модулей рациональных тригонометрических сумм по обобщенным числам Фибоначчи.

В определенном смысле эта оценка отражает ряд арифметических свойств указанной последовательности, а именно, распределение ее членов по модулю любого бесквадратного числа.

Последовательность Фибоначчи, как известно, задается следующим образом:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Обобщенная последовательность Фибоначчи задается тем же рекуррентным соотношением и двумя начальными натуральными членами, то есть:

$$G_1 = a, G_2 = b, G_{n+2} = G_{n+1} + G_n,$$

где a, b – натуральные числа. Вторую последовательность на протяжении всей главы будем считать наперед заданной.

Пусть, на протяжении всей главы, d – бесквадратное (не делящееся ни на какой квадрат простого) натуральное число, большее 1 и взаимно простое с числами a, b и с числом $(a^2 + ab - b^2)$ (это «экзотическое» условие будет мотивировано позже). Через p будем обозначать, как обычно, простое число. Здесь это будут простые, взаимно простые с числами a, b и с числом $(a^2 + ab{-}b2$.

Введем малый d −период последовательности Фибоначчи

$$t(d) = min\{\tau : \tau \geq 1, d|F_\tau\}$$

и большой d −период последовательности Фибоначчи

$$T(d) = min\{\mathrm{T} : \mathrm{T} \geq 1, F_{n+\mathrm{T}} \equiv F_n (mod\ d)\ \forall n\}.$$

Аналогично, большой d −период обобщенной последовательности Фибоначчи есть

$$T'(d) = min\{\mathrm{T} : \mathrm{T} \geq 1, G_{n+\mathrm{T}} \equiv G_n (mod\ d)\ \forall n\}$$

(периодичность по любому модулю доказывается просто).

Аналога малого d –периода может не существовать (например, если $a = 2, b = 1, d = 5$).

Выделим необходимые нам свойства последовательности Фибоначчи в следующую лемму (часть из приведенных свойств можно найти в [8] и [9]):

Лемма 1:

А) $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ (формула Бине);

Б) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$;

В1) $d|F_n \Leftrightarrow t(d)|n$;

В2) $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (mod\ d) \\ F_{\alpha+1} \equiv F_{\beta+1} (mod\ d) \end{cases} \Leftrightarrow T(d)|(\alpha - \beta)$;

Г) $\frac{T(d)}{t(d)} \in \{1,2,4\}$;

Д) $d = p_1p_2 \dots p_s \Rightarrow t(d) = [t(p_1), t(p_2), \dots, t(p_s)]$;

Е1) $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (mod\ p) \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (mod\ p) \end{cases} \Rightarrow t(p)|(\alpha - \beta)$ или $t(p)|\gamma \Rightarrow t(p)|(\alpha - \beta)\gamma$;

Е2) $\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (mod\ d) \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (mod\ d) \end{cases} \Rightarrow t(d)|(\alpha - \beta)\gamma$.

Доказательство: Свойства А, Б, В1, В2, Г, Д хорошо известны [8, 9]. Докажем два оставшихся свойства. Начнем с Е1. По свойству Б имеем:

$$F_{\alpha+\gamma} = F_\alpha F_{\gamma-1} + F_{\alpha+1}F_\gamma, F_{\beta+\gamma} = F_\beta F_{\gamma-1} + F_{\beta+1}F_\gamma,$$

поэтому из сравнений

$$\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (mod\ p) \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (mod\ p) \end{cases}$$

следует, что $p\big|(F_{\alpha+1} - F_{\beta+1})F_\gamma$, откуда $p\big|F_\gamma$ или $p\big|(F_{\alpha+1} - F_{\beta+1})$.

Из $p\big|F_\gamma$, согласно свойству В1, следует, что $t(p)|\gamma$, а из $p\big|(F_{\alpha+1} - F_{\beta+1})$, согласно свойству В2, следует, что $T(p)|(\alpha - \beta)$, откуда, согласно свойству Г, $t(p)|(\alpha - \beta)$.

Теперь докажем свойство Е2. Пусть $d = p_1 p_2 \dots p_s$. Из сравнений

$$\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (mod\ d) \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (mod\ d) \end{cases}$$

для любого $p_i | d$ следуют сравнения

$$\begin{cases} F_\alpha \equiv F_\beta (mod\ p_i) \\ F_{\alpha+\gamma} \equiv F_{\beta+\gamma} (mod\ p_i) \end{cases},$$

откуда для всякого $p_i | d$ по свойству Е1 имеем: $t(p_i) | (\alpha - \beta)\gamma$, что, согласно свойству Д, означает, что $t(d) | (\alpha - \beta)\gamma$. Лемма доказана.

Теперь докажем некоторые свойства обобщенной последовательности Фибоначчи (часть из них общеизвестны).

Лемма 2:

А) $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$;

Б) $T'(d) | T(d)$;

В) $t(d) | T'(d)$;

Г) $t(d) \leq T'(d) \leq T(d) \leq 4t(d)$;

Д1) $\begin{cases} G_\alpha \equiv G_\beta (mod\ p) \\ G_{\alpha+\gamma} \equiv G_{\beta+\gamma} (mod\ p) \end{cases} \Rightarrow t(p) | (\alpha - \beta)$ или $t(p) | \gamma \Rightarrow t(p) | (\alpha - \beta)\gamma$;

Д2) $\begin{cases} G_\alpha \equiv G_\beta (mod\ d) \\ G_{\alpha+\gamma} \equiv G_{\beta+\gamma} (mod\ d) \end{cases} \Rightarrow t(d) | (\alpha - \beta)$ или $t(d) | \gamma \Rightarrow t(d) | (\alpha - \beta)\gamma$.

Доказательство: Первое соотношение хорошо известно, соотношение Б доказывается тривиально. Соотношение Г следует из соотношений Б, В и соотношения Г леммы 1. Соотношение Д2 вытекает из соотношения Д1. Докажем пункт Д1. Используя соотношение А, имеем:

$$\begin{cases} aF_{\alpha-2} + bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2} + bF_{\beta-1} (mod\ p) \\ aF_{\alpha+\gamma-2} + bF_{\alpha+\gamma-1} \equiv aF_{\beta+\gamma-2} + bF_{\beta+\gamma-1} (mod\ p) \end{cases}.$$

Далее используем соотношение Б леммы 1:

$$\begin{cases} aF_{\alpha-2} + bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2} + bF_{\beta-1} (mod\ p) \\ a(F_{\alpha-2}F_{\gamma-1} + F_{\alpha-1}F_\gamma) + b(F_{\alpha-1}F_{\gamma-1} + F_\alpha F_\gamma) \equiv a(F_{\beta-2}F_{\gamma-1} + F_{\beta-1}F_\gamma) + b(F_{\beta-1}F_{\gamma-1} + F_\beta F_\gamma) (mod\ p) \end{cases}$$

, что преобразуется к виду:

$$\begin{cases} aF_{\alpha-2} + bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2} + bF_{\beta-1}(mod\,p) \\ F_{\gamma-1}(aF_{\alpha-2} + bF_{\alpha-1}) + F_\gamma(aF_{\alpha-1} + bF_\alpha) \equiv F_{\gamma-1}(aF_{\beta-2} + bF_{\beta-1}) + F_\gamma(aF_{\beta-1} + bF_\beta)(mod\,p) \end{cases},$$

откуда:

$$\begin{cases} aF_{\alpha-2} + bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2} + bF_{\beta-1}(mod\,p) \\ F_\gamma(aF_{\alpha-1} + bF_\alpha) \equiv F_\gamma(aF_{\beta-1} + bF_\beta)(mod\,p) \end{cases}.$$

Отсюда либо $p|F_\gamma$, что, согласно пункту В1 леммы 1 означает, что $t(p)|\gamma$, либо

$$\begin{cases} aF_{\alpha-2} + bF_{\alpha-1} \equiv aF_{\beta-2} + bF_{\beta-1}(mod\,p) \\ aF_{\alpha-1} + bF_\alpha \equiv aF_{\beta-1} + bF_\beta(mod\,p) \end{cases},$$

что преобразуется к виду

$$\begin{cases} a(F_{\alpha-2} - F_{\beta-2}) + b(F_{\alpha-1} - F_{\beta-1}) \equiv 0(mod\,p) \\ b(F_{\alpha-2} - F_{\beta-2}) + (a+b)(F_{\alpha-1} - F_{\beta-1}) \equiv 0(mod\,p) \end{cases}$$

и приводится с помощью правила Крамера в поле вычетов по модулю p к

$$\begin{cases} F_{\alpha-2} - F_{\beta-2} \equiv 0(mod\,p) \\ F_{\alpha-1} - F_{\beta-1} \equiv 0(mod\,p) \end{cases}$$

(поскольку $det\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} = a^2 + ab - b^2 \neq 0(mod\,p)$), откуда по свойству В2 леммы 1 $T(p)|(\alpha-\beta)$ и, следовательно, $t(p)|(\alpha-\beta)$.

Теперь докажем пункт В. Поскольку $G_1 \equiv G_{1+T'(d)}(mod\,d)$ и $G_2 \equiv G_{2+T'(d)}(mod\,d)$, то, по свойству Д2, $t(d)|T'(d)$.

Лемма доказана.

Далее, рассмотрим $A(d,u) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_d^2$, где a_k - количество членов конечной последовательности $G_1, G_2, \dots, G_u$, сравнимых с k по модулю d. Используя аппарат тригонометрических сумм, нетрудно вывести соотношение $A(d,u) = \frac{1}{d}\sum_{a=1}^{d}\left|\sum_{n=1}^{u} e^{2\pi i\frac{aG_n}{d}}\right|^2$.

Следующая теорема является конечной целью этой главы. Пусть, для краткости, $t(d) = t, T(d) = T, T^{'}(d) = T'$.

Теорема 6: Для $u \le T'$ имеет место оценка $A(d,u) \le B(d,u)$, где $B(d,u) =$

$$\begin{cases} 3u-2, \text{если } u < \sqrt{t}+1 \\ 7u^2 t^{-\frac{1}{4}}, \text{если } \sqrt{t}+1 \le u \le t^{\frac{3}{4}} \\ 14u^2 t^{-\frac{1}{8}}, \text{если } t^{\frac{3}{4}} < u \le T' \end{cases}$$

Если $u > T'$, то $A(d,u) \le 56u^2 t^{-\frac{1}{8}}$.

Доказательство: Для удобства разобьем доказательство на несколько шагов.

1. Зафиксируем $k, 1 \le k \le d$.

Пусть

$$1 \le j_1 < \cdots < j_{a_k} \le u$$

- все j, для которых $G_j \equiv k (mod\ d)$.

Обозначим

$$b_h = j_{h+1} - j_h, 1 \le h \le a_k - 1, b_h \ge 1.$$

Тогда

$$b_1 + \cdots + b_{a_k - 1} = j_{a_k} - j_1 \le u - 1.$$

Пусть

$$1 \le \rho_1 < \cdots < \rho_s$$

– все различные числа, встречающиеся в последовательности $b_1, \dots, b_{a_k-1}$. Имеем:

$$\sum_{v=1}^{s} c_v \rho_v \le u - 1, \sum_{v=1}^{s} c_v = a_k - 1.$$

2. Зафиксируем v.

Пусть

$$1 \le h_1 < \cdots < h_{c_v} \le a_k - 1$$

- все индексы h, такие, что $b_k = \rho_v$.

Согласно пункту Д2 леммы 2, поскольку

$$\begin{cases} G_{j_{h_i}} \equiv G_{j_{h_i+1}} (mod\ d) \\ G_{j_{h_{i+1}}} \equiv G_{j_{h_{i+1}+1}} (mod\ d) \end{cases}$$

и

$$j_{h_i+1} - j_{h_i} = j_{h_{i+1}+1} - j_{h_{i+1}},$$

то $t|\left(j_{h_i+1} - j_{h_i}\right)\left(j_{h_{i+1}} - j_{h_i}\right)$, откуда

$$\rho_v\left(j_{h_{i+1}} - j_{h_i}\right) \geq t$$

для всех $1 \leq i \leq c_v - 1$.

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{c_v-1} \frac{t}{\rho_v} \leq \sum_{i=1}^{c_v-1}\left(j_{h_{i+1}} - j_{h_i}\right) \leq u - 1,$$

и, значит,

$$c_v \leq \frac{(u-1)\rho_v}{t} + 1.$$

3. Итак, имеем:

$$\begin{cases} c_v \leq \frac{(u-1)\rho_v}{t} + 1 \\ \sum_{v=1}^{s} c_v\rho_v \leq u - 1 \cdot \\ a_k = 1 + \sum_{v=1}^{s} c_v \end{cases}$$

Пусть теперь $w(q)$ - количество таких v, что $c_v = q$.

Поскольку все ρ_v различны, то

$$u - 1 \geq \sum_{v=1}^{s} c_v\rho_v \geq \sum_{v:\, c_v=q} c_v\rho_v \geq q\left(1 + 2 + \cdots + w(q)\right),$$

откуда

$$w(q) \leq \left(\frac{2(u-1)}{q}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

С другой стороны,

$$u - 1 \geq \sum_{v=1}^{s} c_v\rho_v \geq \sum_{v=1}^{s} \frac{t(c_v-1)}{(u-1)} c_v\ ,$$

поэтому

$$\sum_{v=1}^{s} c_v(c_v - 1) \leq \frac{(u-1)^2}{t}.$$

4. а) Рассмотрим случай, когда $u < \sqrt{t} + 1$.
   Рассмотрим все пары индексов (n_1, n_2), такие, что

$$1 \leq n_1 < n_2 \leq u$$

и

$$G_{n_1} \equiv G_{n_2} (mod\ d).$$

Если среди них найдутся две различные пары (n_1, n_2), (n'_1, n'_2), для которых

$$n_2 - n_1 = n'_2 - n'_1,$$

то, согласно пункту Д2 леммы 2,

$$t | (n_2 - n_1)(n'_1 - n_1),$$

откуда

$$t \leq |(n_2 - n_1)(n'_1 - n_1)| \leq (u-1)^2 < t$$

- противоречие.

Значит, все разности индексов в таких парах различны. А теперь посчитаем количество всех таких пар, и, соответственно, всех разностей индексов в них. Таких разностей ровно $\sum_{k=1}^{d} \frac{a_k(a_k-1)}{2}$. Но всех возможных значений разности индексов в указанном промежутке ровно $u-1$.

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{a_k(a_k-1)}{2} \leq u-1,$$

откуда

$$A(d,u) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_d^2 \leq 3u - 2.$$

б) Теперь рассмотрим случай, когда $u \geq \sqrt{t} + 1$.

Тогда все

$$c_v \leq \frac{(u-1)}{\sqrt{t}} + 1,$$

откуда

$$s = \sum_{1 \leq q \leq \frac{u-1}{\sqrt{t}}+1} w(q) \leq \sum_{1 \leq q \leq \frac{u-1}{\sqrt{t}}+1} \left(\frac{2u-2}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \leq 4ut^{-\frac{1}{4}}.$$

Далее,

$$a_k = 1 + \sum_{v=1}^{s} c_v, \left(\sum_{v=1}^{s} c_v\right)^2 \leq s\left(\sum_{v=1}^{s} c_v^2\right) \leq \frac{s(u-1)^2}{t} + s\sum_{v=1}^{s} c_v,$$

отсюда

$$\left(\sum_{v=1}^{s} c_v - \frac{s}{2}\right)^2 \leq \frac{s^2}{4} + \frac{s(u-1)^2}{t}$$

и, значит,

$$\sum_{v=1}^{s} c_v \leq s + u\sqrt{\frac{s}{t}} \leq 4ut^{-\frac{1}{4}} + 2u^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{5}{8}}.$$

Получаем для всякого k:

$$a_k = 1 + \sum_{v=1}^{s} c_v \leq 5ut^{-\frac{1}{4}} + 2u^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{5}{8}}.$$

Имеем:

$$A(d,u) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_d^2 \leq (a_1 + \cdots + a_d) \cdot max a_k \leq u \cdot \left(5ut^{-\frac{1}{4}} + 2u^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{5}{8}}\right).$$

Согласно свойству Г леммы 2,

$$t \leq T' \leq T \leq 4t.$$

Тем самым, если $\sqrt{t} + 1 \leq u \leq t^{\frac{3}{4}}$,то

$$A(d,u) \leq u \cdot \left(5ut^{-\frac{1}{4}} + 2u^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{5}{8}}\right) \leq 7u^2t^{-\frac{1}{4}}.$$

Если же $t^{\frac{3}{4}} < u \leq T'$, то

$$A(d,u) \leq u \cdot \left(5ut^{-\frac{1}{4}} + 2u^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{5}{8}}\right) \leq 7u^{\frac{5}{2}}t^{-\frac{5}{8}} \leq 14u^2t^{-\frac{1}{8}}.$$

И, наконец, если $u > T$’, то, исходя непосредственно из определения $A(d,u)$, получаем:

$$A(d,u) \leq \left(\frac{u}{T'} + 1\right)^2 A(d,T') \leq 56u^2t^{-\frac{1}{8}}.$$

Теорема доказана.

Глава 3. Арифметические приложения

3.1

Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

- многочлен с целыми коэффициентами, T - натуральное число, p - простое число.

Обозначим через $N(f, p, T)$ количество решений сравнения

$$f(x) \equiv y (mod\ p)$$

в множестве

$$\{(x, y): 0 \leq x \leq p - 1, 0 \leq y \leq T - 1\}.$$

Используем следующую лемму [1]:

Лемма. Пусть

$$M = max\left\{\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{af(x)}{p}}\right| : a \in \{1,2, \dots, p - 1\}\right\}.$$

Тогда

$$N(f, p, T) = T + \theta M ln p,$$

где θ – вещественное число, $|\theta| \leq 1$.

Доказательство: Имеем:

$$N(f, p, T) = \sum_{y=0}^{T-1} \sum_{x=0}^{p-1} \frac{1}{p} \sum_{a=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{a(f(x)-y)}{p}}.$$

Следовательно,

$$N(f, p, T) = T + \frac{1}{p}\left|\sum_{a=0}^{p-1}\left(\sum_{y=0}^{T-1} e^{2\pi i \frac{-ay}{p}}\right)\left(\sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{af(x)}{p}}\right)\right|.$$

Отсюда

$$N(f, p, T) = T + \vartheta \frac{M}{p} \sum_{a=0}^{p-1}\left|\left(\sum_{y=0}^{T-1} e^{2\pi i \frac{-ay}{p}}\right)\right|,$$

где $|\vartheta| \leq 1$.

Известна оценка

$$\sum_{a=0}^{p-1} \left| \left(\sum_{y=0}^{T-1} e^{2\pi i \frac{-ay}{p}} \right) \right| \leq plnp.$$

Поэтому

$$N(f,p,T) = T + \theta Mlnp,$$

где $|\theta| \leq 1$, что и требовалось. Лемма доказана.

На основании этой леммы и оценок из первой главы тривиально получаются следующие теоремы.

Теорема 7. Пусть $p \geq 3$ - простое число, m, n, a, b – натуральные числа, $2 \leq n \leq p-1$, $m|n$, $m < n$, $(a,p) = (b,p) = 1$, $f(x) = ax^m + bx^n$.

Тогда

$$N(f,p,T) = T + \theta \left(\frac{n}{m} (m, p-1)^3 - 1 \right)^{1/4} p^{3/4} lnp,$$

где $|\theta| \leq 1$.

Теорема 8. Пусть $p \geq 3$ - простое число, $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + a_nx^n$ – многочлен с целыми коэффициентами, $1 \leq k < n \leq p-1$, $(k+1)|n$, $(a_1,p) = (a_2,p) = \cdots = (a_k,p) = (a_n,p)$.

Тогда

$$N(f,p,T) = T + \theta\big((k-1)!\,n\big)^{\frac{1}{2k+2}} p^{1-\frac{1}{2k+2}} lnp,$$

где $|\theta| \leq 1$.

Теорема 9. Пусть $p \geq 7$ - простое число, $p \equiv 3 (mod\ 4)$, a, b, n - натуральные числа, $3 \leq n \leq p-1$, $(a,p) = (b,p) = 1$, $\delta = (n-1,p)$, $f(x) = ax^n + bx^2$.

Тогда

$$N(f,p,T) = T + \theta \left(\sqrt{\frac{3+(-1)^n}{2\delta}} \right) plnp,$$

где $|\theta| \leq 1$.

Теорема 10. Пусть $p \geq 3$ - простое число,

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$$

и

$$g(x) = b_1x^{n_1} + \cdots + b_tx^{n_t}$$

- такие многочлены с целыми коэффициентами, что $p-1 \geq n_r > k$ и $(p-1, n_r, k) = 1$ при всех $1 \leq r \leq t$, $(a_k, p) = 1$, а $\delta_r = (p-1, n_r)$ при всех $1 \leq r \leq t$. Тогда

$$N(f+g,p,T) = T + \theta\left(\delta_1^{-\frac{1}{2}} + \delta_2^{-\frac{1}{4}} + \cdots + \delta_t^{-\frac{1}{2^t}} + \left(\frac{k-1}{\sqrt{p}}\right)^{-\frac{1}{2^t}}\right)plnp,$$

где $|\theta| \leq 1$.

Теорема 11. Пусть $p \geq 3$ – простое число, a, n - натуральные числа, причем $\frac{p-1}{n}$ – нечетное целое и $(a,p) = 1$, $f(x) = ax^n$.

Тогда

$$N(f,p,T) = T + \theta\frac{(2n-1)}{\sqrt{2p}}plnp,$$

где $|\theta| \leq 1$.

3.2

В 1934 году Н.П. Романов доказал [16], что сумма множества простых чисел и множества натуральных степеней фиксированного целого числа $a \geq 2$ образует множество положительной плотности (в смысле плотности по Шнирельману), иными словами,

$$\underline{lim}_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}card\{n: n \leq x, n = p + a^m\}\right) > 0$$

(через $cardX$ обозначено количество элементов множества X).

В дальнейшем были получены некоторые аналоги этой теоремы.

Например, в 1951 году П. Эрдеш [19] заменил в теореме Романова степени a^m значениями многочлена с целыми коэффициентами от степени, то есть $f(a^m)$, где f – не равный константе многочлен с целыми коэффициентами.

В.Н. Чубариковым была поставлена задача получения аналога теоремы Романова для чисел Фибоначчи. В своей работе К. Ли [22] приводит доказательство этого аналога. В декабре 2013 года (одновременно со статьей автора на близкую тематику) вышла статья А. Дубицкаса [18], в которой результат К. Ли обобщается на случай линейных рекуррент второго порядка специального вида.

Здесь мы приводим альтернативное доказательство аналога теоремы Романова на случай обобщенной последовательности Фибоначчи, используя оценку, полученную во второй главе. Доказательство в духе работы К. Ли [22] несколько более общей теоремы можно найти в статье А. Дубицкаса [18].

Теорема: Сумма множества простых чисел и множества членов наперед заданной обобщенной последовательности Фибоначчи имеет положительную плотность (по Шнирельману), то есть

$$\underline{lim}_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}card\{n: n\le x, n=p+G_m\}\right)>0.$$

Альтернативное доказательство: Наше доказательство будет проведено в духе доказательства теоремы Романова, приведенном на стр. 191-197 в [15]. Сформулируем несколько лемм из [15], которые нам понадобятся.

Лемма [15, с. 60]: Пусть b - четное целое ненулевое число. Имеет место оценка

$$card\{p: p\le x, |p+b| - \text{ простое}\}\le c_1\frac{x}{ln^2x}\prod_{p|b}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Здесь константа c_1 - абсолютная, то есть не зависит от b.

Лемма [15, с. 28]: Существует такая константа $c_2>0$, что

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=c_2 lnx+O(1).$$

Лемма (следствие из предыдущей леммы): Пусть p_n – n-ое простое число. Тогда

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)=O(lnN).$$

Лемма: Обозначим

$$f(n)=f(n,x)=card\{(p,G_m): p\le x, G_m\le x, p+G_m=n\}.$$

Если существует такая константа c_3, что для всех $x\ge x_0$ (то есть начиная с какого-то фиксированного x_0) справедливо неравенство

$$\sum_{n\le x} f^2(n,x)\le c_3\sum_{n\le x} f(n,x),$$

то существует такая константа $c_4>0$, что для всех $x\ge x_0$ справедливо неравенство

$$card\{n: n\le x, f(n,x)>0\}\ge c_4 x.$$

Доказательство (аналогично рассуждениям, приведенным в [15] на стр. 192): Имеем:

$$\sum_{n\le x} f(n,x)\ge card\left\{p: p\le\frac{x}{2}\right\}\cdot card\left\{G_m: G_m\le\frac{x}{2}\right\}\ge c_5\frac{x}{lnx}\cdot c_6 lnx=c_7x,$$

откуда из неравенства о среднем арифметическом и среднем квадратическом

$$\sum_{n\le x} f(n,x)\le(card\{n: n\le x, f(n,x)>0\})^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\le x} f^2(n,x)\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$(card\{n: n\le x, f(n,x)>0\})^{\frac{1}{2}}\cdot c_3^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{n\le x} f(n,x)\right)^{\frac{1}{2}},$$

следовательно, $card\{n: n\le x, f(n,x)>0\}\ge\frac{c_7}{c_3}x=c_4x$, что и требовалось. Лемма доказана.

Лемма 2.5: Ряд

$$\Sigma'_{d\ge 2}\frac{1}{d\big(t(d)\big)^{\varepsilon}},$$

где $\varepsilon>0$, сходится. Σ' означает суммирование по бесквадратным числам.

Доказательство (аналогично рассуждениям, приведенным в [15] на стр. 196):

Имеем:

$$\Sigma'_{d\geq 2}\frac{1}{d\big(t(d)\big)^{\varepsilon}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^{\varepsilon}}\Sigma'_{t(d)=n}\frac{1}{d}\right).$$

Пусть

$$c_n=\Sigma'_{t(d)=n}\frac{1}{d},$$

$$f(x)=x^{-\varepsilon},$$

$$C(x)=\sum_{2<n\leq x}\Sigma'_{t(d)=n}\frac{1}{d}.$$

Каждое d встречается в $C(x)$ не более одного раза, все $d|P$,

$$P=\prod_{2<n\leq x}F_n<2^{x^2},$$

отсюда

$$C(x)\leq \Sigma'_{d|P}\frac{1}{d}=\prod_{p|P}\left(1+\frac{1}{p}\right)\leq\prod_{n\leq x^2}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)=O(lnx)$$

Применяем преобразование Абеля (см., например, [2, с. 224]):

$$\Sigma'_{d\geq 2}\frac{1}{d\big(t(d)\big)^{\varepsilon}}=\lim_{X\to+\infty}\sum_{2<n\leq X}\left(\frac{1}{n^{\varepsilon}}\Sigma'_{t(d)=n}\frac{1}{d}\right)=$$

$$\lim_{X\to+\infty}\left(-\int_2^X\varepsilon x^{-1-\varepsilon}C(x)dx+C(X)X^{-\varepsilon}\right)=O(1).$$

Лемма доказана.

Итак, для фиксированных $m_1,m_2\geq 2$, таких, что $m_1\neq m_2$ и $G_{m_1},G_{m_2}\leq x$, получаем:

$$card\{(p_1,p_2):p_1,p_2\leq x,p_1-p_2=G_{m_2}-G_{m_1}\}\leq$$

$$c_1\frac{x}{ln^2x}\prod_{p|(G_{m_2}-G_{m_1})}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\leq c_8\frac{x}{ln^2x}g\big(G_{m_2}-G_{m_1}\big),$$

где

$$g(k)=\prod_{p|k}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Пусть теперь

$$S=S(x)$$

- число решений уравнения

$$p_1 - p_2 = G_{m_2} - G_{m_1}$$

в множестве

$$\{(p_1, p_2, G_{m_1}, G_{m_2}) : p_1, p_2, G_{m_1}, G_{m_2} \le x;\ m_1, m_2 \ge 2\},$$

а

$$U(x) = max\{n : G_n \le x\}.$$

Тогда

$$\sum_{n\le x} f^2(n,x) \le S(x) \le c_8 \frac{x}{ln^2 x} \sum_{m_1,m_2 \in [2,U(x)],\, m_1 \ne m_2} g(G_{m_2} - G_{m_1}) + c_9 x.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\sum_{m_1,m_2 \in [2,U(x)],\, m_1 \ne m_2} g(G_{m_2} - G_{m_1}) \le c_{10} ln^2 x.$$

Далее Σ' означает суммирование по бесквадратным числам (включая единицу, когда другое не оговорено), взаимно простых с числами a, b и с числом $(a^2 + ab - b^2)$.

Применяя теорему 6, находим, что

$$\prod_{p|ab(a^2+ab-b^2)} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \cdot \sum_{m_1,m_2 \in [2,U(x)],\, m_1 \ne m_2} g(G_{m_2} - G_{m_1}) \le$$

$$\sum_{m_1,m_2 \in [2,U(x)],\, m_1 \ne m_2} {\Sigma'}_{d|(G_{m_2} - G_{m_1})} \frac{1}{d} = {\Sigma'}_{d\le x} \frac{1}{d} \sum_{m_1,m_2 \in [2,U(x)],\, m_1 \ne m_2, d|(G_{m_2} - G_{m_1})} 1$$

$$\le {\Sigma'}_{d\le x} \frac{1}{d} A(d, U(x)) = (U(x))^2 + {\Sigma'}_{2\le d\le x} \frac{1}{d} A(d, U(x))$$

$$= (U(x))^2 + {\Sigma'}_{d:\,2\le d\le x, U(x) < \sqrt{t(d)}+1} \frac{1}{d} A(d, U(x))$$

$$+ {\Sigma'}_{d:\,2\le d\le x, U(x) \ge \sqrt{t(d)}+1} \frac{1}{d} A(d, U(x)) \le$$

$$(U(x))^2 + {\Sigma'}_{d:\,2\le d\le x, U(x) < \sqrt{t(d)}+1} \frac{1}{d} (3U(x) - 2)$$

$$+ {\Sigma'}_{d:\,2\le d\le x, U(x) \ge \sqrt{t(d)}+1} \frac{1}{d} 56 (U(x))^2 (t(d))^{-\frac{1}{8}} \le$$

$$\left(U(x)\right)^2 + 3U(x)\sum_{2\le d\le x}\frac{1}{d} + 56\left(U(x)\right)^2{\sum}'_{d\ge 2}\frac{1}{d\left(t(d)\right)^{\frac{1}{8}}} \le c_{11}ln^2x,$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Заключение

Как представляется, получение новых верхних оценок полных рациональных полиномиальных сумм с простым знаменателем сопряжено с поиском новых эвристических трюков. В этом смысле яркими работами являются статьи Акулиничева Н. М. [1] и Карацубы А. А. [10]. Доказательства теорем 1, 2, 3, 4 в первой главе основаны на идеях этих авторов.

Возможно, открыть новые горизонты в этой тематике могло бы помочь изучение нижних оценок таких сумм. Тем не менее, на сегодняшний день наилучшим результатом здесь является оценка Карацубы А. А. 1967-го года, центральным моментом доказательства которого является остроумное применение принципа Дирихле.

Теорема [10]: Для любого числа $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ существует бесконечная последовательность простых чисел p и последовательность многочленов $f_n(x)$ степени n, причем

$$\frac{1}{2}\frac{p-1}{\log p}\log\frac{1}{\varepsilon} \leq n \leq \frac{p-1}{\log p}\log\frac{1}{\varepsilon},$$

таких, что

$$S(f_n) = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f_n(x)}{p}} = p\left(1 + \frac{2\pi\varepsilon}{1-\varepsilon}\theta\right),$$

где $|\theta| \leq 1$.

Приведенная во второй главе оценка среднего квадратического сумм по обобщенным числам Фибоначчи в определенной степени отражает арифметические свойства указанной последовательности, что позволяет использовать ее для решения аддитивных задач, что продемонстрировано в третьей главе, посвященной приложениям.

Результат, альтернативное доказательство которого дано в этой главе, имеет свою историю. После классической теоремы Романова 1934-го года [16] ряд авторов опубликовали ее аналоги. В 2010-ом году, спустя 59 лет с появления первой такой работы, а именно, работы Эрдеша [19], содержащей аналог теоремы Романова для значений фиксированного многочлена от степени, вышла статья К. Ли [22] с аналогом теоремы для чисел Фибоначчи. Постановка этой задачи принадлежит В. Н. Чубарикову. В декабре 2013 года, одновременно с работой автора диссертации, содержащей доказательство теоремы для обобщенных чисел Фибоначчи, появилась статья А. Дубицкаса [18], в которой рассматриваются линейные рекурренты второго порядка специального вида.

Похоже, что верно следующее обобщение этих результатов.

Гипотеза: Пусть (z_m) - линейная рекуррента l-го порядка, то есть $z_1, \dots, z_l$ – целые числа и $z_m = a_1 z_{m-1} + \dots + a_l z_{m-l}$ при $m > l$, где $a_1, \dots, a_l$ - целые числа, причем $\lim_{m \to +\infty} z_m = +\infty$. Тогда

$$\underline{lim}_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} card\{n: n \leq x, n = p + z_m\} \right) > 0.$$

Однако, такой результат потребует более глубокого изучения арифметики линейных рекуррент.

Список литературы

1. *Акулиничев Н. М.* Оценки рациональных тригонометрических сумм специального вида // Доклады АН СССР. 1965. Т. 161. N4. С. 743-745.
2. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. Москва: Высшая школа, 1999. С. 224.
3. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. Москва: Наука, 1985. С. 16-25.
4. *Бояринов Р. Н.* О распределении значений сумм, связанных с быстрорастущими последовательностями // Вестник МГУ. Серия математика, механика. 2003. N2. С. 57-58.
5. *Бояринов Р. Н., Чубариков В. Н.* О распределении значений функций на последовательности Фибоначчи // Доклады АН. 2001. Т. 379. N1. С. 9-11.
6. *Виноградов И. М.* Избранные труды. Москва: Изд-во АН СССР, 1952.
7. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. Москва: Наука, 1971.
8. *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. Москва: Наука, 1978. С. 7-140.
9. *Гашков С. Б., Чубариков В. Н.* Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. Москва: Дрофа, 2005. С. 55-59.
10. *Карацуба А. А.* Об оценках полных тригонометрических сумм // Математические заметки. 1967. Т. 1. N2. С. 199-208.
11. *Коробов Н. М.* Тригонометрические суммы и их приложения. Москва: Наука, 1989. С. 70-78.
12. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Основы алгебры. Москва: Физматлит, 2004.
13. *Минеев М. П.* Метрическая теорема о тригонометрических суммах с быстрорастущими функциями // Успехи математических наук. 1959. Т. 14. В. 3. С. 169-171.
14. *Постников А. Г.* Об очень короткой показательной рациональной тригонометрической сумме // Доклады АН. 1960. Т. 133. N6. С. 1298-1299.

15. *Прахар К.* Распределение простых чисел. Москва: Мир, 1967.
16. *Романов Н. П.* Uber einige Satze der additiven Zahlentheorie // Mathematische Annalen. 1934. 109. P. 668-678.
17. *Хуа Ло Кен.* Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. Москва: Мир, 1964.
18. *Dubickas A.* Sums of Primes and Quadratic Linear Recurrence Sequences // Acta Mathematica Sinica, English Series, Dec., 2013, Vol. 29, N 12, pp. 2251-2260.
19. *Erdos P.* On some problems of Bellman and a theorem of Romanoff // Journal of Chinese Mathematical Society. 1951. 1.
20. *Hua Loo Keng.* Introduction to Number Theory. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1982.
21. *Konyagin S. V., Shparlinski I.* Character sums with exponential functions and their applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
22. *Lee K. S. Enoch.* On the sum of a prime and a Fibonacci number // International Journal of Number Theory, 2010, Vol. 6, N 7, pp. 1-8.
23. *Schinzel A.* Special Lucas Sequences, Including the Fibonacci Sequence, Modulo a prime // Baker A., Bollobas B., Hajnal A. (Eds.) A tribute of Paul Erdos. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. P. 349-357.
24. *Somer L.* Distribution of Residues of Certain Second-Order Linear Recurrences Modulo p // Berum G. E., Philippou A. N., Horadam A. F. (Eds.) Applications of Fibonacci Numbers. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. Vol. 3. P. 311-324.
25. *Weil A.* On some exponential sums // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. 1948. 34. N5. P. 204-207.

Работы автора по теме диссертации

26. *Васильев А. Н.* Оценки полных рациональных тригонометрических сумм с простым знаменателем, Вестник МГУ, Сер. 1, Математика. Механика, 2014, №2, с. 56-60.
27. *Васильев А. Н.* Об арифметических свойствах обобщенной последовательности Фибоначчи и их следствиях, Известия СГУ, Нов. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2013, Т. 13, вып. 4, ч. 2, с. 34-41.
28. *Васильев А. Н.* Оценки полных рациональных тригонометрических сумм, сборник докладов международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2009» (Астана, 10-12 апреля 2009 г.), с. 19-20.